آکادمی نوین نگرش

پاسخنامه تشریحی

سؤالات تحلیل سازه‌ها

کنکور کارشناسی ارشد

مهندسی عمران ۱۴۰۲

پیمان رجائیان

اسفندماه ۱۴۰۱

آکادمی نوین نگرش

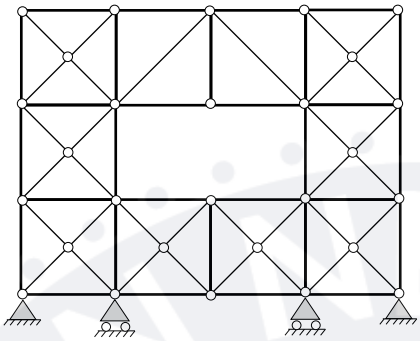
۵۱- تعداد درجه نامعینی خرپای زیر کدام است؟

۱) 12

۲) 13

۳) 14

۴) 15



✍ **حل**: گزینه «۳» صحیح است. مبحث درجه نامعینی خرپا – سطح سؤال: بسیار ساده

• درجه نامعینی خرپای مسطح: اگر تعداد اعضای خرپا برابر M، تعداد کل گره‌ها برابر N و تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی برابر R باشد، درجه نامعینی خرپا از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$D.I. = M + R - 2N$$

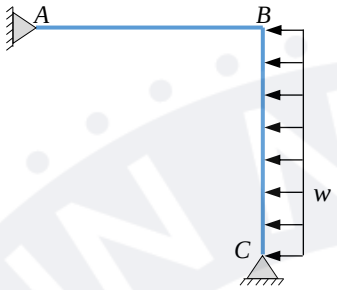
$$\begin{cases} M = 64 \\ R = 6 \\ N = 28 \end{cases} \rightarrow D.I. = 64 + 6 - 2(28) = 14$$

☜ **یادآوری:** برای محاسبه درجه نامعینی خرپای فضایی، با توجّه به اینکه در هر عضو خرپا یک نیروی مجهول داریم و در هر گره خرپا می‌توان سه معادله تعادل نیرو نوشت، درجه نامعینی خرپا از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$D.I. = M + R - 3N$$

@nnAcademy

۵۲- برای حل سازه نامعین زیر به روش نرمی، گره B مفصل کرده‌ایم- ضریب نرمی مربوطه چه ضریبی از $\frac{L}{EI}$ است؟ (طول هر دو عضو و صلبیت خمشی آنها به‌ترتیب L و EI است)



۱) $\frac{1}{3}$

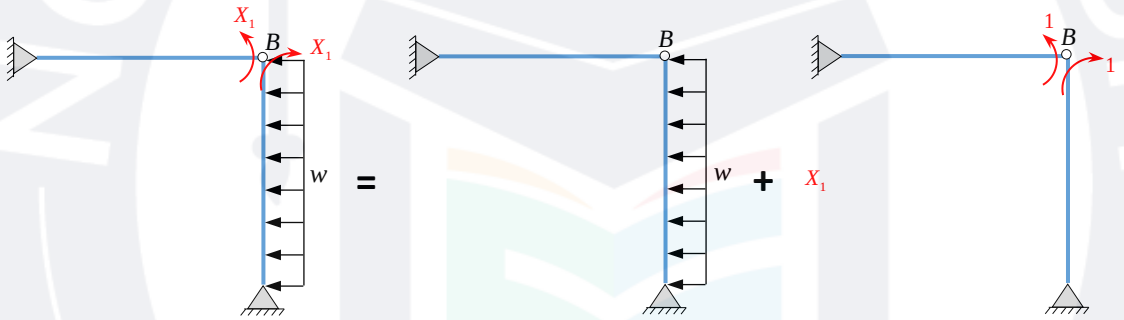
۲) $\frac{2}{3}$

۳) ۱

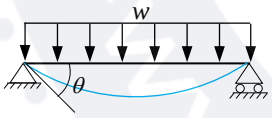
۴) ۲

حل: گزینه «۲» صحیح است. مبحث تحلیل سازه‌های نامعین (روش نرمی) – سطح سؤال: متوسط

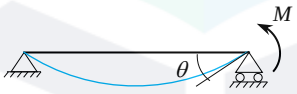
با توجّه به اینکه سازه یک درجه نامعین است، لنگر خمشی داخلی اتصال B را به‌عنوان مجهول اضافی[1] در نظر گرفته و سازه را به روش نیرو (نرمی) تحلیل می‌کنیم.



☑ یادآوری روابط تیرهای پایه مورد نیاز در حل تست:



$\theta = \frac{wL^3}{24EI}$



$\theta = \frac{ML}{3EI}$

$$\Delta_1' + \delta_{11} X_1 = 0$$

$$\Delta_1' = (\Delta\theta_B)_1 = \frac{wL^3}{24EI}$$

$$\delta_{11} = \int_0^L \frac{m_1^2 dx}{EI} = (\Delta\theta_B)_2 = \frac{L}{3EI} - (-\frac{L}{3EI}) = \frac{2L}{3EI} \rightarrow \delta_{11} = \frac{2L}{3EI}$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_1'}{\delta_{11}} = -\frac{wL^3}{24EI} \times \frac{3EI}{2L} = -\frac{wL^2}{16}$$

[1] Redundancy

@nnAcademy

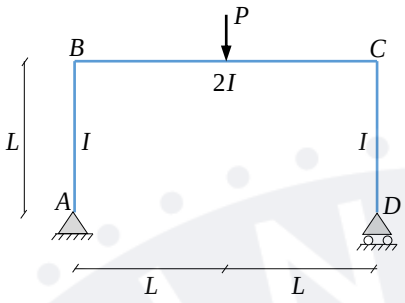
۵۳- نقطه محل اثر بار P پس از بارگذاری به چه ضریبی از $\frac{PL^3}{EI}$ به تکیه‌گاه D نزدیک یا از آن دور می‌شود؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{12}$

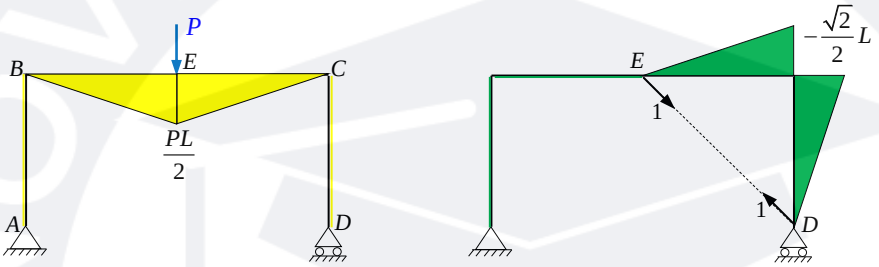
۲) $\frac{\sqrt{2}}{24}$

۳) $\frac{\sqrt{2}}{48}$

۴) $\frac{\sqrt{2}}{96}$



حل: گزینه «۳» صحیح است. مبحث کار مجازی قاب – سطح سؤال: ساده



سازه تحت بارگذاری حقیقی

سازه تحت بارگذاری واحد مجازی

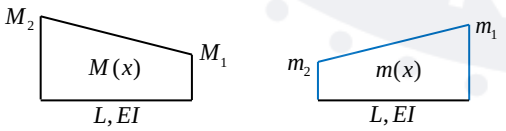
$$1\times\delta_{E/D}=\int_L\frac{mMdx}{EI}=\frac{PL}{2}(\frac{-\sqrt{2}}{2}L)\times L\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2EI}=-\frac{\sqrt{2}}{48}\frac{PL^3}{EI}$$

علامت منفی نشان می‌دهد که نقاط E و D از یکدیگر دور می‌شوند.

درسنامه:

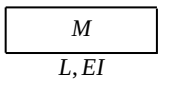
در محاسبه $\int_L\frac{M(x)m(x)dx}{EI(x)}$ در صورتی‌که نمودارهای لنگر خمشی ناشی از بارگذاری حقیقی و بارگذاری مجازی هر دو به‌صورت خطی باشند و صلبیت خمشی در طول عضو ثابت باشد، می‌توان از رابطه زیر استفاده نمود که توصیه می‌شود دانشجویان آن را حفظ کنند چون همه حالات خطی را پوشش می‌دهد.

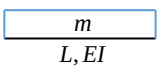
$$\int_\circ^L\frac{M(x)m(x)dx}{EI}=\frac{L}{6EI}\left[2M_1m_1+2M_2m_2+M_1m_2+M_2m_1\right]$$



☑ حالات خاص:

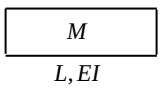
- ضرب مستطیل در مستطیل:

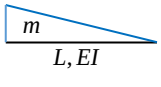




$$\int_\circ^L\frac{M(x)m(x)dx}{EI}=\frac{MmL}{EI}$$

- ضرب مستطیل در مثلث:

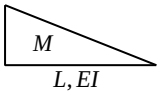


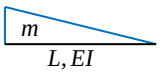


$$\int_\circ^L\frac{M(x)m(x)dx}{EI}=\frac{MmL}{2EI}$$

@nnAcademy

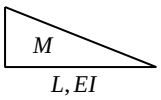
- ضرب مثلث در مثلث (حالت هم فاز):

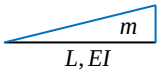




$$\int_{\circ}^{L} \frac{M(x)m(x)dx}{EI} = \frac{MmL}{3EI}$$

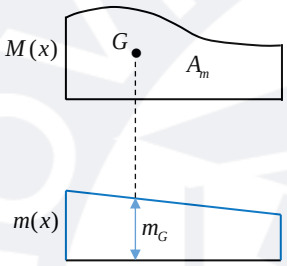
- ضرب مثلث در مثلث (حالت غیر هم فاز):





$$\int_{\circ}^{L} \frac{M(x)m(x)dx}{EI} = \frac{MmL}{6EI}$$

در حالت کلی در تیرهای با مقطع ثابت، نمودار لنگر خمشی ناشی از بارگذاری حقیقی هر شکلی می‌تواند داشته باشد ولی دیاگرام لنگر خمشی ناشی از بارگذاری مجازی حداکثر می‌تواند از دو قطعه خط مستقیم تشکیل شود. در این حالت از فرمول زیر که به **فرمول مور** معروف است استفاده می‌نماییم.

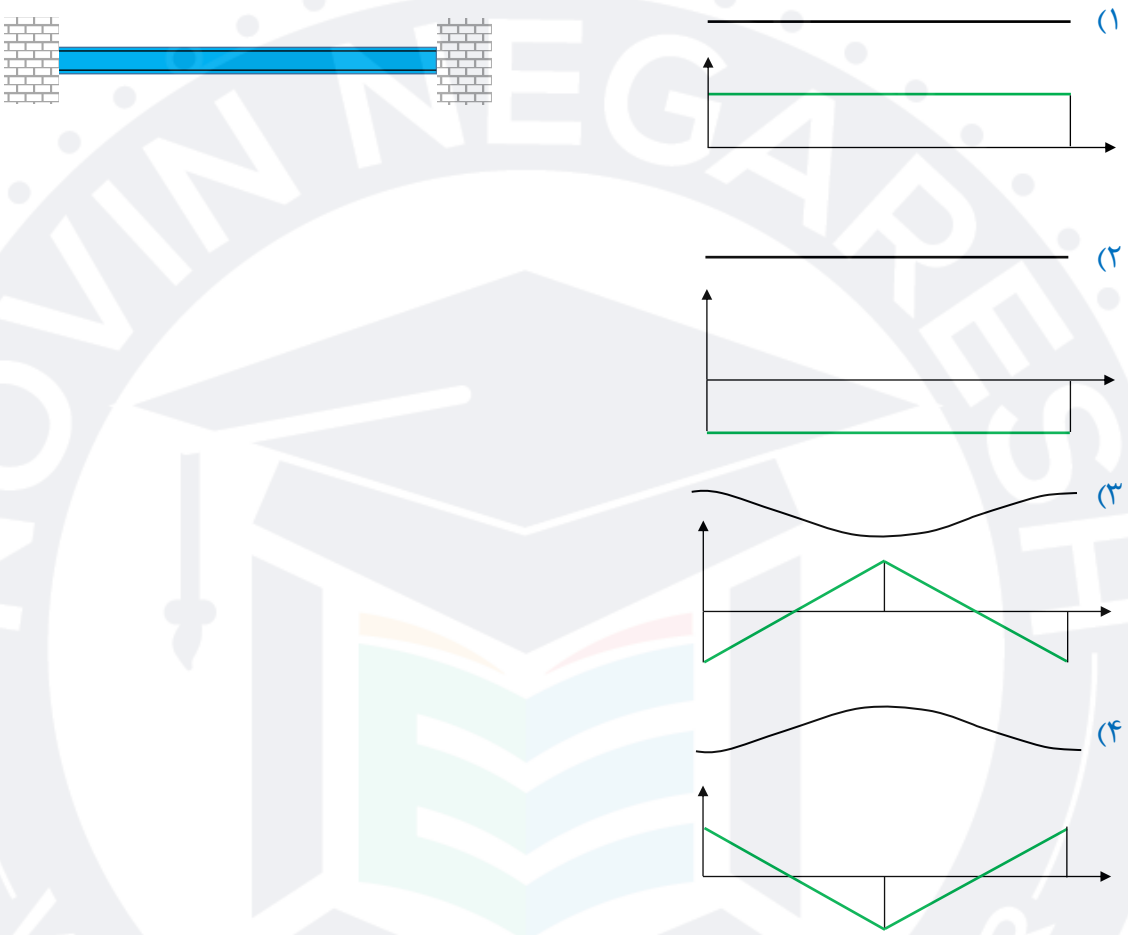


$$\int_{\circ}^{L} \frac{M(x)m(x)dx}{EI} = \frac{A_m \times m_G}{EI}$$

در این رابطه A_m مساحت زیر نمودار لنگر خمشی ناشی از بارگذاری حقیقی و m_G عرض نمودار لنگر خمشی ناشی از بارگذاری واحد مجازی در محل مرکز سطح نمودار لنگر خمشی ناشی از بارگذاری حقیقی است.

@nnAcademy

۵۴- تیری مطابق شکل بین دو تکیه‌گاه گیردار قرار گرفته است- دمای سطح فوقانی آن افزایش و همزمان دمای سطح تحتانی آن به همان میزان کاهش می‌یابد. منحنی تغییرشکل و نمودار لنگر خمشی ایجاد شده در تیر تحت بارگذاری حرارتی به‌ترتیب کدام است؟ (اگر تقعر تیر به سمت بالا باشد، لنگر خمشی مثبت خواهد بود)

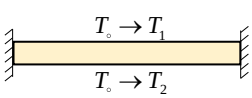


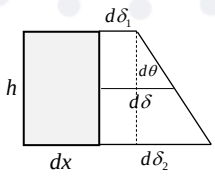
✍**حل**: تست ابهام دارد. طراح محترم می‌بایست عنوان می‌کرد که میزان افزایش و کاهش دمای تارهای بالا و پایین مقطع یکسان است. با اصلاح صورت تست به حل آن می‌پردازیم.

📖 **درسنامه:**

رابطه عمومی کار مجازی در تیرها:

$$W_E = W_I \rightarrow 1\times\Delta + W_R = \int_L nd\delta + md\theta + vd\lambda + td\phi$$



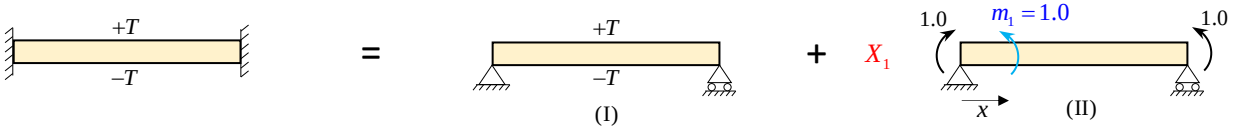


$$d\delta = \frac{d\delta_1 + d\delta_2}{2} = \alpha\left(\frac{T_1+T_2}{2} - T_\circ\right)$$

$$\begin{cases} d\delta_1 = \alpha(T_1 - T_\circ)dx \\ d\delta_2 = \alpha(T_2 - T_\circ)dx \end{cases} \rightarrow d\theta = \frac{d\delta_2 - d\delta_1}{h} = \frac{\alpha(T_2 - T_1)}{h}dx \rightarrow d\theta = \frac{\alpha(T_2 - T_1)}{h}dx$$

@nnAcademy

آکادمی نوین نگرش



$$y = y_I + y_{II}$$

$$(I) \rightarrow d\theta = \frac{\alpha(T_2 - T_1)}{h}dx \xrightarrow[T_2=-T]{T_1=+T} d\theta = \frac{\alpha(-T-T)}{h}dx = -\frac{2\alpha T}{h}dx$$

$$\rightarrow (\frac{d\theta}{dx}) = y_I'' = -\frac{2\alpha T}{h}$$

$$\Delta_1' + \delta_{11}X_1 = \circ$$

$$\Delta_1' = \int_L md\theta = \int_\circ^L \frac{m_1\alpha(T_2 - T_1)dx}{h} = -\frac{2\alpha TL}{h}$$

$$\delta_{11} = \int_\circ^L \frac{m_1^2 dx}{EI} = \frac{L}{EI} \rightarrow X_1 = -\frac{\Delta_1'}{\delta_{11}} = \frac{2\alpha TEI}{h} = M = EIy_{II}'' \rightarrow y_{II}'' = \frac{2\alpha T}{h}$$

$$y'' = y_I'' + y_{II}'' = -\frac{2\alpha T}{h} + \frac{2\alpha T}{h} = \circ$$

$$y' = A \rightarrow y = Ax + B$$

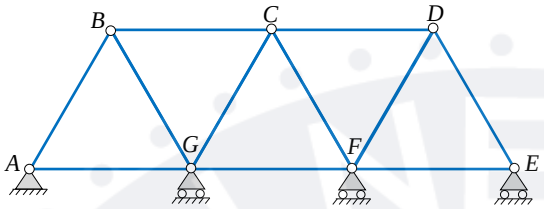
$$\begin{cases} x = \circ \\ y = \circ \end{cases}, \begin{cases} x = L \\ y = \circ \end{cases} \Rightarrow y = \circ$$

$$M = \frac{2\alpha TEI}{h} = Const.$$

نتیجه می‌گیریم که تیر تحت این بارگذاری حرارتی، تغییر شکل نداشته (انحنای آن صفر است) و لنگر خمشی در طول آن ثابت و مقدار آن مثبت است. بنابراین گزینه «۱» صحیح است.

@nnAcademy

۵۵- در خرپای زیر می‌دانیم که تکیه‌گاههای F و G هر یک به میزان $\Delta_\circ$ نشست کرده‌اند- طول و صلبیت محوری تمامی اعضای این خرپا به ترتیب با L و EA است- اندازه نیروی محوری ایجاد شده در عضو AB تحت تأثیر چنین نشستی بر حسب $\frac{EA\Delta_\circ}{L}$ کدام است؟



۱) $\frac{2\sqrt{3}}{13}$

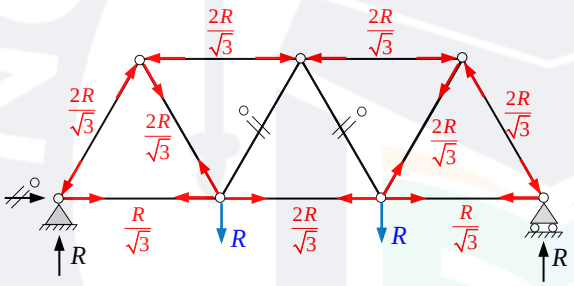
۲) $\frac{2\sqrt{3}}{15}$

۳) $\frac{\sqrt{3}}{13}$

۴) $\frac{\sqrt{3}}{15}$

حل: گزینه «۲» صحیح است. مبحث روشهای انرژی – سطح سؤال: متوسط

مسأله را می‌توان به روش‌های مختلف تحلیل سازه‌ها حل نمود. در اینجا از **روش کار حقیقی** که روشی سریع و کارآمد به نظر می‌رسد استفاده می‌نماییم.



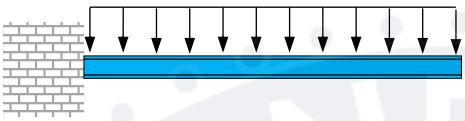
$$W_E = W_I$$

$$\frac{1}{2}R\Delta_\circ + \frac{1}{2}R\Delta_\circ = \sum_{i=1}^{n}\frac{F_i^2 L_i}{2E_i A_i} \rightarrow R\Delta_\circ = \frac{L}{2EA}\left[7(\frac{2R}{\sqrt{3}})^2 + 2(\frac{R}{\sqrt{3}})^2\right] = \frac{30R^2L}{6EA} \rightarrow R = \frac{EA\Delta_\circ}{5L}$$

$$F_{AB} = \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{EA\Delta_\circ}{5L} = \frac{2\sqrt{3}}{15}\frac{EA\Delta_\circ}{L}$$

@nnAcademy

۵۶- تیر شکل زیر دارای مقطع مستطیل شکل است- طول این تیر ۱۰ برابر ارتفاع مقطع آن است و از مصالحی دارای نسبت پواسون $\upsilon = 0.25$ ساخته شده است- نسبت سهم تغییرشکل برشی به تغییرشکل خمشی در تغییرمکان عمودی پدید آمده در انتهای آزاد تیر کدام است؟



۱) $\frac{1}{250}$

۲) $\frac{1}{144}$

۳) $\frac{1}{120}$

۴) $\frac{1}{100}$

حل: گزینه «۴» صحیح است. مبحث تغییر شکل سازه‌ها – سطح سؤال: ساده

برای حل تست از روش کار مجازی (بار واحد) استفاده می‌نماییم.

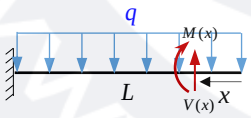
$$1\times\Delta=\int_L\frac{mMdx}{EI}+\int_L\frac{f_s vVdx}{GA}$$

$$f_s=1.2$$

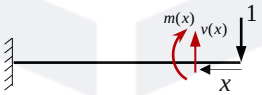
$$G=\frac{E}{2(1+\upsilon)}=\frac{E}{2(1+0.25)}=0.4E$$

$$\Delta=\int_0^L\frac{(-x)(-qx^2/2)dx}{EI}+\int_0^L\frac{1.2\times1.0\times qxdx}{GA}=\frac{qL^4}{8EI}+\frac{3qL^2}{5GA}$$

$$\xrightarrow{L=10h}\Delta=\frac{q(10h)^4}{8EI}+\frac{3q(10h)^2}{5GA}\xrightarrow[G=0.4E]{I=\frac{bh^3}{12}}\Delta=\underbrace{\frac{3q\times10^4\times h}{2Eb}}_{\Delta_b}+\underbrace{\frac{150qh}{Eb}}_{\Delta_s}\rightarrow\frac{\Delta_s}{\Delta_b}=\frac{1}{100}$$



سازه تحت بارگذاری حقیقی



سازه تحت بارگذاری واحد مجازی

$$\begin{cases}M(x)=-\frac{qx^2}{2}\\V(x)=qx\end{cases}$$

$$\begin{cases}m(x)=-x\\v(x)=1\end{cases}$$

@nnAcademy

آکادمی نوین نگرش

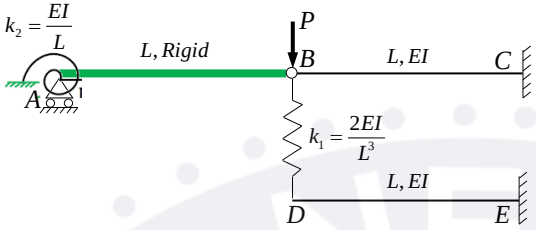
۵۷- در سازه شکل زیر، تغییرمکان گره B چه ضریبی از $\frac{PL^3}{EI}$ است؟ (قطعه AB صلب است)

۱) $\frac{5}{26}$

۲) $\frac{6}{23}$

۳) $\frac{15}{23}$

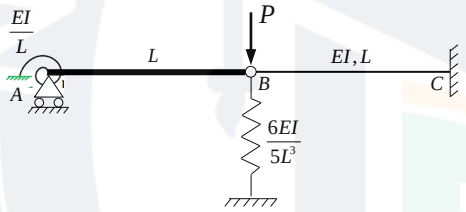
۴) $\frac{6}{5}$



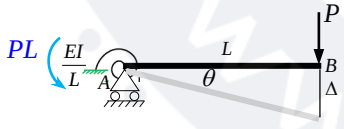
حل: گزینه «۱» صحیح است. مبحث مدلسازی با فنر – سطح سؤال: متوسط

از آنجا که نیروی فنر خطی با نیروی اعمالی به تیر الاستیک DE در نقطه D برابر است نتیجه می‌گیریم که فنر معادل تیر DE و فنر خطی به‌صورت سری رفتار می‌کنند. سختی فنر معادل آنها به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{1}{k_{eq}}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=\frac{L^3}{3EI}+\frac{L^3}{2EI}\rightarrow k_{eq}=\frac{6EI}{5L^3}$$



جابجایی قائم میله صلب AB، فنر خطی و تیر الاستیک BC در نقطه یکسان بوده و بنابراین به‌صورت فنرهای موازی رفتار می‌کنند و نیروی P به نسبت سختی بین آنها توزیع می‌شود. برای ادامه حل، ابتدا سختی میله صلب AB در نقطه B و در راستای قائم را با توجّه به تعریف سختی (نیرو لازم برای جابجایی واحد) محاسبه می‌نماییم.



$$\begin{cases}\theta=\frac{M}{k_\theta}=\frac{PL^2}{EI}\\ \Delta=L\theta=\frac{PL^3}{EI}\xrightarrow[P=k]{\Delta=1}k=\frac{EI}{L^3}\end{cases}$$

$$(k_{eq})_t=\frac{EI}{L^3}+\frac{6EI}{5L^3}+\frac{3EI}{L^3}=\frac{26EI}{5L^3}$$

$$\Delta_B=\frac{P}{k_{eq}}=\frac{5PL^3}{26EI}$$

@nnAcademy

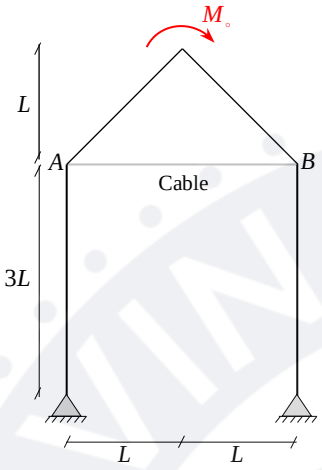
۵۸- در قاب زیر دوران محل اعمال لنگر $M_\circ$ بر حسب $\frac{M_\circ L}{EI}$ کدام است؟ (عضو AB کابل به صلبیت محوری EA و سایر اعضاء دارای صلبیت خمشی EI هستند به‌طوری که $I = AL^2$)

۱) $\frac{1}{6}$

۲) $\frac{\sqrt{2}}{6}$

۳) $\frac{1}{12}$

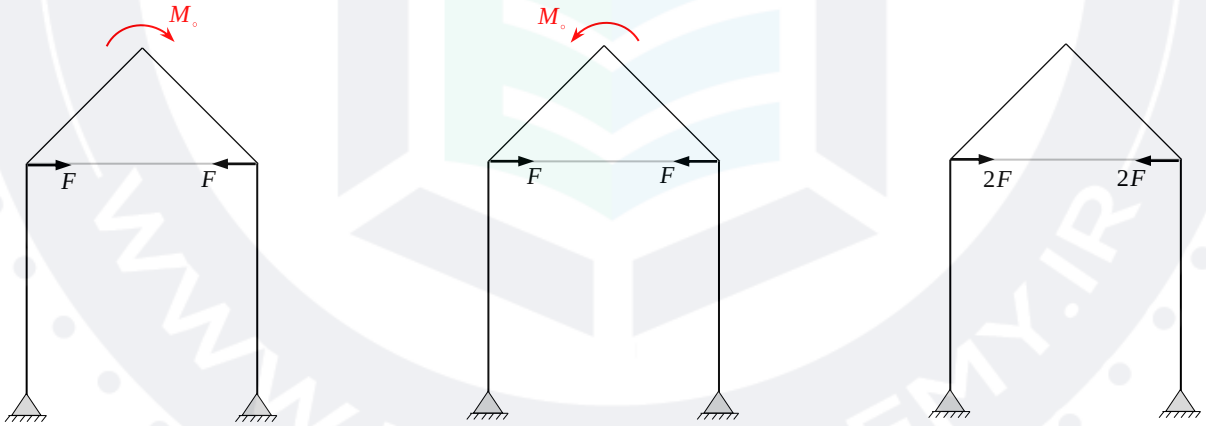
۴) $\frac{\sqrt{2}}{12}$



✍ **حل**: گزینه «۲» صحیح است. مبحث کار مجازی و تقارن و پادتقارنی بارگذاری – سطح سؤال: متوسط

با توجّه به اینکه سازه متقارن و بارگذاری متقارن معکوس (پادمتقارن) است نتیجه می‌گیریم که نیروی کابل صفر است. این موضوع را می‌توان به‌صورت زیر اثبات نمود.

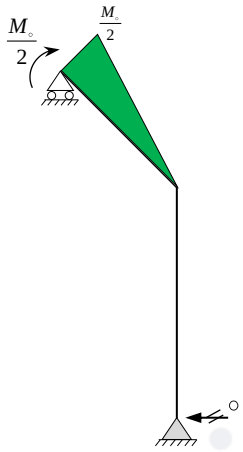
فرض کنیم نیروی کابل برابر F باشد، چنانچه از پشت صفحه به سازه نگاه کنیم سازه (۲) را خواهیم داشت که اگر با سازه (۱) جمع آثار شود به سازه (۳) با بارگذاری صفر می‌رسیم در حالی‌که در آن نیروی کابل برابر $2F$ است که این ممکن نیست. بنابراین نیروی کابل باید صفر باشد.



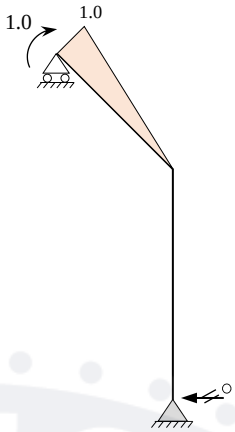
$2F = \circ \rightarrow F = \circ$

بنابراین کابل را حذف کرده و نصف سازه را با شرایط مرزی مناسب در نظر گرفته و از روش کار مجازی استفاده می‌نماییم.

آکادمی نوین نگرش



سازه تحت بارگذاری حقیقی

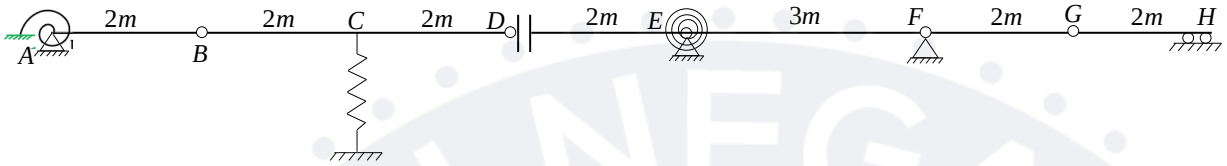


سازه تحت بارگذاری واحد مجازی

$$1\times\theta=\int_L\frac{mMdx}{EI}dx=\frac{1}{3EI}(\frac{M_\circ}{2}\times1.0\times\sqrt{2}L)=\frac{\sqrt{2}M_\circ L}{6EI}$$

@nnAcademy

۵۹- در تیر زیر حداکثر عکس‌العمل تکیه‌گاه F بر حسب kN تحت بار مرده در سراسر طول تیر به شدت $30\frac{kN}{m}$ و بار زنده دارای طول دلخواه به شدت $18\frac{kN}{m}$ کدام است؟ (فنر پیچشی در گره E به تیرهای سمت چپ و راست خود متصل است)



۱) 88

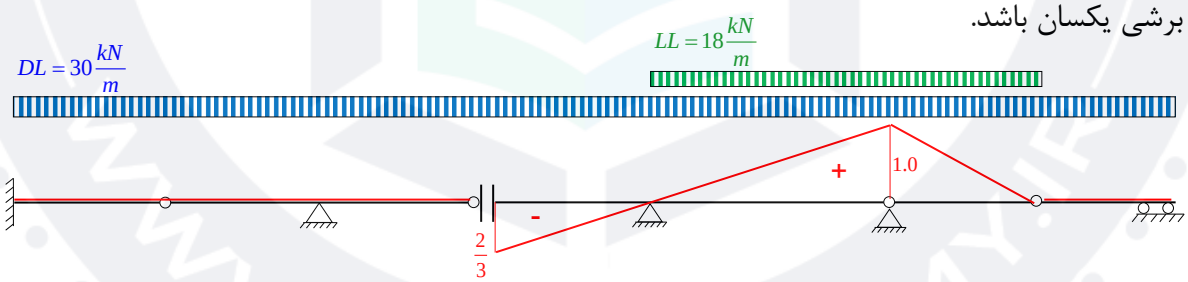
۲) 100

۳) 112

۴) 144

حل: گزینه «۲» صحیح است. مبحث خط تأثیر – سطح سؤال: متوسط

با توجّه به اینکه تیر معین است، سختی فنرهای خطی و دورانی در محاسبه تلاش‌های داخلی نقشی نداشته و می‌توان آنها را در حالت حدی در نظر گرفت. بدین ترتیب که اگر سختی فنر خطی به سمت بینهایت میل کند می‌توان آن را با تکیه‌گاه غلتکی (مفصلی) در نقطه C جایگزین نمود. چنانچه سختی فنر دورانی در تکیه‌گاه A به سمت بینهایت میل کند، مقدار شیب در این تکیه‌گاه برابر صفر شده و می‌توان آن را به‌صورت تکیه‌گاه گیردار مدل نمود. همچنین اگر سختی فنر دورانی در تکیه‌گاه E که مطابق صورت تست به تیرهای سمت چپ و راست خود متصل است به سمت بینهایت میل کند، اختلاف شیب در دو طرف مفصل خمشی E برابر صفر شده و بدین معنی است که تیر به‌صورت پیوسته از روی تکیه‌گاه E عبور کرده است. پس از رسم خط تأثیر، برای بارگذاری می‌بایست به این نکته توجّه داشته باشیم که بار مرده (دائمی) در سراسر تیر حضور دارد ولی بار زنده باید در دهانه‌هایی قرار گیرد که کمیت مورد نظر ماکزیمم شود. نکته مهم در رسم خط تأثیر این مسأله آن است که در سمت چپ مفصل برشی، یک مفصل خمشی قرار دارد که سبب می‌شود کار انجام شده توسط لنگر خمشی صفر شود. بنابراین در این حالت لزومی ندارد که شیب دو طرف مفصل برشی یکسان باشد.



$$(R_F)_{max} = \frac{1\times 5}{2}(30) - \frac{2}{3}(30) + 18\times\frac{5}{2} = 100kN$$

@nnAcademy

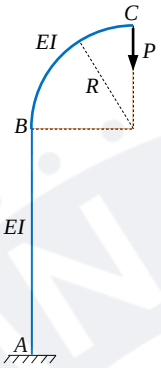
۶۰- تغییرمکان قائم نقطه C تحت اثر بار P کدام است؟ (طول عضو AB برابر $2R$ است- BC ربع دایره و ارتفاع مقطع تیر در مقایسه با R بسیار کوچک است)

۱) $(\frac{\pi}{4}+1)\frac{PR^3}{EI}$

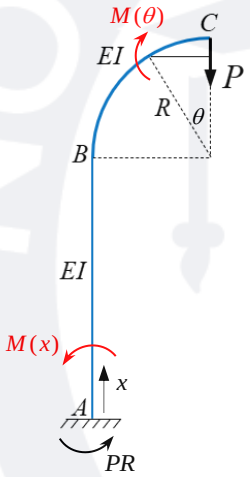
۲) $(\pi-1)\frac{PR^3}{EI}$

۳) $(\frac{\pi}{2}+1)\frac{PR^3}{EI}$

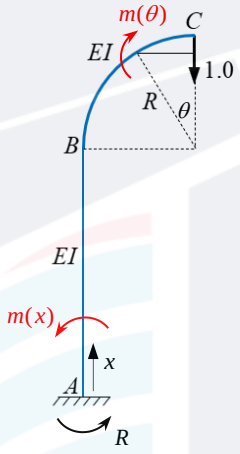
۴) $(\frac{\pi}{4}+2)\frac{PR^3}{EI}$



حل: گزینه «۴» صحیح است. مبحث کار مجازی قاب – سطح سؤال: ساده



سازه تحت بارگذاری حقیقی



سازه تحت بارگذاری واحد مجازی

$$\begin{cases} M(x) = -PR \\ m(x) = -R \end{cases}$$

$$\begin{cases} M(\theta) = -PR\sin\theta \\ m(\theta) = -R\sin\theta \end{cases}$$

$$1\times\delta_{VC} = \int_0^L \frac{m(x)M(x)dx}{EI} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{m(\theta)M(\theta)ds}{EI}$$

$$= \int_0^{2R} \frac{(-R)(-PR)dx}{EI} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-R\sin\theta)(-PR\sin\theta)Rd\theta}{EI}$$

$$= \frac{2PR^3}{EI} + \frac{PR^3}{EI}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta}_{\frac{\pi}{4}} = (\frac{\pi}{4}+2)\frac{PR^3}{EI}$$

به نوبه خود از دو ستاتن عزیزم در گروه مکانیک جامدات (آقای مهندس ساغرچی و آقای مهندس رشیدی) بابت زحمات و تلاش علمی بی وقفه در طول یک سال گذشته و قدردانی می نمایم.

با احترام و آرزوی توفیق روز افزون

پیمان رجائیان

نیمه شعبان ۱۴۰۱