بسم الله الرحمن الرحيم

تحلیل ماتریسی سازه ها

Matrix Structural Analysis

کریم عابدی

فصل اول: کلیات

فصل اول – کلیات

(۱) مفاهیم پایه در ارتباط با تحلیل سازه ها

الف) تعریف سازه (structure):

- سازه عبارت است از یک عضو و یا مجموعه‌ای از اعضاء که به‌منظور تحمل و انتقال نیرو بکار می‌رود.
- یک سازه مهندسی به هر مجموعه ای از اعضاء اطلاق می شود که برای تحمل و انتقال مطمئن نیروهای وارده به کار گرفته می شود.
- بنابراین به سازه های مهندسی نیروهای گوناگونی وارد می گردد و این دستگاه ها باید بتوانند آن نیروها را تحمل و منتقل نمایند.
- بنابراین کار اصلی سازه، انتقال نیروهای مؤثربرآن به نقاط تکیه‌گاهی به‌نحوی امن و اقتصادی می باشد.

فصل اول – کلیات

(۱) مفاهیم پایه در ارتباط با تحلیل سازه ها

الف) تعریف سازه (structure):

ب) تحلیل سازه (Structural Analysis) چیست؟

– تحلیل سازه ها شاخه‌ای‌از علوم فیزیکی‌است که عمل نیروها را بر روی سازه‌ها مورد بررسی قرار می‌دهد. بنابراین تأثیر و نحوه انتقال نیروهای مؤثر بر سازه ها که توسط اجزاء سازه از نقاط تأثیر به تکیه گاه ها هدایت می گردند، توسط علم تحلیل سازه ها مورد بررسی و مطالعه قرار می گیرد.

– از یک دیدگاه دیگر می توان گفت که تحلیل سازه ها شاخه ای از علوم فیزیکی است که توسط آن رفتار سازه تحت شرایط مورد نظر مورد بررسی و مطالعه قرار می گیرد.

فصل اول – کلیات

(۱) مفاهیم پایه در ارتباط با تحلیل سازه ها

الف) تعریف سازه (structure):

ب) تحلیل سازه (Structural Analysis) چیست؟

پ) سه جنبه اساسی رفتار سازه ای:

۱- مشخصات تنش، کرنش و تغییرشکل ناشی از بارگذاری استاتیکی یا نیمه استاتیکی یا شرایط تغییر شکل

(Stress, strain and deflection characteristics under static or quasi-static loading or deformation conditions)

۲- مشخصات پاسخ ارتعاشی حاصل از شرایط بارگذاری دینامیکی

(Vibrational response characteristics under dynamic loading conditions)

۳- مشخصات کمانشی ناشی از شرایط بارگذاری استاتیکی یا دینامیکی

(Buckling characteristics under static or dynamic loading conditions)

جنبه اول: حوزه عمل تحلیل سازه ها

جنبه دوم: حوزه عمل دینامیک سازه ها (Dynamics of structures)

جنبه سوم: حوزه عمل پایداری سازه ها (Stability of structures)

فصل اول – کلیات

(۱) مفاهیم پایه در ارتباط با تحلیل سازه ها

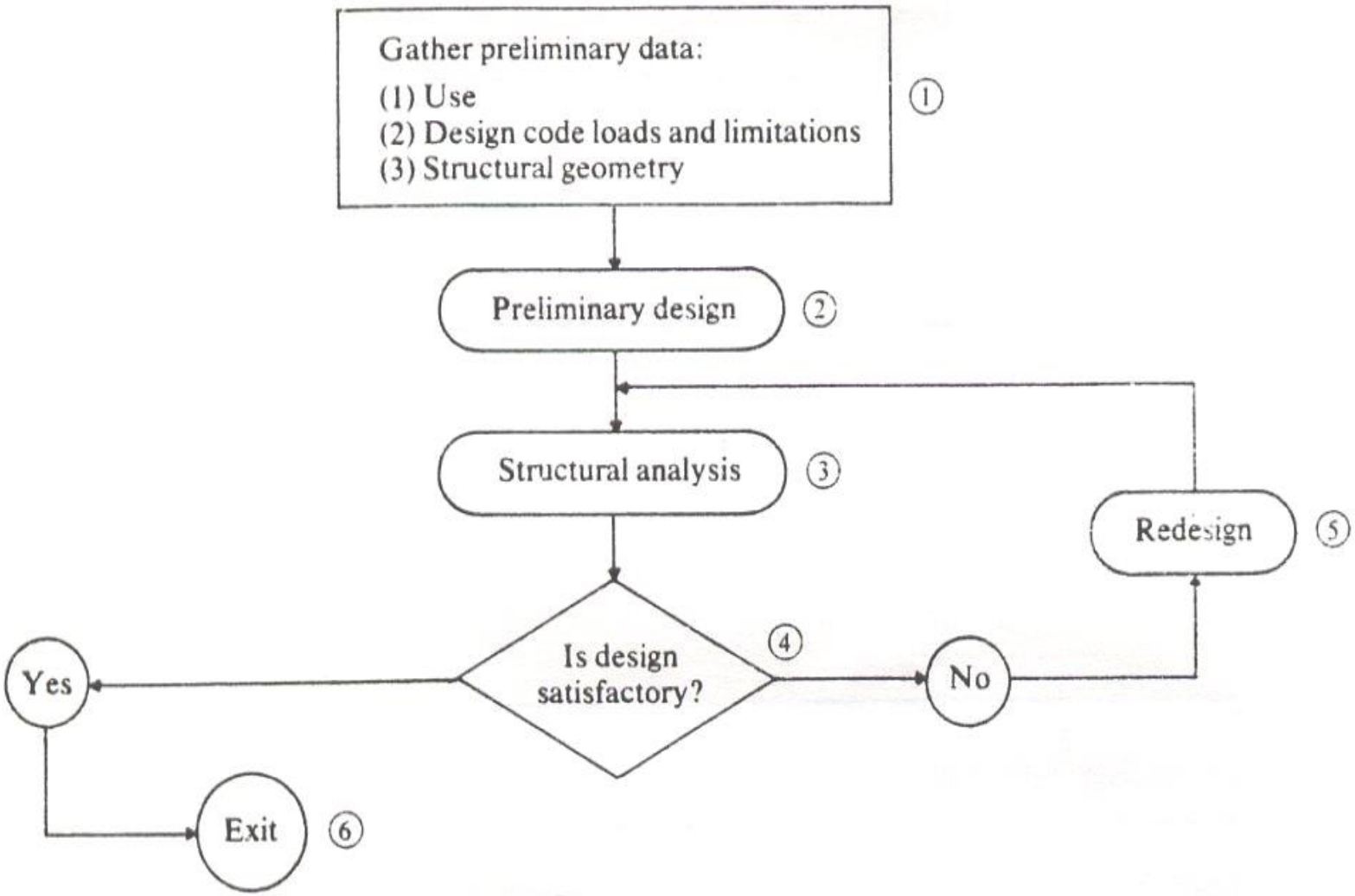
الف) تعریف سازه (structure):

ب) تحلیل سازه (Structural Analysis) چیست؟

پ) سه جنبه اساسی رفتار سازه ای:

ت) تحلیل سازه ها و طراحی سازه ها (Structural Design):

- تحلیل سازه ها مقدمه ای است برطراحی سازه ها
- تحلیل سازه ها وسیله ای است برای نیل به هدف نهایی که عبارت است از طرح یک سازه پایدار (stable) و مقاوم (resistant-with strength) و کارا (efficient) و اقتصادی (Economical) و زیبا (aesthetical) و ایمن (safe).
- فلوچارت تحلیل و طراحی سازه ای.



Flow diagram of the structural analysis and design sequence.

فصل اول – کلیات

(۱) مفاهیم پایه در ارتباط با تحلیل سازه ها

الف) تعریف سازه (structure):

ب) تحلیل سازه (Structural Analysis) چیست؟

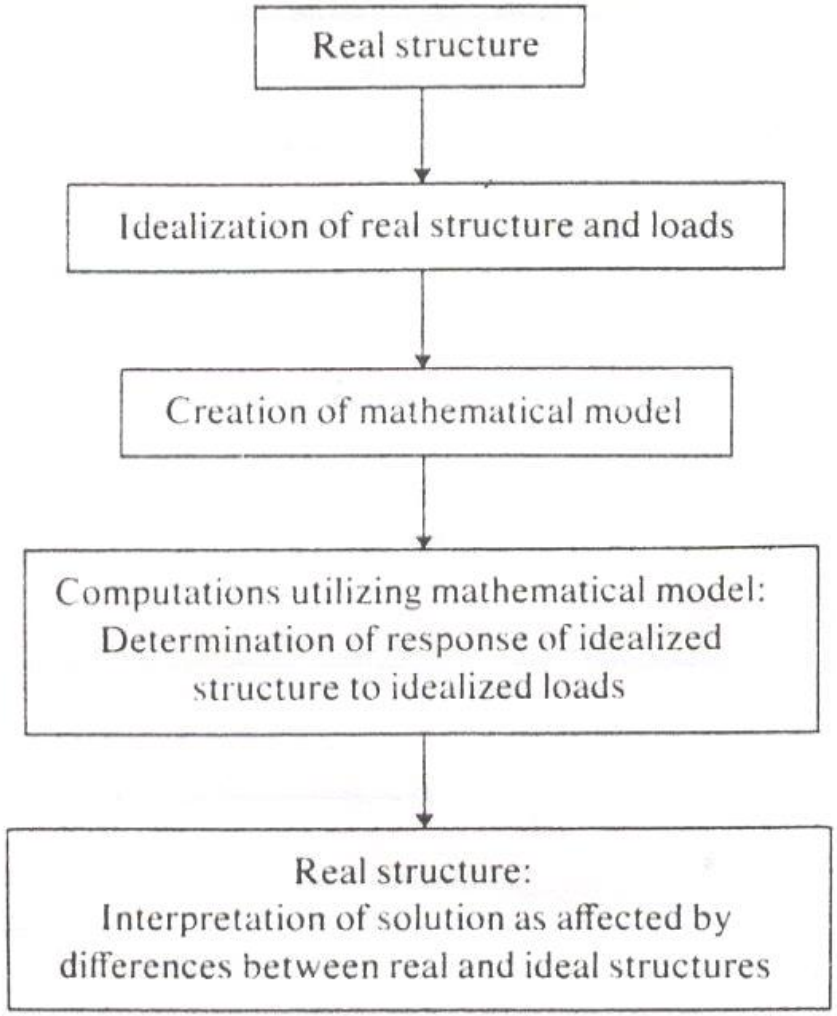
پ) سه جنبه اساسی رفتار سازه ای:

ت)تحلیل سازه ها و طراحی سازه ها (Structural Design):

ث) ایده‌ال‌سازی سازه‌ای (Structural Idealization) و مدل‌سازی ریاضی (Mathematical Modeling)

در تحلیل سازه ها از مدل ریاضی یک سازه ایده آل سازی شده استفاده می شود.

- فلوچارت ایده آل سازی سازه ای و مدل سازی ریاضی .



Flow diagram for structural idealization and mathematical modeling.

- سازه واقعی (Real structure) می تواند سازه موجود یا سازه ای باشد که باید طراحی شود.
- برای ایجاد یک سازه ایده ال سازی شده اطلاعات کافی باید در مورد سازه واقعی در دست باشد.
- ایده ال سازی سازه ای مبتنی بر فرض هایی در ارتباط با نمایش اعضاء، تکیه گاه ها، گره ها و بارها و رفتار مصالح است.
  - ✓ فرض ها باید مبتنی بر شناخت کافی از خصوصیات و ویژگی های اصلی سازه واقعی باشند.
  - ✓ فرض ها بستگی به اهداف مورد نظر تحلیل سازه واقعی مورد نظر دارد.
  - ✓ سلسله مراتب در سازه های ایده ال سازی شده (concept of Hierarchy)
- با در دست داشتن سازه ایده ال سازی شده، یک مدل ریاضی ایجاد می شود که شامل معادلات ریاضی می باشد که سازه و بارهای ایده ال سازی شده را توصیف می نماید.

❖ در مدل ریاضی سه نکته حائز اهمیت است:
- نوع معادلات
- نحوه ایجاد معادلات
- نحوه محل معادلات

❖ وجوه تمایز روش های مختلف تحلیل سازه ها:
- نحوه ایده ال سازی سازه ای
- نحوه مدل سازی ریاضی (نوع معادلات و شیوه ایجاد و روش حل آنها)

فصل اول – کلیات

(۱) مفاهیم پایه در ارتباط با تحلیل سازه ها
(۲) فلسفه پیدایش تحلیل ماتریسی سازه ها

– موجودیت یافتن روش های کامپیوتری تحلیل سازه ها مدیون دو عامل مهمی می باشد که در طی دهه های ۱۹۵۵–۱۹٤۵ به وقوع پیوستند:

الف) نیاز روزافزون به روش های بهتر و مطلوب تر تحلیل سازه ها

طراحی های سازه ای در بسیاری از زمینه های مهندسی به حدی پیچیده شدند که روش های موجود ناکارایی خود را برای تحلیل آن سیستم های پیچیده به اثبات رساندند.

ب)پیدایش کامپیوترهای دیجیتالی (در اواخر دهه ۱۹٤۰)

– از طرف دیگر مدت های مدیدی بود که مفاهیم و سیستم علائم جبر ماتریسی به عنوان ابزارهای استاندارد تحلیلی در ریاضیات کاربردی (Applied Mathematics) مورد استفاده قرار می گرفتند. در سال های قبل از ۱۹٤۰ مقالاتی چند منتشر شدند که در آنها از مفاهیم مزبور در حل مسائل مربوط به سازه ها استفاده شده بود، ولی به علت عدم وجود کامپیوتر در آن زمان، این عمل از طرف مهندسین که در اثر پیدایش روش توزیع لنگر (Moment Distribution) به تازگی از گرفتاری های محاسبات دستی کسل کننده رهایی یافته بودند، کمتر مورد استقبال قرار گرفت، زیرا احتیاج به عملیات ماتریسی زیاد و ماهرانه داشت.

– پیدایش کامپیوتر، معیارهای قضاوت درباره «**خوب**» یا «**بد**» بودن یک روش تحلیلی را تغییر داد. در مواجهه با یک روش تحلیلی، دیگر سئوال این نبود که «آیا این روش حجم عملیات عددی را به حداقل می رساند یا نه؟»، بلکه مسأله به این صورت در ذهن ها شکل گرفت که « آیا این روشی است که بتوان آن را به سادگی به صورت یک برنامه کامپیوتری تنظیم کرد یا نه؟»

– حقیقت این است که روش‌های مبتنی بر جبر ماتریسی (Matrix Algebra) از این نظر در حد ایده ال هستند.

– روش های تحلیل ماتریسی سازه ها براین مفهوم بنا شده اند که سازه واقعی را با مدلی ریاضی، شامل اجزایی با خواص مشخص، که بتوان آنها را به فرم ماتریسی درآورد، جایگزین می نماییم.

– **به عبارت دیگر وجه تمایز «روش تحلیل ماتریسی سازه ها» و روش های کلاسیک تحلیل سازه ها در دو عامل است:**

- نحوه مدل سازی ریاضی (با استفاده از ماتریس ها)
- نحوه حل مدل ریاضی (با استفاده از کامپیوتر)

– لازم به ذکر است که نیاز به استفاده از روش های ماتریسی به منظوره تحلیل ساده سازه ها نبوده و مسائلی نظیر بهینه سازی (optimization) طرح سازه، از نظر وزن، فرم، هندسه و در نظر گرفتن رفتار غیرخطی سازه‌ها از نظر مصالح و شکل هندسی (Material and Geometic Nonlinearity) و بررسی پایداری و بالاخره تحلیل دینامیکی سازه ها، لزوم ابداع و استفاده و گسترش آنها را روشن می سازد.

فصل اول – کلیات

(۱) مفاهیم پایه در ارتباط با تحلیل سازه ها
(۲) فلسفه پیدایش تحلیل ماتریسی سازه ها
(۳) حوزه کاربرد روش تحلیل ماتریسی سازه ها

- سازه ها معمولا به چهار گروه تقسیم می گردند:

الف) سازه های قاب بندی شده (Framed structures)

این نوع سازه ها غالباً مجموعه ای از میله ها و یا اعضای سبک هستند که به وسیله اتصالات مناسبی به یکدیگر متصل شده اند. پایداری این قبیل سازه ها بستگی به ترکیب هندسی اجزاء آنها داشته و معمولاً وزن مجموعه در مقایسه با بارهای اعمال شده کوچک می باشد (نظیر قاب های چوبی، فلزی و بتنی ساختمان ها، ساختمان جرثقیل، قاب بندی بدنه کشتی ها، هواپیماها).

فصل اول – کلیات

(۱) مفاهیم پایه در ارتباط با تحلیل سازه ها
(۲) فلسفه پیدایش تحلیل ماتریسی سازه ها
(۳) حوزه کاربرد روش تحلیل ماتریسی سازه ها

- سازه ها معمولا به چهار گروه تقسیم می گردند:

الف) سازه های قاب بندی شده (Framed structures)

ب) سازه های وزنی (Mass structures)

پایداری و مقاومت این نوع سازه ها در مقابل بارهای وارده بستگی به وزن آنها دارد (نظیر دیوارهای حائل، سدهای وزنی و ...).

فصل اول – کلیات

(۱) مفاهیم پایه در ارتباط با تحلیل سازه ها
(۲) فلسفه پیدایش تحلیل ماتریسی سازه ها
(۳) حوزه کاربرد روش تحلیل ماتریسی سازه ها

- سازه ها معمولا به چهار گروه تقسیم می گردند:

الف) سازه های قاب بندی شده (Framed structures)

ب) سازه های وزنی (Mass structures)

پ) سازه های پوسته ای (Shell structures) و غشایی (Membrane structures)

این نوع سازه ها از صفحات فلزی یا دال های بتنی ها و یا غشاهای پلیمری تشکیل یافته اند (نظیر منابع ذخیره مایعات، مخازن تحت فشار، سیلوها، سدهای پوسته ای، سازه های پیله ای و ..).

فصل اول – کلیات

(۱) مفاهیم پایه در ارتباط با تحلیل سازه ها
(۲) فلسفه پیدایش تحلیل ماتریسی سازه ها
(۳) حوزه کاربرد روش تحلیل ماتریسی سازه ها

- سازه ها معمولا به چهار گروه تقسیم می گردند:

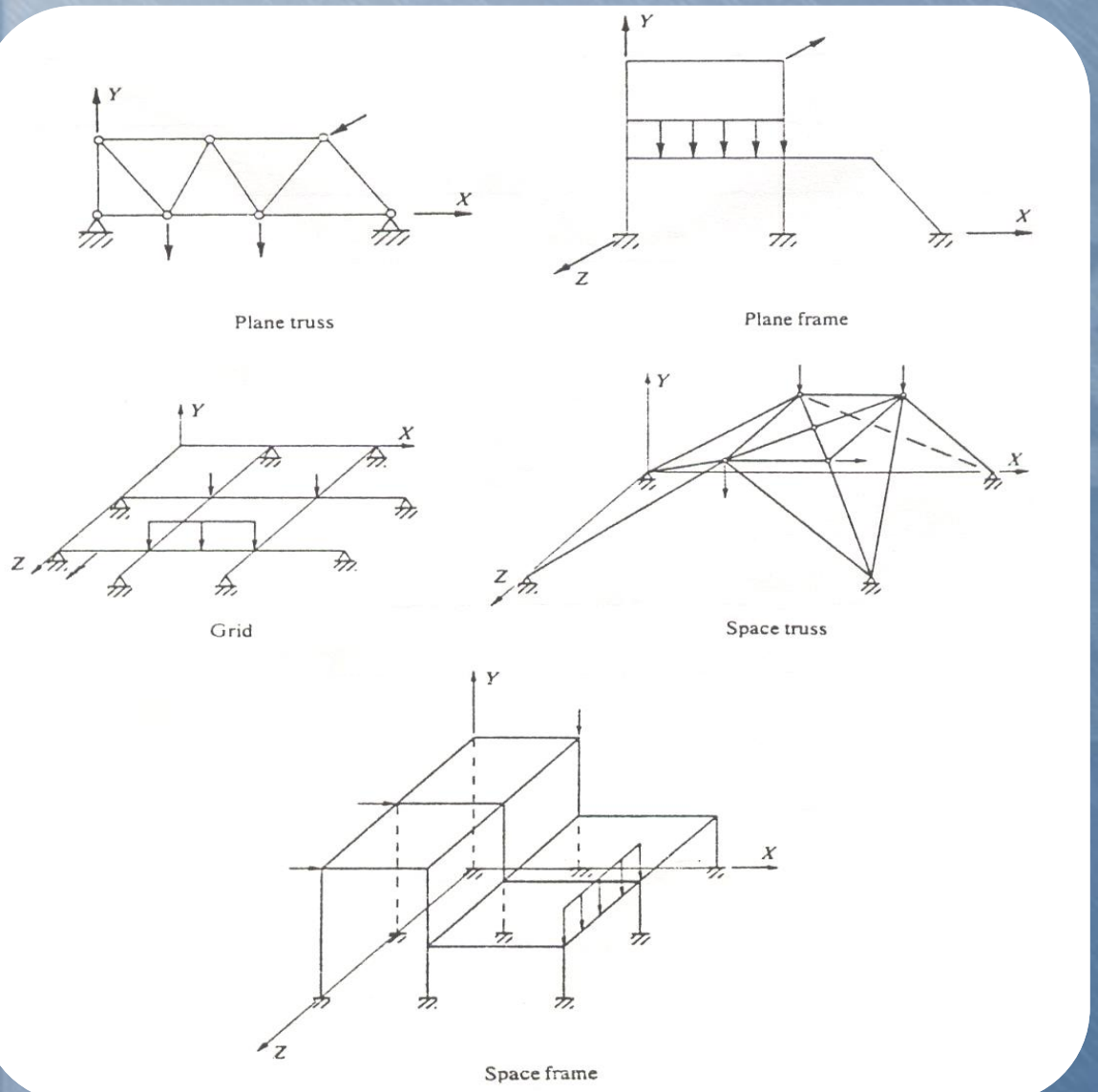
الف) سازه های قاب بندی شده (Framed structures)

ب) سازه های وزنی (Mass structures)

پ) سازه های پیوسته ای (shell structures) و غشایی (Membrane structures)

ت) سازه های مرکب (ترکیبی از سازه های قاب بندی شده و پوسته ای)

- حوزه عمل و کاربرد روش‌های تحلیل ماتریسی سازه‌ها (که در این درس ارائه خواهد شد)، سازه های قاب بندی شده می باشد. که خود به پنج دسته تقسیم می شوند (خرپای مسطح، قاب مسطح، شبکه، خرپای فضایی، قاب فضایی)



- روش عناصر محدود از بسط روش های ماتریسی تحلیل سازه های قاب بندی شده یا اسکلتی (skeletal structures) به تحلیل سازه های پیوسته (continuum structures) نتیجه می شود.

-در روش عناصر محدود، محیط پیوسته به صورت مجموعه ای از عناصر جداگانه که در نقاط گرهی به همدیگر متصل هستند مدل سازی می شود.

فصل اول – کلیات

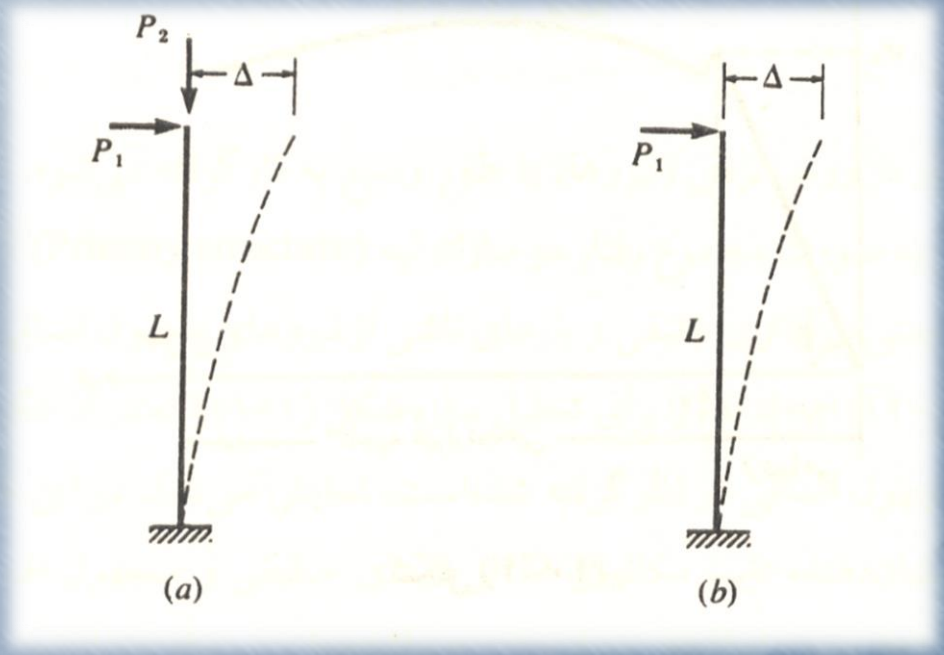
(۱) مفاهیم پایه در ارتباط با تحلیل سازه ها

(۲) فلسفه پیدایش تحلیل ماتریسی سازه ها

(۳) حوزه کاربرد روش تحلیل ماتریسی سازه ها

(٤) فرض های اصلی در تحلیل ماتریسی سازه ها

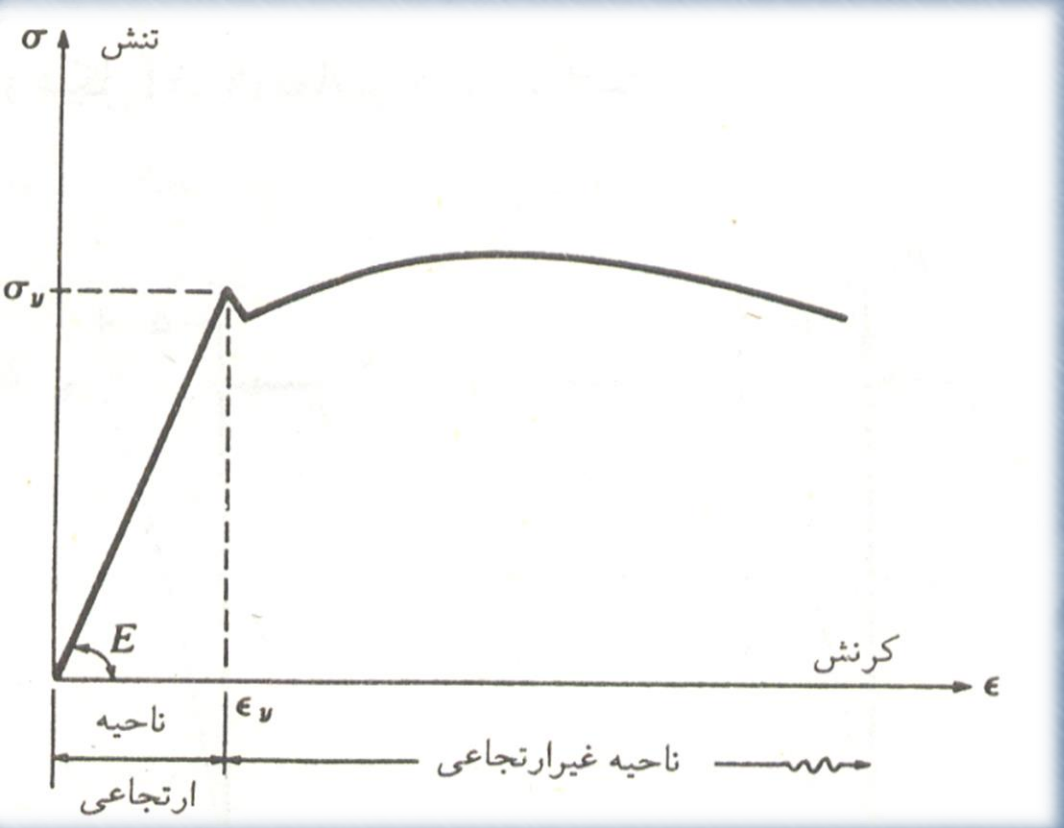
الف)تئوری تغییر شکل های کوچک (Small Displacement Theory)



– فرض می شود که تحت اثر بارهای وارده هندسه یک سازه به مقدار قابل ملاحظه ای تغییر نمی کند.

لنگر در پای ستون	$P_1L + P_2\Delta$:	فرض تغییر شکل های بزرگ
لنگر در پای ستون	$P_1L \quad P_1L \gg P_2\Delta$:	فرض تغییر شکل های کوچک

ب) رفتار خطی مصالح (Linear Behavior of Material)



- فرض مذکور بیانگر این واقعیت است که در هیچ کدام از مقاطع سازه، تنش و یا کرنش نباید از مقادیر مربوط به نقطه تسلیم (yield point) این مصالح فزونی یابد.

- بحثی در مورد Geometric Nonlinearity و Material Nonlinearity.

بر مبنای دو فرض "تغییر شکل های کوچک و رفتار خطی مصالح" اصلی پدید می آید که به آن اصل جمع آثار قوا (principle of superposition) اطلاق می شود. اصل مذکور بیانگر آن است که پاسخ یک سازه به مجموعه ای از بارهای وارده، مستقل از ترتیب اعمال آن بارها است، به عبارت دیگر ترتیب اثر بارها، نتایج نهایی را تغییر نمی دهد.

- فرض می شود که رابطه بار - تغییر مکان، خطی است.

- اگر بار در α ضرب شود، تغییر مکان نیز در α ضرب خواهد شد.

فصل اول – کلیات

(۱) مفاهیم پایه در ارتباط با تحلیل سازه ها
(۲) فلسفه پیدایش تحلیل ماتریسی سازه ها
(۳) حوزه کاربرد روش تحلیل ماتریسی سازه ها
(٤) فرض های اصلی در تحلیل ماتریسی سازه ها
(٥) اصول اساسی در تحلیل ماتریسی سازه ها

الف) اصل تعادل (Principle of Equilibrium)

- عامل مهمی که در استخراج معادلات حاکم بر رفتار سازه تأثیر به سزایی دارد، اصل تعادل است (تعادل استاتیکی). در تحلیل ماتریسی اصل تعادل در سه رده (یا سطح) مطرح می شود:

۱- تعادل سازه (Equilibrium of structure)

اصل تعادل تضمین می کند که سازه در حال تعادل است. به عبارت دیگر:

$$\sum P_x = 0, \quad \sum M_x = 0$$
$$\sum P_y = 0, \quad \sum M_y = 0$$
$$\sum P_z = 0, \quad \sum M_z = 0$$

۲- تعادل گره (Equilibrium of Node)

- اصل تعادل تضمین می کند که کلیه گره های سازه ها در حال تعادل هستند.

$$-\sum_{j=1}^{m} P_{ij} + P_i = 0$$

P_i : نیروهای تعمیم یافته (Generalized Forces) موثر خارجی در گره i

P_{ij}: نیروهای داخلی حاصل از بارهای خارجی در انتهای i از عضو ij

۳- تعادل عضو (Equilibrium of Member)

$$P_{ij} + h_{ji} P_{ji} = 0$$

-اصل تعادل تضمین می کند که کلیه اعضای سازه در حال تعادل هستند:

P_{ij} : نیروهای داخلی حاصل از بارهای خارجی در انتهای i از عضو ij

P_{ji} : نیروهای داخلی حاصل از بارهای خارجی در انتهای j از عضو ij

h_{ji} : ماتریس انتقال که نیروها را از یک انتهای عضو به انتهای دیگر منتقل می کند.

ب) اصل سازگاری (Principle of Compatibility)

- عامل مهم دیگری که در استخراج معادلات حاکم بر رفتار سازه تأثیر به‌سزایی دارد، اصل سازگاری است. براساس این اصل، تغییر شکل‌ها و در نتیجه تغییر مکان‌ها در هر نقطه سازه پیوسته بوده و منحصر به فرد است.
- اصل سازگاری ایجاب می کند که:

۱) کلیه اعضائی که قبل از بارگذاری به یک گره متصل شده‌اند، بعد از تغییر شکل سازه – تحت اثر بار وارده– نیز به همان گره، باید متصل باقی بمانند.

۲) انتهاهای کلیه اعضایی که به صورت صلب به هم دیگر متصل شده اند، باید تغییر شکل یکسانی را دارا باشند.

- به عبارت دیگر فرض کنید که چند عضو به صورت صلب (Rigid) به یکدیگر متصل شده باشند. پس از بارگذاری فرض شود که این گره (i) به اندازه Δ_i تغیر مکان یابد.

شرط ارضائ سازگاری عبارت است از:

$$\Delta_{ij} = \Delta_{ia} = \Delta_{ib} = \Delta_i$$

Δ_{ij} : تغییر مکان انتهای i از عضو ij

– البته اگر اعضا بصورت نیمه گیردار (Semi-Rigid) و یا مفصل‌های بدون اصطکاک (Frictionless pin) به همدیگر متصل شده باشند، طبیعی است که مؤلفه دوران شرط سازگاری در رابطه فوق صادق نخواهد بود.

فصل اول – کلیات

(۱) مفاهیم پایه در ارتباط با تحلیل سازه ها
(۲) فلسفه پیدایش تحلیل ماتریسی سازه ها
(۳) حوزه کاربرد روش تحلیل ماتریسی سازه ها
(٤) فرض های اصلی در تحلیل ماتریسی سازه ها
(٥) اصول اساسی در تحلیل ماتریسی سازه ها
(٦) مفاهیم، اصول، قضایا و قوانین انرژی مورد استفاده درتحلیل ماتریسی سازه ها

الف) مفهوم کار خارجی (External work)

-کار یک نیرو به صورت حاصل ضرب مقدار نیرو در فاصله ای که در امتداد خودش جابجا می‌شود، تعریف می گردد.

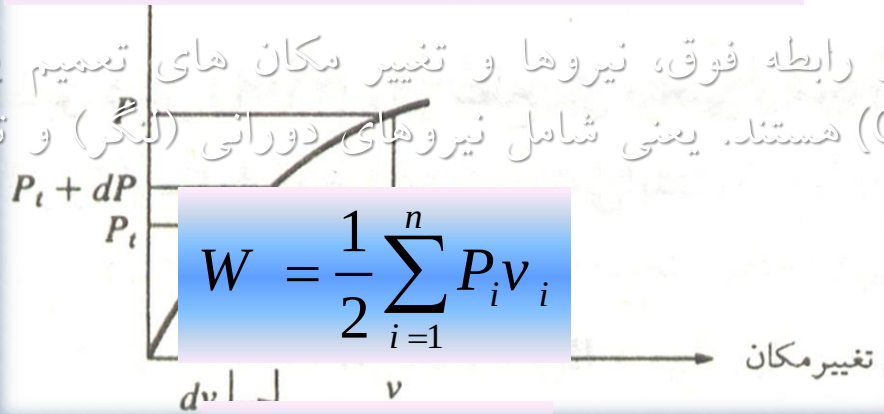
- فرض کنید که یک جسم تحت اثر نیروی(P) قرار دارد که به تدریج افزایش می یابد. V تغییر مکان نقطه اثر نیرو را در امتداد نیرو نشان دهد. با این فرض که امتداد بار در جریان بارگذاری تغییر نمی کند، در این صورت کار انجام شده از رابطه زیر حاصل می شود:

- برای جسم ارتجاعی خطی داریم:

$$P = cv, \quad c = const.$$

$$W = \int_0^V cv\, dv = cv^2/2 = \frac{1}{2}Pv$$

- جملات مربوط به نیرو و تغییر مکان در رابطه فوق، نیروها و تغییر مکان های تعمیم یافته (Generalized displacements and forces) هستند. یعنی شامل نیروهای دورانی (لنگر) و تغییر مکان های زاویه ای (دوران) نیز می باشند:



$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} P_i v_i$$

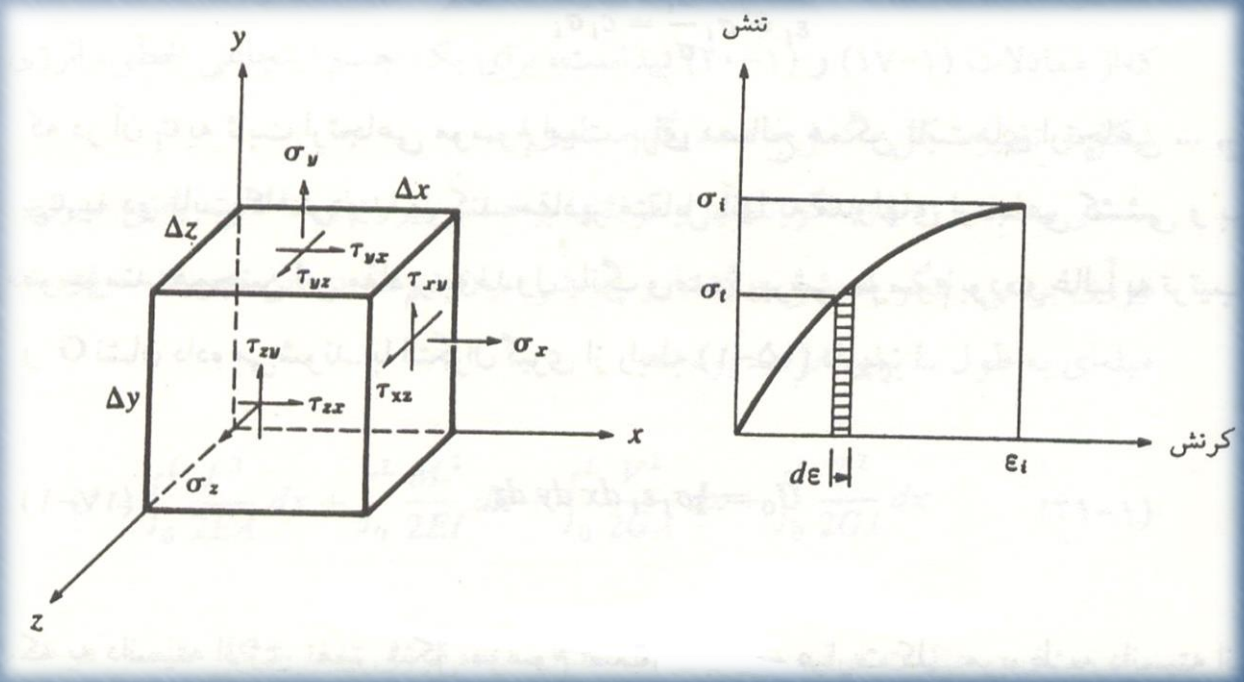
- به صورت برداری داریم:

$$W = \frac{1}{2}P^T v$$

ب)مفهوم انرژی تغییر شکل (کار داخلی توسط تنش ها)

- وقتی یک جسم ارتجاعی تحت اثر یک سری نیروهای خارجی قرار می گیرد، در جسم تنش هایی ایجاد می شوند و طی تغییر شکل، این تنش ها کار انجام می دهند. این کار معمولاً به انرژی تغییر شکل (انرژی داخلی) جسم موسوم است.

- یک عنصر کوچک را که تنش هایی بر روی آن اثر می کنند مطابق شکل زیر در نظر بگیرید. در خلال بارگذاری استاتیکی بر روی جسم، این تنش ها از مقدار صفر شروع و به تدریج به مقدار نهایی خود می رسند. در ضمن عنصر تدریجاً شکل داده و به حالت نهایی در می آید.



در خلال تغییر شکل عنصر، کار انجام یافته توسط تنش ها برای عنصر مذکور عبارت است از:

$$U_0 = \left(\int_0^{\varepsilon_i} (\sigma_t \, d\varepsilon) \right) dx \, dy \, dz$$

ε_i, σ_i به ترتیب نشانگر مقادیر نهایی هر یک از شش مؤلفه تنش و کرنش است.

- انرژی تغییر شکل کل جسم برابر است با:

$$U = \int_v \left(\int_0^{\varepsilon_i} (\sigma_t \, d\varepsilon) \right) dx \, dy \, dz$$

- در حالتی که جسم ارتجاعی خطی است داریم $(\sigma_i = E\varepsilon_i,)$:
- انرژی تغییر شکل عنصر

$$U_0 = \frac{1}{2} \sigma_i \varepsilon_i \, dx \, dy \, dz$$

- انرژی تغییر شکل برای یک عنصر سه بعدی با شش مؤلفه کرنش متناظر عبارت است از:

$$U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + 2\tau_{xy}\gamma_{xy} + 2\tau_{yz}\gamma_{yz} + 2\tau_{xz}\gamma_{xz}) dx \, dy \, dz$$

با انتگرال گیری از رابطه فوق بر روی حجم جسم مورد مطالعه، انرژی تغییر شکل جسم نتیجه می شود:

$$U = \frac{1}{2}\int_v (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + 2\tau_{xy}\gamma_{xy} + 2\tau_{yz}\gamma_{yz} + 2\tau_{xz}\gamma_{xz})\,dx\,dy\,dz$$

* انرژی تغییر شکل یک جسم در اثر نیروی محوری (برای میله ای به طول L):

$$\sigma = \frac{F}{A}, \qquad \varepsilon = \frac{F}{EA}$$

$$u = \frac{1}{2}\int_v \sigma_0 \varepsilon\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{2}\int_v \frac{F}{A}.\frac{F}{EA} dx\, dy\, dz$$

$$u = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{F^2}{A^2.E} dx \iint dydz = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{F^2}{EA} dx$$

* انرژی تغییر شکل یک جسم در اثر لنگر خمشی (برای میله ای به طول L):

$$\sigma = \frac{My}{I}, \qquad \varepsilon = \frac{My}{EI}$$

$$u = \frac{1}{2}\int_v \sigma.\varepsilon dx\, dy\, dz = \frac{1}{2}\int_v \frac{My}{I}.\frac{My}{EI} dx\, dy\, dz$$

$$u = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{I^2.E} dx \iint y^2 dydz = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI} dx$$

* انرژی تغییر شکل یک جسم در اثر برش:
(برای میله ای به طول L)

$$\tau = \frac{V}{A}, \qquad \gamma = \frac{V}{GA}$$

$$u = \frac{1}{2}\int_v \tau\gamma \, dx\, dy\, dz = \frac{1}{2}\int_v \frac{V}{A}.\frac{V}{GA} dx\, dy\, dz$$

$$u = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{V^2}{A^2.G} dx \iint dydz = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{V^2}{GA} dx$$

* انرژی تغییر شکل یک جسم در اثر پیچش:
(برای میله ای به طول L)

$$\tau = \frac{Tr}{J}, \qquad \gamma = \frac{T}{GJ} r$$

$$u = \frac{1}{2}\int_v \tau\gamma \, dx\, dy\, dz = \frac{1}{2}\int_v \frac{Tr}{J}.\frac{Tr}{GJ} dx\, dy\, dz$$

$$u = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{T^2}{J^2.G} dx \iint r^2 dydz = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{T^2}{GJ} dx$$

پ) اصل کار مجازی (Principle of Virtual work)

– در استخراج روابط مورد استفاده در تحلیل ماتریس سازه ها از مفهوم کار مجازی به طور موثری استفاده می شود.

– اصل مذکور برای اجسام صلب (Rigid body) و اجسام تغییر شکل پذیر (Deformable body) به دو صورت متفاوت بیان می شود (شرحی در مورد جسم صلب و جسم تغییر شکل پذیر) :

۱– برای جسم صلب: اگر یک سیستم نیرویی بر یک جسم صلب در حال تعادل باشد، در اثر تغییر مکان کوچک مجازی، کار خارجی مجازی انجام یافته توسط این نیروها برابر صفرخواهد بود.

– برعکس اگر کار انجام شده توسط یک سیستم نیرویی مؤثر بر یک جسم صلب تحت اثر تغییر مکان مجازی کوچک برابر صفر باشد، در این صورت این سیستم نیرویی درحال تعادل خواهد بود.

$$W_d = \sum_{i=1}^{n} Q_i v_i$$

Q_i : یک نیرو از سیستم نیرویی Q و V_i : تغییر مکان مجازی

چون جسم صلب است لذا در همه جا برابر است مثلا $V_i = V_0$

$$W_d = v_0 \sum_{i=1}^{n} Q_i = 0$$

سیستم نیرویی در حال تعادل

۲- برای جسم تغییر شکل پذیر: اگر یک سیستم نیرویی Q که بر روی یک جسم تغییر شکل پذیر اثر می نماید، در حال تعادل باشد و این جسم تحت اثر عواملی تغییر شکل مجازی کوچکی دهد، در این صورت کار مجازی خارجی انجام یافته توسط نیروی Q برابر کار مجازی داخلی انجام یافته توسط تنش های ناشی از Q خواهد بود.

Virtual strain corresponding to virtual displacement

Real stress in equilibrium with Real applied load

$$\int_v \bar{\varepsilon}.\sigma\, dv = \sum Q_i \bar{v}_i$$

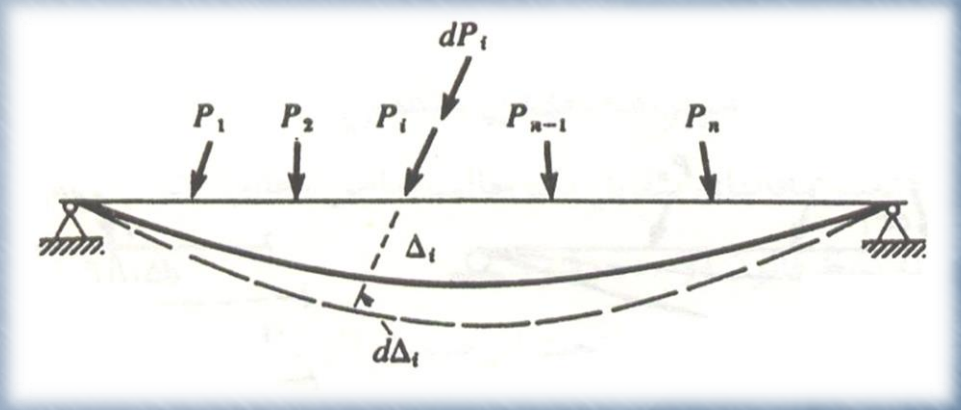
کار مجازی داخلی (Internal virtual work)

کار مجازی خارجی (External virtual work)

ت) قضایای کاستیلیانو (Theorems of Castiliano)

از قضایای کاستیلیانو به طور بنیادی در تحلیل ماتریسی سازه استفاده می شود.

– قضیه اول: نسبت تغییرات انرژی به تغییرات تغییر مکان تعمیم یافته در یک نقطه خاص (و در یک امتداد خاص)، برابر نیروی تعمیم یافته است که به آن نقطه خاص (و در آن امتداد خاص) وارد می شود.



$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_i} = P_i$$

– قضیه دوم: نسبت تغییرات انرژی به تغییرات نیروی تعمیم یافته در نقطه خاص (و در یک امتداد خاص)، برابر تغییرمکان تعمیم یافته در آن نقطه خاص (و در آن امتداد خاص) می باشد.

$$\frac{\partial U}{\partial P_i} = \Delta_i$$

– توجه شود که P_i و Δ_i را می توان به ترتیب به صورت لنگر و دوران زاویه ای و همچنین نیرو و تغییر مکان معمولی در نظر گرفت.

– برای اثبات قضایای مذکور می توان به متون کلاسیک تحلیل ماتریسی سازه مراجعه نمود.

– از قضایای کاستیلیانو برای تعیین ضرایب سختی (Stiffness Coefficients) استفاده می شود (به عنوان مثال به دو مورد اشاره می شود):

* برای میله ای به طول L تحت اثر نیروی محوری F (که تغییر مکان محوری u را ایجاد می کند).

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{F^2}{AE}dx$$

$$\frac{\partial U}{\partial F} = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{2F}{AE}dx = \frac{FL}{AE} = u \Rightarrow F = u.\frac{EA}{L}$$

سختی محوری (Axial Stiffness: EA/L) به صورت نیروی محوری مورد نیاز برای ایجاد تغییر مکان محوری واحد تعریف می شود.

* برای میله ای به طول L تحت اثر لنگر پیچشی T (که زاویه پیچش Φ را ایجاد می کند).

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{T^2}{GJ}dx$$

$$\frac{\partial U}{\partial T} = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{2T}{GJ}dx = \frac{TL}{GJ} = \phi \Rightarrow T = \phi.\frac{GJ}{L}$$

سختی پیچشی (Torsional Stiffness: GJ/L) به صورت لنگر پیچشی مورد نیاز برای ایجاد زاویه پیچش واحد تعریف می شود.

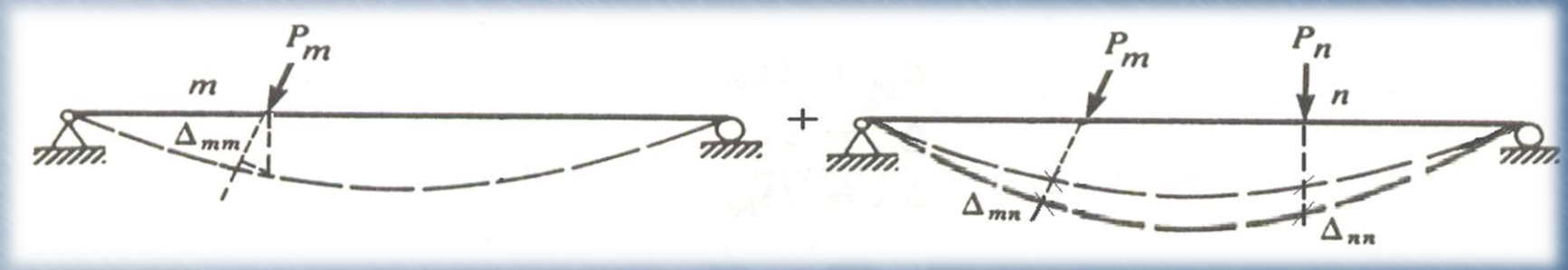
ث) قانون بتی (Betti's Law) و رابطه متقابل ماکسول (Maxwell's Reciprocal Relationship)

از قانون بتی و رابطه متقابل ماکسول در بررسی خواص معادلات ماتریسی ایجاد شده در تحلیل ماتریسی سازه ها استفاده می شود.

۱) قانون بتی: کار انجام یافته توسط یک سیستم نیروئی P_m در اثر تغییر شکل ناشی از یک سیستم نیرویی دیگر P_n (Δ_{mn}) برابر کار انجام یافته توسط سیستم نیروئی P_n در تغییر شکل ناشی از سیستم نیرویی P_m (Δ_{nm}) می باشد.

$$\sum P_m \Delta_{mn} = \sum P_n \Delta_{nm}$$

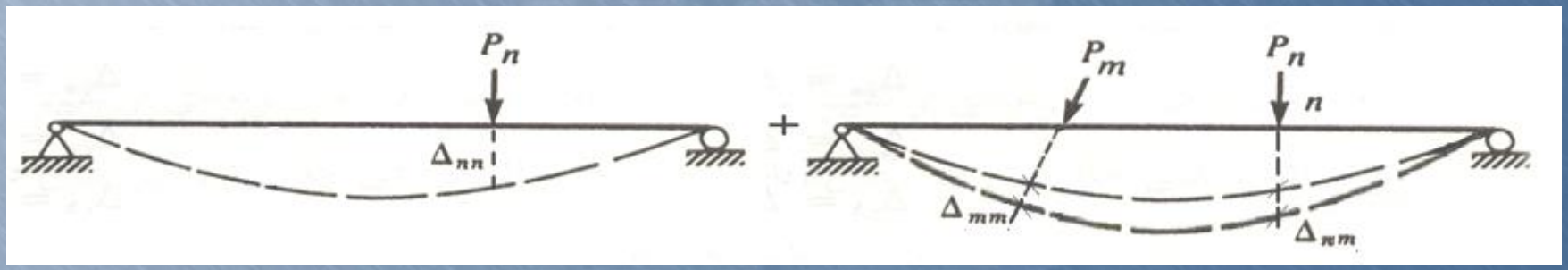
- برای حالت خاص :



$$W_1 = \frac{1}{2}\sum P_m \Delta_{mm}$$

$$W_2 = \sum P_m \Delta_{mn} + \frac{1}{2}\sum P_n \Delta_{nn}$$

$$W = W_1 + W_2 = \frac{1}{2}\sum P_m \Delta_{mm} + \sum P_m \Delta_{mn} + \frac{1}{2}\sum P_n \Delta_{nn} \quad (1)$$



$$W_3 = \frac{1}{2}\sum P_n \Delta_{nn}$$

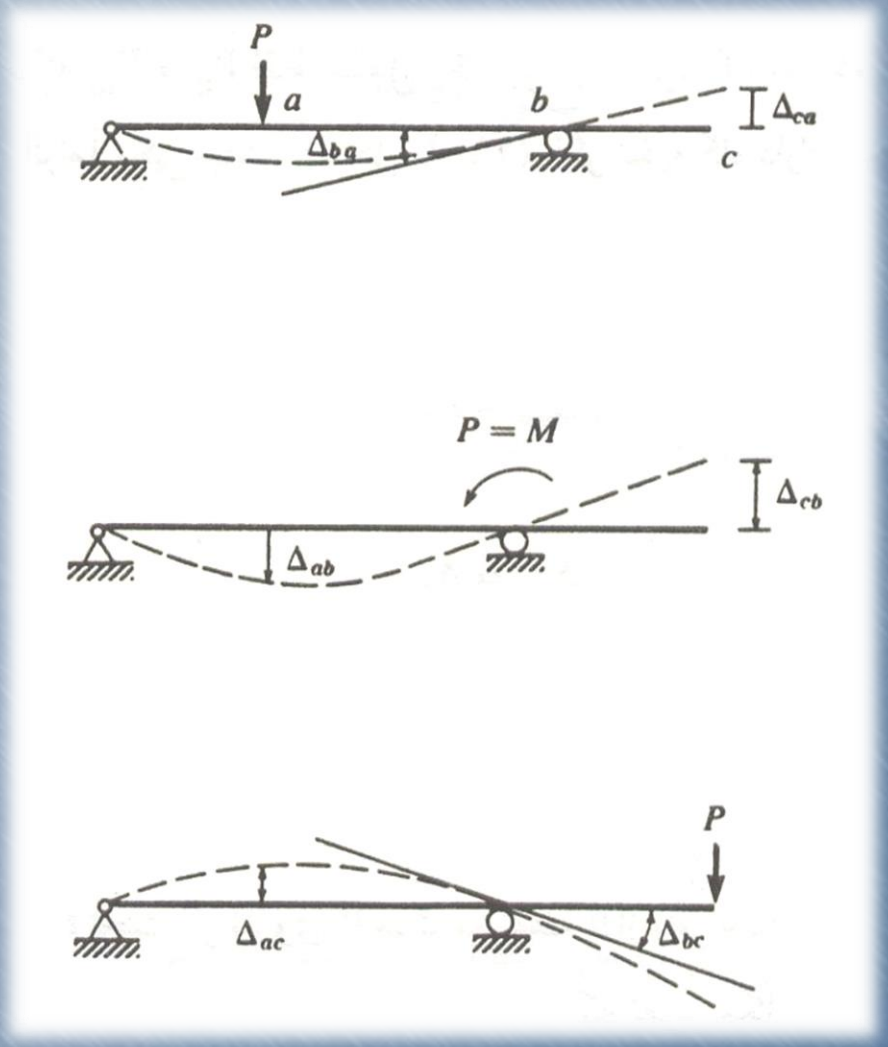
$$W_4 = \frac{1}{2}\sum P_m \Delta_{mm} + \sum P_n \Delta_{nm}$$

$$W' = W_3 + W_4 = \frac{1}{2}\sum P_n \Delta_{nn} + \frac{1}{2}\sum P_m \Delta_{mm} + \sum P_n \Delta_{nm} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow W = W' \ or \ \left\langle \sum P_m \Delta_{mn} = \sum P_n \Delta_{nm} \right\rangle$$

۲) رابطه متقابل ماکسول: رابطه متقابل ماکسول یک حالت خاص از قانون بتی است.

– تغییر مکان نقطه m تحت اثر نیروی P مؤثر در نقطه n از نظر عددی برابر تغییر مکان نقطه n تحت اثر نیروی P موثر در m می باشد (در این قانون فرقی بین نیروی معمولی و لنگر و نیز تغییر مکان و دوران گذارده نمی شود).



$$\begin{cases} \Delta_{ba} = \Delta_{ab} \\ \Delta_{ca} = \Delta_{ac} \\ \Delta_{cb} = \Delta_{bc} \end{cases}$$

فصل اول – کلیات

(۱) مفاهیم پایه در ارتباط با تحلیل سازه ها
(۲) فلسفه پیدایش تحلیل ماتریسی سازه ها
(۳) حوزه کاربرد روش تحلیل ماتریسی سازه ها
(٤) فرض های اصلی در تحلیل ماتریسی سازه ها
(٥) اصول اساسی در تحلیل ماتریسی سازه ها
(٦) مفاهیم، اصول، قضایا و قوانین انرژی مورد استفاده درتحلیل ماتریسی سازه ها
(۷) دو روش اساسی در تحلیل ماتریسی سازه ها

- بسته به این که هدف اصلی از تحلیل سازه یافتن تغییر شکل قسمت های مختلف سازه باشد یا یافتن نیروهای داخلی، تحلیل سازه به دو روش متفاوت انجام می گیرد:

- اگر هدف اصلی تحلیل سازه، تعیین تغییر مکان های دو انتهای عضو یا به عبارت دیگر مشخص کردن تغییر مکان های مربوط به گره های سازه باشد، در این صورت تحلیل ماتریسی سازه به **روش سختی (Stiffness Method)** یا **روش تغییر مکان ها (Displacement Method)** انجام می گیرد.

- اگر هدف اصلی تحلیل سازه، تعیین نیروهای داخلی دو انتهای عضو باشد، در این صورت تحلیل ماتریسی سازه به **روش نرمی (Flexibility Method)** یا **روش نیروها (Force Method)** انجام می گیرد.

- ✓ در هر دو روش شرایط سازگاری و شرایط تعادل ارضا می شوند، لیکن ترتیب آنها در دو روش متفاوت است.
- ✓ در روش سختی ابتدا تعادل ارضاء می شود و سپس شرط سازگاری ارضا می گردد. از این رو نتایج اولیه روش سختی، تغییر مکان های گرهی است (در واقع گاهی به روش سختی، روش تعادل (Equilibrium Method) نیز اطلاق می شود).
- ✓ در روش نرمی ابتدا سازگاری و سپس تعادل ارضاء می گردد. از این رو نتایج اولیه روش نرمی نیروهای اعضاء می باشند (در واقع گاهی به روش نرمی، روش سازگاری (Compatibility Method) نیز اطلاق می شود).
- ✓ در نهایت هر دو روش مذکور منجر به حل معادلاتی می گردد. در روش سختی (یا روش تغییر مکان ها) مجهولات شامل تغییر مکان های گره ها و در روش نرمی (یا در روش نیروها) مجهولات شامل نیروهای عضوی سازه هستند.
- ✓ در روش نرمی تعداد معادلات برابر درجه نامعینی سازه است (درجه نامعینی داخلی+ درجه نامعینی خارجی).
- ✓ در روش سختی تعداد معادلات برابر تعداد درجات آزادی کل گره های سازه می‌باشد (Degree of Freedom).

- درجات آزادی یک سازه مساوی تعداد تغییر مکان های مجهول مربوط به گره های سازه می باشد.

تعداد مجهولات در یک گره صلب در یک قاب فضایی (٦) $(\theta_z, \theta_y, \theta_x, \Delta_z, \Delta_y, \Delta_x)$

تعداد مجهولات در یک گره صلب در یک قاب مستوی "صفحه *X,Y*" (٣) $(\theta_z, \Delta_y, \Delta_x)$

تعداد مجهولات در یک گره مفصلی در یک خرپای فضایی (٣) $(\Delta_z, \Delta_y, \Delta_x)$

تعداد مجهولات در یک گره مفصلی در یک خرپای مستوی "صفحه *X,Y*" (٢) (Δ_y, Δ_x)

تعداد مجهولات در یک تکیه گاه گیردار در یک قاب مستوی یا فضایی (٠)

تعداد مجهولات در یک تکیه گاه ساده در یک قاب فضایی (٣)

تعداد مجهولات در یک تکیه گاه ساده در یک قاب مستوی (١)

تعداد مجهولات در یک تکیه گاه غلتکی در یک قاب مستوی (٢)

تعداد مجهولات در یک تکیه گاه ساده در یک خرپای مستوی (٠)

تعداد مجهولات در یک تکیه گاه غلتکی در یک خرپای مستوی (١)

- با توجه به این که:

۱) در روش سختی مرزی بین سازه معین یا نامعین نیست،
۲) در روش سختی نظیر روش نرمی الزامی به انتخاب مجهولات اضافی نیست،
۳) روش سختی به صورت سیستماتیک تر انجام می گیرد،
٤) روش سختی از نظر برنامه نویسی کامپیوتری ساده تر و بهتر است،
٥) روش سختی دید کامل تری از رفتار سازه را به معرض نمایش می گذارد.

از این رو مباحث تحلیل ماتریسی سازه ها (در این درس) بر مبنای روش سختی (Stiffness method) یا روش تعادل (Equilibrium method) یا روش تغییر مکان (Displacement method) متمرکز خواهد شد.