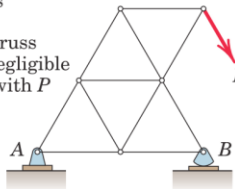
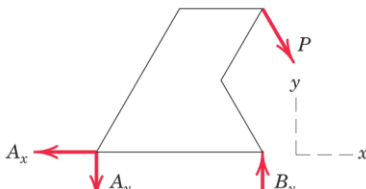
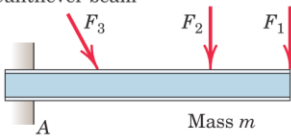
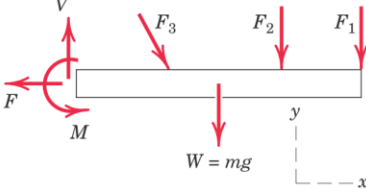
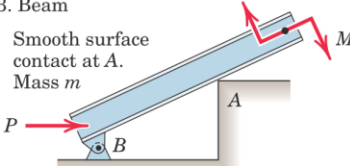
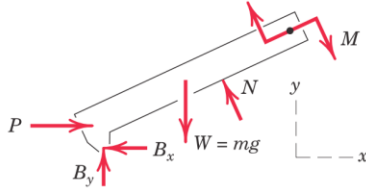
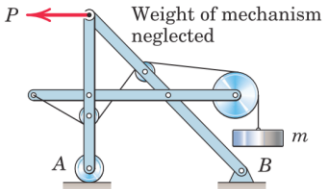
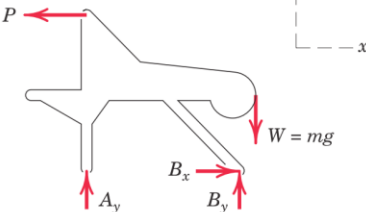




دانشکده فنی ثامن الحجج (ع) مشهد

جزوه درس استاتیک (اسلایدها)

(مبتنی بر ویرایش نهم بی یر - جانستون و ...)

SAMPLE FREE-BODY DIAGRAMS	
Mechanical System	Free-Body Diagram of Isolated Body
1. Plane truss Weight of truss assumed negligible compared with P 	
2. Cantilever beam 	
3. Beam Smooth surface contact at A. Mass m 	
4. Rigid system of interconnected bodies analyzed as a single unit Weight of mechanism neglected 	

مهرماه ۹۲

درس مهندسی کرمی

VECTOR MECHANICS FOR ENGINEERS:
STATICS

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.

Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech University



مقدمه

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس کرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مرجع مورد استفاده و ارزشیابی

استاتیک: ۳ واحد تئوری

مرجع: کتاب استاتیک بیر- جانستون، ویرایش دهم، ترجمه اردشیر اطمینانی
(جزوه مسائل)

ارزشیابی:

حضور منظم ۱ نمره

امتحان میان ترم ۶ نمره

امتحان پایان ترم ۱۴ نمره

فصل اول: تعاریف

- ۱- تعریف علم مکانیک
- ۲- تقسیم بندی علم مکانیک
- ۳- قوانین نیوتن
- ۴- سیستم واحدها

فصل دوم: استاتیک ذره - نیروهای صفحه ای

- ۱- تعریف نیرو
- ۲- اصل اول استاتیک (قانون متوازی الاضلاع)
- ۳- تجزیه و ترکیب نیروها
- ۴- مؤلفه های یک نیرو در مختصات قائم
- ۵- برآیند دو یا چند نیرو به روش ترسیمی
- ۶- برآیند دو یا چند نیرو به روش تحلیلی
- ۷- تعادل یک نقطه مادی (تعادل ذره)
- ۸- مؤلفه های یک نیروی فضایی به روش اسکالر
- ۹- مؤلفه های یک نیروی فضایی به روش برداری
- ۱۰- برآیند نیروهای فضایی
- ۱۱- تعادل ذره در فضا

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

فصل سوم: سیستم نیروهای فضایی

- ۱- ضرب داخلی دو بردار فضایی
- ۲- تعیین زاویه دو بردار فضایی
- ۳- تصویر یک بردار روی امتداد دلخواه
- ۴- ضرب خارجی دو بردار فضایی
- ۵- گشتاور یک نیروی فضایی حول یک نقطه
- ۶- گشتاور یک نیروی فضایی حول یک محور
- ۷- قضیه وارینیون
- ۸- گشتاور زوج نیرو (گشتاور کوپل)
- ۹- انتقال نیرو به موازات خود
- ۱۰- سیستم کوپل نیروی معادل

فصل چهارم: تعادل اجسام صلب

- ۱- نمودار آزاد اجسام
- ۲- معادلات تعادل در مسائل دوبعدی و سه بعدی
- ۳- انواع تکیه گاه
- ۴- تعیین عکس العمل تکیه گاهی
- ۵- تعادل اجسام دو نیرویی و سه نیرویی
- ۶- تعیین نیرو و گشتاور در قاب های ساده

فصل ششم: تحلیل سازه (خرپا)

- ۱- تعریف خرپا
- ۲- تحلیل خرپا به روش تعادل مفصل (روش گره)
- ۳- تحلیل خرپا به روش برش (روش مقاطع)

فصل پنجم: مرکز هندسی، گشتاور اول

سطح و نیروهای گسترده

- ۱- مرکز جرم (مرکز ثقل)
- ۲- مرکز هندسی سطوح
- ۳- گشتاور اول سطح
- ۴- نیروهای گسترده روی تیرها (تبدیل نیروی گسترده به متمرکز)

فصل هفتم: تحلیل تیرها

- ۱- نیروهای داخلی در تیرها
- ۲- تعیین نمودار نیروی برشی و گشتاور خمشی با روش برش
- ۳- روابط میان بار، نیروی برشی و گشتاور خمشی
- ۴- تعیین نمودار نیروی برشی و گشتاور خمشی با روش سطح زیر منحنی

فصل نهم: گشتاور اینرسی (گشتاور لختی) (ممان اینرسی)

- ۱- تعریف گشتاور دوم سطح
- ۲- گشتاور دوم سطح برای سطوح متعارف
- ۳- قانون محورهای موازی
- ۴- گشتاور دوم سطح برای سطوح مرکب

تعریف علم مکانیک: مکانیک شاخه ای از علم فیزیک است که در رابطه با سکون یا حرکت اجسام تحت اثر نیرو بحث می کند. علم مکانیک در بسیاری زمینه ها نظیر ارتعاشات، پایداری و مقاومت سازه ها و ساختمان ها، ماشین ها، راکت ها، هواپیماها، موتورهای احتراقی، جریان سیالات و ماشین های الکتریکی کاربرد دارد.

تقسیم بندی علم مکانیک: بر حسب نوع مسائل مکانیک متشکل از استاتیک و دینامیک است.

- ۱- استاتیک؛ یا علم ایستایی عبارتست از علم تعادل اجسام تحت بار.
 - ۲- دینامیک؛ علم حرکت اجسام که خود شامل سینماتیک و سینتیک است.
- از نظر ماهیت اجسام مکانیک به دو بخش زیر تقسیم می شود:
- ۱- مکانیک اجسام تغییر شکل پذیر و تغییر شکل ناپذیر
 - ۲- مکانیک سیالات

قوانین نیوتن

قانون اول نیوتن: اگر برآیند نیروهای وارد بر ذره ای صفر باشد ذره در حال سکون است. (در این حالت اگر ذره دارای حرکت مستقیم الخط یکنواخت باشد با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می دهد).

قانون دوم نیوتن: شتاب یک ذره متناسب با برآیند نیروهای وارد بر آن است (با نیرو متناسب با حاصلضرب جرم در شتاب حرکت است).

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

قانون سوم نیوتن: نیروهای عمل و عکس العمل بین دو جسم در تماس از لحاظ مقدار با هم برابر و در یک امتداد و با جهت مخالف می باشد.

سیستم واحدها:

در سیستم های اندازه گیری کمیت های اصلی عبارتند از: طول، جرم و زمان.
در سیستم بین المللی (جهانی) SI واحدهای کمیت های اصلی عبارتند از:
واحد طول متر (m)، واحد جرم کیلوگرم (kg) و واحد زمان ثانیه (s) می باشد.
بنابراین واحدهای فرعی بصورت زیر تعیین می شود:

...

VECTOR MECHANICS FOR ENGINEERS:
STATICS

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.

Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech University



Statics of Particles

استاتیک ذرات

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

فصل دوم

فصل دوم: استاتیک ذره - نیروهای صفحه ای

- ۱- تعریف نیرو
- ۲- اصل اول استاتیک (قانون متوازی الاضلاع)
- ۳- تجزیه و ترکیب نیروها
- ۴- مؤلفه های یک نیرو در مختصات قائم
- ۵- برآیند دو یا چند نیرو به روش ترسیمی
- ۶- برآیند دو یا چند نیرو به روش تحلیلی
- ۷- تعادل یک نقطه مادی (تعادل ذره)
- ۸- مؤلفه های یک نیروی فضایی به روش اسکالر
- ۹- مؤلفه های یک نیروی فضایی به روش برداری
- ۱۰- برآیند نیروهای فضایی
- ۱۱- تعادل ذره در فضا

کمیت‌های فیزیکی:

۱- کمیت‌های عددی (اسکالر): فقط با مقدار مشخص می‌گردد مانند: دما، کار، انرژی، حجم و سطح ...

۲- کمیت‌های برداری: علاوه بر مقدار توسط راستا، جهت و نقطه اثر مشخص می‌گردد مانند: نیرو، سرعت، تغییر مکان، شتاب و گشتاور.

تعریف نیرو (Force):

تأثیر یک جسم روی جسم دیگر نیرو نامیده می‌شود. نیرو عاملی است که باعث تغییر شکل یا تغییر حرکت یا سکون جسم می‌گردد. نیرو بردار است.

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

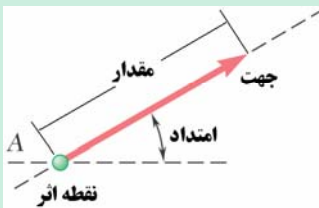
مشخصات نیرو:

۱- راستای (امتداد)

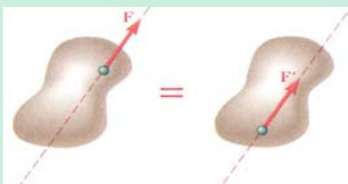
۲- جهت

۳- بزرگی (قدر مطلق) (مقدار)

۴- نقطه اثر



اصل قابلیت انتقال نیرو: چون در استاتیک اجسام را صلب فرض می‌کنیم لذا نیرو را می‌توان روی امتدادش جابجا کرد.



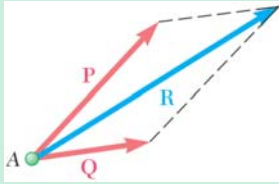
بنابراین مشخصه نیرو فقط راستا، جهت و مقدار است.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

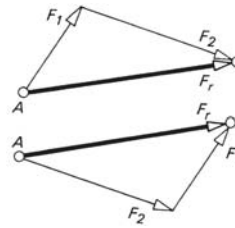
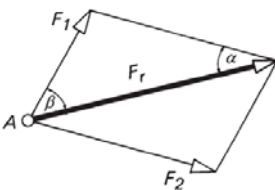
قانون متوازی الاضلاع

اصل اول استاتیک (قانون متوازی الاضلاع):

به جای دو نیروی مؤثر در یک جسم صلب می توان یک نیرو معادل با آن دو نیرو قرار داد. این نیرو قطر متوازی الاضلاعی است که با آن دو نیرو ساخته می شود و از محل تقاطع دو امتداد نیرو می گذرد.



R معادل (برابند) P و Q است.



© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

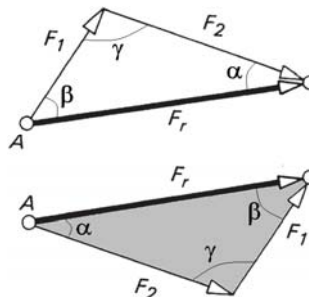
1 - 5

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

قانون سینوسها و کسینوسها برای مثلث



$$\frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{F_r}{\sin \gamma}$$

قانون سینوسها

$$F_r^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos \gamma$$

قانون کسینوسها

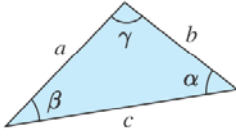
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 6

Vector Mechanics for Engineers: Statics

قانون سینوسها و کسینوسها برای مثلث



Law of sines

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Law of cosines

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

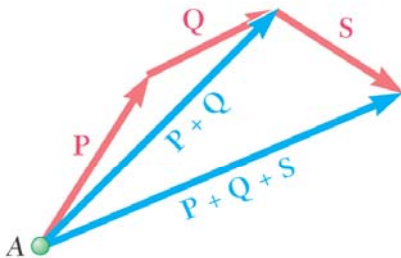
درس استاتیک مهندس کرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

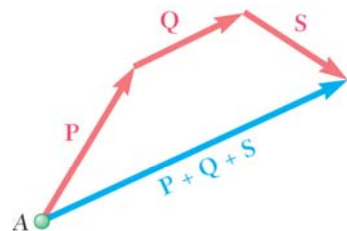
قانون متوازی الاضلاع - چند ضلعی نیروها

چند ضلعی نیروها:

بر اساس قانون متوازی الاضلاع میتوان تک تک نیروها را به دنبال هم ترسیم کرده و برابند نیروها را (بارسم چند ضلعی نیروها) بدست آورد.



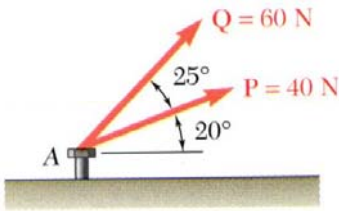
قانون متوازی الاضلاع



چند ضلعی نیروها

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال 1 (ترکیب یا برابند دو نیرو)



مثال ۱ - دو نیروی ۴۰ و ۶۰ نیوتونی مطابق شکل به پیچ مقابل اعمال شده است. مطلوبست:

الف) تعیین برابند این دو نیرو

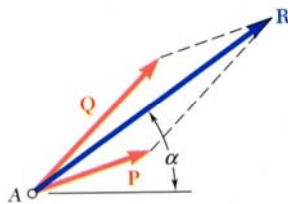
ب) تعیین امتداد برابند

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

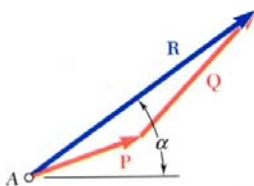
Vector Mechanics for Engineers: Statics

حل به روش ترسیمی (ترسیم متوازی الاضلاع و چند ضلعی نیروها):



۱ - بعد از ترسیم متوازی الاضلاع، طول بردار برآیند و امتداد آن اندازه گیری می شود.

$$R = 98 \text{ N} \quad \alpha = 35^\circ$$



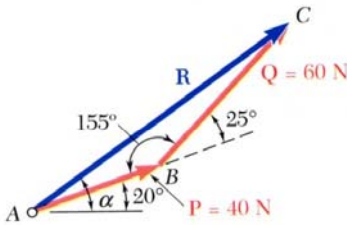
۲ - بعد از ترسیم نیروها به دنبال هم، طول بردار برآیند و امتداد آن اندازه گیری می شود.

$$R = 98 \text{ N} \quad \alpha = 35^\circ$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

حل به روش مثلثاتی:

ترسیم مثلث نیروها و نوشتن قانون کسینوسها



$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos B$$

$$R^2 = (40\text{N})^2 + (60\text{N})^2 - 2(40\text{N})(60\text{N})\cos 155^\circ$$

$$R = 97.73\text{N}$$

$$\frac{\sin A}{Q} = \frac{\sin B}{R}$$

سپس از قانون سینوسها داریم:

$$\sin A = \sin B \frac{Q}{R}$$

$$\sin A = \sin 155^\circ \frac{60\text{N}}{97.73\text{N}} = 0.26$$

$$A = 15.04^\circ$$

$$\alpha = 20^\circ + A$$

$$\alpha = 35.04^\circ$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

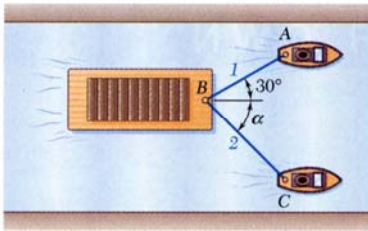
2 - 11

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال دوم (تجزیه یک نیرو روی دو امتداد معلوم):



مثال ۲ - قایق B توسط دو یدک کشی A و C

کشیده می شود.

اگر برایند نیروهای وارد بر قایق B در امتداد افق و

برابر 25kN باشد مطلوبست:

الف) تعیین کشش در هر کابل برای $\alpha = 45^\circ$

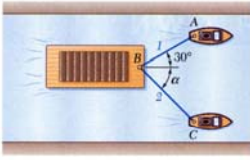
ب) زاویه α برای اینکه کشش در کابل ۲ حداقل باشد.

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

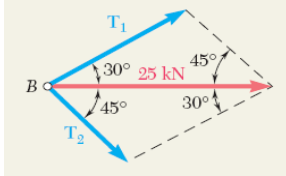
2 - 12

Vector Mechanics for Engineers: Statics

حل الف):

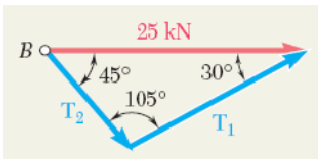


حل به روش ترسیمی: بعد از ترسیم متوازی الاضلاع و اندازه گیری اضلاع متوازی الاضلاع داریم:



$$T_1 = 18.5 \text{ kN} \quad T_2 = 13 \text{ kN}$$

حل به روش مثلثاتی و استفاده از قانون سینوسها:



$$\frac{T_1}{\sin 45^\circ} = \frac{T_2}{\sin 30^\circ} = \frac{25 \text{ kN}}{\sin 105^\circ}$$

$$T_1 = 18.3 \text{ kN} \quad T_2 = 12.94 \text{ kN}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

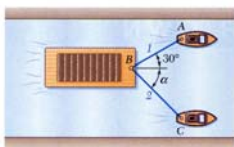
2 - 13

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

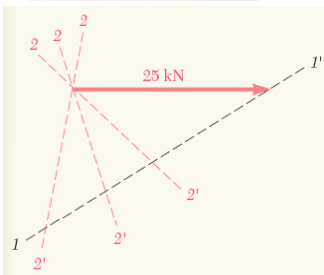
درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

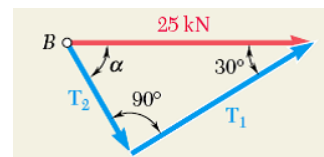
حل ب):



با اعمال قانون مثلث و بررسی α های مختلف، حداقل کشش در امتداد ۲ بدست می آید.



بر اساس شکل مقابل، حداقل کشش در امتداد ۲ وقتی اتفاق می افتد که T_1 و T_2 برهمدیگر عمود باشند.



$$T_2 = (25 \text{ kN}) \sin 30^\circ$$

$$T_2 = 12.5 \text{ kN}$$

$$T_1 = (25 \text{ kN}) \cos 30^\circ$$

$$T_1 = 21.7 \text{ kN}$$

$$\alpha = 90^\circ - 30^\circ$$

$$\alpha = 60^\circ$$

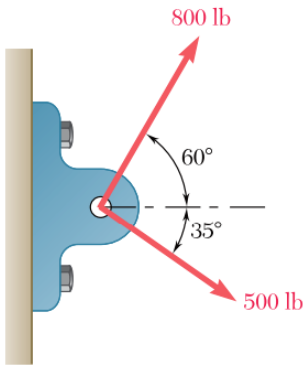
© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 14

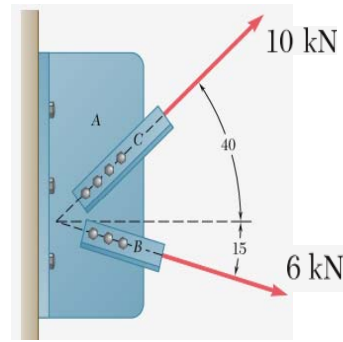
Vector Mechanics for Engineers: Statics

تمرین (تکلیف منزل) :

در شکل های داده شده، نیروی برآیند و امتداد آن را با روش ترسیمی و مثلثاتی بدست آورید.



906 lb $\angle$ 26.6°



14.3 kN $\angle$ 19.9°

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 15

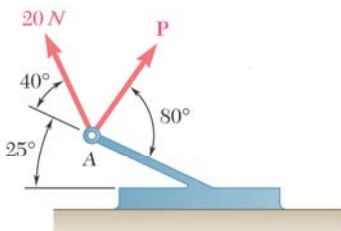
دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

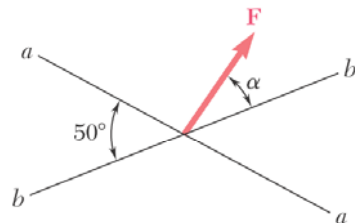
تمرین (تکلیف منزل) :

۲- مقدار نیروی P طوری تعیین کنید که برآیند دو نیروی اعمال شده به A قائم باشد. برآیند را نیز تعیین کنید.



P = 14.73 N ; R = 30.2 N

۱- نیروی F برابر ۱۰۰ نیوتن روی دو امتداد a-a و b-b تجزیه شده است. اگر مولفه a برابر ۷۰ نیوتن باشد، زاویه α و مولفه امتداد b را بدست آورید.



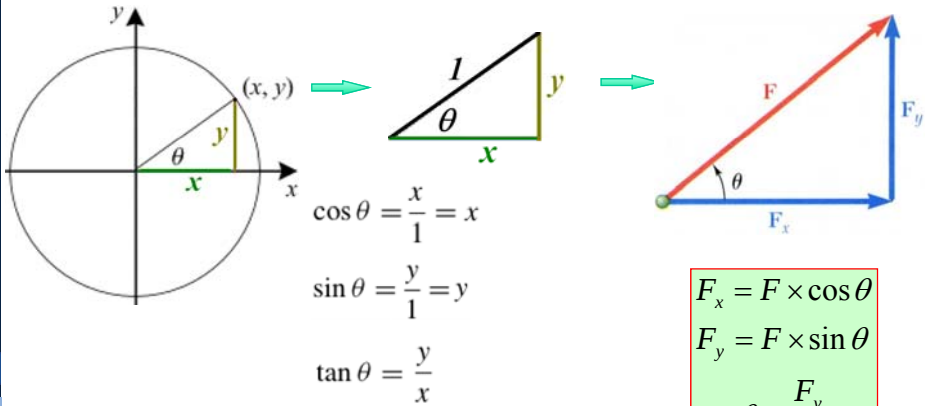
32.4 Deg and 129.4 N

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 16

Vector Mechanics for Engineers: Statics

دایره مثلثاتی - مثلث قائم الزاویه - مولفه‌های قائم یک نیرو



$$F_x = F \times \cos \theta$$

$$F_y = F \times \sin \theta$$

$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x}$$

در مثلث قائم الزاویه:

وتر ضلعی است که روبروی زاویه قائم قرار دارد که بلندترین ضلع مثلث نیز می باشد.

نسبت ضلع مقابل زاویه، به وتر را سینوس می گویند.

نسبت ضلع مجاور زاویه، به وتر را کسینوس می گویند.

نسبت ضلع مقابل زاویه به ضلع مجاور زاویه را تانژانت گویند.

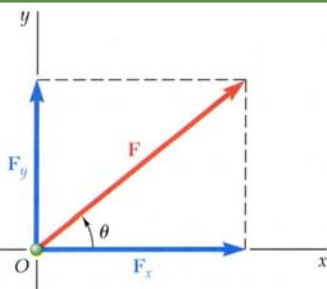
2 - 17

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مولفه های عمودی یک نیرو - بردار واحد (توضیح شفاهی)

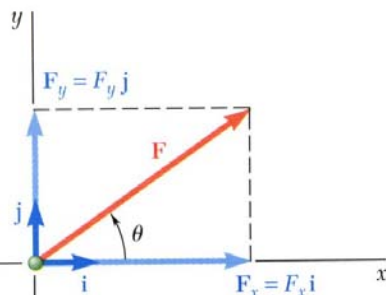


میتوان یک نیرو را به مولفه های عمودی تجزیه کرد. در این صورت متوازی الاضلاع نیروها یک مستطیل (دو مثلث قائم الزاویه) خواهد بود. اضلاع مثلث قائم الزاویه مولفه های نیرو در جهت x و y هستند که بصورت زیر تعیین می شوند:

$$F_x = F \times \cos \theta$$

$$F_y = F \times \sin \theta$$

F و θ معلوم اند



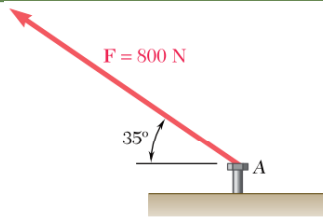
نیروی F را میتوان بوسیله مولفه های قائم و به کمک بردارهای یکه بصورت زیر نشان داد.

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$$

2 - 18

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال:

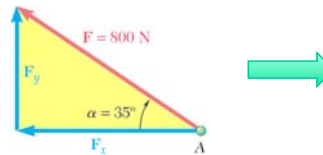


نیروی برابر ۸۰۰ نیوتن مطابق شکل به پیچ A اثر می کند.

مطلوبست:

الف) تعیین مولفه های عمودی نیرو

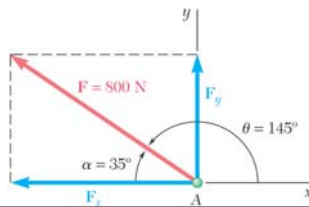
ب) بیان برداری نیرو



$$F_x = -F \times \cos \alpha = 800 \times \cos 35 = -655 \text{ N}$$

حل: الف

$$F_y = F \times \sin \alpha = 800 \times \sin 35 = 459 \text{ N}$$



حل: ب

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} = -655 \vec{i} + 459 \vec{j}$$

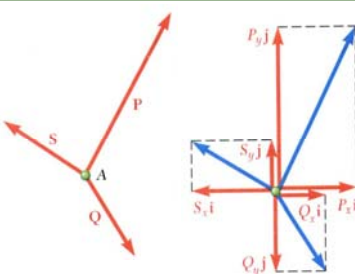
2 - 19

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

ترکیب (برایند) نیروها، با استفاده از مولفه های قائم آنها:



برایند ۳ نیروی P و Q و S را تعیین کنید (تعیین نیروی R).

چون نیرو بردار است، جمع (ترکیب) آنها بصورت برداری زیر انجام

می شود:

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{S}$$

اگر بجای هر نیرو، مولفه های قائم آن را قرار دهیم، داریم:

$$\begin{aligned} R_x \vec{i} + R_y \vec{j} &= P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + Q_x \vec{i} + Q_y \vec{j} + S_x \vec{i} + S_y \vec{j} \\ &= (P_x + Q_x + S_x) \vec{i} + (P_y + Q_y + S_y) \vec{j} \end{aligned}$$

نتیجه می شود که مولفه های برایند، با جمع مولفه های نیروها برابر است. یعنی:

$$R_x = P_x + Q_x + S_x$$

$$R_y = P_y + Q_y + S_y$$

$$R_x = \sum F_x$$

$$R_y = \sum F_y$$

سپس برای پیدا کردن برایند نیروها و جهت آن داریم:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{R_y}{R_x}$$

2 - 20

Vector Mechanics for Engineers: Statics

تعیین برآیند دو یا چند نیرو:

بنابراین برای تعیین برآیند دو یا چند نیرو میتوان به دو روش زیر عمل کرد:

۱- روش برداری (ترسیم بردار نیروها به دنبال هم) $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{S}$

۲- روش اسکالر (استفاده از مولفه های قائم)

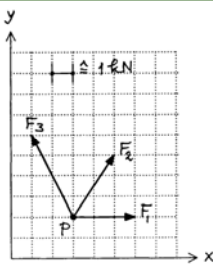
$$\begin{aligned} R_x &= \sum F_x \\ R_y &= \sum F_y \end{aligned} \Rightarrow R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{R_y}{R_x}$$

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال:



مثال- سه نیرو مطابق شکل به نقطه P اثر می کند. مطلوبست:

الف) تعیین برآیند این سه نیرو به روش مجموع مولفه های قائم (اسکالر).

ب) تعیین برآیند این سه نیرو به روش ترسیمی (برداری).

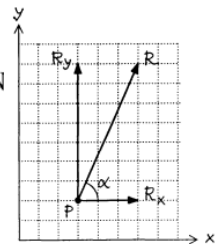
حل: الف

$$R_x = F_{x;1} + F_{x;2} + F_{x;3} = (3 \text{ kN}) + (2 \text{ kN}) + (-2 \text{ kN}) = 3 \text{ kN}$$

$$R_y = F_{y;1} + F_{y;2} + F_{y;3} = (0 \text{ kN}) + (3 \text{ kN}) + (4 \text{ kN}) = 7 \text{ kN}.$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(3 \text{ kN})^2 + (7 \text{ kN})^2} = \sqrt{58} \text{ kN}.$$

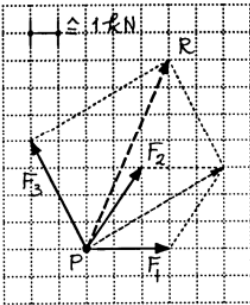
$$\tan \alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{7 \text{ kN}}{3 \text{ kN}} = 2.33 \Rightarrow \alpha = 66.8^\circ$$



Vector Mechanics for Engineers: Statics

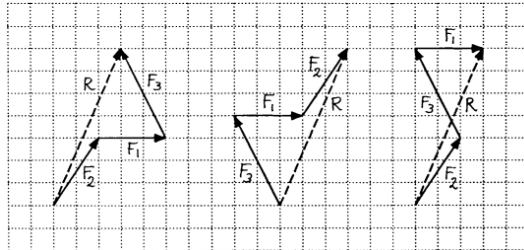
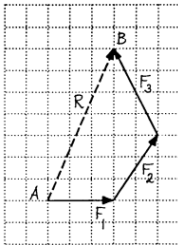
ادامه حل:

حل: ب



۱- با ترسیم مکرر متوازی الاضلاع نیروها

۲- با ترسیم چند ضلعی نیروها



© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 23

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

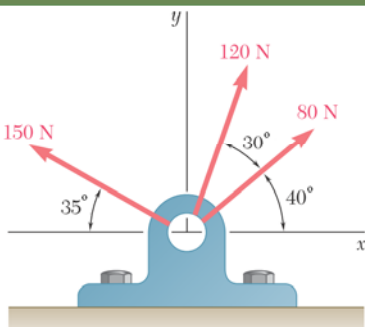
Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال:

مثال - سه نیرو مطابق شکل به یاتاقان اثر می کند. مطلوبست:

الف) تعیین برآیند این سه نیرو .

ب) تعیین امتداد برآیند.



حل: الف

$$R_x = \sum F_x = 80 \cos 40^\circ + 120 \cos 70^\circ - 150 \cos 35^\circ = -20.55 \text{ N}$$

$$R_y = \sum F_y = 80 \sin 40^\circ + 120 \sin 70^\circ + 150 \sin 35^\circ = 250.22 \text{ N}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-20.55)^2 + 250.22^2} = 251 \text{ N}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1} \frac{20.55}{250.22} = 4.7^\circ$$

حل: ب

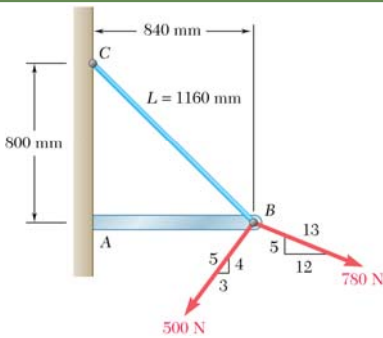


© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 24

Vector Mechanics for Engineers: Statics

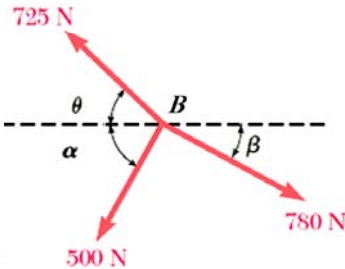
مثال:



مثال- کشش در کابل BC برابر ۷۲۵ نیوتن می‌باشد. برآیند سه نیروی اعمال شده به نقطه B را (به روش اسکالر) بدست آورید.

حل) ابتدا با توجه به شکل، سینوس و کسینوس زاویه‌ها بصورت زیر تعیین می‌شود.

$$\begin{aligned}\sin \beta &= \frac{5}{13} \\ \cos \beta &= \frac{12}{13} \\ \sin \alpha &= \frac{4}{5} \\ \cos \alpha &= \frac{3}{5} \\ \sin \theta &= \frac{800}{1160} \\ \cos \theta &= \frac{840}{1160}\end{aligned}$$



© 2010

red.

2 - 25

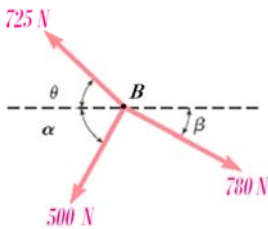
دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال:

$$\sin \beta = \frac{5}{13} \quad \cos \beta = \frac{12}{13} \quad \sin \alpha = \frac{4}{5} \quad \cos \alpha = \frac{3}{5} \quad \sin \theta = \frac{800}{1160} \quad \cos \theta = \frac{840}{1160}$$



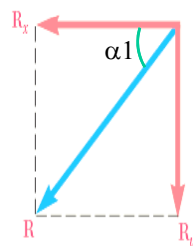
Magnitude, N	x Component, N	y Component, N
725	-525	500
500	-300	-400
780	720	-300
	$R_x = -105$	$R_y = -200$

$$\mathbf{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} \quad \mathbf{R} = (-105 \text{ N})\mathbf{i} + (-200 \text{ N})\mathbf{j}$$

تعیین مقدار و جهت برآیند:

$$\tan \alpha_1 = \frac{-R_y}{-R_x} = \frac{200 \text{ N}}{105 \text{ N}} \quad \alpha_1 = 62.3^\circ$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 225.9 \text{ N}$$



Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 26

Vector Mechanics for Engineers: Statics

تعداد یک نقطه مادی (تعداد ذره)

طبق قانون اول نیوتن، برآیند نیروهای وارد بر یک ذره در حال تعادل صفر است. لذا داریم:

چه موقع برآیند نیروها صفر است؟

$$\vec{R} = \sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Rightarrow 1 - \text{ترسیم چند ضلعی بسته نیروها} \\ \Rightarrow 2 - \begin{cases} R_x = 0 \Rightarrow \sum F_x = 0 \\ R_y = 0 \Rightarrow \sum F_y = 0 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{استفاده از} \\ \text{معادلات تعادل} \end{array}$$

بنابراین برای حل مسائل به روش تعادل ذره، باید یک نقطه مادی را در نظر بگیریم و ابتدا نمودار آزاد نقطه را ترسیم نموده به یکی از دو روش فوق عمل کنیم. یعنی:

۱- نیروهای وارد بر نقطه مادی را بدنبال یکدیگر ترسیم کرده و چند ضلعی بسته‌ای را ترسیم کنیم.

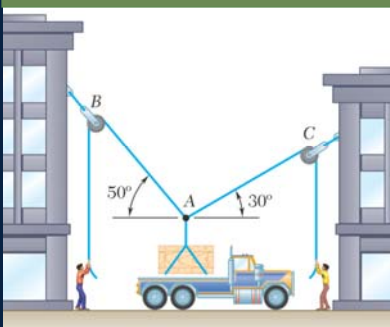
۲- معادلات تعادل را برای نیروهای وارد بر نقطه مادی بنویسیم.

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال:



مثال- بار ۷۳۶ نیوتنی نشان داده شده، توسط دو کابل AC و AB نگه داشته شده است. مطلوبست تعیین نیروی کششی در هر یک از این دو کابل.

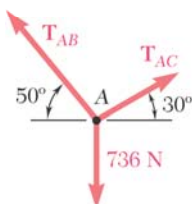
حل) در حل مسائل به روش تعادل به یکی از دو صورت زیر عمل می شود.

(روش اول) ترسیم چند ضلعی بسته نیروها :

۱- ترسیم نمودار آزاد

۲- ترسیم چند ضلعی بسته نیروها

۳- تعیین نیروهای مجهول به کمک قوانین SIN و COS



(روش دوم) استفاده از معادلات تعادل :

۱- ترسیم نمودار آزاد

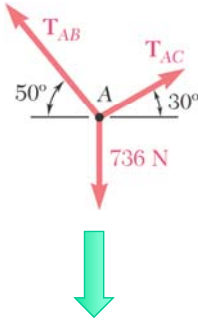
۲- نوشتن معادلات تعادل

۳- تعیین نیروهای مجهول به کمک حل این معادلات

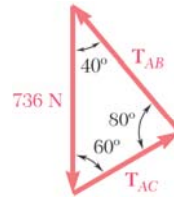
Vector Mechanics for Engineers: Statics

ادامه حل:

نمودار آزاد نقطه A:



چند ضلعی بسته نیروها:



روابط مثلثاتی:

$$\frac{T_{AB}}{\sin 60^\circ} = \frac{T_{AC}}{\sin 40^\circ} = \frac{736 \text{ N}}{\sin 80^\circ}$$

$$T_{AB} = 647 \text{ N} \quad T_{AC} = 480 \text{ N}$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 & \Rightarrow -T_{AB} \cos 50^\circ + T_{AC} \cos 30^\circ = 0 \\ \sum F_y = 0 & \Rightarrow T_{AB} \sin 50^\circ + T_{AC} \sin 30^\circ - 736 = 0 \end{cases}$$

نوشتن معادلات تعادل:

$$\begin{cases} T_{AB} = 1.347 T_{AC} \\ (1.347 T_{AC}) \sin 50^\circ + T_{AC} \sin 30^\circ = 736 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_{AB} = 647 \text{ N} \\ T_{AC} = 480 \text{ N} \end{cases}$$

حل معادلات تعادل:

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 29

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

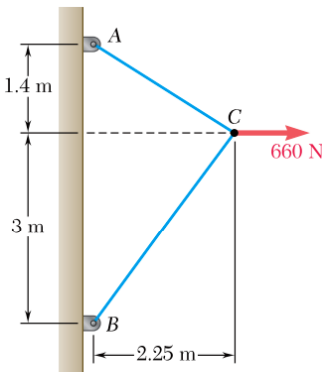
درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

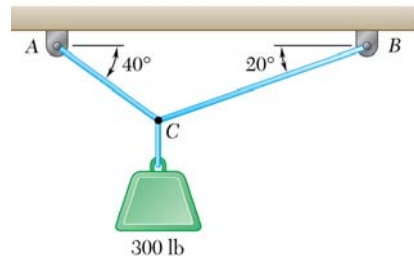
تمرین (تکلیف منزل):

۲- در شکل های داده شده، نیروی کشش در کابلهای AC و BC را بدست آورید.

(از روش تعادل - هم با ترسیم چند ضلعی نیروها و هم با نوشتن معادلات تعادل)



(Ans) : $T_{AC} = 530 \text{ N}$, $T_{BC} = 350 \text{ N}$.



(Ans) : $T_{AC} = 326 \text{ lb}$, $T_{BC} = 265 \text{ lb}$.

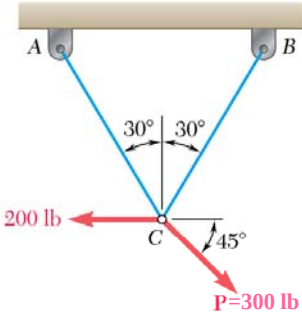
© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 30

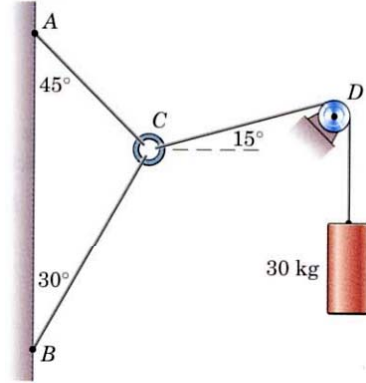
Vector Mechanics for Engineers: Statics

تمرین (تکلیف منزل) :

۴ و ۳- کشش در کابلهای AC و BC را بدست آورید. (هم با ترسیم چند ضلعی نیروها و هم با نوشتن معادلات تعادل)



(Ans): $T_{AC} = 134.6 \text{ lb}$, $T_{BC} = 110.4 \text{ lb}$.



(Ans): $T_{AC} = 215 \text{ N}$, $T_{BC} = 264 \text{ N}$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

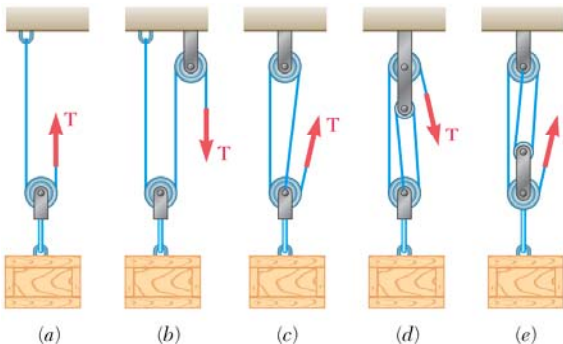
2 - 31

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال: (از تعادل نقطه مادی) - مساله 67-2 (توضیح)



اگر جرم بار 250kg باشد، کشش در کابل (T) را برای هر حالت بدست آورید.

Ans: (a) 1226 N. (b) 1226 N. (c) 817 N. (d) 817 N. (e) 613 N.

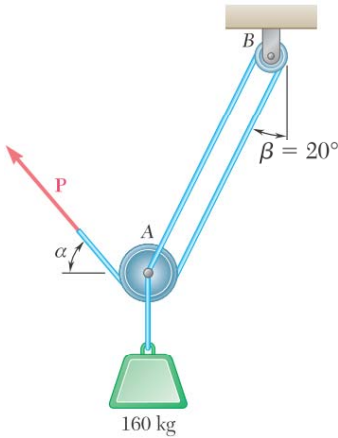
© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 32

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال: (از تعادل نقطه مادی) – مساله 2-65 (توضیح)

مقدار و امتداد نیروی P را تعیین کنید.



(a) $602 \text{ N} \searrow 46.8^\circ$. (b) $1365 \text{ N} \nearrow 46.8^\circ$.

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 33

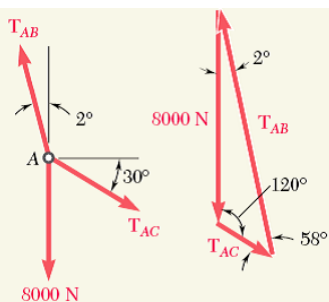
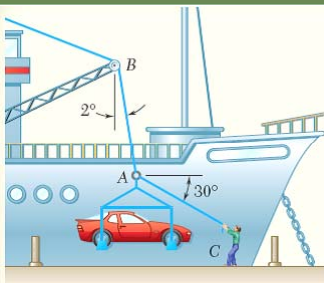
دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال: (از تعادل نقطه مادی) – (توضیح)

وزن اتوموبیل ۸۰۰۰ نیوتن است. کشش در کابلهای AC و AB را بدست آورید.



بانوشتن رابطه سینوسها داریم:

$$\frac{T_{AB}}{\sin 120^\circ} = \frac{T_{AC}}{\sin 2^\circ} = \frac{8000 \text{ N}}{\sin 58^\circ}$$

$$T_{AB} = 8170 \text{ N}$$

$$T_{AC} = 329 \text{ N}$$

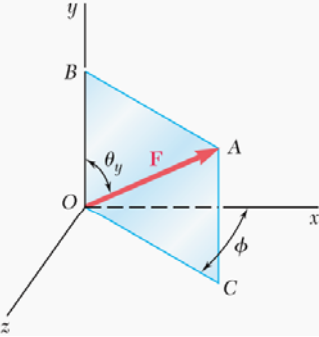
© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 34

Vector Mechanics for Engineers: Statics

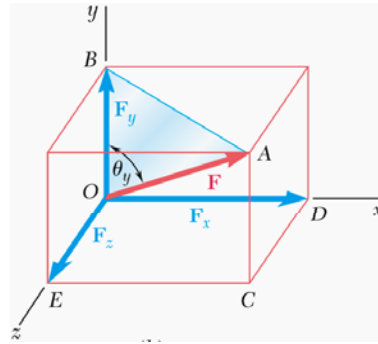
نیرو در فضا (نمایش یک نیروی فضایی)

تا اینجا، با مسائل دو بعدی (صفحه‌ای) آشنا شدیم. نیروی فضایی علاوه بر مولفه‌های x و y ، روی محور z نیز مولفه دارد. اگر در شکل مقابل زاویه ϕ صفر باشد یک نیروی صفحه‌ای خواهیم داشت. برای تعیین مولفه‌های یک نیروی فضایی، صفحه‌ای از آن عبور داده و آنرا به یک نیروی صفحه‌ای تبدیل می‌کنیم.



معلومات: $|F|$, θ_y , ϕ

مجهولات: F_x , F_y , F_z



معلومات: $|F|$, θ_x , θ_y , θ_z

مجهولات: F_x , F_y , F_z

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 35

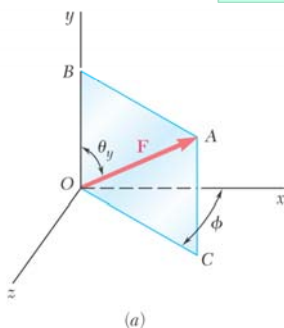
دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

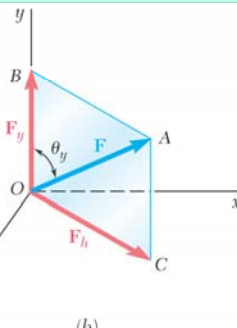
Vector Mechanics for Engineers: Statics

مولفه‌های قائم یک نیروی در فضا (مولفه‌های یک نیروی فضایی)

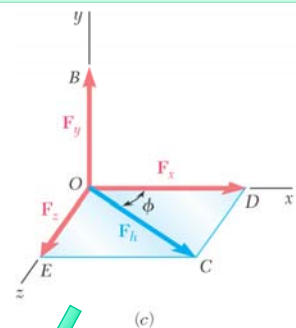
مولفه‌های نیروی فضایی F را روی محورهای x و y و z بدست آورید.



(a)



(b)



(c)

۱- تجزیه نیروی F در امتداد افقی و قائم:

$$F_y = F \cos \theta_y$$

$$F_h = F \sin \theta_y$$

۲- تجزیه نیروی افقی F_h به مولفه‌های قائم:

$$F_x = F_h \cos \phi = F \sin \theta_y \cos \phi$$

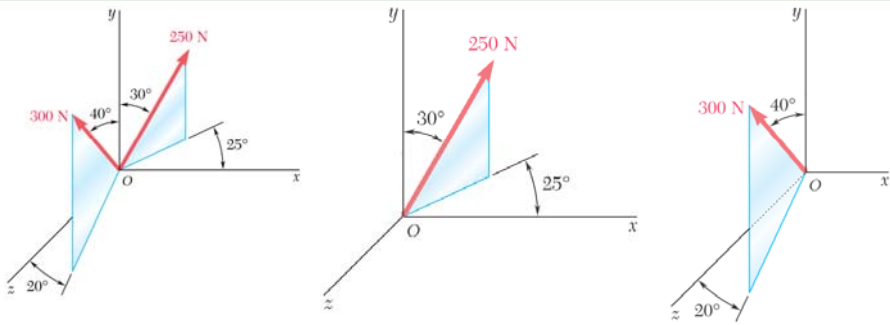
$$F_z = F_h \sin \phi = F \sin \theta_y \sin \phi$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 36

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال:



(a) $F_x = 113.3 \text{ N}$, $F_y = 217 \text{ N}$, $F_z = -52.8 \text{ N}$.

(b) $\theta_x = 63.1^\circ$, $\theta_y = 30.0^\circ$, $\theta_z = 102.2^\circ$.

(a) $F_x = 65.9 \text{ N}$, $F_y = 230 \text{ N}$, $F_z = 181.2 \text{ N}$.

(b) $\theta_x = 77.3^\circ$, $\theta_y = 40.0^\circ$, $\theta_z = 52.8^\circ$.

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

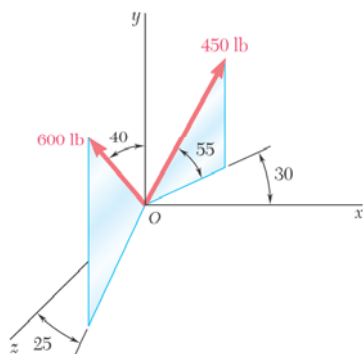
2 - 37

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس کرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال:



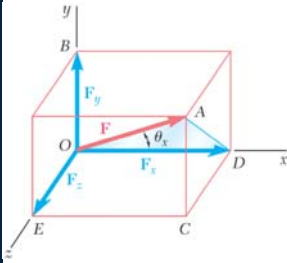
$R = 940 \text{ lb}$; $\theta_x = 65.7^\circ$, $\theta_y = 28.3^\circ$, $\theta_z = 16.4^\circ$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

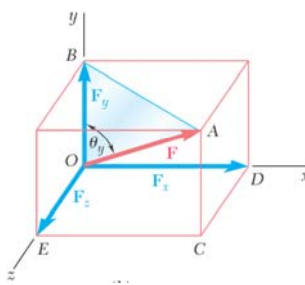
2 - 38

Vector Mechanics for Engineers: Statics

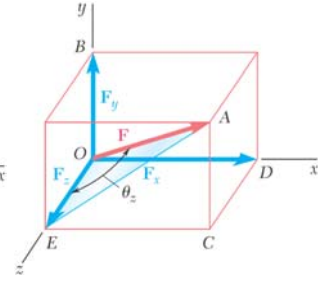
مولفه های قائم یک نیروی در فضا (مولفه های یک نیروی فضایی)



$$F_x = F \cos \theta_x$$



$$F_y = F \cos \theta_y$$



$$F_z = F \cos \theta_z$$

$$F_x = F \cos \theta_x$$

$$F_y = F \cos \theta_y$$

$$F_z = F \cos \theta_z$$

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 39

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

EXAMPLE 2.4 A force of 500 N forms angles of 60° , 45° , and 120° , respectively, with the x , y , and z axes. Find the components F_x , F_y , and F_z of the force.

Substituting $F = 500$ N, $\theta_x = 60^\circ$, $\theta_y = 45^\circ$, $\theta_z = 120^\circ$ into formulas (2.19), we write

$$F_x = (500 \text{ N}) \cos 60^\circ = +250 \text{ N}$$

$$F_y = (500 \text{ N}) \cos 45^\circ = +354 \text{ N}$$

$$F_z = (500 \text{ N}) \cos 120^\circ = -250 \text{ N}$$

Carrying into Eq. (2.20) the values obtained for the scalar components of $\mathbf{F}$, we have

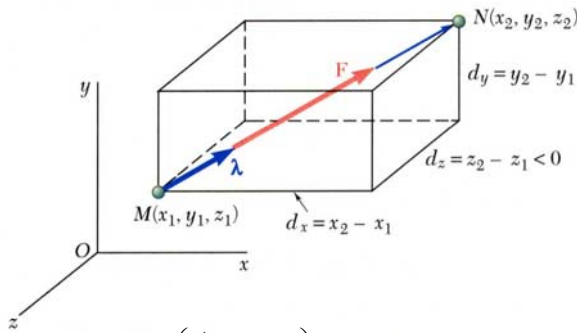
$$\mathbf{F} = (250 \text{ N})\mathbf{i} + (354 \text{ N})\mathbf{j} - (250 \text{ N})\mathbf{k}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 40

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مولفه های یک نیروی فضایی (با معلوم بودن قدرمطلق نیرو و دو نقطه از راستای آن)



$$\begin{aligned}d_x &= x_2 - x_1 \\d_y &= y_2 - y_1 \\d_z &= z_2 - z_1 \\\vec{d} &= d_x \vec{i} + d_y \vec{j} + d_z \vec{k} \\d &= \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}\end{aligned}$$

$$F_x = F \cos \theta_x = F \left(\frac{\text{مجاور ضلع}}{\text{وتر}} \right) = F \frac{d_x}{d}$$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$F_y = F \cos \theta_y = F \left(\frac{\text{مجاور ضلع}}{\text{وتر}} \right) = F \frac{d_y}{d}$$

$$\vec{F} = \frac{F}{d} (d_x \vec{i} + d_y \vec{j} + d_z \vec{k})$$

$$F_z = F \cos \theta_z = F \left(\frac{\text{مجاور ضلع}}{\text{وتر}} \right) = F \frac{d_z}{d}$$

$$\vec{F} = \frac{F}{d} [(x_2 - x_1) \vec{i} + (y_2 - y_1) \vec{j} + (z_2 - z_1) \vec{k}]$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 41

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس کرمی

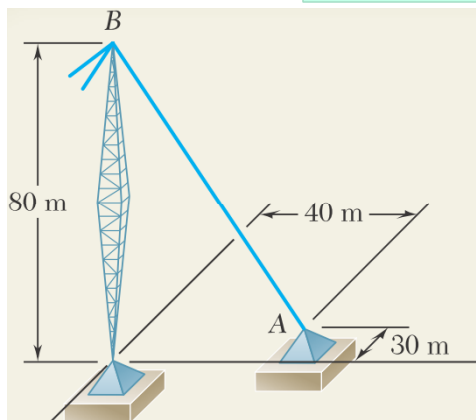
Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال

نیروی کشش در کابل AB برابر ۲۵۰۰ نیوتن است. مطلوبست:

الف) مولفه های این نیرو که به پیچ A اثر می کند (F_x, F_y, F_z) .

ب) زاویه امتداد این نیرو نسبت به محورهای x و y و z $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$.



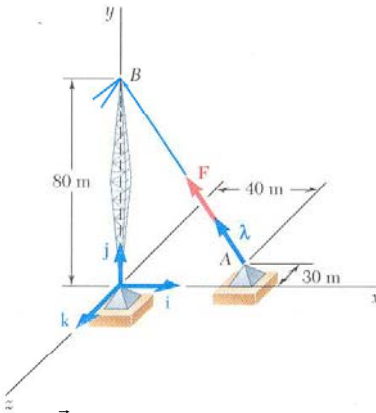
© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 42

Vector Mechanics for Engineers: Statics

حل :

تعیین بردار AB (A به سمت B) :



$$\vec{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

$$\vec{AB} = (-40)\vec{i} + (80)\vec{j} + (30)\vec{k}$$

$$d = AB = \sqrt{(-40)^2 + (80)^2 + (30)^2} = 94.3 \text{ m}$$

$$\vec{F} = \frac{F}{d} [(x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}]$$

$$\vec{F} = \frac{2500}{94.3} [-40\vec{i} + 80\vec{j} + 30\vec{k}]$$

$$\vec{F} = -1060\vec{i} + 2120\vec{j} + 795\vec{k}$$

$$\vec{\lambda} = \vec{u}_{AB}$$

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{AB} = \frac{\vec{AB}}{d} = \left(\frac{-40}{94.3}\right)\vec{i} + \left(\frac{80}{94.3}\right)\vec{j} + \left(\frac{30}{94.3}\right)\vec{k}$$

$$\vec{u}_{AB} = -0.424\vec{i} + 0.848\vec{j} + 0.318\vec{k}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

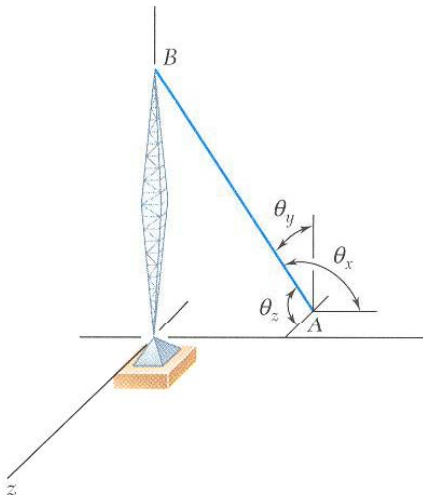
2 - 43

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

ادامه حل :



$$\vec{\lambda} = \cos \theta_x \vec{i} + \cos \theta_y \vec{j} + \cos \theta_z \vec{k}$$

$$= -0.424\vec{i} + 0.848\vec{j} + 0.318\vec{k}$$

$$\theta_x = \cos^{-1}(-0.424) = 115.1^\circ$$

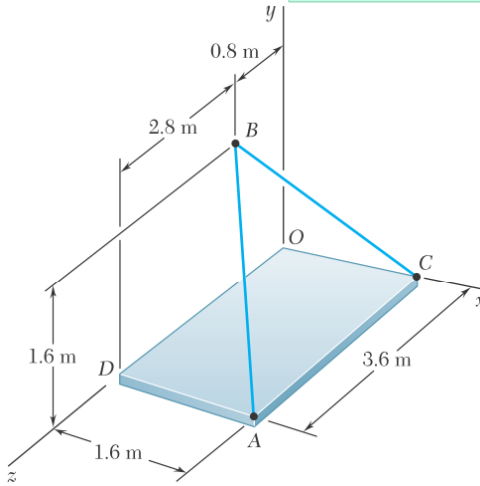
$$\theta_y = \cos^{-1}(0.848) = 32.0^\circ$$

$$\theta_z = \cos^{-1}(0.318) = 71.5^\circ$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 44

نیروی کشش در کابل BC برابر ۴۵۰ نیوتن است. مطلوبست تعیین مولفه‌های این نیرو که به نقطه C اعمال می‌شود.

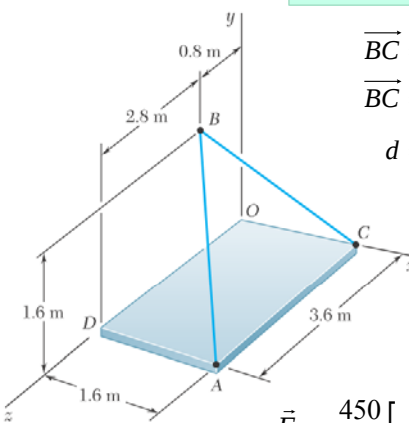


$$C_x = -300 \text{ N}, C_y = 300 \text{ N}, C_z = 150 \text{ N}.$$

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

نیروی کشش در کابل BC برابر ۴۵۰ نیوتن است. مطلوبست تعیین مولفه‌های این نیرو که به نقطه C اعمال می‌شود.



$$\overrightarrow{BC} = (x_B - x_C)\vec{i} + (y_B - y_C)\vec{j} + (z_B - z_C)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{BC} = -1.6\vec{i} + 1.6\vec{j} + 0.8\vec{k}$$

$$d = BC = \sqrt{(-1.6)^2 + (1.6)^2 + (0.8)^2} = 2.4 \text{ m}$$

$$\vec{F} = \frac{F}{d} [(x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}]$$

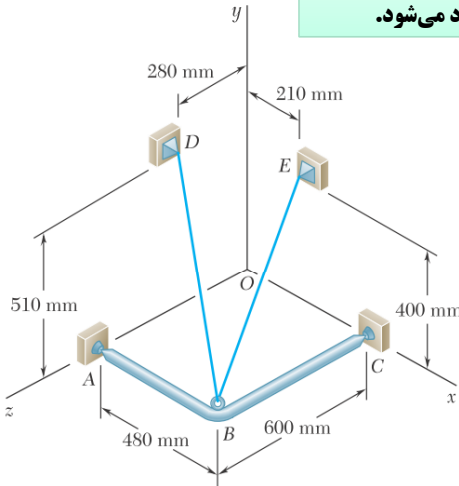
$$\vec{F}_C = \frac{450}{2.4} [-1.6\vec{i} + 1.6\vec{j} + 0.8\vec{k}] = -300\vec{i} + 300\vec{j} + 150\vec{k}$$

$$C_x = -300 \text{ N}, C_y = 300 \text{ N}, C_z = 150 \text{ N}.$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال:

قاب ABC بوسیله کابل DBE که از حلقه بدون اصطکاک B می‌گذرد نگه داشته شده است. اگر کشش در این کابل برابر ۳۸۵ نیوتن باشد مطلوبست مولفه های نیروی کابل که به نقطه D وارد می‌شود.



Ans: 240 N, -255 N, 160.0 N.

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 47

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

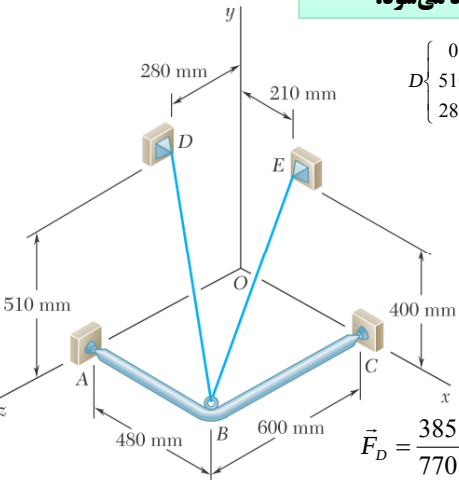
درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

حل:

Ans: 240 N, -255 N, 160.0 N.

قاب ABC بوسیله کابل DBE که از حلقه بدون اصطکاک B می‌گذرد نگه داشته شده است. اگر کشش در این کابل برابر ۳۸۵ نیوتن باشد مطلوبست مولفه های نیروی کابل که به نقطه D وارد می‌شود.



$$D \begin{Bmatrix} 0 \\ 510 \\ 280 \end{Bmatrix} \quad B \begin{Bmatrix} 480 \\ 0 \\ 600 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad B-D \begin{Bmatrix} 480-0=480 \\ 0-510=-510 \\ 600-280=320 \end{Bmatrix}$$

$$d = BD = \sqrt{480^2 + (-510)^2 + 320^2} = 770$$

$$\vec{F} = \frac{F}{d} [(x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}]$$

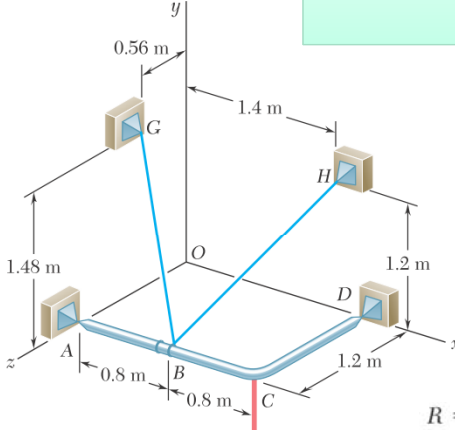
$$\vec{F}_D = \frac{385}{770} [480\vec{i} - 510\vec{j} + 320\vec{k}] = 240\vec{i} - 225\vec{j} + 160\vec{k}$$

2 - 48

Vector Mechanics for Engineers: Statics

تکلیف منزل

دو کابل BG و BH به قاب ACD متصل است. کابل BG تحت نیروی کشش ۵۴۰ نیوتنی و کابل BH تحت نیروی ۷۵۰ نیوتنی است. مطلوبست تعیین مقدار و جهت نیروی برآیند این دو کابل که به نقطه B وارد می‌شود.



$$R = 1171 \text{ N}; \theta_x = 89.5^\circ, \theta_y = 36.2^\circ, \theta_z = 126.2^\circ$$

2 - 49

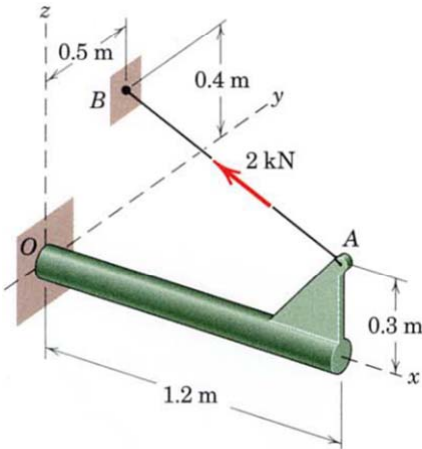
دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال:

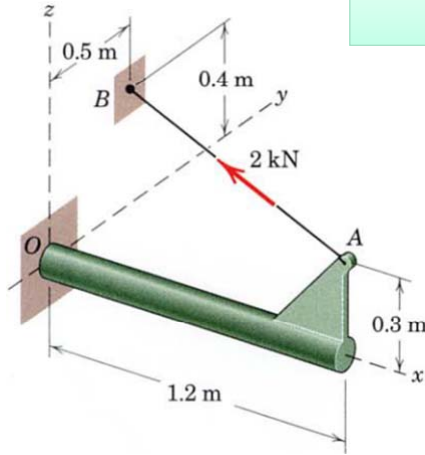
نیروی کشش در کابل AB برابر ۲ کیلونیوتن است. مطلوبست بیان برداری این نیرو که به نقطه A وارد می‌شود.



Vector Mechanics for Engineers: Statics

حل:

نیروی کشش در کابل AB برابر ۲ کیلونیوتن است. مطلوبست بیان برداری این نیرو که به نقطه A وارد می‌شود.



$$A \begin{Bmatrix} 1.2 \\ 0 \\ 0.3 \end{Bmatrix} \quad B \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.4 \end{Bmatrix} \quad B-A \begin{cases} 0-1.2=-1.2 \\ 0.5-0=0.5 \\ 0.4-0.3=0.1 \end{cases}$$

$$d = AB = \sqrt{(-1.2)^2 + 0.5^2 + 0.1^2} = 1.3$$

$$\vec{F} = \frac{F}{d} [(x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}]$$

$$\vec{F}_{AB} = \frac{2}{1.3} [-1.2\vec{i} + 0.5\vec{j} + 0.1\vec{k}] = -1.84\vec{i} + 0.767\vec{j} + 0.153\vec{k}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 51

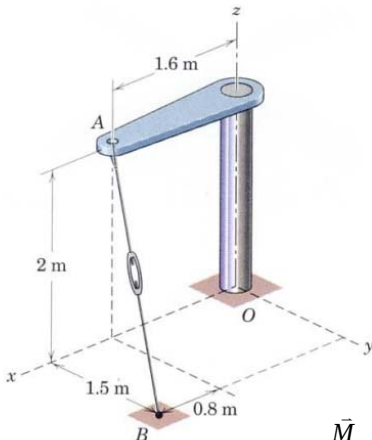
دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال:

2/116 The turnbuckle is tightened until the tension in cable AB is 1.2 kN. Calculate the magnitude of the moment about point O of the force acting on point A.



$$\vec{M}_O = -2.74\vec{i} + 4.39\vec{j} + 2.19\vec{k} \quad \text{kN.m}$$

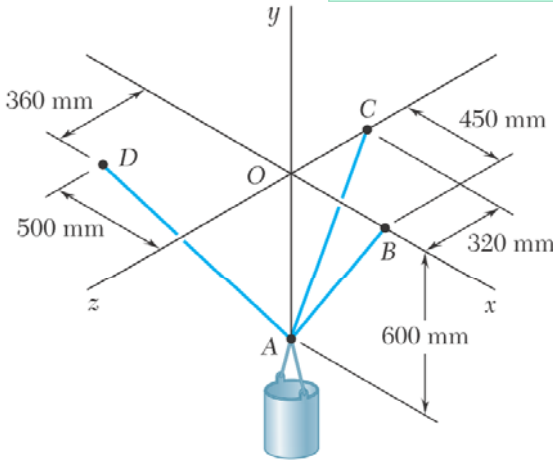
© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 52

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال:

نیروی کشش در کابل AD برابر ۵۱۶ نیوتن است. مطلوبست بیان برداری این نیرو که به نقطه A وارد می‌شود.



$$\vec{F}_{AD} = -300\vec{i} + 360\vec{j} + 216\vec{k} \text{ N}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 53

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسائل فصل دوم:

۲۸-۲۷-۲۳-۲۲-۲۱-۱۳-۱۰-۹-۸-۷-۶-۵-۳-۲✓

۳۷- ۳۶- ۳۵-۳۴- ۳۳-۳۱

۷۶-۷۵-۷۴-۷۳-۷۲-۷۱-۶۷-۶۲-۴۶-۴۴-۴۳✓

۹۴-۹۰-۸۹-۸۷-۸۶-۸۵-۸۲-۸۰-۷۹✓

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

1 - 54

VECTOR MECHANICS FOR ENGINEERS:
STATICSFerdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech Universityاجسام صلب
سیستم معادل نیروها

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

سرفصل مطالب فصل سوم:

فصل سوم: سیستم نیروهای فضایی

- ۱- ضرب داخلی دو بردار فضایی
- ۲- تعیین زاویه دو بردار فضایی
- ۳- تصویر یک بردار روی امتداد دلخواه
- ۴- ضرب خارجی دو بردار فضایی
- ۵- گشتاور یک نیروی فضایی حول یک نقطه
- ۶- گشتاور یک نیروی فضایی حول یک محور
- ۷- قضیه وارینیون
- ۸- گشتاور زوج نیرو (گشتاور کوپل)
- ۹- انتقال نیرو به موازات خود
- ۱۰- سیستم کوپل نیروی معادل

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسائل فصل سوم:

۱ - ۲ - ۴ - ۱۲ - ۲۱ - ۲۲ - ۲۴ - ۲۷ - ۴۰ - ۴۲ - ۴۴ - ۵۲ ✓

۷۰ - ۷۵ - ۸۱ - ۸۳ - ۸۹ - ۱۵۲

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

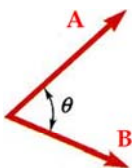
1 - 3

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس کرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

ضرب داخلی (نقطه ای) دو بردار :



حاصل ضرب داخلی دو بردار A و B عبارت عددی (اسکالر) زیر است:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \times |\vec{B}| \times \cos \theta = AB \cos \theta$$

اگر یک بردار در خودش ضرب داخلی (نقطه ای) شود داریم: $\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}| \times |\vec{A}| \times \cos 0 = A \times A = A^2$

حاصل ضرب داخلی، دو بردار یکه همنام: $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \times 1 \times \cos 0 = 1$ $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$ $\vec{k} \cdot \vec{k} = 1$

حاصل ضرب داخلی، دو بردار یکه غیر همنام: $\vec{i} \cdot \vec{j} = 1 \times 1 \times \cos 90 = 0$ $\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$ $\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$

بنابراین حاصل ضرب داخلی، هر دو برداری که بر یکدیگر عمود باشند، صفر است.

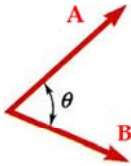
© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

3 - 4

Vector Mechanics for Engineers: Statics

ضرب داخلی (نقطه ای) دو بردار (ادامه) :

اگر مولفه های بردارهای A و B معلوم باشد، حاصلضرب داخلی این دو بردار چگونه محاسبه می شود:



$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \cdot (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

بنابراین حاصل ضرب داخلی، دو بردار، عبارتی عددی (اسکالر) زیر است:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

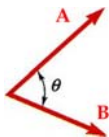
دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

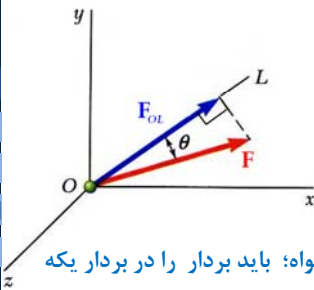
کاربرد ضرب داخلی:

الف) تعیین زاویه بین دو بردار:



$$\begin{cases} \vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta \\ \vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{cases} \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{AB}$$

ب) تصویر (مولفه) یک بردار بر روی یک امتداد:



$$F_{OL} = F \cos \theta$$

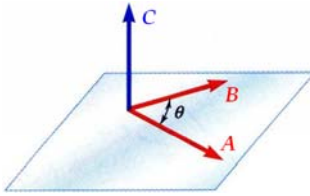
$$\vec{F} \cdot \vec{u}_{OL} = F \times 1 \times \cos \theta = F \cos \theta$$

$$F_{OL} = \vec{F} \cdot \vec{u}_{OL}$$

بنابراین برای تعیین تصویر یک نیرو (بردار) بر روی یک امتداد دلخواه؛ باید بردار را در بردار یک امتداد ضرب داخلی نماییم.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

ضرب خارجی دو بردار:



حاصلضرب خارجی بردار A در بردار B، بردار C می‌باشد. یعنی:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$$

طبق تعریف:

۱- قدرمطلق (مقدار) بردار حاصلضرب برابر است با:

$$|\vec{C}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta$$

۲- امتداد بردار C بر صفحه‌ای که توسط دو بردار A و B تشکیل می‌شود عمود است.



۳- جهت بردار C توسط انگشت شصت دست راست تعیین می‌شود. هرگاه انگشتان دست راست در جهت دوران بردار A که می‌خواهد بر بردار B منطبق شود قرار گیرد، انگشت شصت جهت بردار C را نشان می‌دهد.

به نظر شما حاصلضرب خارجی بردارهای یک‌ه (در همدیگر) چگونه است؟

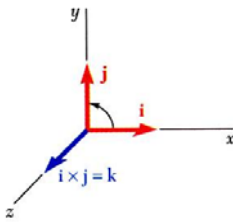
دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

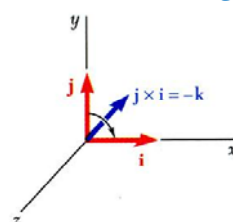
Vector Mechanics for Engineers: Statics

ضرب خارجی دو بردار (ادامه):

ضرب خارجی بردارهای یک‌ه:



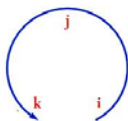
$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$



$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$$

حاصل ضرب خارجی، دو بردار یک‌ه همنام:

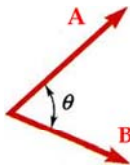
$$\vec{i} \times \vec{i} = 0 \quad \vec{j} \times \vec{j} = 0 \quad \vec{k} \times \vec{k} = 0$$



$$\begin{array}{lll} \vec{i} \times \vec{i} = 0 & \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} & \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \\ \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} & \vec{j} \times \vec{j} = 0 & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \\ \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} & \vec{k} \times \vec{k} = 0 \end{array}$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

ضرب خارجی (برداري) دو بردار (ادامه) :



اگر مولفه های بردارهای A و B معلوم باشد، حاصلضرب خارجی این دو بردار چگونه محاسبه می شود:

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \times (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}) = (A_y B_z - A_z B_y) \vec{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

3 - 9

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس کرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

روابط پیش گفته:

مولفه های قائم بردارها :

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x) \vec{i} + (A_y + B_y) \vec{j} + (A_z + B_z) \vec{k}$$

$$\vec{AB} = (x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j} + (z_B - z_A) \vec{k}$$

ضرب بردارها :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = AB \cos \theta$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad |\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin \theta$$

$$\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

θ = angle between A and B

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

گشتاور یک نیرو در صفحه:

گشتاور نیروی F را حول نقطه O بدست آورید.

حل:

با توجه به تعریف گشتاور (نیرو ضربدر فاصله عمودی)

داریم:

$$M_O = F d$$

با توجه به شکل (مثلث قائم الزاویه) داریم:

$$M_O = F d = F r \sin \theta$$

بنابراین از طریق ضرب برداری می توان گشتاور را اینچنین

بدست آورد:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$|\vec{M}_O| = |\vec{r} \times \vec{F}| = r F \sin \theta \quad \text{مقدار (اندازه) گشتاور:}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

گشتاور یک نیرو در صفحه (ادامه):

گشتاوری که از طریق ضرب برداری بدست می آید یک بردار خواهد بود. بنابراین می توان با استفاده از مولفه های این بردار؛ مقدار، امتداد و جهت گشتاور (یعنی مقدار گشتاور و جهت چرخش آن) را براحتی تعیین نمود.

$$\vec{M}_O = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_O = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}$$



اگر انگشت شصت دست راست را در جهت بردار گشتاور قرار دهیم، چهار انگشت دیگر (دست راست) جهت چرخش را نشان خواهد داد.

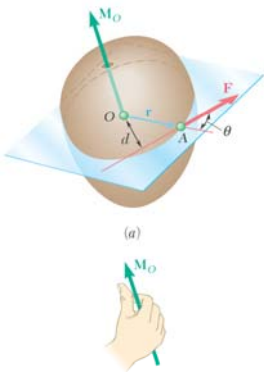
© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

گشتاور یک نیرو در فضا:

گشتاور نیروی فضای F را حول نقطه O بدست آورید .

حل:



(1) بردار نیروی F توسط قدر مطلق آن و مختصات دو نقطه از راستای آن تعیین می شود.

(2) از نقطه O به یک نقطه معلوم از امتداد نیرو وصل کرده بردار مکانی r را تعیین می کنیم.

(3) سپس از ضرب برداری بردار مکانی در بردار نیرو داریم:

$$\vec{M}_O = \vec{r}_{OA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

3 - 13

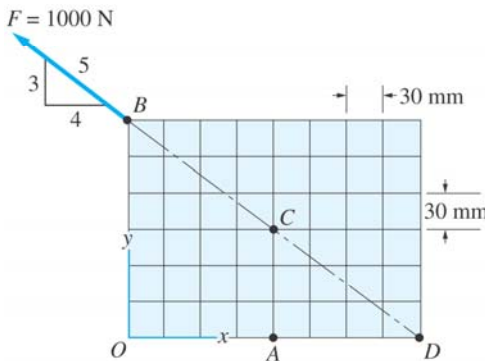
دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال:

گشتاور نیروی فضای F را حول نقطه A بدست آورید .



© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

حل:

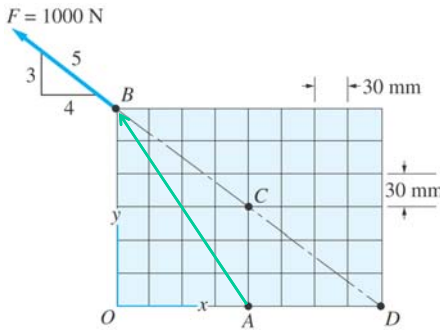
گشتاور نیروی فضای F را حول نقطه A بدست آورید.

حل:

(1) تعیین بردار نیروی F.

(2) تعیین بردار مکانی r.

(3) ضرب خارجی r در F.



$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} = -F \cos \theta \vec{i} + F \sin \theta \vec{j}$$

$$\vec{F} = -800\vec{i} + 600\vec{j}$$

$$\vec{r}_{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k} = -120\vec{i} + 180\vec{j}$$

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AB} \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AB} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -120 & 180 & 0 \\ -800 & 600 & 0 \end{vmatrix} = (-120 \times 600 + 180 \times 800)\vec{k} = 72000\vec{k}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

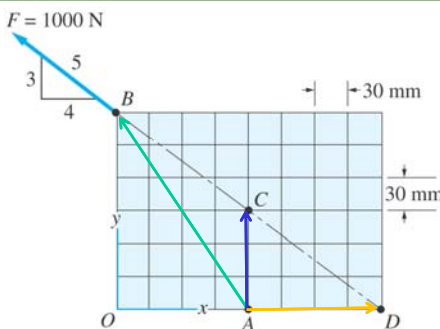
درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال:

نکته: برای ساده شدن عمل ضرب می‌توان از هر یک از

بردار مکانی‌ها استفاده کرد. یعنی:



$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AB} \times \vec{F} = \vec{r}_{AC} \times \vec{F} = \vec{r}_{AD} \times \vec{F}$$

$$\vec{F} = -800\vec{i} + 600\vec{j}$$

$$\vec{r}_{AD} = 120\vec{i}$$

$$\vec{r}_{AC} = 90\vec{j}$$

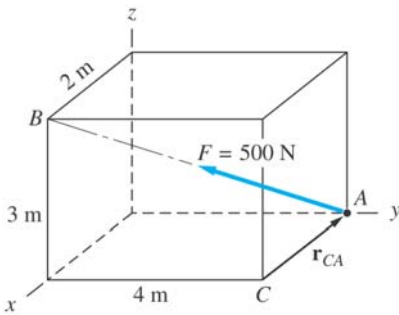
$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AD} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 120 & 0 & 0 \\ -800 & 600 & 0 \end{vmatrix} = (120 \times 600)\vec{k} = 72000\vec{k}$$

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AC} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 90 & 0 \\ -800 & 600 & 0 \end{vmatrix} = -(90 \times -800)\vec{k} = 72000\vec{k}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال:



الف) گشتاور نیروی فضای F را حول نقطه C بدست آورید.
ب) فاصله عمودی بین امتداد نیرو F و نقطه C چقدر است؟

حل الف):

$$\mathbf{F} = 500 \lambda_{AB} = 500 \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = 500 \left(\frac{2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}}{5.385} \right)$$

$$\mathbf{F} = 185.7\mathbf{i} - 371.4\mathbf{j} + 278.6\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_{CA} = -2\mathbf{i}$$

$$\mathbf{M}_C = \mathbf{r}_{CA} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 0 & 0 \\ 185.7 & -371.4 & 278.6 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{M}_C = 557.2\mathbf{j} + 742.8\mathbf{k}$$

$$M_C = \sqrt{(557.2)^2 + (742.8)^2} = 928.6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

حل ب):

$$d = \frac{M_C}{F} = \frac{928.6}{500} = 1.857 \text{ m}$$

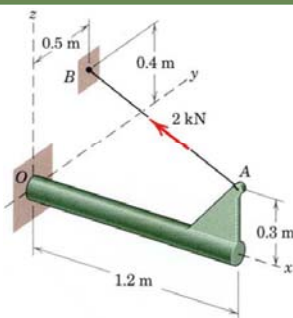
© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال:



نیروی کشش در کابل AB برابر 2kN می باشد. مطلوب است:
الف) بیان برداری این نیرو که به نقطه A وارد می شود.
ب) تعیین گشتاور این نیرو حول نقطه O.

$$A \begin{Bmatrix} 1.2 \\ 0 \\ 0.3 \end{Bmatrix} \quad B \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.4 \end{Bmatrix}$$

$$B - A \begin{cases} 0 - 1.2 = -1.2 \\ 0.5 - 0 = 0.5 \\ 0.4 - 0.3 = 0.1 \end{cases}$$

$$\vec{F}_{AB} = \frac{2}{1.3} [-1.2\vec{i} + 0.5\vec{j} + 0.1\vec{k}] = -1.84\vec{i} + 0.767\vec{j} + 0.153\vec{k}$$

$$\vec{M}_O = \vec{r}_{OB} \times \vec{F}_{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0.5 & 0.4 \\ -1.84 & 0.767 & 0.153 \end{vmatrix}$$

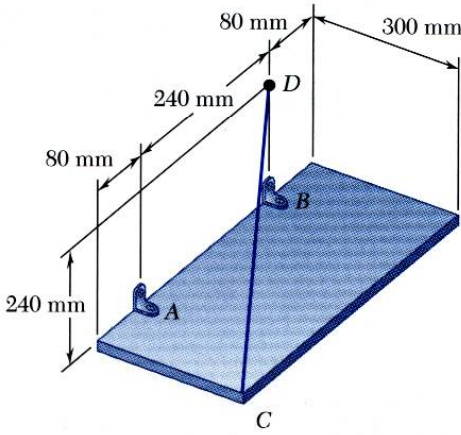
$$\vec{M}_O = -0.23\vec{i} - 0.736\vec{j} + 0.92\vec{k} \quad [\text{kN} \cdot \text{m}]$$

$$\vec{M}_O = -230\vec{i} - 736\vec{j} + 920\vec{k} \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال:



اگر کشش در کابل CD برابر 200N باشد.
گشتاور نیروی کابل که به نقطه C وارد
می‌شود را حول A بدست آورید.

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

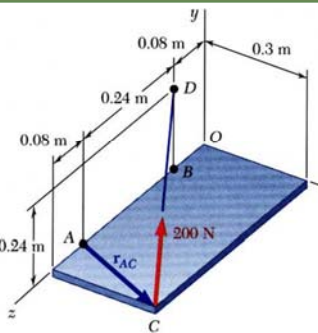
3 - 19

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

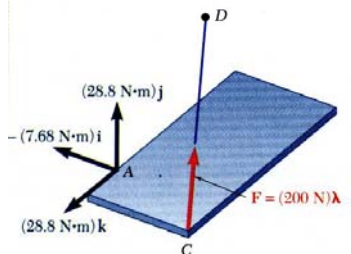
حل:



$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AC} \times \vec{F}$$

$$\vec{r}_{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = 0.3\vec{i} + 0.08\vec{k}$$

$$\begin{aligned}\vec{F} &= F\lambda = 200 \frac{\vec{r}_{CD}}{r_{CD}} \\ &= 200 \frac{-0.3\vec{i} + 0.24\vec{j} - 0.32\vec{k}}{0.5} \\ &= -120\vec{i} + 96\vec{j} - 128\vec{k}\end{aligned}$$



$$\vec{M}_A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.3 & 0 & 0.08 \\ -120 & 96 & -128 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_A = -7.68\vec{i} + 28.8\vec{j} + 28.8\vec{k} \quad \text{N} \cdot \text{m}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

3 - 20

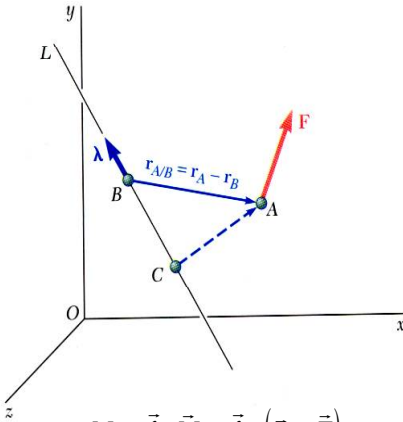
Vector Mechanics for Engineers: Statics

گشتاور یک نیرو حول یک محور:

گشتاور نیروی F را حول محور BL تعیین کنید.

حل:

برای این منظور ابتدا گشتاور نیروی F را حول یک نقطه دلخواه از امتداد محور (نقطه B یا C) تعیین کرده و سپس آنرا در امتداد محور تصویر می‌کنیم.



$$M_{BL} = \vec{\lambda} \cdot \vec{M}_B = \vec{\lambda} \cdot (\vec{r}_{BA} \times \vec{F})$$

یا $M_{BL} = \vec{\lambda} \cdot \vec{M}_C = \vec{\lambda} \cdot (\vec{r}_{CA} \times \vec{F})$

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

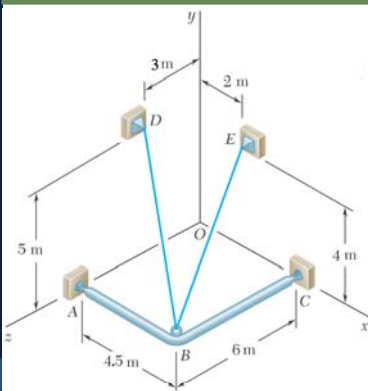
مثال:

کشش در کابل BD برابر 100 N می‌باشد. مطلوبست:

(الف) بیان برداری این نیرو که به نقطه B وارد می‌شود.

(ب) تعیین گشتاور این نیرو حول نقطه A .

(ج) تعیین گشتاور این نیرو حول محور AC .



$$D - B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 4.5 \\ 0 \\ 6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4.5 \\ 5 \\ -3 \end{Bmatrix}$$

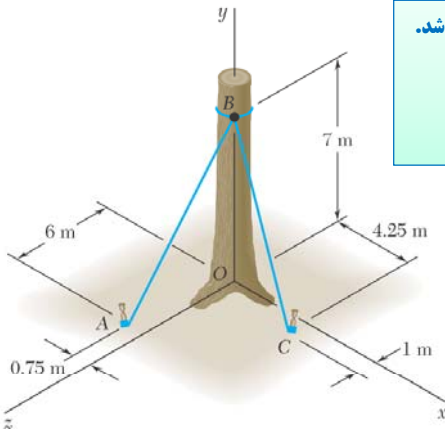
$$\vec{F}_{BD} = \frac{100}{7.365} (-4.5\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}) = -61\vec{i} + 67.8\vec{j} - 40.73\vec{k}$$

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AB} \times \vec{F}_{BD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4.5 & 0 & 0 \\ -61 & 67.8 & -40.73 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{M}_A = -183.28\vec{j} + 305.46\vec{k} \quad [\text{N.m}]$$

$$M_{AC} = \vec{M}_A \cdot \vec{u}_{AC} = (-183.28\vec{j} + 305.46\vec{k}) \cdot \left(\frac{4.5\vec{i} - 6\vec{k}}{\sqrt{4.5^2 + 6^2}} \right) = \frac{-305.46 \times 6}{7.5} = -244.37 \text{ N.m}$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

تکلیف منزل:



کشش در کابل AB برابر 555N و در کابل BC برابر 660N می باشد.
مطلوبست:
الف) بیان برداری این نیروها که به نقطه B وارد می شوند.
ب) تعیین گشتاور برآیند این نیروها حول نقطه O.

$$\vec{F}_{AB} = -45\vec{i} - 420\vec{j} + 360\vec{k}$$

$$\vec{F}_{BC} = 340\vec{i} - 560\vec{j} + 80\vec{k}$$

$$\vec{M}_O = 3080\vec{i} - 2065\vec{k}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

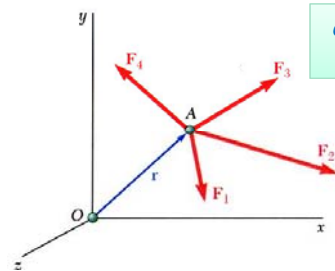
2 - 23

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

قضیه وارینتون:

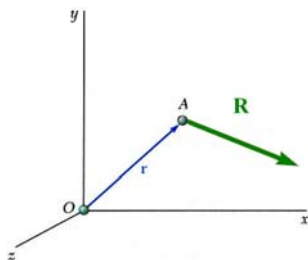


گشتاور یک نیرو حول یک نقطه برابر است با گشتاور مولفه های آن نیرو حول همان نقطه.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$$

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots) = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \dots$$

$$\vec{M}_O = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots$$

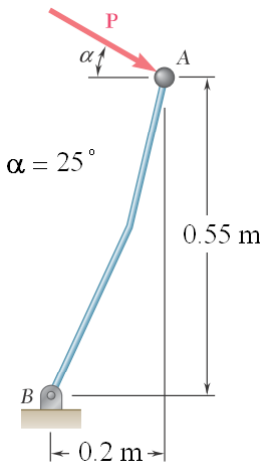


© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

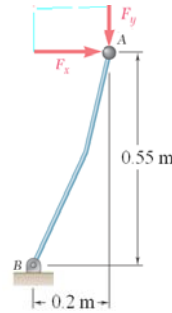
3 - 24

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال:



نیروی $P=8\text{N}$ به نقطه A وارد می شود. گشتاور این نیرو را حول نقطه B بدست آورید.



$$M_B = -F_x \times 0.55 - F_y \times 0.2$$

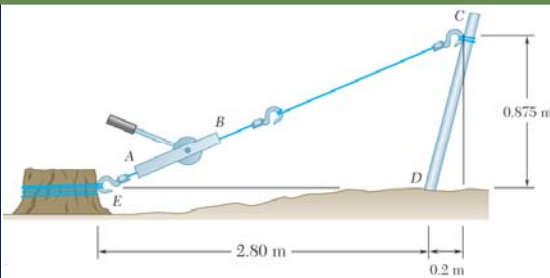
$$M_B = -8 \cos 25^\circ \times 0.55 - 8 \sin 25^\circ \times 0.2 = -4.664 \text{ N.m}$$

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

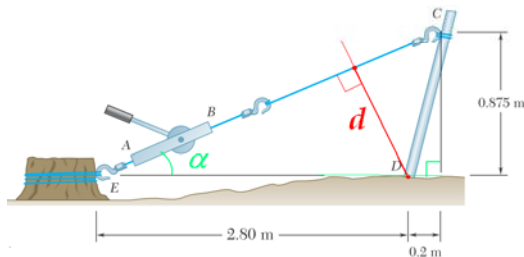
درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال:



برای چرخش میله CD، به گشتاور 960N.m حول نقطه D نیاز است. نیروی کشش در AB چقدر باید باشد.



$$\tan \alpha = \frac{0.875}{2.8 + 0.2} = 0.2916$$

$$\alpha = 16.27^\circ$$

$$d = 2.8 \sin \alpha = 0.784$$

$$M = F_{AB} d \Rightarrow 960 = F_{AB} \times 0.784$$

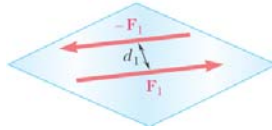
$$F_{AB} = 1224.5 \text{ N}$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

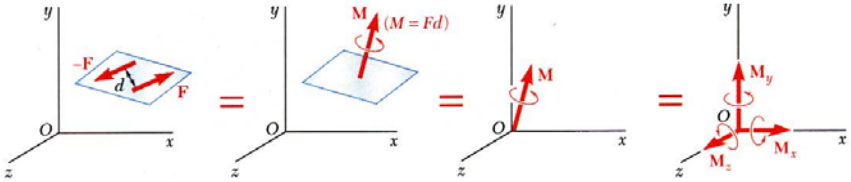
گشتاور زوج نیرو :



تعریف زوج نیرو (کوپل):
دو نیرو با امتداد مساوی و قدر مطلق مساوی و مختلف جهت را زوج نیرو می نامند.



$$M_{\text{Couple}} = F \times d$$



© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

3 - 27

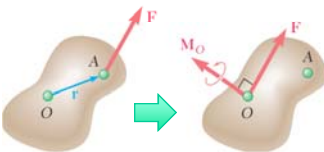
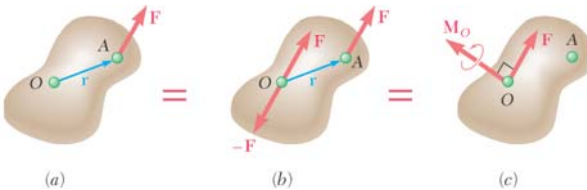
دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس کرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

انتقال نیرو به موازات خود (سیستم کوپل نیروی معادل)

نیروی F را که به نقطه A اثر کرده است (به موازات خود) به نقطه O انتقال دهید.



$$\vec{M}_O = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}$$

نتیجه:

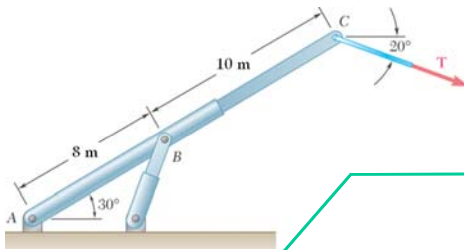
با انتقال نیروی F به نقطه O، گشتاور آن هم به نقطه O انتقال می یابد.

به نتیجه حاصله، سیستم کوپل نیروی در نقطه O نیز می گویند.

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

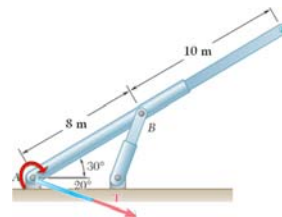
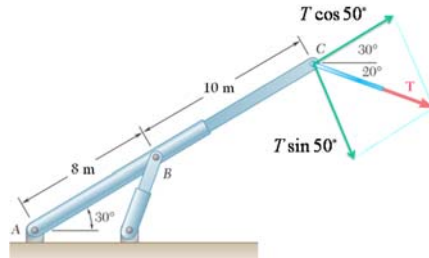
Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال:



کشش در کابل $T=560\text{ N}$ است. مطلوبست:
الف) سیستم کوپل نیروی معادل در نقطه A.
ب) سیستم کوپل نیروی معادل در نقطه B.

حل:



$$M_A = T \sin 50^\circ \times 18 = 7721.7 \text{ N.m}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

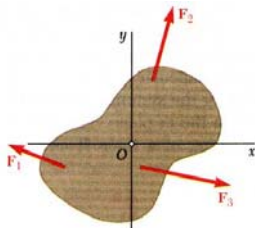
دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

تبدیل سیستم نیروها به یک نیروی معادل:

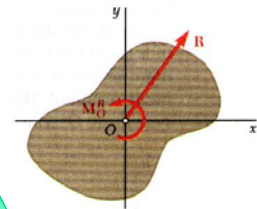
۱- ابتدا سیستم نیروهای غیر متقارب را به یک سیستم کوپل نیروی معادل (M و R) تبدیل می‌کنیم. برای این منظور هریک از نیروها را به نقطه O منتقل می‌کنیم. با انتقال هر نیرو گشتاور آن نیز منتقل می‌شود. مجموع این گشتاورها M را می‌سازد. از برابری نیروها R بدست می‌آید.



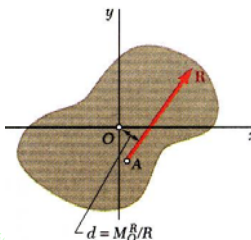
(1)

$$\vec{R} = \sum \vec{F}$$

$$\vec{M}_O^R = \sum (\vec{r} \times \vec{F})$$



(2)



۲- با جابجایی نیروی R ، سیستم تک نیروی معادل بدست می‌آید.

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

تبدیل سیستم نیروها به یک نیروی معادل:

۲- مقدار جابجایی نیروی R در جهت افق و یا در جهت قائم بصورت زیر بدست می آید.

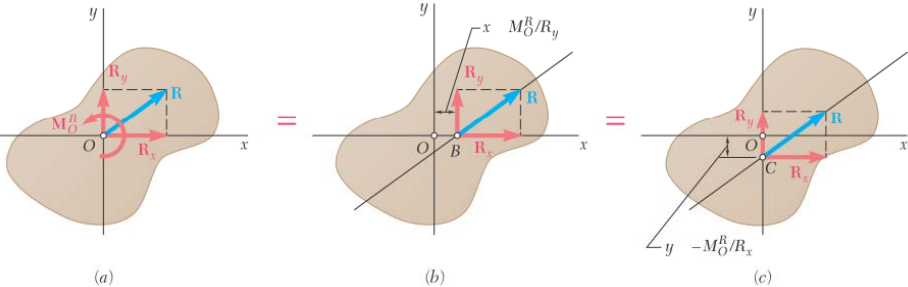
$$R_x = \sum F_x$$

$$R_y = \sum F_y$$

$$M_O^R = \sum M_O$$

$$\Delta x = \frac{M_O^R}{R_y}$$

$$\Delta y = \frac{M_O^R}{R_x}$$



© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

3 - 31

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

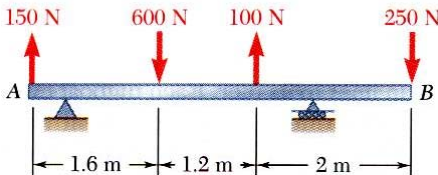
درس استاتیک مهندس کرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال:

الف) سیستم کوپل نیروی معادل در A را بدست آورید.

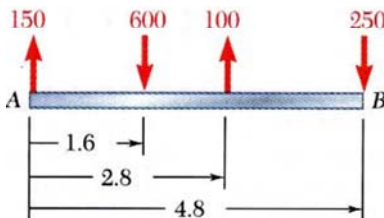
ب) سیستم کوپل نیروی معادل در B را بدست آورید.



حل:

ابتدا برایندها را تعیین می کنیم (R).

سپس کوپل برایندها را حول A بدست می آوریم (M).



$$R = \sum F_y = 150 - 600 + 100 - 250 = -600 \text{ N}$$

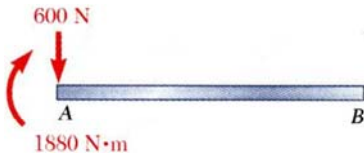
$$M_A^R = \sum F \times d = -1.6 \times 600 + 2.8 \times 100 - 4.8 \times 250$$

$$M_A^R = \sum F \times d = -1880 \text{ N.m}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

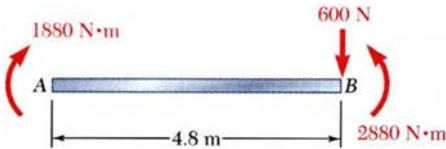
ادامه حل:



$$R = -600\text{ N}$$

حل الف):

$$M_A^R = -1880 \text{ N}\cdot\text{m}$$



حل ب):

$$\begin{aligned}\vec{M}_B^R &= \vec{M}_A^R + \vec{r} \times \vec{R} \\ &= -1880 + 4.8 \times 600 \\ &= -1880 + 2880 = 1000 \text{ N}\cdot\text{m}\end{aligned}$$



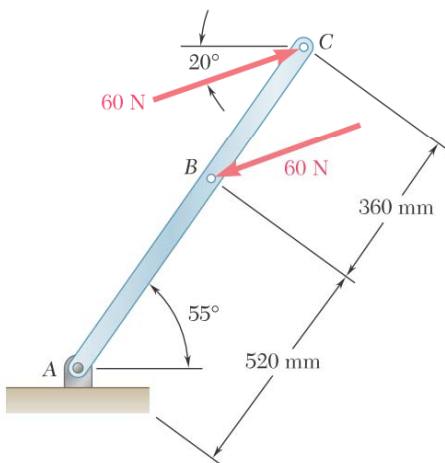
© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

تکلیف منزل:



دو نیروی موازی مطابق شکل به اهرم وارد می‌شود. مطلوبست تعیین گشتاور این زوج نیرو (کوپل):

الف) با تجزیه هریک از نیروها به مولفه‌های قائم و افقی و سپس جمع گشتاور دو کوپل حاصل.

ب) با استفاده از فاصله عمودی بین دو نیرو.

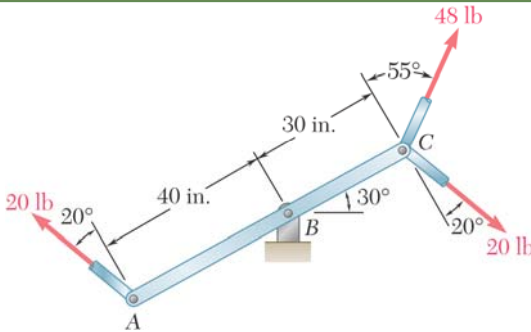
ج) با جمع گشتاور هر یک از دو نیرو، حول نقطه A.

(a) $12.39 \text{ N}\cdot\text{m}$ ↓. (b) $12.39 \text{ N}\cdot\text{m}$ ↓. (c) $12.39 \text{ N}\cdot\text{m}$ ↓.

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال:



سه نیروی مطابق شکل به میله ABC وارد می‌شود. مطلوبست:

الف) سیستم کوپل نیروی معادل در نقطه B.

ب) تک نیروی معادل با سیستم کوپل نیروی بدست آمده در قسمت الف را تعیین کرده و نقطه اثر آن را بدست آورید.

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

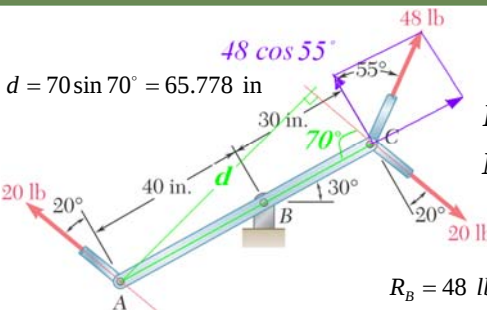
دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

حل:

حل الف):



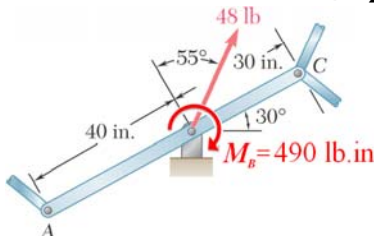
$$d = 70 \sin 70^\circ = 65.778 \text{ in}$$

$R_B =$ برابند نیروها انتقال یافته به نقطه B

$M_B =$ مجموع گشتاورهای انتقال یافته به نقطه B

$$R_B = 48 \text{ lb}$$

$$M_B = \sum M = -20 \times d + 48 \cos 55^\circ \times 30 = -490 \text{ lb.in}$$



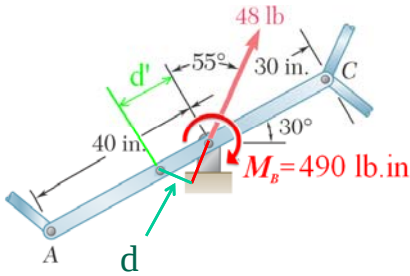
جواب الف)

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

حل (ادامه):

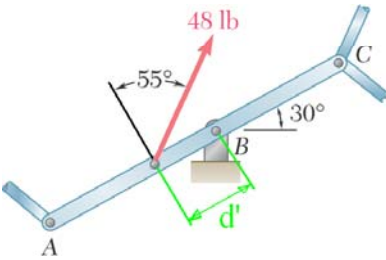
حل ب):



$$d = \frac{M}{R} = \frac{490}{48} = 10.2 \text{ in}$$

$$d = d' \sin 35^\circ$$

$$d' = 17.8 \text{ in}$$



یا:

$$48 \cos 55^\circ \times d' = 490$$

$$d' = 17.8 \text{ in}$$

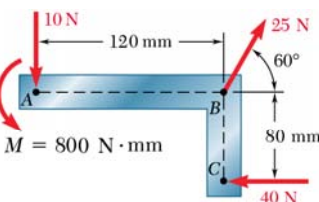
© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

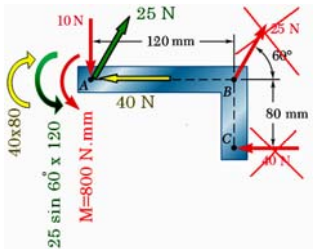
مثال:



سه نیرو و یک گشتاور مطابق شکل به جسم اعمال شده است.
مطلوبست:

الف) سیستم کوپل نیروی معادل در نقطه A.
ب) سیستم تک نیروی معادل را در نقطه‌ای روی امتداد AB تعیین کنید.

حل الف): ابتدا تمام نیروها را به نقطه A انتقال می‌دهیم. سپس برابری نیروها و گشتاورها را (در نقطه A) تعیین می‌کنیم.



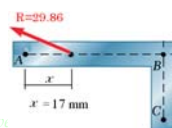
$$R_x = \sum F_x = -40 + 25 \cos 60^\circ = -27.5 \text{ N}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{27.5^2 + 11.65^2} = 29.86 \text{ N}$$

$$R_y = \sum F_y = -10 + 25 \sin 60^\circ = 11.65 \text{ N}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{11.65}{27.5} \right) = 23^\circ$$

$$M_A = \sum M = 800 + 25 \sin 60^\circ \times 120 - 40 \times 80 = 198 \text{ N.m}$$



$$M_A = M_O \Rightarrow x = \frac{198}{11.65} = 17 \text{ mm}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

CHAPTER

4

VECTOR MECHANICS FOR ENGINEERS:
STATICS

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.

Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech University



تعالُد اجسام صلب

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

سرفصل مطالب و مسائل فصل چهارم:

فصل چهارم: تعادل اجسام صلب

- ۱- نمودار آزاد اجسام
- ۲- معادلات تعادل در مسائل دوبعدی و سه بعدی
- ۳- انواع تکیه گاه
- ۴- تعیین عکس العمل تکیه گاهی
- ۵- تعادل اجسام دو نیرویی و سه نیرویی
- ۶- تعیین نیرو و گشتاور در قاب های ساده

۷۲-۷۱-۶۹-۶۷-۶۵-۲۹-۲۷-۲۰-۱۷-۱۵-۵-۴

۱- معادلات تعادل اجسام صلب (در فضا):

$$\text{تعادل حرکتی} \quad \sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases}$$

$$\text{تعادل چرخشی} \quad \sum \vec{M}_o = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$$

۲- معادلات تعادل اجسام صلب (در صفحه):

$$\text{تعادل حرکتی} \quad \sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$$

$$\text{تعادل چرخشی} \quad \sum \vec{M}_o = 0 \Rightarrow \sum M_z = 0$$

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

۳- حل مسائل استاتیک با روش تعادل :

برای حل مسائل استاتیک به روش تعادل، ابتدا نمودار آزاد جسم صلب ترسیم می‌شود. نمودار آزاد نموداری است که همه نیروها و گشتاورهای اعمالی به جسم (اعم از نیروها و گشتاورهای خارجی و تکیه‌گاهی) را نشان دهد. برای نشان دادن نیرو و گشتاور تکیه‌گاهی باید انواع تکیه‌گاه‌ها را بشناسیم.

برای حل مسائل استاتیک به روش تعادل، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

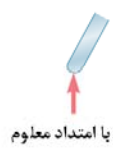
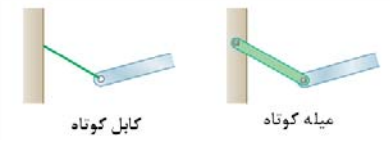
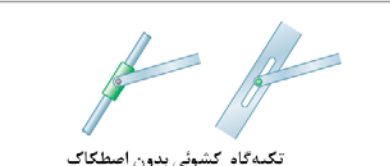
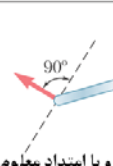
۱- ترسیم نمودار آزاد جسم

۲- نوشتن معادلات تعادل

۳- حل معادلات تعادل

Vector Mechanics for Engineers: Statics

انواع تکیه‌گاه:

نوع تکیه‌گاه یا اتصال	عکس العمل	تعداد مجهولات
 غلتکی تماسی بدون اصطکاک	 نیرو با امتداد معلوم	1
 کابل کوتاه میله کوتاه	 نیرو با امتداد معلوم	1
 تکیه‌گاه کشویی بدون اصطکاک	 نیرو با امتداد معلوم	1

انواع تکیه‌گاهها:

۱- تکیه‌گاه غلتکی،
میله‌ای و لغزان (یک
مجهولی)

۲- تکیه‌گاه مفصلی یا پینی
(دو مجهولی)

۳- تکیه‌گاه گیردار (سه
مجهولی)

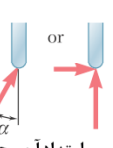
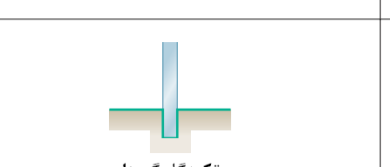
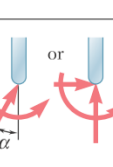
2 - 5

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

انواع تکیه‌گاه:

نوع تکیه‌گاه یا اتصال	عکس العمل	تعداد مجهولات
 تکیه‌گاه پینی تماسی با اصطکاک	 نیرو و امتداد آن مجهول	2
 تکیه‌گاه گیردار	 نیرو و گشتاور مجهول	3

انواع تکیه‌گاهها:

۱- تکیه‌گاه غلتکی،
میله‌ای و لغزان (یک
مجهولی)

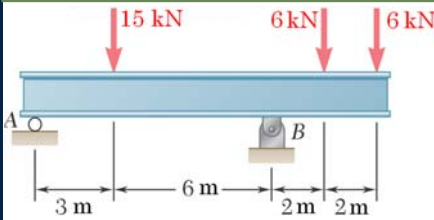
۲- تکیه‌گاه مفصلی یا پینی
(دو مجهولی)

۳- تکیه‌گاه گیردار (سه
مجهولی)

2 - 6

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال:



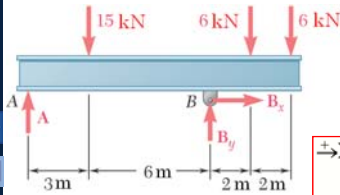
در تیر تحت بار مقابل مطلوبست: تعیین عکس العمل تکیه‌گاهی در A و B.

حل:

۱- ترسیم نمودار آزاد جسم

۲- نوشتن معادلات تعادل

۳- حل معادلات تعادل



$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x = 0: & \quad B_x = 0 & \quad \boxed{B_x = 0} \\ +\curvearrowright \Sigma M_A = 0: & \quad -(15)(3) + B_y(9) - (6)(11) - (6)(13) = 0 \\ & \quad B_y = +21 & \quad \boxed{B_y = 21 \text{ kN} \uparrow} \\ +\curvearrowright \Sigma M_B = 0: & \quad -A(9) + (15)(6) - (6)(2) - (6)(4) = 0 \\ & \quad A = +6 & \quad \boxed{A = 6 \text{ kN} \uparrow} \end{aligned}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

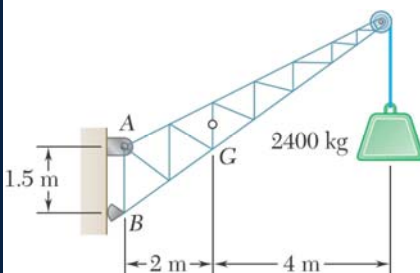
2 - 7

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس کرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال:



سازه مقابل دارای جرم ۱۰۰۰ کیلوگرم است و مرکز جرم آن در نقطه G قرار دارد. با اعمال بار ۲۴۰۰ کیلوگرم به آن مطلوبست:

الف) عکس العمل تکیه‌گاهی در B.

ب) عکس العمل تکیه‌گاهی در A.

حل:

۱- ترسیم نمودار آزاد جسم

۲- نوشتن معادلات تعادل

۳- حل معادلات تعادل

$$W = 1000 \times 9.81 = 9810 \text{ N} = 9.81 \text{ kN}$$

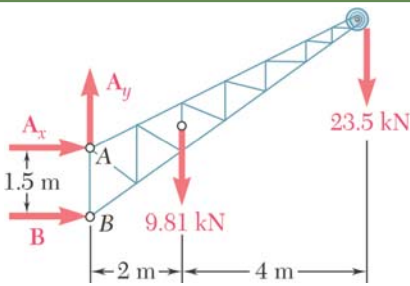
$$F = 2400 \times 9.81 = 23500 \text{ N} = 23.5 \text{ kN}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

4 - 8

Vector Mechanics for Engineers: Statics

حل:



$$\sum M_A = 0: +B(1.5) - 9.81(2) - 23.5(6) = 0$$

$$B = +107.1 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0: A_x + B = 0$$

$$A_x = -107.1 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0: A_y - 9.81 - 23.5 = 0$$

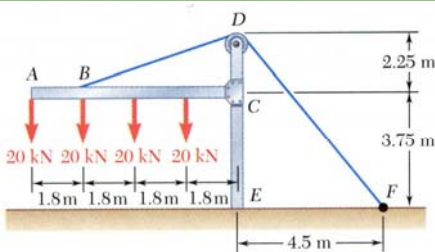
$$A_y = +33.3 \text{ kN}$$

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

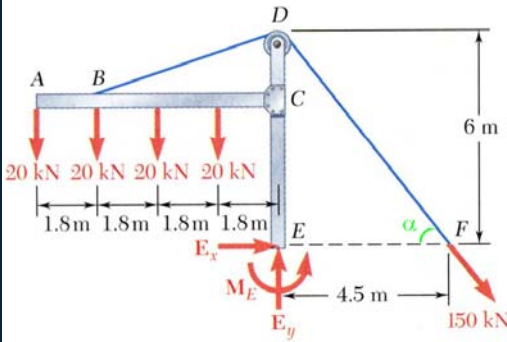
مثال:



قاب مقابل نیروهای سقف یک ساختمان کوچک را تحمل می‌کند. کشش در کابل برابر 150 kN است. عکس العمل در انتهای ثابت E را تعیین کنید.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

حل مثال :



$$\sum F_x = 0: E_x + 150 \cos \alpha = 0$$

$$E_x + \frac{4.5}{7.5} \times 150 = 0$$

$$E_x = -90.0 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0: E_y - 4(20) - \frac{6}{7.5}(150) = 0$$

$$E_y = +200 \text{ kN}$$

$$\sum M_E = 0:$$

$$+ 20(7.2) + 20(5.4) + 20(3.6) + 20(1.8) - \frac{6}{7.5}(150)(4.5) + M_E = 0$$

$$M_E = 180.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

4 - 11

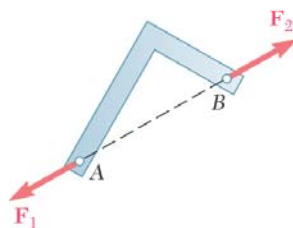
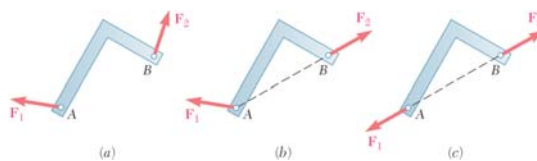
دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

تعادل جسم دو نیرویی:

اگر عضوی تحت اثر (فقط) دو نیرو قرار گرفته و در حال تعادل باشد، عضو دو نیرویی است. گشتاورگیری حول نقاط اثر نیرو، نتیجه می‌دهد که امتداد نیروها؛ خط واصل دو نقطه اثر است. همچنین با نوشتن معادله نیروها مشخص می‌شود که این دو نیرو با هم مساوی و مختلف جهت‌اند.



$$F_1 = F_2$$

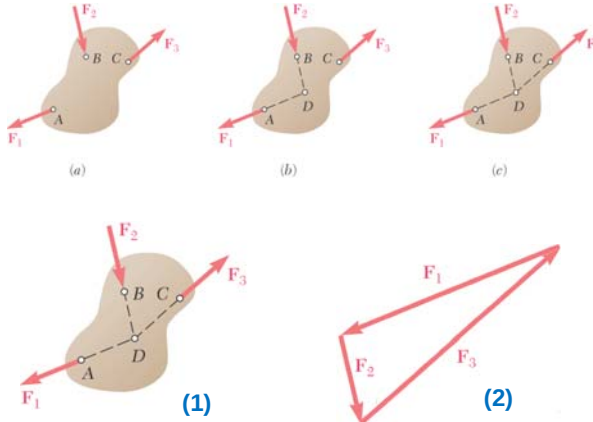
© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 12

Vector Mechanics for Engineers: Statics

تعداد جسم سه نیرویی:

- اگر عضوی تحت اثر (فقط) سه نیرو قرار گرفته و در حال تعادل باشد، عضو سه نیرویی است. تعادل چرخشی و حرکتی نتیجه می‌دهد که در عضو سه نیرویی:
- ۱- امتداد سه نیرو از یک نقطه واحد (مشترب) می‌گذرد.
 - ۲- چند ضلعی نیرو یک مثلث است.



© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 13

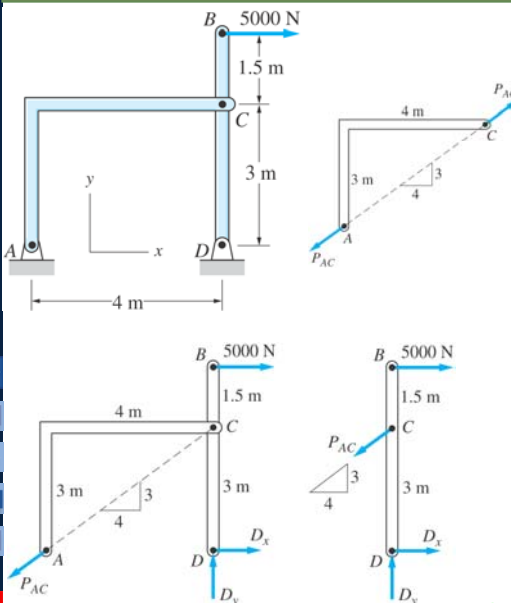
دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال:

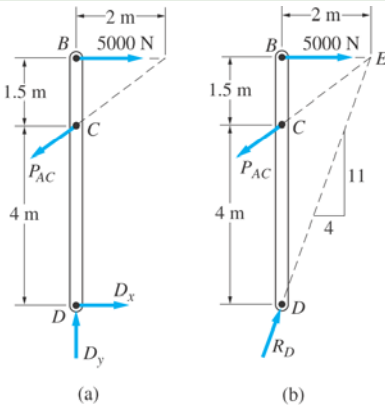
- در بارگذاری نشان داده شده، مطلوبست:
- عکس العمل تکیه گاهی در A و D.



© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 14

Vector Mechanics for Engineers: Statics



© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 15

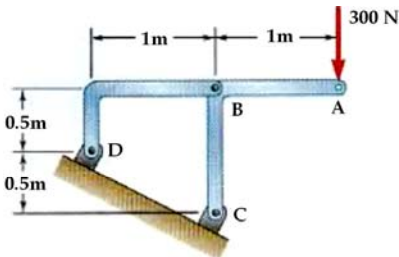
دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

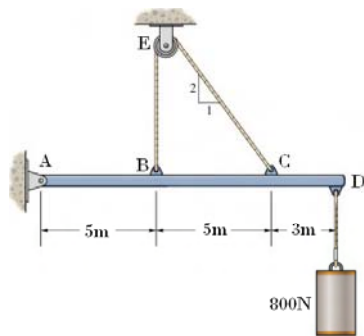
Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال:

در بارگذاری نشان داده شده، مطلوبست تعیین عکس العمل تکیه گاهی در C و D.



در بارگذاری نشان داده شده، مطلوبست تعیین نیروی کشش در کابل BEC و عکس العمل تکیه گاهی در A (قرقره E بدون اصطکاک است).



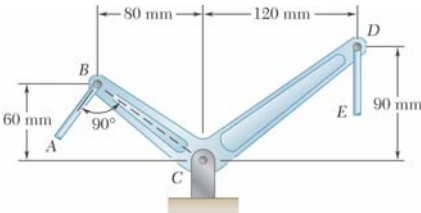
© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 16

Vector Mechanics for Engineers: Statics

تکلیف منزل:

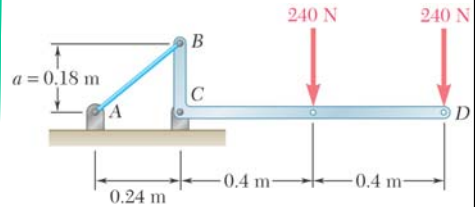
کشش در میله AB برابر 720 N است.
مطلوبست:
الف) تعیین نیروی میله DE.
ب) عکس العمل تکیه گاهی در C.



(a) $F_{DE} = 600 \text{ N}$. (b) $C = 1253 \text{ N}$ at 69.8° .

مطلوبست:

الف) کشش در کابل AB.
ب) عکس العمل تکیه گاهی در C.



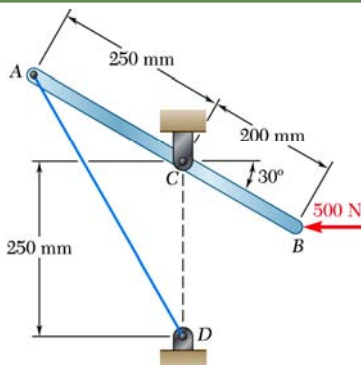
(a) 2.00 kN. (b) 2.32 kN at 46.4° .

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس کرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال:



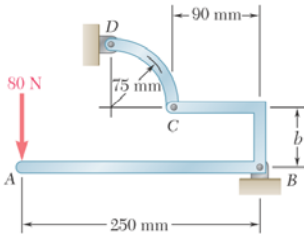
برای میله تحت بار مقابل مطلوبست:
الف) کشش در کابل AD.
ب) عکس العمل تکیه گاهی در C.

(a) 400 N. (b) $C = 458 \text{ N}$ at 49.1° .

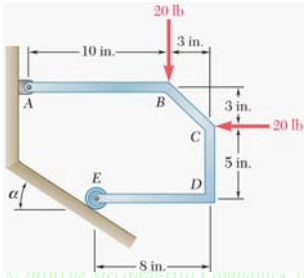
Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال:

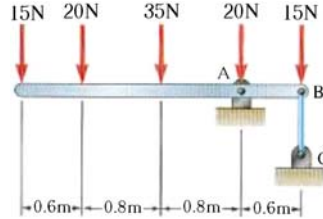
Determine the reactions at B and D when $b = 60$ mm.



For the frame and loading shown, determine the reactions at A and E when (a) $\alpha = 30^\circ$, (b) $\alpha = 45^\circ$.



برای تیر بارگذاری شده مقابل مطلوبست:
(الف) کشش در کابل BC.
(ب) عکس العمل تکیه گاهی در A.



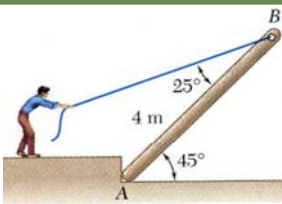
2 - 19

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

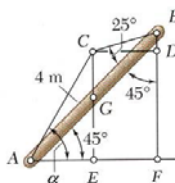
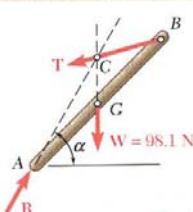
درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال:



شخصی یک ستون ۱۰ کیلوگرمی به طول ۴ متر را مطابق شکل نگه داشته است. مطلوبست:
(الف) کشش در کابل.
(ب) عکس العمل تکیه گاهی در A.



$$AF = AB \cos 45 = (4 \text{ m}) \cos 45 = 2.828 \text{ m}$$

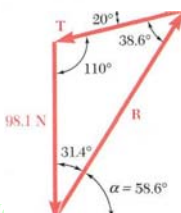
$$CD = AE = \frac{1}{2} AF = 1.414 \text{ m}$$

$$BD = CD \cot(45 + 20) = (1.414 \text{ m}) \tan 20 = 0.515 \text{ m}$$

$$CE = BF - BD = (2.828 - 0.515) \text{ m} = 2.313 \text{ m}$$

$$\tan \alpha = \frac{CE}{AE} = \frac{2.313}{1.414} = 1.636$$

$$\alpha = 58.6^\circ$$



$$\frac{T}{\sin 31.4^\circ} = \frac{R}{\sin 110^\circ} = \frac{98.1 \text{ N}}{\sin 38.6^\circ}$$

$$T = 81.9 \text{ N}$$

$$R = 147.8 \text{ N}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Inc. All rights reserved.

4 - 20

VECTOR MECHANICS FOR ENGINEERS:
STATICSFerdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech Universityنیروهای گسترده:
مرکز جرم و گرانیگاه

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

سرفصل مطالب و مسائل فصل پنجم:

فصل پنجم: مرکز هندسی، گشتاور اول سطح و نیروهای گسترده

۱- مرکز جرم (مرکز ثقل)

۲- مرکز هندسی سطوح

۳- گشتاور اول سطح

۴- نیروهای گسترده روی تیرها (تبدیل نیروی گسترده به متمرکز)

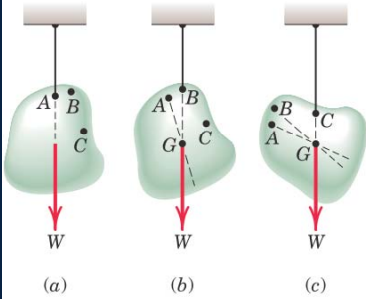
۱۰ و ۲۴ و ۲۵ (مرکز سطح)

۷۵-۷۷-۷۸-۷۹-۸۳-۸۴ (بار گسترده)

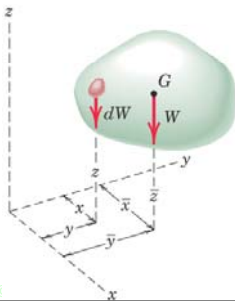
Vector Mechanics for Engineers: Statics

مرکز ثقل یک جسم:

مرکز ثقل یک جسم و موقعیت آن.



نیروی وزن اجسام به یک نقطه به نام مرکز ثقل جسم (نقطه G) اثر می کند:



مطابق قضیه وارینیون، گشتاور یک نیرو با گشتاور مولفه های آن نیرو برابر است. یعنی:

$$\bar{x}W = \int x dW$$

نهایتاً موقعیت مرکز جرم اجسام بصورت زیر قابل تعیین است:

$$\bar{x} = \frac{\int x dW}{W} \quad \bar{y} = \frac{\int y dW}{W} \quad \bar{z} = \frac{\int z dW}{W}$$

5 - 3

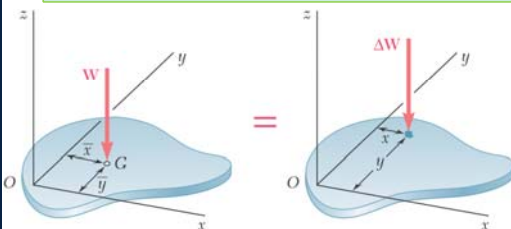
دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مرکز ثقل یک صفحه:

موقعیت مرکز ثقل و مرکز سطح صفحه نشان داده شده (دارای مساحت A و ضخامت t) را بدست آورید.



حل:

ابتدا تعیین $\bar{y}$:

اگر وزن کل W را به چندین جز ΔW تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$\sum M_x: \Rightarrow \bar{y} W = \sum y \Delta W \Rightarrow \bar{y} = \frac{\sum y \Delta W}{W} \Rightarrow \bar{y} = \frac{\int y dW}{W}$$

$$W = \rho g V = \rho g t A \Rightarrow \bar{y} = \frac{\sum y \Delta A}{A} \Rightarrow \bar{y} = \frac{\int y dA}{A}$$

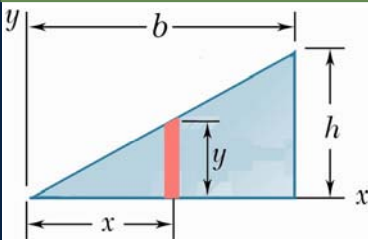
نهایتاً برای مرکز سطح، نتیجه می شود:

$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{A} \quad \text{and} \quad \bar{x} = \frac{\int x dA}{A}$$

5 - 4

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال:



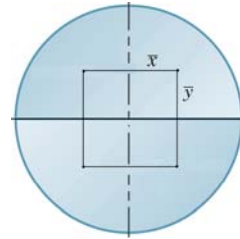
موقعیت مرکز سطح مثلث نشان داده شده را بدست آورید.

$$\frac{y}{x} = \frac{h}{b} \Rightarrow y = \frac{h}{b}x$$

$$dA = ydx = \frac{h}{b}xdx$$

$$\bar{x}A = \int x dA = \int \frac{h}{b} x^2 dx = \frac{h}{b} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^b = \frac{hb^2}{3}$$

$$A = \frac{bh}{2} \Rightarrow \bar{x} = \frac{2}{3}b$$



© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

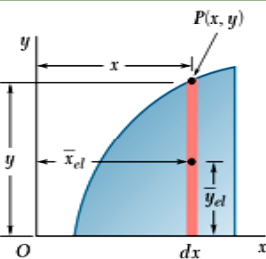
2 - 5

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس کرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

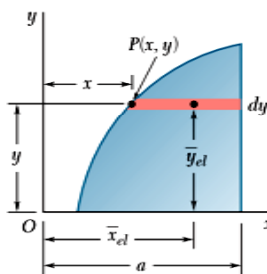
تعیین مرکز سطح با انتگرالگیری:



$$\bar{x}_{el} = x$$

$$\bar{y}_{el} = y/2$$

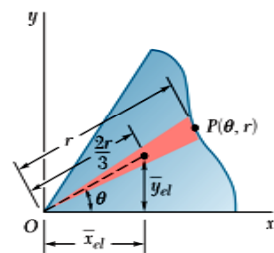
$$dA = ydx$$



$$\bar{x}_{el} = \frac{a+x}{2}$$

$$\bar{y}_{el} = y$$

$$dA = (a-x)dy$$



$$\bar{x}_{el} = \frac{2r}{3} \cos \theta$$

$$\bar{y}_{el} = \frac{2r}{3} \sin \theta$$

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

$$Q_y = \bar{x}A = \int \bar{x}_{el} dA$$

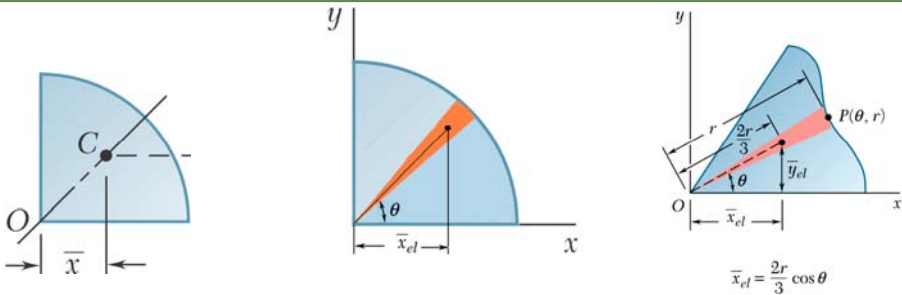
$$Q_x = \bar{y}A = \int \bar{y}_{el} dA$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 6

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال (تعیین مرکز هندسی ربع دایره با انتگرالگیری):



$$\bar{x}_{el} = \frac{2r}{3} \cos \theta$$

$$\bar{y}_{el} = \frac{2r}{3} \sin \theta$$

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

$$\bar{x}A = \int \bar{x}_{el} dA = \int \frac{2r}{3} \cos \theta \times \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{r^3}{3} \int \cos \theta d\theta = \frac{r^3}{3} [\sin \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r^3}{3}$$

$$\bar{x} \frac{\pi r^2}{4} = \frac{r^3}{3} \Rightarrow \bar{x} = \frac{4r}{3\pi}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 7

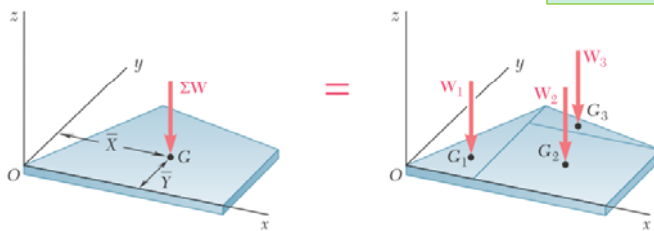
دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس کرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مرکز ثقل یک صفحه:

موقعیت مرکز سطح برای سطوح مرکب.



$$W = \rho g V = \rho g t A = k A$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i A_i}{A}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i A_i}{A}$$

اگر مساحت کل A به n سطح معلوم (شناخته شده) قابل تقسیم باشد، خواهیم داشت:

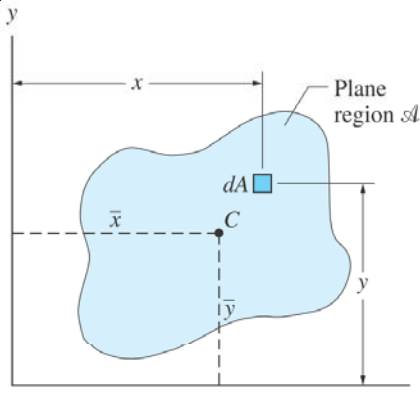
© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 - 8

Vector Mechanics for Engineers: Statics

گشتاور اول سطح:

گشتاور اول سطح نسبت به محور x و y
بصورت زیر تعریف می شود:



$$Q_x = \bar{y}A = \sum_{i=1}^n y_i A_i = \int y dA$$

$$Q_y = \bar{x}A = \sum_{i=1}^n x_i A_i = \int x dA$$

بنابراین برای مرکز سطح، می توان روابط زیر را نیز نوشت:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i A_i}{A} = \frac{Q_x}{A} \quad \text{and} \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i A_i}{A} = \frac{Q_y}{A}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 - 9

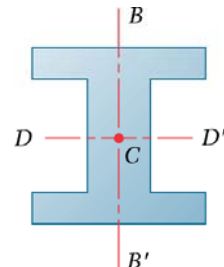
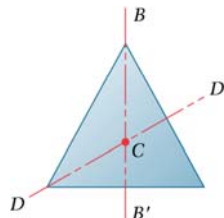
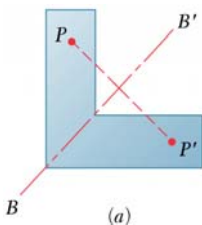
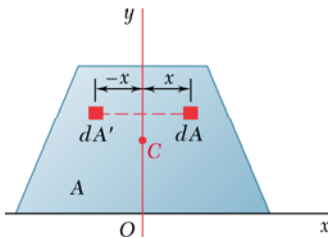
دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

گشتاور اول سطح:

گشتاور اول سطح، (برای سطوحی که دارای محور تقارن هستند) نسبت به محورهای تقارن صفر است. برای مثال:

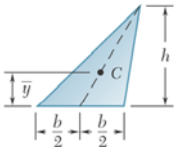
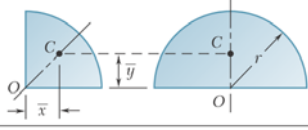
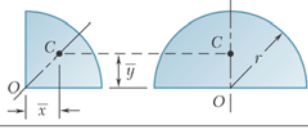
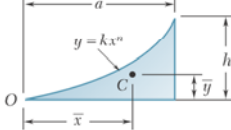
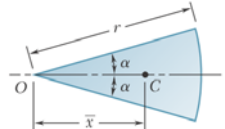


© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 - 10

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مرکز هندسی سطوح متعارف:

شکل	$\bar{x}$	$\bar{y}$	مساحت
		$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
	0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
	$\frac{n+1}{n+2}a$	$\frac{n+1}{4n+2}h$	$\frac{ah}{n+1}$
	$\frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$	0	αr^2

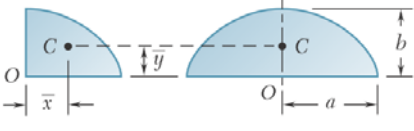
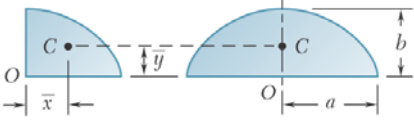
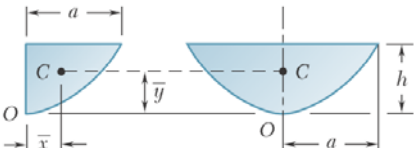
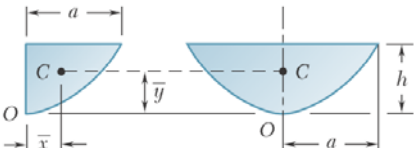
2 - 11

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مرکز هندسی سطوح متعارف (ادامه):

شکل	$\bar{x}$	$\bar{y}$	مساحت
	$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
	0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
	$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
	0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$

2 - 12

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مرکز هندسی قوسهای متعارف:

	شکل قوس (کمان)	$\bar{x}$	$\bar{y}$	طول قوس
ربع قوس دایره		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
نیم قوس دایره		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
قوسی از دایره		$\frac{r \sin \alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 - 13

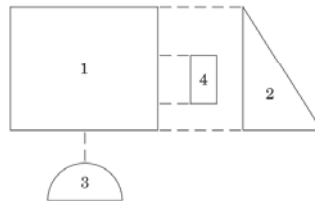
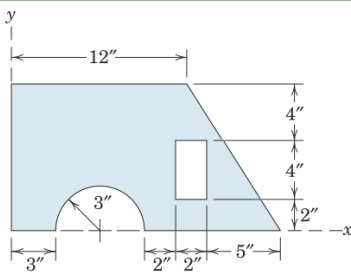
دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال:

موقعیت مرکز سطح را برای سطح داده شده بدست آورید.



PART	A in. ²	$\bar{x}$ in.	$\bar{y}$ in.	$\bar{x}A$ in. ³	$\bar{y}A$ in. ³
1	120	6	5	720	600
2	30	14	10/3	420	100
3	-14.14	6	1.273	-84.8	-18
4	-8	12	4	-96	-32
TOTALS	127.9			959	650

$$\bar{X} = \frac{\sum A\bar{x}}{\sum A} = \frac{959}{127.9} = 7.50 \text{ in.}$$

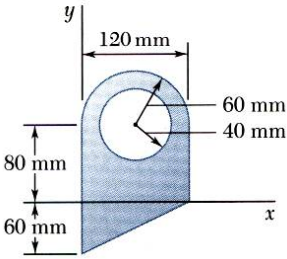
$$\bar{Y} = \frac{\sum A\bar{y}}{\sum A} = \frac{650}{127.9} = 5.08 \text{ in.}$$

2 - 14

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال:

موقعیت مرکز سطح و گشتاور اول سطح را برای سطح داده شده بدست آورید.



© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

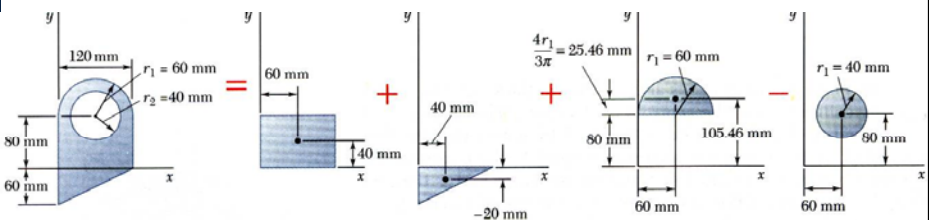
5 - 15

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

حل:



Component	A, mm^2	$\bar{x}, \text{mm}$	$\bar{y}, \text{mm}$	$\bar{x}A, \text{mm}^3$	$\bar{y}A, \text{mm}^3$
Rectangle	$(120)(80) = 9.6 \times 10^3$	60	40	$+576 \times 10^3$	$+384 \times 10^3$
Triangle	$\frac{1}{2}(120)(60) = 3.6 \times 10^3$	40	-20	$+144 \times 10^3$	-72×10^3
Semicircle	$\frac{1}{2}\pi(60)^2 = 5.655 \times 10^3$	60	105.46	$+339.3 \times 10^3$	$+596.4 \times 10^3$
Circle	$-\pi(40)^2 = -5.027 \times 10^3$	60	80	-301.6×10^3	-402.2×10^3
	$\Sigma A = 13.828 \times 10^3$			$\Sigma \bar{x}A = +757.7 \times 10^3$	$\Sigma \bar{y}A = +506.2 \times 10^3$

$$Q_x = +506.2 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

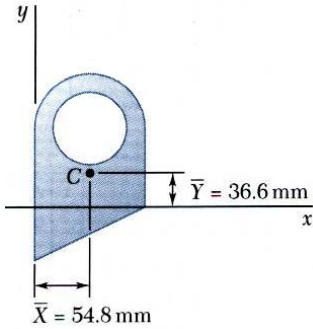
$$Q_y = +757.7 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 - 16

Vector Mechanics for Engineers: Statics

حل (ادامه):



$$\bar{X} = \frac{\sum \bar{x}A}{\sum A} = \frac{+757.7 \times 10^3 \text{ mm}^3}{13.828 \times 10^3 \text{ mm}^2}$$

$$\bar{X} = 54.8 \text{ mm}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{+506.2 \times 10^3 \text{ mm}^3}{13.828 \times 10^3 \text{ mm}^2}$$

$$\bar{Y} = 36.6 \text{ mm}$$

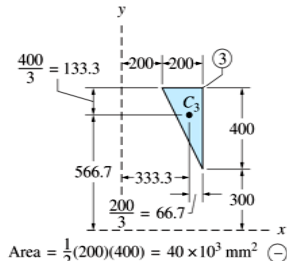
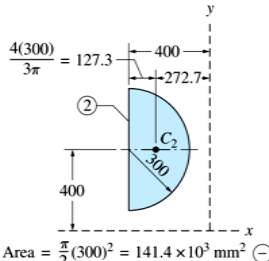
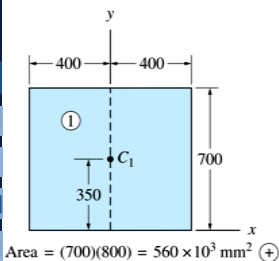
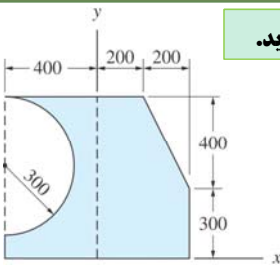
دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس کرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال:

موقعیت مرکز سطح و گشتاور اول سطح را برای سطح داده شده بدست آورید.



Vector Mechanics for Engineers: Statics

ادامه حل:

Shape	Area A (mm ²)	$\bar{x}$ (mm)	$A\bar{x}$ (mm ³)	$\bar{y}$ (mm)	$A\bar{y}$ (mm ³)
1 (Rectangle)	$+560.0 \times 10^3$	0	0	+350	196.0×10^6
2 (Semicircle)	-141.4×10^3	-272.7	$+38.56 \times 10^6$	+400	-56.56×10^6
3 (Triangle)	-40.0×10^3	+333.3	-13.33×10^6	+566.7	-22.67×10^6
Σ	$+378.6 \times 10^3$	...	$+25.23 \times 10^6$	...	$+116.77 \times 10^6$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma A\bar{x}}{\Sigma A} = \frac{+25.23 \times 10^6}{+378.6 \times 10^3} = 66.6 \text{ mm}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma A\bar{y}}{\Sigma A} = \frac{+116.77 \times 10^6}{+378.6 \times 10^3} = 308 \text{ mm}$$

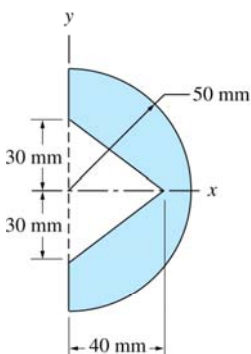
دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس کرمی

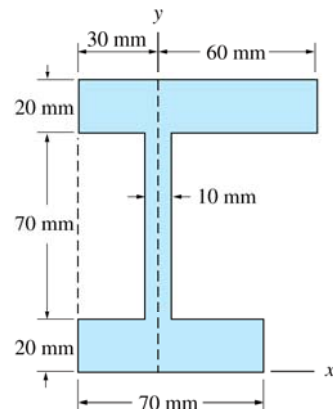
Vector Mechanics for Engineers: Statics

تکلیف منزل:

موقعیت مرکز سطح و گشتاور اول سطح را برای سطوح داده شده بدست آورید.



$$\bar{x} = 24.7 \text{ mm}, \bar{y} = 0$$



$$\bar{x} = 87.2 \text{ mm}, \bar{y} = 59.6 \text{ mm}$$

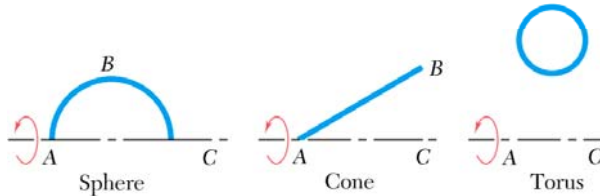
Vector Mechanics for Engineers: Statics

قضایای پاپوس - گلدینوس 1:

سطح حاصل از دوران یک خط (یا منحنی) = طول خط، ضربدر جابجایی مرکز خط



$$A = 2\pi \bar{y} L$$



© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 - 21

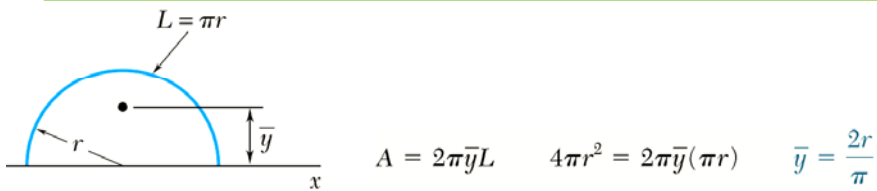
دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

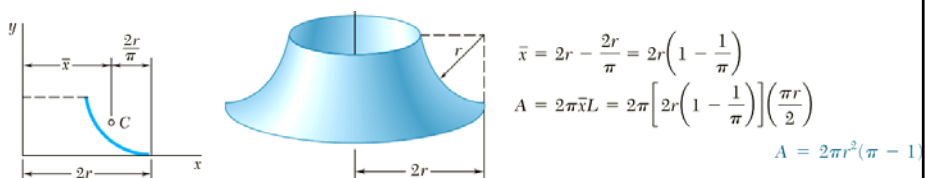
Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال:

بر اساس قضیه پاپوس موقعیت مرکز نیم قوس دایره را (با معلوم بودن سطح خارجی کره) بدست آورید.



مساحت حاصل از دوران ربع قوس دایره نشان داده شده را حول محور y بدست آورید.



© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

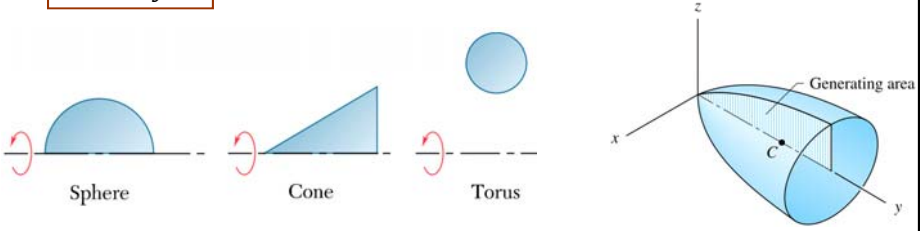
2 - 22

Vector Mechanics for Engineers: Statics

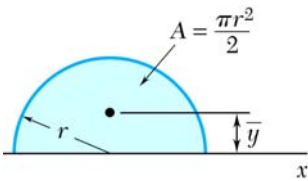
قضایای پاپوس - گلدینوس 2:

$$V = 2\pi \bar{y} A$$

حجم حاصل از دوران یک سطح = **مساحت** سطح ، ضربدر جابجایی مرکز سطح



مثال: مرکز هندسی سطح نیم دایره را (با معلوم بودن حجم کره) بدست آورید.



$$V = 2\pi \bar{y} A$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi \bar{y} (\frac{1}{2}\pi r^2)$$

$$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 - 23

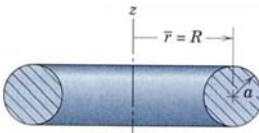
دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس کرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

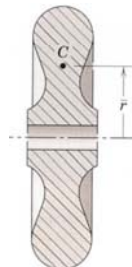
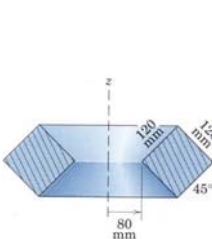
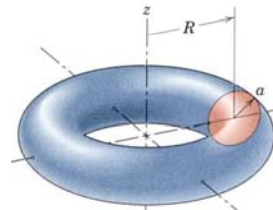
مثال:

مثال: مساحت خارجی و حجم بدست آمده از دوران دایره ای به شعاع a را حول محور Z تعیین کنید.



$$A = \theta \bar{r} L = 2\pi(R)(2\pi a) = 4\pi^2 R a$$

$$V = \theta \bar{r} A = 2\pi(R)(\pi a^2) = 2\pi^2 R a^2$$



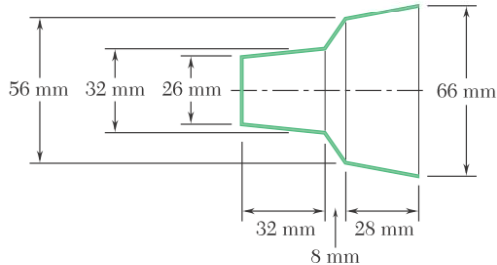
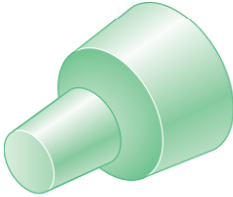
© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 24

Vector Mechanics for Engineers: Statics

تکلیف منزل:

محفظه یک لامپ از ورق آلومینیومی به ضخامت ۱ میلیمتر مطابق شکل ساخته شده است. چگالی آلومینیوم 2800 kg/m^3 است. جرم محفظه را تعیین کنید.



$$m = 0.0305 \text{ kg}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

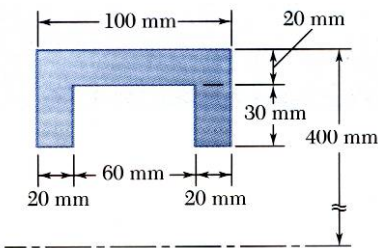
2 - 25

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس کرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 5.7



SOLUTION:

- Apply the theorem of Pappus-Guldinus to evaluate the volumes or revolution for the rectangular rim section and the inner cutout section.
- Multiply by density and acceleration to get the mass and acceleration.

The outside diameter of a pulley is 0.8 m, and the cross section of its rim is as shown. Knowing that the pulley is made of steel and that the density of steel is $\rho = 7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ determine the mass and weight of the rim.

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

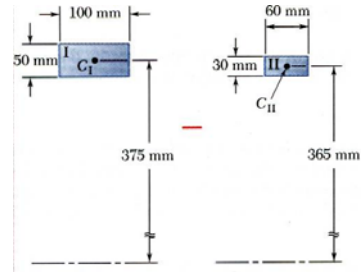
5 - 26

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 5.7

SOLUTION:

- Apply the theorem of Pappus-Guldinus to evaluate the volumes of revolution for the rectangular rim section and the inner cutout section.
- Multiply by density and acceleration to get the mass and acceleration.



	Area, mm ²	$\bar{y}$, mm	Distance Traveled by C , mm	Volume, mm ³
I	+5000	375	$2\pi(375) = 2356$	$(5000)(2356) = 11.78 \times 10^6$
II	-1800	365	$2\pi(365) = 2293$	$(-1800)(2293) = -4.13 \times 10^6$
				Volume of rim = 7.65×10^6

$$m = \rho V = (7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(7.65 \times 10^6 \text{ mm}^3)(10^{-9} \text{ m}^3/\text{mm}^3)$$

$$m = 60.0 \text{ kg}$$

$$W = mg = (60.0 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)$$

$$W = 589 \text{ N}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

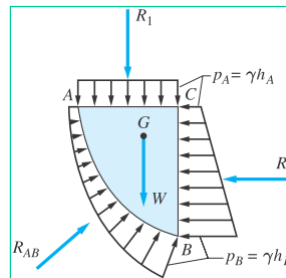
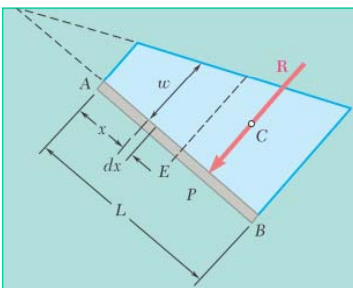
5 - 27

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

بارهای گسترده:

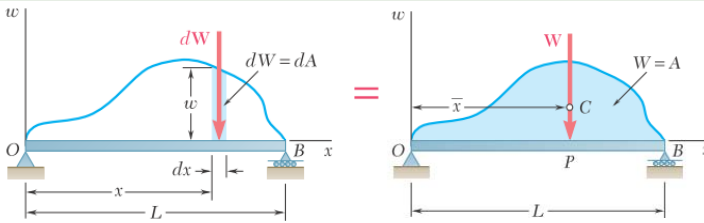


© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 28

Vector Mechanics for Engineers: Statics

بارهای گسترده روی تیرها:



$$W = \int_0^L w \, dx = \int dA = A$$

$$(OP)W = \int x \, dW$$

$$(OP)A = \int_0^L x \, dA = \bar{x}A$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

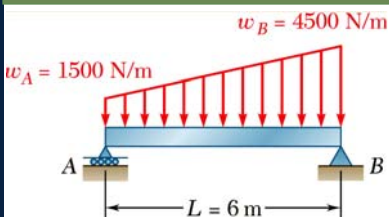
5 - 29

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس کرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال:



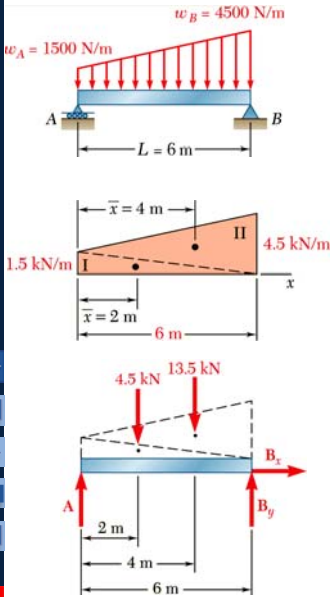
عکس العمل تکیه گاهی را در A و B بدست آورید.

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 - 30

Vector Mechanics for Engineers: Statics

حل:



Component	A, kN	$\bar{x}$, m
Triangle I	4.5	2
Triangle II	13.5	4

$$\sum M_A = 0: B_y(6) - (4.5)(2) - (13.5)(4) = 0$$

$$B_y = 10.5 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0: A_y - 4.5 - 13.5 + 10.5 = 0$$

$$A_y = 7.5 \text{ kN}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 - 31

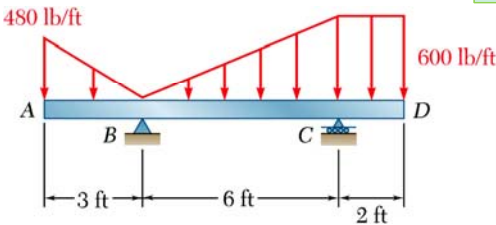
دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس کرمی

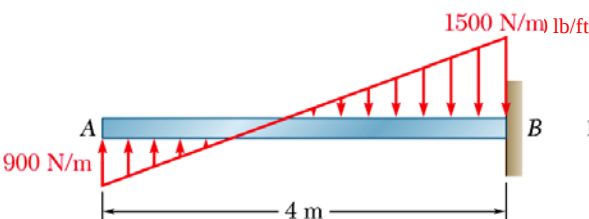
Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال:

عکس العمل تکیه گاهی را در A و B بدست آورید.



$$B = 1360 \text{ lb } \uparrow; C = 2360 \text{ lb } \uparrow.$$



$$B = 1200 \text{ N } \uparrow, M_B = 800 \text{ N} \cdot \text{m } \uparrow.$$

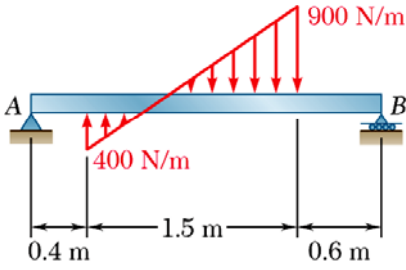
© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 - 32

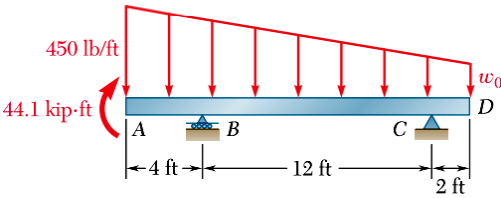
Vector Mechanics for Engineers: Statics

تکلیف منزل:

عکس العمل تکیه گاهی را در A و B بدست آورید.



$$A = 105 \text{ N } \uparrow, B = 270 \text{ N } \uparrow$$



$$B = 150.0 \text{ lb } \uparrow; C = 5250 \text{ lb } \uparrow$$

VECTOR MECHANICS FOR ENGINEERS:
STATICSFerdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech University

تحليل سازه‌ها

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس کرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

سرفصل مطالب و مسائل فصل ششم برای حل:

فصل ششم: تحلیل سازه (خرپا)

۱- تعریف خرپا

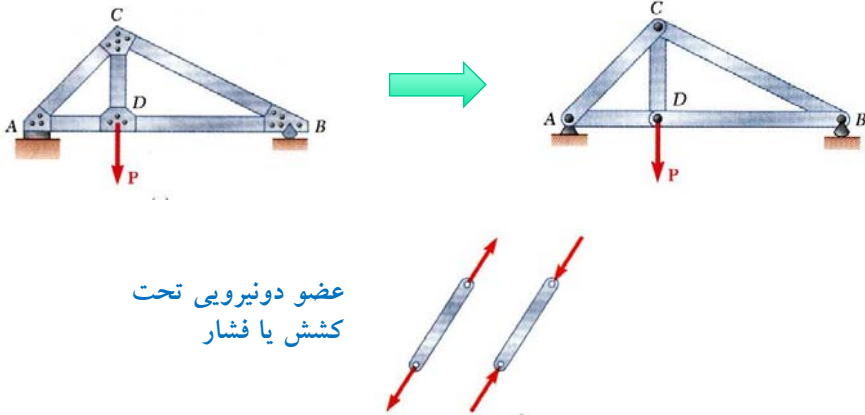
۲- تحلیل خرپا به روش تعادل مفصل (روش گره)

۳- تحلیل خرپا به روش برش (روش مقاطع)

۲-۳-۶-۱۵-۲۸-۳۲- از روش مفصل

۴۳-۴۵-۴۸-۵۰- از روش برش (مقاطع)

تعریف خرپا: خرپاها مثل تیرها برای تحمل بار طراحی می‌شوند. خرپاها از تعدادی عضو دوفیرویی مستقیم تشکیل می‌شوند که توسط نقاط انتهایی شان به یکدیگر متصل می‌شوند.

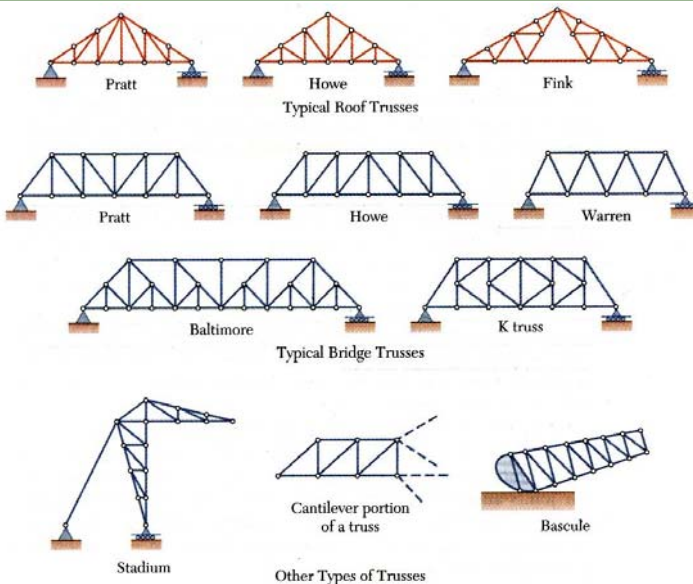


© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

1 - 3

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس کرمی



© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

6 - 4

تحليل خربا:

نیروی تکیه‌گاهی در خرباها، با استفاده از روش تعادل (بررسی تعادل کل خربا) تعیین می‌شود. همچنین برای تعیین نیروی داخلی هر عضو از خربا، از روش تعادل مفصل و تعادل مقطع استفاده می‌گردد. لذا برای تحلیل خربا از دو روش زیر استفاده می‌شود:

۱- تحلیل خربا به روش تعادل مفصل (روش گره)

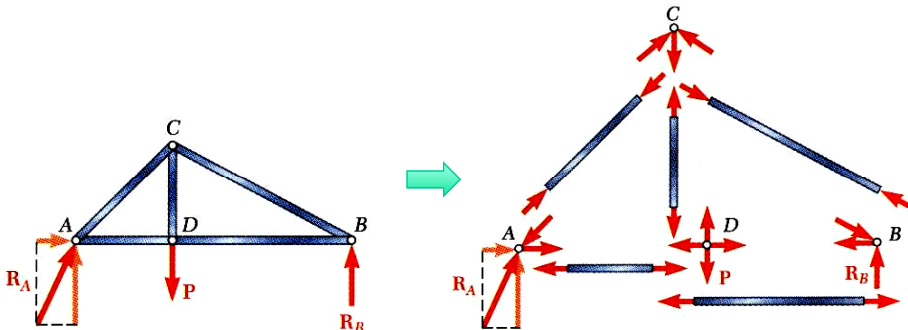
۲- تحلیل خربا به روش برش (روش مقاطع)

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

۱- تحلیل خربا به روش تعادل مفصل (روش گره)

در این روش بعد از تعیین نیروی عکس العمل تکیه‌گاهی، با بررسی تعادل هر مفصل، نیرو در عضوهای مرتبط به آن مفصل تعیین می‌گردد.



تعیین عکس العمل تکیه‌گاهی

بررسی تعادل هر مفصل و
تعیین نیروی داخلی اعضا

Vector Mechanics for Engineers: Statics

تعداد یک نقطه مادی (تعداد ذره) {یادآوری فصل دوم}

طبق قانون اول نیوتن، برآیند نیروهای وارد بر یک ذره در حال تعادل صفر است. لذا داریم:

$$\vec{R} = \sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow 1- \text{ ترسیم چند ضلعی بسته نیروها} \\ \Rightarrow 2- \left\{ \begin{array}{l} R_x = 0 \Rightarrow \sum F_x = 0 \\ R_y = 0 \Rightarrow \sum F_y = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

بنابراین برای حل مسائل به روش تعداد ذره، باید یک نقطه مادی را در نظر بگیریم و ابتدا نمودار آزاد نقطه را ترسیم نموده به یکی از روش فوق عمل کنیم. یعنی:

- ۱- نیروهای وارد بر نقطه مادی را بدنبال یکدیگر ترسیم کرده و چند ضلعی بسته‌ای را ترسیم کنیم.
- ۲- معادلات تعادل را برای نیروهای وارد بر نقطه مادی بنویسیم.

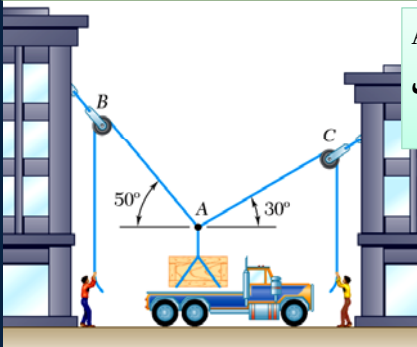
دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

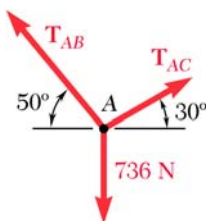
مثال تعداد یک نقطه مادی : {یادآوری فصل دوم}

مثال- بار ۷۳۶ نیوتنی نشان داده شده، توسط دو کابل AC و AB نگه داشته شده است. مطلوبست تعیین نیروی کششی در هر یک از این دو کابل.



حل) در حل مسائل به روش تعداد یک از دو صورت زیر عمل می شود.

- ۱- ترسیم نمودار آزاد
- ۲- ترسیم چند ضلعی بسته نیروها
- ۳- تعیین نیروهای مجهول به کمک روابط مثلثاتی (COS و SIN)

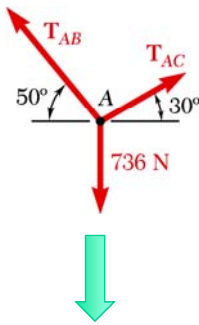


- ۱- ترسیم نمودار آزاد
- ۲- نوشتن معادلات تعادل
- ۳- تعیین نیروهای مجهول به کمک حل این معادلات

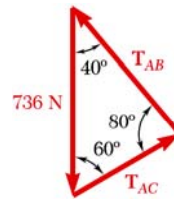
Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال تعادل یک نقطه مادی : {یادآوری فصل دوم}

نمودار آزاد نقطه A :



چند ضلعی بسته نیروها:



روابط مثلثاتی:

$$\frac{T_{AB}}{\sin 60^\circ} = \frac{T_{AC}}{\sin 40^\circ} = \frac{736 \text{ N}}{\sin 80^\circ}$$

$$T_{AB} = 647 \text{ N} \quad T_{AC} = 480 \text{ N}$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 & \Rightarrow & -T_{AB} \cos 50^\circ + T_{AC} \cos 30^\circ = 0 \\ \sum F_y = 0 & \Rightarrow & T_{AB} \sin 50^\circ + T_{AC} \sin 30^\circ - 736 = 0 \end{cases}$$

نوشتن معادلات تعادل:

$$\begin{cases} T_{AB} = 1.347 T_{AC} \\ (1.347 T_{AC}) \sin 50^\circ + T_{AC} \sin 30^\circ = 736 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_{AB} = 647 \text{ N} \\ T_{AC} = 480 \text{ N} \end{cases}$$

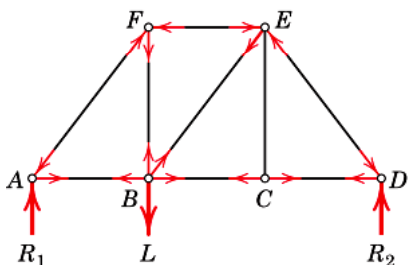
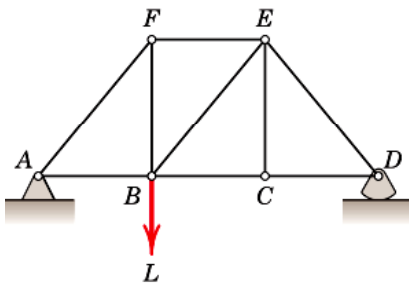
حل معادلات تعادل:

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس کرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال تعادل مفصل در خربا:

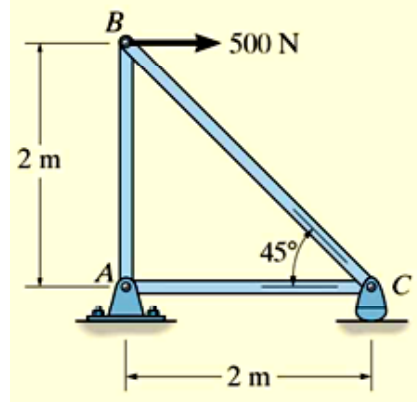
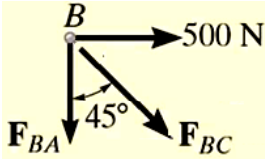


Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال 1:

بر اساس روش مفصل (تعادل مفصل)، نیروی داخلی هر عضو را تعیین کنید.

بررسی تعادل گره B



$$\begin{aligned} \pm \sum F_x &= 0; & 500 \text{ N} + F_{BC} \sin 45^\circ &= 0 & F_{BC} &= -707.1 \text{ N (C)} \\ + \uparrow \sum F_y &= 0; & -F_{BC} \cos 45^\circ - F_{BA} &= 0 & F_{BA} &= 500 \text{ N (T)} \end{aligned}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

6 - 11

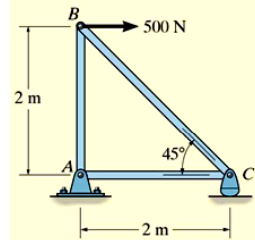
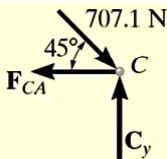
دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

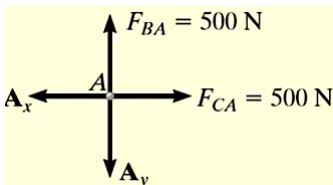
مثال 1:

بررسی تعادل گره C



$$\begin{aligned} \pm \sum F_x &= 0; & -F_{CA} + 707.1 \cos 45^\circ \text{ N} &= 0 & F_{CA} &= 500 \text{ N (T)} \\ + \uparrow \sum F_y &= 0; & C_y - 707.1 \sin 45^\circ \text{ N} &= 0 & C_y &= 500 \text{ N} \end{aligned}$$

بررسی تعادل گره A



$$\begin{aligned} \pm \sum F_x &= 0; & 500 \text{ N} - A_x &= 0 & A_x &= 500 \text{ N} \\ + \uparrow \sum F_y &= 0; & 500 \text{ N} - A_y &= 0 & A_y &= 500 \text{ N} \end{aligned}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

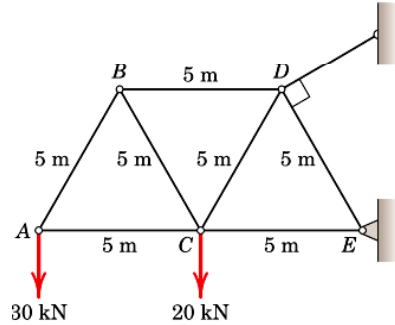
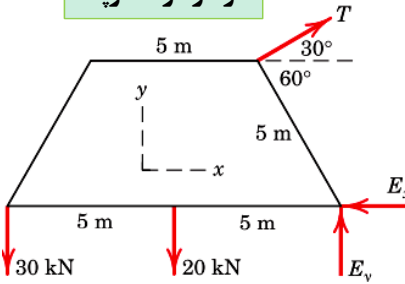
6 - 12

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال 2:

بر اساس روش مفصل (تعادل مفصل)، نیروی داخلی هر عضو را تعیین کنید.

نمودار آزاد خریا



$$\begin{aligned}
 [\Sigma M_E = 0] \quad & 5T - 20(5) - 30(10) = 0 \quad & T = 80 \text{ kN} \\
 [\Sigma F_x = 0] \quad & 80 \cos 30^\circ - E_x = 0 \quad & E_x = 69.3 \text{ kN} \\
 [\Sigma F_y = 0] \quad & 80 \sin 30^\circ + E_y - 20 - 30 = 0 \quad & E_y = 10 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

6 - 13

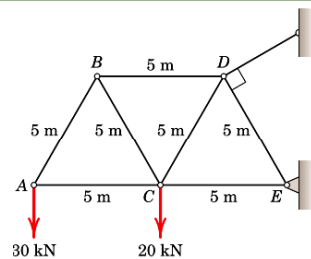
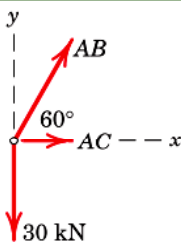
دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

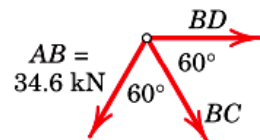
حل مثال 1:

بررسی تعادل مفصل A:



$$\begin{aligned}
 [\Sigma F_y = 0] \quad & 0.866AB - 30 = 0 \quad & AB = 34.6 \text{ kN} \quad T \\
 [\Sigma F_x = 0] \quad & AC + 0.5(34.6) = 0 \quad & AC = -17.32 \text{ kN} \quad C
 \end{aligned}$$

بررسی تعادل مفصل B:



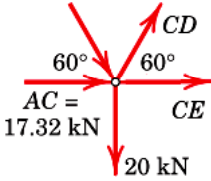
$$\begin{aligned}
 [\Sigma F_y = 0] \quad & -0.866BC - 0.866(34.6) = 0 \quad & BC = -34.6 \text{ kN} \quad C \\
 [\Sigma F_x = 0] \quad & BD - (0.5)(34.6) + (0.5)(-34.6) = 0 \quad & BD = 34.6 \text{ kN} \quad T
 \end{aligned}$$

6 - 14

Vector Mechanics for Engineers: Statics

حل مثال 1:

$$BC = 34.6 \text{ kN}$$



بررسی تعادل مفصل C:

$$[\Sigma F_y = 0]$$

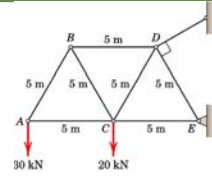
$$0.866CD - 0.866(34.6) - 20 = 0$$

$$CD = 57.7 \text{ kN } T$$

$$[\Sigma F_x = 0]$$

$$CE + 17.32 + 0.5(34.6) + 0.5(57.7) = 0$$

$$CE = -63.5 \text{ kN } C$$

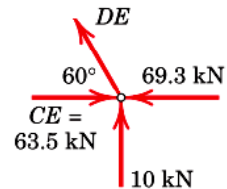


بررسی تعادل مفصل E:

$$[\Sigma F_y = 0]$$

$$0.866DE + 10 = 0$$

$$DE = -11.55 \text{ kN } C$$



6 - 15

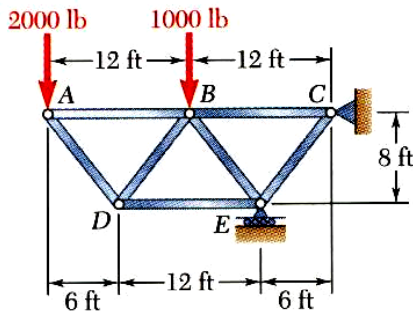
دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس کرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال 2 :

بر اساس روش مفصل (تعادل مفصل)، نیروی داخلی هر عضو را تعیین کنید.

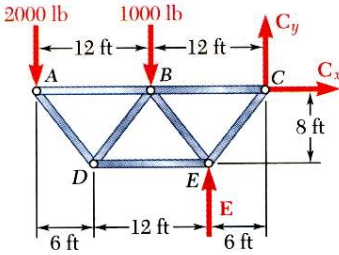


Vector Mechanics for Engineers: Statics

حل مثال 2:

حل:

ابتدا با بررسی تعادل کل خرپا، عکس العمل تکیه گاهی تعیین می شود.



$$\sum M_C = 0$$

$$(2000 \text{ lb})(24 \text{ ft}) + (1000 \text{ lb})(12 \text{ ft}) - E(6 \text{ ft}) = 0$$

$$E = 10,000 \text{ lb} \uparrow$$

$$\sum F_x = 0 = C_x$$

$$C_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 = -2000 \text{ lb} - 1000 \text{ lb} + 10,000 \text{ lb} + C_y$$

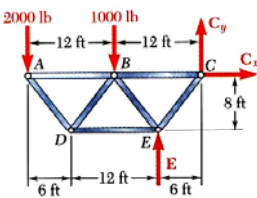
$$C_y = 7000 \text{ lb} \downarrow$$

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

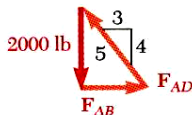
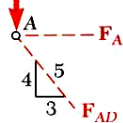
درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

حل مثال 1 (ادامه):



2000 lb



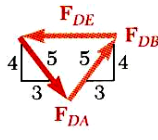
$$\frac{2000 \text{ lb}}{4} = \frac{F_{AB}}{3} = \frac{F_{AD}}{5}$$

$$F_{AB} = 1500 \text{ lb } T$$

$$F_{AD} = 2500 \text{ lb } C$$

بررسی تعادل مفصل A.

$F_{DA} = 2500 \text{ lb}$



$$F_{DB} = F_{DA}$$

$$F_{DE} = 2\left(\frac{3}{5}\right)F_{DA}$$

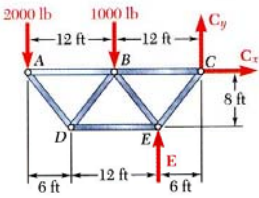
$$F_{DB} = 2500 \text{ lb } T$$

$$F_{DE} = 3000 \text{ lb } C$$

بررسی تعادل مفصل D.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

حل مثال 1 (ادامه):



بررسی تعادل مفصل B.

$$\sum F_y = 0 = -1000 - \frac{4}{5}(2500) - \frac{4}{5}F_{BE}$$

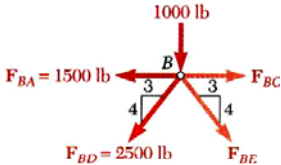
$$F_{BE} = -3750 \text{ lb}$$

$$F_{BE} = 3750 \text{ lb C}$$

$$\sum F_x = 0 = F_{BC} - 1500 - \frac{3}{5}(2500) - \frac{3}{5}(3750)$$

$$F_{BC} = +5250 \text{ lb}$$

$$F_{BC} = 5250 \text{ lb T}$$

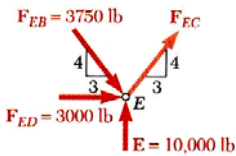


بررسی تعادل مفصل E.

$$\sum F_x = 0 = \frac{3}{5}F_{EC} + 3000 + \frac{3}{5}(3750)$$

$$F_{EC} = -8750 \text{ lb}$$

$$F_{EC} = 8750 \text{ lb C}$$



© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

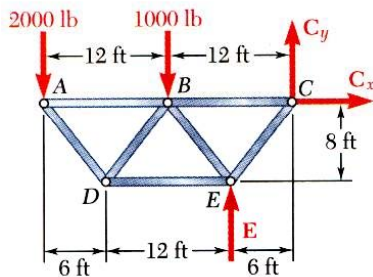
6 - 19

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس کرمی

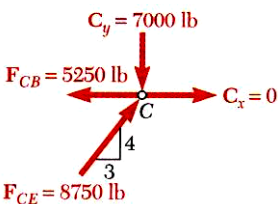
Vector Mechanics for Engineers: Statics

حل مثال 1 (ادامه):



بررسی تعادل مفصل C برای کنترل

جوابهای بدست آمده:



$$\sum F_x = -5250 + \frac{3}{5}(8750) = 0 \quad (\text{checks})$$

$$\sum F_y = -7000 + \frac{4}{5}(8750) = 0 \quad (\text{checks})$$

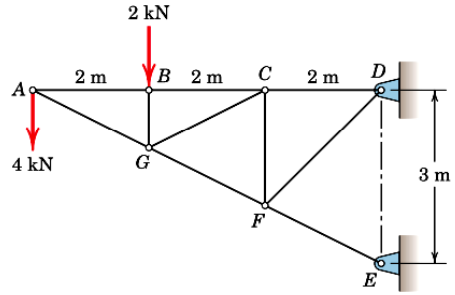
© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

6 - 20

Vector Mechanics for Engineers: Statics

تکلیف منزل:

بر اساس روش مفصل (تبادل مفصل)، نیروی داخلی عضو GC و FC را تعیین کنید.



$$CG = 2.24 \text{ kN T}, CF = 1 \text{ kN C}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

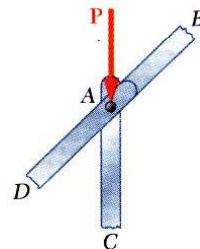
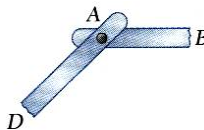
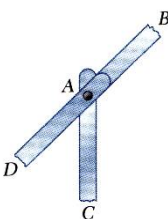
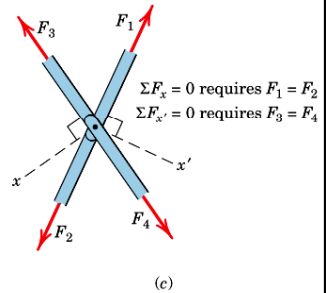
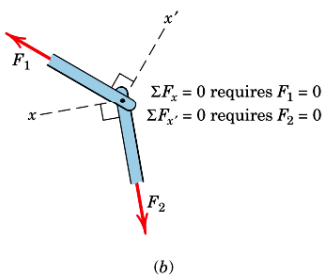
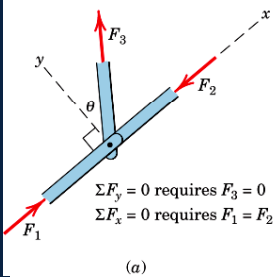
2 - 21

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

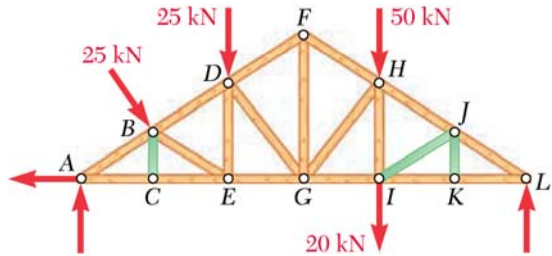
عضوهای صفر:



© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 22

در خرابای نشان داده شده عضوهای صفر را مشخص کنید.



دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

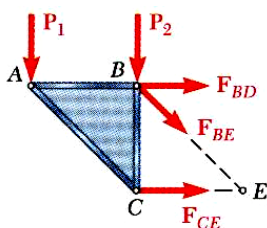
۲- تحلیل خرابا به روش برش (روش مقاطع)

روش برش، برای وقتی که تنها نیروی یک یا چند عضو از خرابا مورد نظر باشد کارآمدتر است.

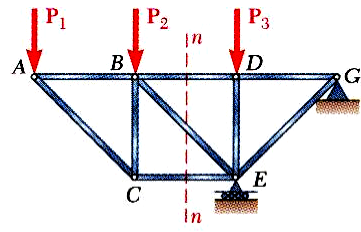
در این روش بعد از تعیین نیروی عکس العمل تکیه گاهی، دو گام زیر اجرا می شود:

۱- تعیین مسیر برش بگونه ای که عضو مورد نظر و حداکثر سه عضو از خرابا برش بخورد.

۲- با بررسی تعادل یکی از دو قسمت برش خورده می توان نیروهای اعضا برش خورده را بدست آورد (سه مجهول حل می شود).



بررسی تعادل سمت چپ برش

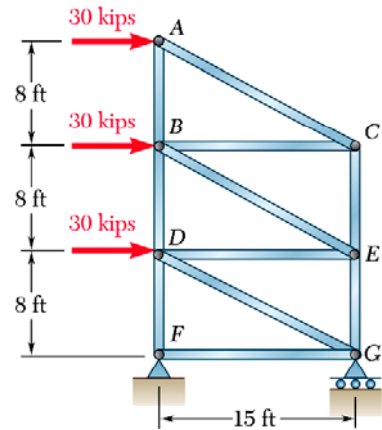


تعیین مسیر برش

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال:

بر اساس روش برش، نیروی داخلی عضوهای BD و DE را تعیین کنید.



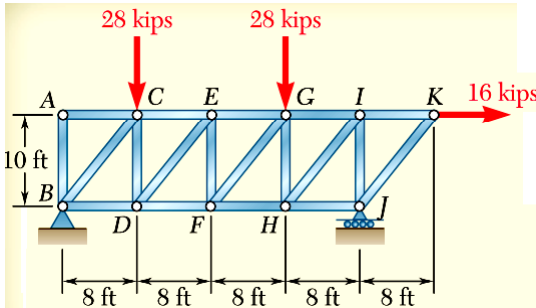
دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

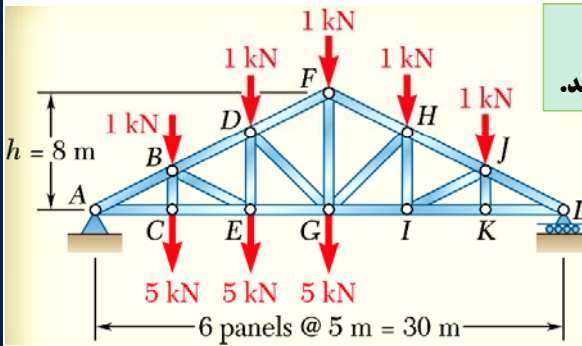
مثال:

بر اساس روش برش، نیروی داخلی عضوهای EF و GI را تعیین کنید.



Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال:



بر اساس روش برش، نیروی داخلی
عضوهای FH و GI و GH را تعیین کنید.

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس کرمی

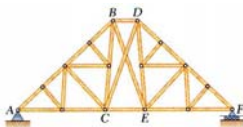
Vector Mechanics for Engineers: Statics

Trusses Made of Several Simple Trusses



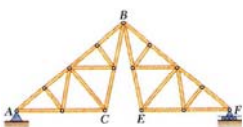
- Compound trusses are statically determinate, rigid, and completely constrained.

$$m = 2n - 3$$



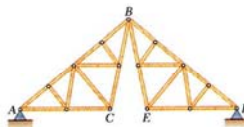
- Truss contains a *redundant member* and is *statically indeterminate*.

$$m > 2n - 3$$



non-rigid

$$m < 2n - 3$$

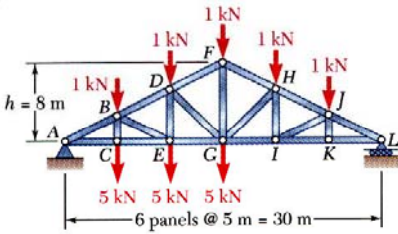


rigid

$$m < 2n - 4$$

- Additional reaction forces may be necessary for a rigid truss.
- Necessary but insufficient condition for a compound truss to be statically determinate, rigid, and completely constrained,

$$m + r = 2n$$



SOLUTION:

- Take the entire truss as a free body. Apply the conditions for static equilibrium to solve for the reactions at A and L.

$$\sum M_A = 0 = -(5\text{ m})(6\text{ kN}) - (10\text{ m})(6\text{ kN}) - (15\text{ m})(6\text{ kN}) - (20\text{ m})(1\text{ kN}) - (25\text{ m})(1\text{ kN}) + (25\text{ m})L$$

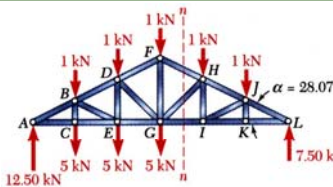
$$L = 7.5\text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_y = 0 = -20\text{ kN} + L + A$$

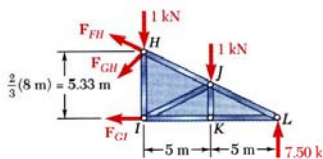
$$A = 12.5\text{ kN} \uparrow$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 6.3



- Pass a section through members FH, GH, and GI and take the right-hand section as a free body.



- Apply the conditions for static equilibrium to determine the desired member forces.

$$\sum M_H = 0$$

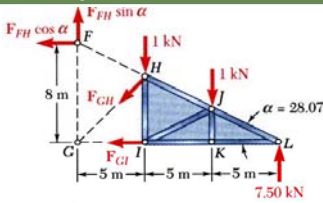
$$(7.50\text{ kN})(10\text{ m}) - (1\text{ kN})(5\text{ m}) - F_{GI}(5.33\text{ m}) = 0$$

$$F_{GI} = +13.13\text{ kN}$$

$$F_{GI} = 13.13\text{ kN T}$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

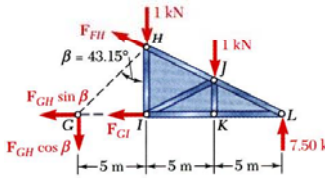
Sample Problem 6.3



$$\tan \alpha = \frac{FG}{GL} = \frac{8 \text{ m}}{15 \text{ m}} = 0.5333 \quad \alpha = 28.07^\circ$$

$$\begin{aligned} \sum M_G = 0 \\ (7.5 \text{ kN})(15 \text{ m}) - (1 \text{ kN})(10 \text{ m}) - (1 \text{ kN})(5 \text{ m}) \\ + (F_{FH} \cos \alpha)(8 \text{ m}) = 0 \\ F_{FH} = -13.82 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$F_{FH} = 13.82 \text{ kN C}$$



$$\tan \beta = \frac{GI}{HI} = \frac{5 \text{ m}}{\frac{2}{3}(8 \text{ m})} = 0.9375 \quad \beta = 43.15^\circ$$

$$\begin{aligned} \sum M_L = 0 \\ (1 \text{ kN})(10 \text{ m}) + (1 \text{ kN})(5 \text{ m}) + (F_{GH} \cos \beta)(10 \text{ m}) = 0 \\ F_{GH} = -1.371 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$F_{GH} = 1.371 \text{ kN C}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

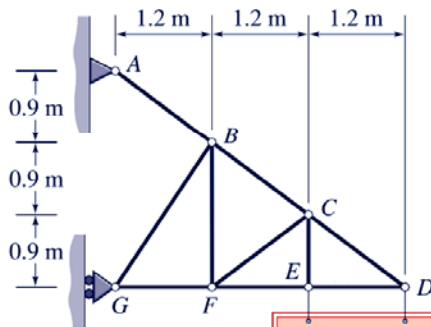
6 - 31

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس کرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال:



Mashad

A sign weighing 600 N hangs from a pin-jointed planar truss, as shown in Fig. 1. (a) Use the method of joints to determine the internal axial forces in members CD and DE, respectively. Neglect the weight of the truss members. (b) Use the method of sections to determine the axial Force in member FG.

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 32

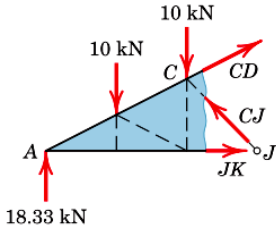
Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال:

بر اساس روش برش، نیروی داخلی عضو DG را تعیین کنید.

حل:

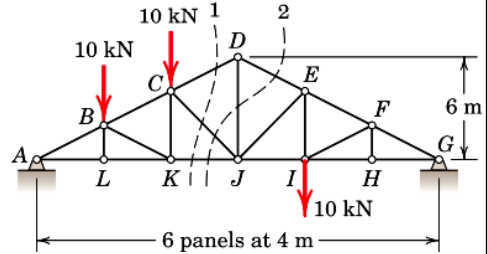
بررسی تعادل (سمت چپ) برش ۱



$$[\Sigma M_A = 0] \quad 0.707CJ(12) - 10(4) - 10(8) = 0 \quad CJ = 14.14 \text{ kN C}$$

$$[\Sigma M_J = 0] \quad 0.894CD(6) + 18.33(12) - 10(4) - 10(8) = 0$$

$$CD = -18.63 \text{ kN}$$



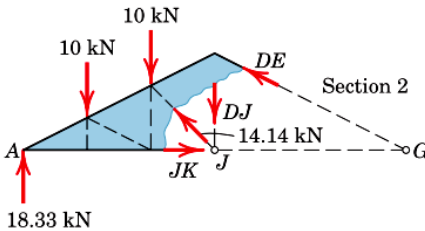
دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

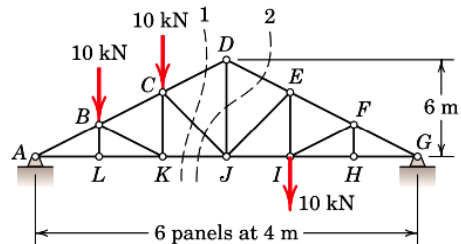
مثال:

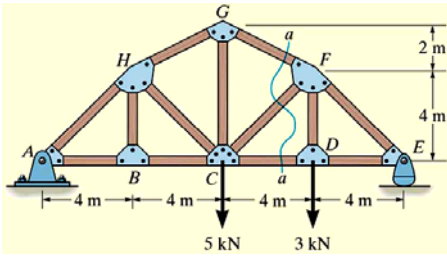
بررسی تعادل (سمت چپ) برش ۲



$$[\Sigma M_G = 0] \quad 12DJ + 10(16) + 10(20) - 18.33(24) - 14.14(0.707)(12) = 0$$

$$DJ = 16.67 \text{ kN T}$$

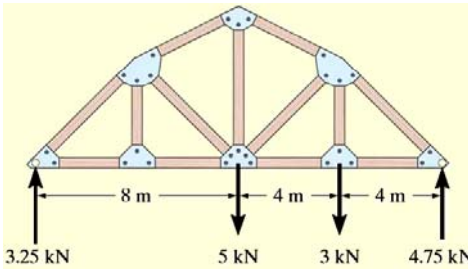




بر اساس روش برش، نیروی داخلی
عضو CF را تعیین کنید.

حل:

تعیین عکس العمل در تکیه گاه E



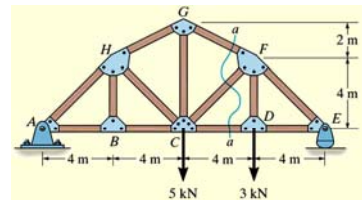
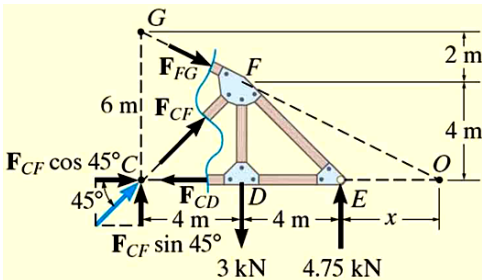
© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 35

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

بررسی تعادل سمت راست برش a-a



$$\zeta + \sum M_O = 0;$$

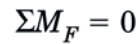
$$-F_{CF} \sin 45^\circ (12 \text{ m}) + (3 \text{ kN})(8 \text{ m}) - (4.75 \text{ kN})(4 \text{ m}) = 0$$

$$F_{CF} = 0.589 \text{ kN} \quad (\text{C})$$

Ans.

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 36



2 - 37

درس استاتیک مهندس گرمی

VECTOR MECHANICS FOR ENGINEERS:
STATICS

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.

Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech University



نیروها در تیرها و کابلها

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

سرفصل مطالب و مسائل فصل هفتم :

فصل هفتم: تحلیل تیرها

- ۱- ترسیم نمودار نیروی برشی و گشتاور خمشی به روش برش
- ۲- ترسیم نمودار نیروی برشی و گشتاور خمشی به روش سطح زیر منحنی

۲۹-۳۰-۳۵-۳۶-۳۷-۳۸-۳۹-۴۰-۴۱-۴۲-

۵۹-۶۹-۷۰-۷۷-۷۸-۷۹-۸۰-۸۱-۸۳-۸۹

تحلیل تیرها:

هدف ترسیم نمودار نیروی برشی و گشتاور خمشی در طول تیر می باشد که به کمک آن مقادیر حداکثر آنها (نیرو و گشتاور) تعیین شده و جهت طراحی تیر مورد استفاده قرار می گیرد. برای ترسیم نمودارهای مذکور از دو روش زیر استفاده می شود:

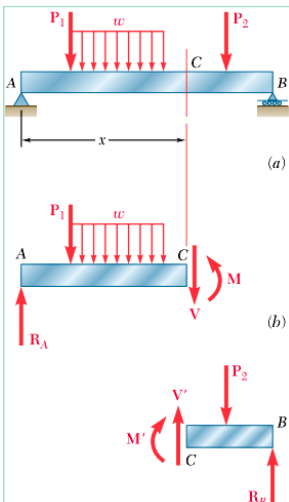
۱- روش برش

۲- روش سطح زیر منحنی (روش جمع زنی)

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

1- روش برش برای ترسیم نمودار V و M

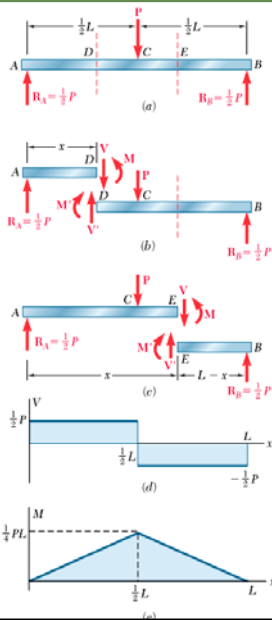


در روش برش مراحل زیر (جهت ترسیم نمودار نیروی برشی و گشتاور خمشی) انجام می شود:

- ۱- تعیین نیروی عکس العمل تکیه گاهی.
- ۲- برش تیر در حد فاصل نیروهای اعمالی به آن. در مقطع برش، جهت های نیروی برشی و گشتاور خمشی بصورت مقابل در نظر گرفته می شود.
- ۳- نوشتن معادلات تعادل برای یکی از دو قسمت برش خورده. که بر اساس این معادلات، نیروی برشی V و گشتاور خمشی M بر حسب طول تیر x (در حد فاصل مورد نظر) تعیین می شود.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Shear and Bending Moment Diagrams



- Variation of shear and bending moment along beam may be plotted.
- Determine reactions at supports.
- Cut beam at D and consider member AD,
 $V = +P/2 \quad M = +Px/2$
- Cut beam at E and consider member EB,
 $V = -P/2 \quad M = +P(L-x)/2$
- For a beam subjected to concentrated loads, shear is constant between loading points and moment varies linearly.

Inc. All rights reserved.

7-5

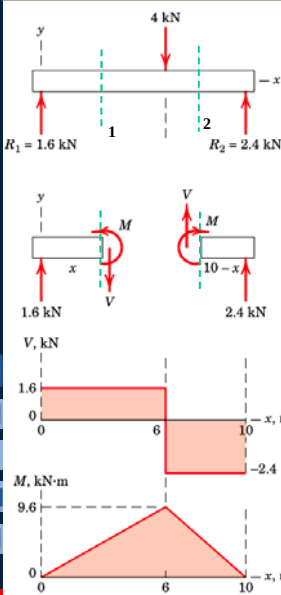
دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال 1

بر اساس روش برش، نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی را ترسیم نمایید.



$$[\Sigma F_y = 0]$$

$$1.6 - V = 0$$

$$V = 1.6 \text{ kN}$$

$$[\Sigma M_{R_1} = 0]$$

$$M - 1.6x = 0$$

$$M = 1.6x$$

بررسی تعادل سمت راست برش ۲

$$[\Sigma F_y = 0]$$

$$V + 2.4 = 0$$

$$V = -2.4 \text{ kN}$$

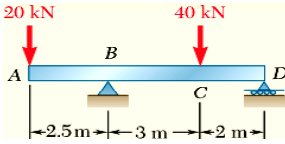
$$[\Sigma M_{R_2} = 0]$$

$$-(2.4)(10 - x) + M = 0$$

$$M = 2.4(10 - x)$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال 2



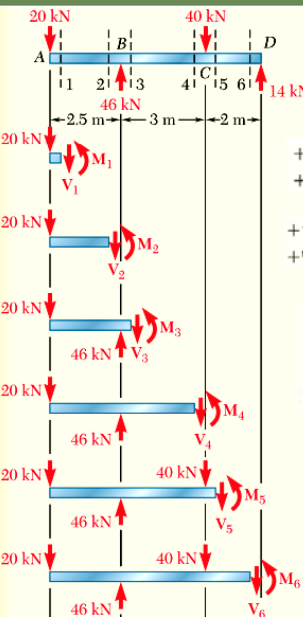
بر اساس روش برش، نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی را برای تیر بارگذاری شده مقابل، ترسیم نمایید.

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس کرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

حل مثال 2:



$$R_B = 46 \text{ kN} \uparrow \quad R_D = 14 \text{ kN} \uparrow$$

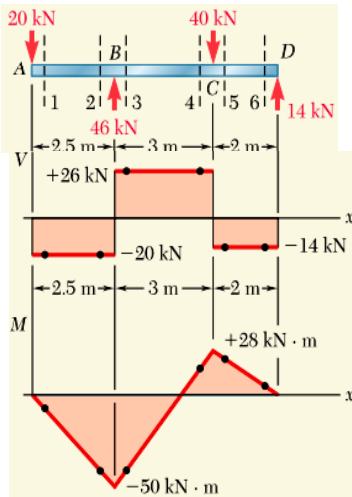
$$\begin{aligned} +\uparrow \Sigma F_y = 0: & \quad -20 \text{ kN} - V_1 = 0 & \quad V_1 = -20 \text{ kN} \\ +\curvearrowright \Sigma M_1 = 0: & \quad (20 \text{ kN})(0 \text{ m}) + M_1 = 0 & \quad M_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +\uparrow \Sigma F_y = 0: & \quad -20 \text{ kN} - V_2 = 0 & \quad V_2 = -20 \text{ kN} \\ +\curvearrowright \Sigma M_2 = 0: & \quad (20 \text{ kN})(2.5 \text{ m}) + M_2 = 0 & \quad M_2 = -50 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_3 &= +26 \text{ kN} & M_3 &= -50 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ V_4 &= +26 \text{ kN} & M_4 &= +28 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ V_5 &= -14 \text{ kN} & M_5 &= +28 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ V_6 &= -14 \text{ kN} & M_6 &= 0 \end{aligned}$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

ادامه حل مثال 2:



$V_1 = -20 \text{ kN}$	$M_1 = 0$
$V_2 = -20 \text{ kN}$	$M_2 = -50 \text{ kN} \cdot \text{m}$
$V_3 = +26 \text{ kN}$	$M_3 = -50 \text{ kN} \cdot \text{m}$
$V_4 = +26 \text{ kN}$	$M_4 = +28 \text{ kN} \cdot \text{m}$
$V_5 = -14 \text{ kN}$	$M_5 = +28 \text{ kN} \cdot \text{m}$
$V_6 = -14 \text{ kN}$	$M_6 = 0$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

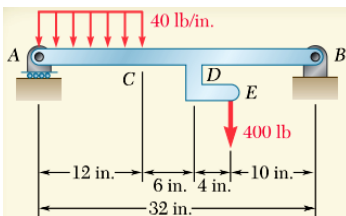
7- 9

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس کرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

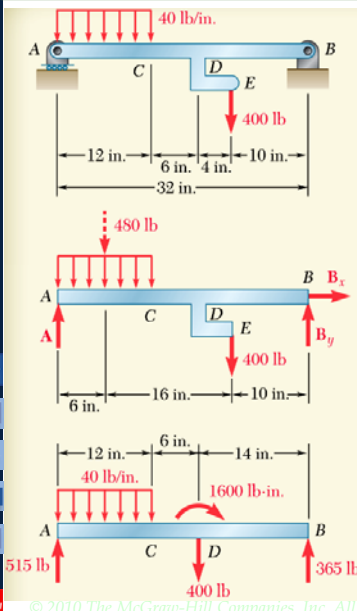
مثال 3:



بر اساس روش برش، نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی را برای تیر بارگذاری شده مقابل، ترسیم نمایید.

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

7- 10



$$\sum M_A = 0 :$$

$$B_y(32 \text{ in.}) - (480 \text{ lb})(6 \text{ in.}) - (400 \text{ lb})(22 \text{ in.}) = 0$$

$$B_y = 365 \text{ lb}$$

$$\sum M_B = 0 :$$

$$(480 \text{ lb})(26 \text{ in.}) + (400 \text{ lb})(10 \text{ in.}) - A(32 \text{ in.}) = 0$$

$$A = 515 \text{ lb}$$

$$\sum F_x = 0 :$$

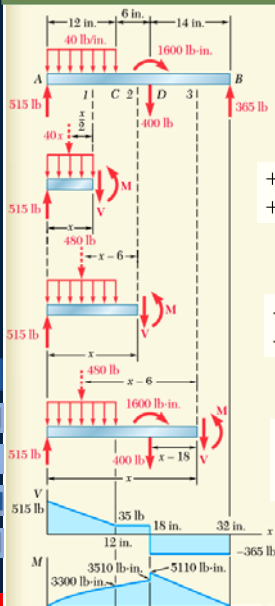
$$B_x = 0$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

7- 11

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس کرمی



$$0 < x < 12 \text{ in.}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0: \quad 515 - 40x - V = 0$$

$$V = 515 - 40x$$

$$+\circlearrowleft \sum M_1 = 0: \quad -515x + 40x\left(\frac{1}{2}x\right) + M = 0$$

$$M = 515x - 20x^2$$

$$12 \text{ in.} < x < 18 \text{ in.}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0: \quad 515 - 480 - V = 0 \quad V = 35 \text{ lb}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_2 = 0: \quad -515x + 480(x - 6) + M = 0 \quad M = (2880 + 35x) \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

$$18 \text{ in.} < x < 32 \text{ in.}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0: \quad 515 - 480 - 400 - V = 0 \quad V = -365 \text{ lb}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_3 = 0: \quad -515x + 480(x - 6) - 1600 + 400(x - 18) + M = 0$$

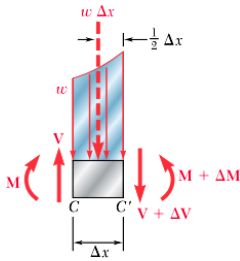
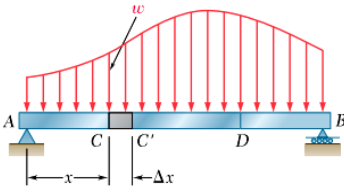
$$M = (11,680 - 365x) \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 12

Vector Mechanics for Engineers: Statics

ارتباط بین بار، نیروی برشی و گشتاور خمشی



- Relations between load and shear:

$$V - (V + \Delta V) - w\Delta x = 0$$

$$\frac{dV}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = -w$$

$$V_D - V_C = - \int_C^D w dx = -(\text{area under load curve})$$

- Relations between shear and bending moment:

$$(M + \Delta M) - M - V\Delta x + w\Delta x \frac{\Delta x}{2} = 0$$

$$\frac{dM}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(V - \frac{1}{2} w\Delta x \right) = V$$

$$M_D - M_C = \int_C^D V dx = (\text{area under shear curve})$$

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

2- روش سطح زیر منحنی برای ترسیم نمودار V و M (روش جمع زنی)

در روش جمع زنی مراحل زیر (جهت ترسیم نمودار نیروی برشی و گشتاور خمشی) انجام می شود:

۱- تعیین نیروی عکس العمل تکیه گاهی و ترسیم نمودار برش. مجموع نیروها در جهت قائم (در طول) برابر صفر است.

۲- ترسیم نمودار گشتاور خمشی بر اساس سطح زیر منحنی نیروی برشی و گشتاورهای متمرکز اعمالی به تیر.

۳- در صورت نیاز، استفاده از روابط بین بار، برش و گشتاور.

$$w = -\frac{dV}{dx}$$

$$\int_{V_0}^V dV = - \int_{x_0}^x w dx$$

$V = V_0 +$ (the negative of the area under the loading curve from x_0 to x)

$$V = \frac{dM}{dx}$$

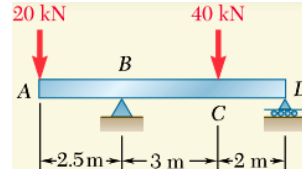
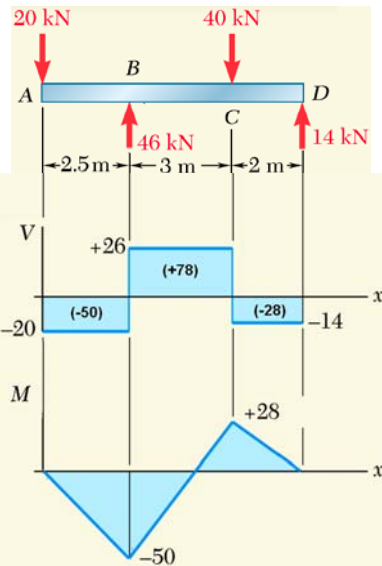
$$\int_{M_0}^M dM = \int_{x_0}^x V dx$$

$M = M_0 +$ (area under the shear diagram from x_0 to x)

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال 2 با روش جمع زنی:

بر اساس روش جمع زنی، نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی را برای تیر بارگذاری شده مقابل، ترسیم نمایید.



© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

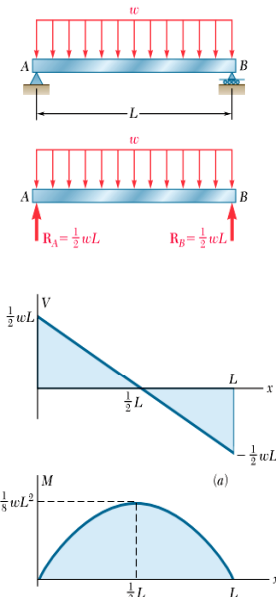
7- 15

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Relations Among Load, Shear, and Bending Moment



- Reactions at supports, $R_A = R_B = \frac{wL}{2}$

- Shear curve,

$$V - V_A = -\int_0^x w dx = -wx$$

$$V = V_A - wx = \frac{wL}{2} - wx = w\left(\frac{L}{2} - x\right)$$

- Moment curve,

$$M - M_A = \int_0^x V dx$$

$$M = \int_0^x w\left(\frac{L}{2} - x\right) dx = \frac{w}{2}(Lx - x^2)$$

$$M_{\max} = \frac{wL^2}{8} \quad \left(M \text{ at } \frac{dM}{dx} = V = 0 \right)$$

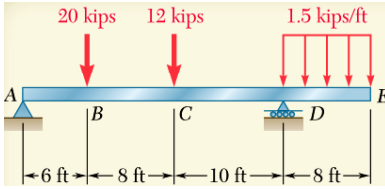
© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

7- 16

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال 4 با روش جمع زنی:

بر اساس روش جمع زنی، نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی را برای تیر بارگذاری شده مقابل، ترسیم نمایید.

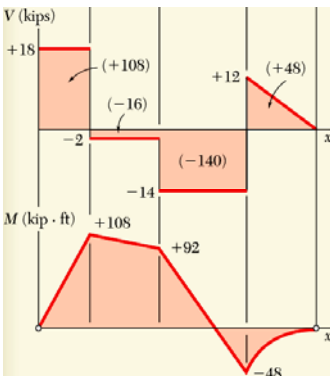
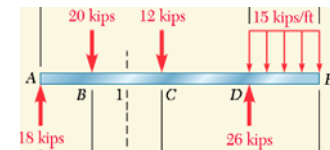


دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس کرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

حل مثال 4:



$$\sum M_A = 0:$$

$$D(24 \text{ ft}) - (20 \text{ kips})(6 \text{ ft}) - (12 \text{ kips})(14 \text{ ft}) - (12 \text{ kips})(28 \text{ ft}) = 0$$

$$D = 26 \text{ kips}$$

$$\sum F_y = 0:$$

$$A_y - 20 \text{ kips} - 12 \text{ kips} + 26 \text{ kips} - 12 \text{ kips} = 0$$

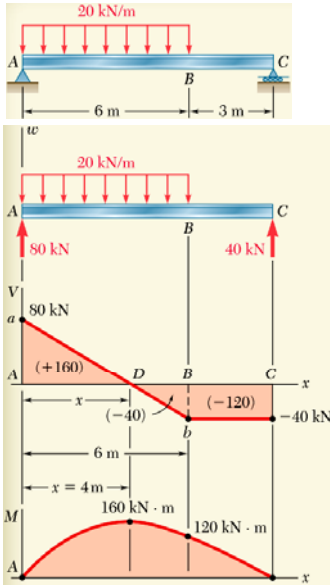
$$A_y = 18 \text{ kips}$$

- Between concentrated load application points, $dV/dx = -w = 0$ and shear is constant.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال 5:

مطلوبست ترسیم نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی
برای تیر بارگذاری شده مقابل.



© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 19

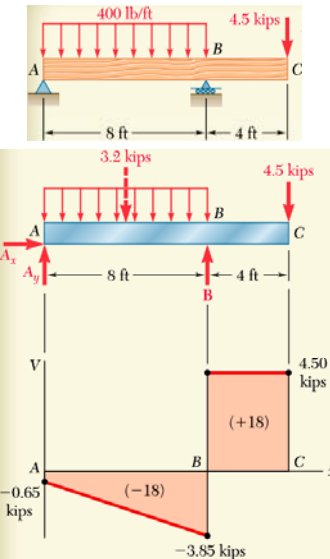
دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال 6:

مطلوبست ترسیم نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی
برای تیر بارگذاری شده مقابل.

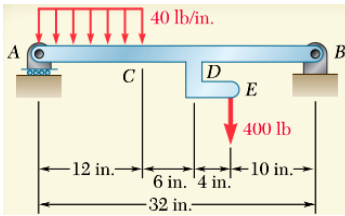


© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 20

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال 7:



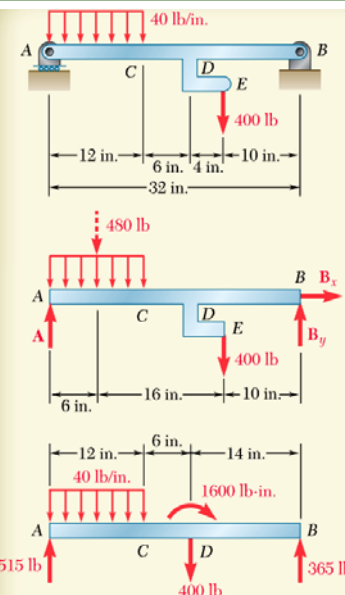
مطلوبست ترسیم نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی
برای تیر بارگذاری شده مقابل.

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس کرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

حل مثال 7:



SOLUTION:

$$\sum M_A = 0 :$$

$$B_y(32 \text{ in.}) - (480 \text{ lb})(6 \text{ in.}) - (400 \text{ lb})(22 \text{ in.}) = 0$$

$$B_y = 365 \text{ lb}$$

$$\sum M_B = 0 :$$

$$(480 \text{ lb})(26 \text{ in.}) + (400 \text{ lb})(10 \text{ in.}) - A(32 \text{ in.}) = 0$$

$$A = 515 \text{ lb}$$

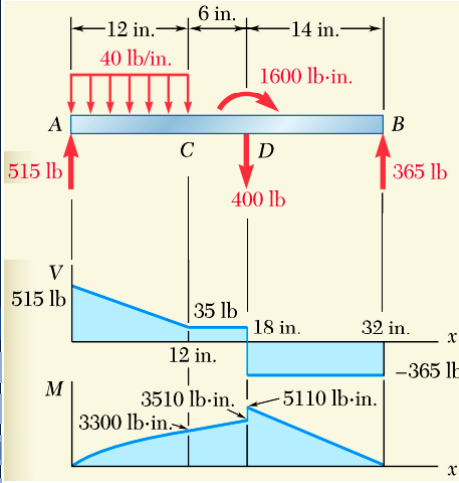
$$\sum F_x = 0 :$$

$$B_x = 0$$

- Note: The 400 lb load at E may be replaced by a 400 lb force and 1600 lb-in. couple at D.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

ادامه حل مثال 7:



© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 23

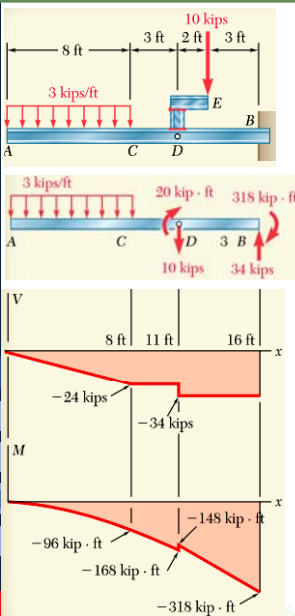
دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس کرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال 8:

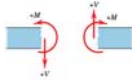
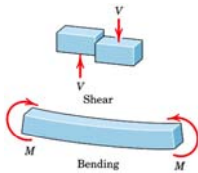
مطلوبست ترسیم نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی
برای تیر بارگذاری شده مقابل.



Inc. All rights reserved.

2 - 24

Vector Mechanics for Engineers: Statics



$$w = -\frac{dV}{dx}$$

$$\int_{V_0}^V dV = - \int_{x_0}^x w dx$$

$V = V_0 +$ (the negative of the area under the loading curve from x_0 to x)

$$V = \frac{dM}{dx}$$

$$\int_{M_0}^M dM = \int_{x_0}^x V dx$$

$M = M_0 +$ (area under the shear diagram from x_0 to x)

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

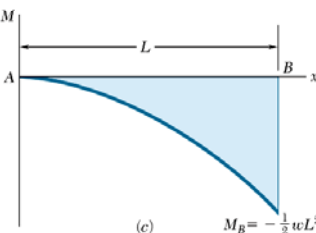
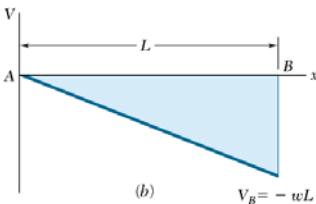
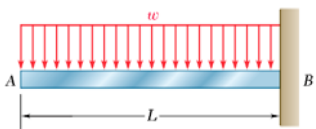
2 - 25

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس کرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال 9:



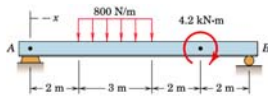
مطلوبست ترسیم نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی
برای تیر بارگذاری شده مقابل.

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 26

Vector Mechanics for Engineers: Statics

تمرین (تکلیف منزل):

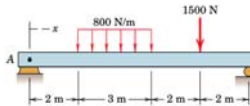


$$x = 6 \text{ m'}$$

$$V = -1400 \text{ N}, M = 0$$

$$M_{\max} = 2800 \text{ N}\cdot\text{m at } x = 3.25 \text{ m}$$

مطلوبست ترسیم نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی
برای تیر بارگذاری شده مقابل.

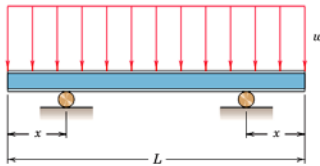


$$x = 6 \text{ m'}$$

$$V = -600 \text{ N}, M = 4800 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{\max} = 5620 \text{ N}\cdot\text{m at } x = 4.25 \text{ m}$$

5/154 The beam supports a uniform unit load w . Determine the location x of the two supports so as to minimize the maximum bending moment $M_{\max}$ in the beam. Specify $M_{\max}$.



$$\bullet 5/154 \quad x = 0.207L, M_{\max} = 0.0214wL^2$$

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

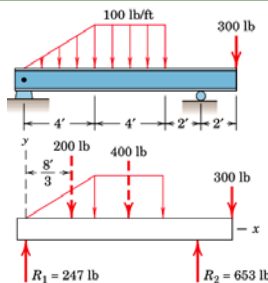
2 - 27

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

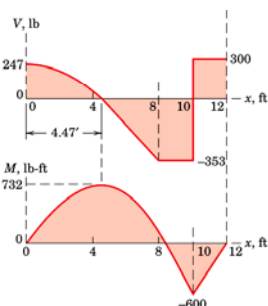
درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال 10:



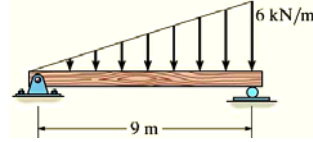
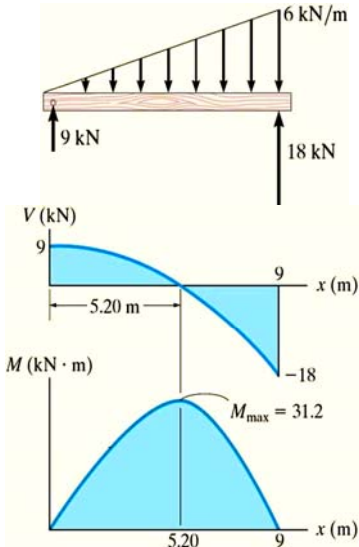
مطلوبست ترسیم نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی
برای تیر بارگذاری شده مقابل.



© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 28

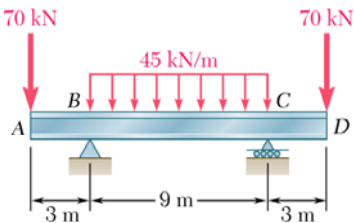
مطلوبست ترسیم نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی
برای تیر بارگذاری شده زیر.



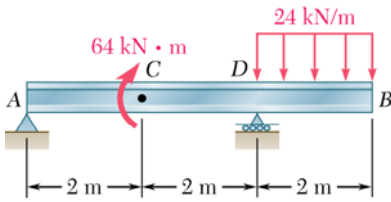
دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس کرمی

مطلوبست ترسیم نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی
برای تیر بارگذاری شده مقابل.



$$\begin{aligned} R_A &= 272.5 \text{ kN} \\ R_D &= 272.5 \text{ kN} \\ M_{\max} &= 245.625 \text{ kN.m} \end{aligned}$$



مطلوبست ترسیم نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی
برای تیر بارگذاری شده مقابل.

$$\begin{aligned} R_A &= -28 \text{ kN} \\ R_D &= 76 \text{ kN} \\ M_{\max} &= 56 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

CHAPTER

9

VECTOR MECHANICS FOR ENGINEERS:
STATICS

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.

Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech University



گشتاور دوم سطح
(گشتاور لختی سطح)

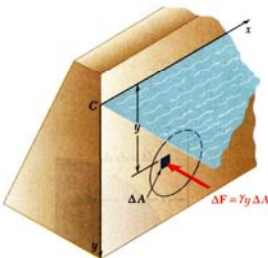
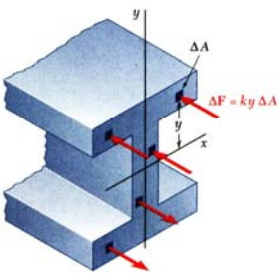
© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

گشتاور دوم سطح



- Consider distributed forces $\Delta \vec{F}$ whose magnitudes are proportional to the elemental areas ΔA on which they act and also vary linearly with the distance of ΔA from a given axis.
- Example: Consider a beam subjected to pure bending. Internal forces vary linearly with distance from the neutral axis which passes through the section centroid.

$$\Delta \vec{F} = ky\Delta A$$

$$R = k \int y dA = 0 \quad \int y dA = Q_x = \text{first moment}$$

$$M = k \int y^2 dA \quad \int y^2 dA = \text{second moment}$$

- Example: Consider the net hydrostatic force on a submerged circular gate.

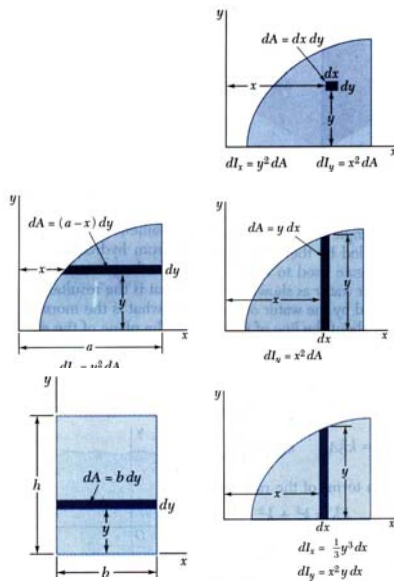
$$\Delta F = p\Delta A = \gamma y\Delta A$$

$$R = \gamma \int y dA$$

$$M_x = \gamma \int y^2 dA$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

گشتاور دوم سطح به کمک انتگرال



- Second moments or moments of inertia of an area with respect to the x and y axes,

$$I_x = \int y^2 dA \quad I_y = \int x^2 dA$$

- Evaluation of the integrals is simplified by choosing dA to be a thin strip parallel to one of the coordinate axes.

- For a rectangular area,

$$I_x = \int y^2 dA = \int_0^h y^2 b dy = \frac{1}{3} b h^3$$

- The formula for rectangular areas may also be applied to strips parallel to the axes,

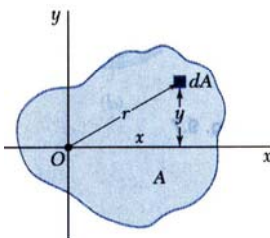
$$dI_x = \frac{1}{3} y^3 dx \quad dI_y = x^2 y dx$$

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس کرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

گشتاور لختی قطبی سطح



- The polar moment of inertia is an important parameter in problems involving torsion of cylindrical shafts and rotations of slabs.

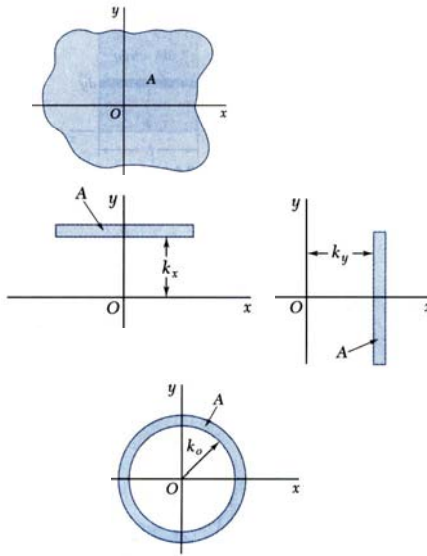
$$J_0 = \int r^2 dA$$

- The polar moment of inertia is related to the rectangular moments of inertia,

$$J_0 = \int r^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA = \int x^2 dA + \int y^2 dA = I_y + I_x$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

شعاع ژیراسیون (چرخش) سطح



- Consider area A with moment of inertia I_x . Imagine that the area is concentrated in a thin strip parallel to the x axis with equivalent I_x .

$$I_x = k_x^2 A \quad k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

k_x = radius of gyration with respect to the x axis

- Similarly,

$$I_y = k_y^2 A \quad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

$$J_O = k_O^2 A \quad k_O = \sqrt{\frac{J_O}{A}}$$

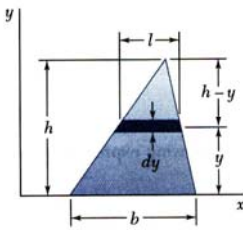
$$k_O^2 = k_x^2 + k_y^2$$

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس کرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال نمونه 1



Determine the moment of inertia of a triangle with respect to its base.

SOLUTION:

- A differential strip parallel to the x axis is chosen for dA .

$$dI_x = y^2 dA \quad dA = l dy$$

- For similar triangles,

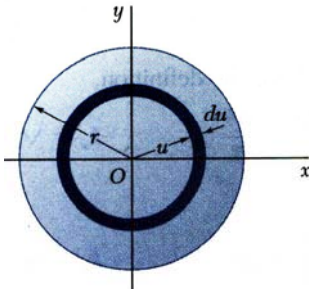
$$\frac{l}{b} = \frac{h-y}{h} \quad l = b \frac{h-y}{h} \quad dA = b \frac{h-y}{h} dy$$

- Integrating dI_x from $y = 0$ to $y = h$,

$$I_x = \int y^2 dA = \int_0^h y^2 b \frac{h-y}{h} dy = \frac{b}{h} \int_0^h (hy^2 - y^3) dy$$

$$= \frac{b}{h} \left[h \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_0^h$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$



SOLUTION:

- An annular differential area element is chosen,

$$dJ_O = u^2 dA \quad dA = 2\pi u du$$

$$J_O = \int dJ_O = \int_0^r u^2 (2\pi u du) = 2\pi \int_0^r u^3 du$$

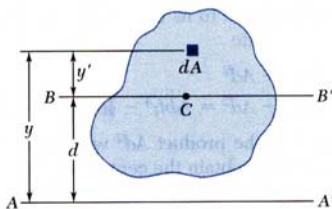
$$J_O = \frac{\pi}{2} r^4$$

- Determine the centroidal polar moment of inertia of a circular area by direct integration.
- Using the result of part a, determine the moment of inertia of a circular area with respect to a diameter.

- From symmetry, $I_x = I_y$,

$$J_O = I_x + I_y = 2I_x \quad \frac{\pi}{2} r^4 = 2I_x$$

$$I_{\text{diameter}} = I_x = \frac{\pi}{4} r^4$$



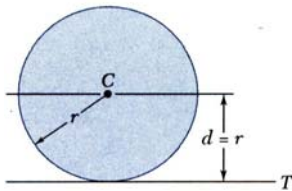
- Consider moment of inertia I of an area A with respect to the axis AA'

$$I = \int y^2 dA$$

- The axis BB' passes through the area centroid and is called a *centroidal axis*.

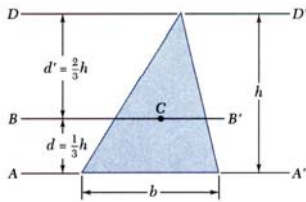
$$\begin{aligned} I &= \int y^2 dA = \int (y' + d)^2 dA \\ &= \int y'^2 dA + 2d \int y' dA + d^2 \int dA \end{aligned}$$

$$I = \bar{I} + Ad^2 \quad \text{parallel axis theorem}$$



- Moment of inertia I_T of a circular area with respect to a tangent to the circle,

$$I_T = \bar{I} + Ad^2 = \frac{1}{4}\pi r^4 + (\pi r^2)r^2 = \frac{5}{4}\pi r^4$$



- Moment of inertia of a triangle with respect to a centroidal axis,

$$I_{AA'} = \bar{I}_{BB'} + Ad^2$$

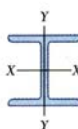
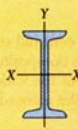
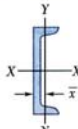
$$I_{BB'} = I_{AA'} - Ad^2 = \frac{1}{12}bh^3 - \frac{1}{2}bh\left(\frac{1}{3}h\right)^2 = \frac{1}{36}bh^3$$

گشتاور لختی سطح A نسبت به محور مفروض، با جمع گشتاور لختی سطوح A_1 و A_2 و A_3 و ... نسبت به همان محور به دست می آید.

Rectangle	 $\bar{I}_x = \frac{1}{12}bh^3$ $\bar{I}_y = \frac{1}{12}b^3h$ $I_x = \frac{1}{3}bh^3$ $I_y = \frac{1}{3}b^3h$ $J_C = \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2)$	Semicircle	 $I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{4}\pi r^4$
Triangle	 $\bar{I}_x = \frac{1}{36}bh^3$ $I_x = \frac{1}{12}bh^3$	Quarter circle	 $I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{8}\pi r^4$
Circle	 $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{2}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{2}\pi r^4$	Ellipse	 $\bar{I}_x = \frac{1}{4}\pi ab^3$ $\bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi a^3b$ $J_O = \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

گشتاور لختی سطوح مرکب

	Designation	Area mm ²	Depth mm	Width mm	Axis X-X			Axis Y-Y		
					$\bar{I}_x$ 10 ⁶ mm ⁴	$\bar{k}_x$ mm	$\bar{y}$ mm	$\bar{I}_y$ 10 ⁶ mm ⁴	$\bar{k}_y$ mm	$\bar{x}$ mm
W Shapes (Wide-Flange Shapes) 	W460 × 113†	14400	463	250	554	196.3		63.3	66.3	
	W410 × 85	10800	417	181	316	170.7		17.94	40.6	
	W360 × 57	7230	358	172	160.2	149.4		11.11	39.4	
	W200 × 46.1	5890	203	203	45.8	88.1		15.44	51.3	
S Shapes (American Standard Shapes) 	S460 × 81.4†	10390	457	152	335	179.6		8.66	29.0	
	S310 × 47.3	6032	305	127	90.7	122.7		3.90	25.4	
	S250 × 37.8	4806	254	118	51.6	103.4		2.83	24.2	
	S150 × 18.6	2362	152	84	9.2	62.2		0.758	17.91	
C Shapes (American Standard Channels) 	C310 × 30.8†	3929	305	74	53.7	117.1		1.615	20.29	17.73
	C250 × 22.8	2897	254	65	28.1	98.3		0.949	18.11	16.10
	C200 × 17.1	2181	203	57	13.57	79.0		0.549	15.88	14.50
	C150 × 12.2	1548	152	48	5.45	59.4		0.288	13.64	13.00

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

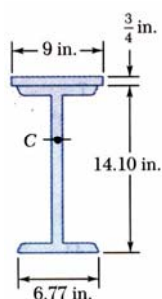
9 - 11

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال نمونه از سطوح مرکب



The strength of a W14x38 rolled steel beam is increased by attaching a plate to its upper flange.

Determine the moment of inertia and radius of gyration with respect to an axis which is parallel to the plate and passes through the centroid of the section.

SOLUTION:

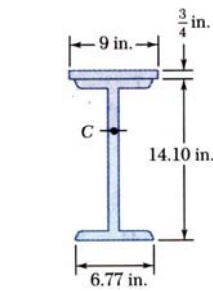
- Determine location of the centroid of composite section with respect to a coordinate system with origin at the centroid of the beam section.
- Apply the parallel axis theorem to determine moments of inertia of beam section and plate with respect to composite section centroidal axis.
- Calculate the radius of gyration from the moment of inertia of the composite section.

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

9 - 12

Vector Mechanics for Engineers: Statics

حل (مثال نمونه از سطوح مرکب)

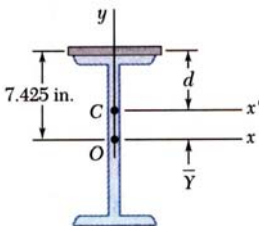


SOLUTION:

- Determine location of the centroid of composite section with respect to a coordinate system with origin at the centroid of the beam section.

Section	A, in^2	$\bar{y}, \text{in.}$	$\bar{y}A, \text{in}^3$
Plate	6.75	7.425	50.12
Beam Section	11.20	0	0
	$\sum A = 17.95$		$\sum \bar{y}A = 50.12$

$$\bar{Y} \sum A = \sum \bar{y}A \quad \bar{Y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{50.12 \text{ in}^3}{17.95 \text{ in}^2} = 2.792 \text{ in.}$$



© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

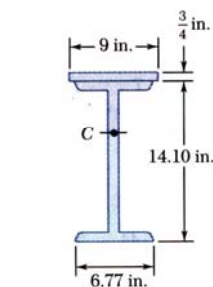
9 - 13

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

ادامه حل (مثال نمونه از سطوح مرکب)



- Apply the parallel axis theorem to determine moments of inertia of beam section and plate with respect to composite section centroidal axis.

$$I_{x', \text{beam section}} = \bar{I}_x + A\bar{Y}^2 = 385 + (11.20)(2.792)^2 = 472.3 \text{ in}^4$$

$$I_{x', \text{plate}} = \bar{I}_x + Ad^2 = \frac{1}{12}(9)\left(\frac{3}{4}\right)^3 + (6.75)(7.425 - 2.792)^2 = 145.2 \text{ in}^4$$

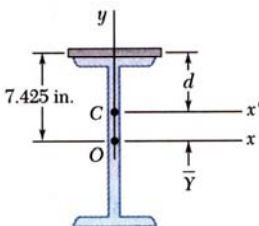
$$I_{x'} = I_{x', \text{beam section}} + I_{x', \text{plate}} = 472.3 + 145.2$$

$$I_{x'} = 618 \text{ in}^4$$

- Calculate the radius of gyration from the moment of inertia of the composite section.

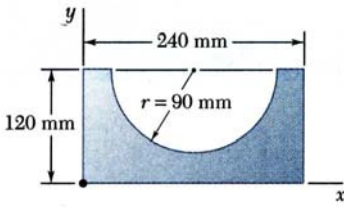
$$k_{x'} = \sqrt{\frac{I_{x'}}{A}} = \frac{617.5 \text{ in}^4}{17.95 \text{ in}^2}$$

$$k_{x'} = 5.87 \text{ in.}$$



© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

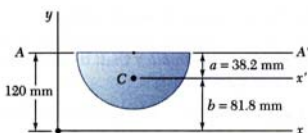
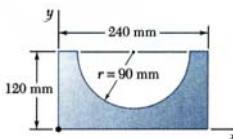
9 - 14



Determine the moment of inertia of the shaded area with respect to the x axis.

SOLUTION:

- Compute the moments of inertia of the bounding rectangle and half-circle with respect to the x axis.
- The moment of inertia of the shaded area is obtained by subtracting the moment of inertia of the half-circle from the moment of inertia of the rectangle.



$$a = \frac{4r}{3\pi} = \frac{(4)(90)}{3\pi} = 38.2 \text{ mm}$$

$$b = 120 - a = 81.8 \text{ mm}$$

$$A = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi(90)^2 \\ = 12.72 \times 10^3 \text{ mm}^2$$

SOLUTION:

- Compute the moments of inertia of the bounding rectangle and half-circle with respect to the x axis.

Rectangle:

$$I_x = \frac{1}{3}bh^3 = \frac{1}{3}(240)(120)^3 = 138.2 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Half-circle:

moment of inertia with respect to AA',

$$I_{AA'} = \frac{1}{8}\pi r^4 = \frac{1}{8}\pi(90)^4 = 25.76 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

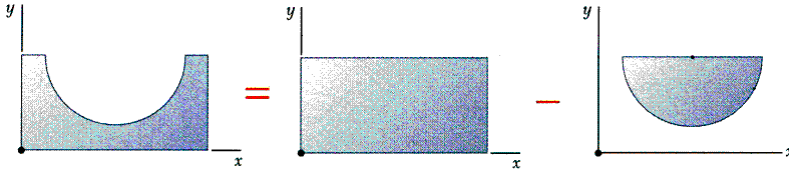
moment of inertia with respect to x',

$$\bar{I}_{x'} = I_{AA'} - Aa^2 = (25.76 \times 10^6) - (12.72 \times 10^3)(38.2)^2 \\ = 7.20 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

moment of inertia with respect to x,

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ab^2 = 7.20 \times 10^6 + (12.72 \times 10^3)(81.8)^2 \\ = 92.3 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

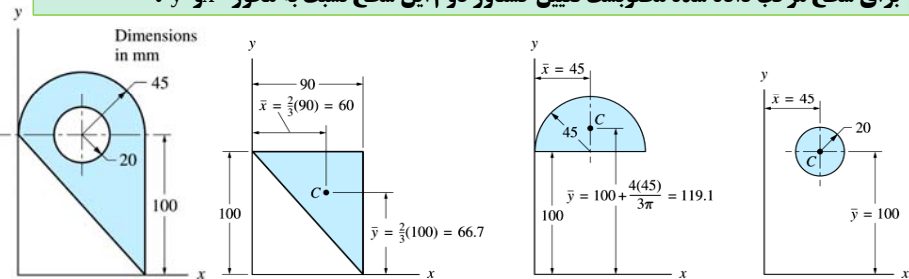
- The moment of inertia of the shaded area is obtained by subtracting the moment of inertia of the half-circle from the moment of inertia of the rectangle.



$$I_x = 138.2 \times 10^6 \text{ mm}^4 - 92.3 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_x = 45.9 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

برای سطح مرکب داده شده مطلوب است تعیین گشتاور دوم این سطح نسبت به محور y و x .



Triangle

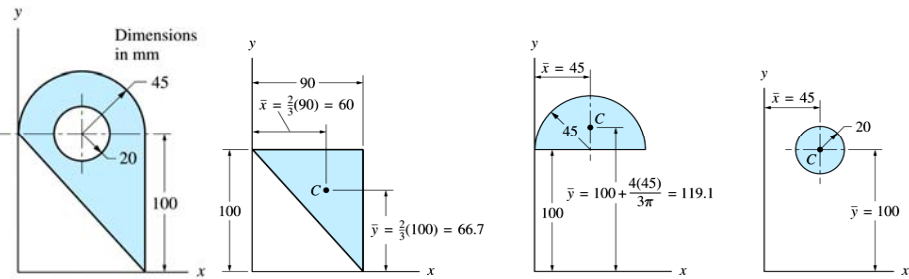
$$A = \frac{bh}{2} = \frac{90(100)}{2} = 4500 \text{ mm}^2$$

$$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36} = \frac{90(100)^3}{36} = 2.50 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_x = \bar{I}_x + A\bar{y}^2 = (2.50 \times 10^6) + (4500)(66.7)^2 = 22.52 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\bar{I}_y = \frac{hb^3}{36} = \frac{100(90)^3}{36} = 2.025 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \bar{I}_y + A\bar{x}^2 = (2.025 \times 10^6) + (4500)(60)^2 = 18.23 \times 10^6 \text{ mm}^4$$



Semicircle

$$A = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi (45)^2}{2} = 3181 \text{ mm}^2$$

$$\bar{I}_x = 0.1098 R^4 = 0.1098 (45)^4 = 0.450 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_x = \bar{I}_x + A \bar{y}^2 = (0.450 \times 10^6) + (3181)(119.1)^2 = 45.57 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

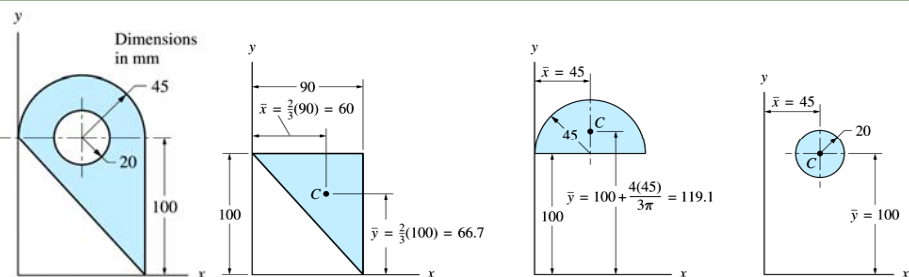
$$\bar{I}_y = \frac{\pi R^4}{8} = \frac{\pi (45)^4}{8} = 1.61 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \bar{I}_y + A \bar{x}^2 = (1.61 \times 10^6) + (3181)(45)^2 = 8.05 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

2 - 19

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی



Circle

$$A = \pi R^2 = \pi (20)^2 = 1257 \text{ mm}^2$$

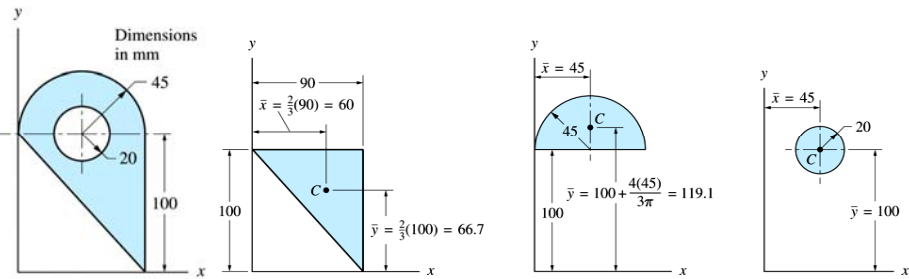
$$\bar{I}_x = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi (20)^4}{4} = 0.1257 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_x = \bar{I}_x + A \bar{y}^2 = (0.1257 \times 10^6) + (1257)(100)^2 = 12.70 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\bar{I}_y = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi (20)^4}{4} = 0.1257 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \bar{I}_y + A \bar{x}^2 = (0.1257 \times 10^6) + (1257)(45)^2 = 2.67 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

2 - 20



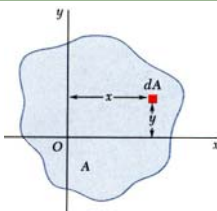
$$A = \Sigma A = 4500 + 3181 - 1257 = 6424 \text{ mm}^2$$

$$I_x = \Sigma I_x = (22.52 + 45.57 - 12.70) \times 10^6 = 55.39 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \Sigma I_y = (18.23 + 8.05 - 2.67) \times 10^6 = 23.61 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

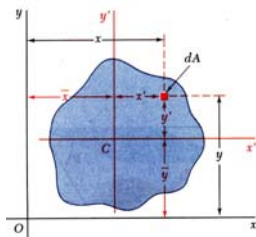
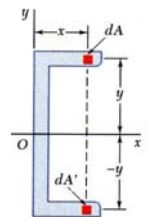
درس استاتیک مهندس کرمی



- Product of Inertia:

$$I_{xy} = \int xy \, dA$$

- When the x axis, the y axis, or both are an axis of symmetry, the product of inertia is zero.

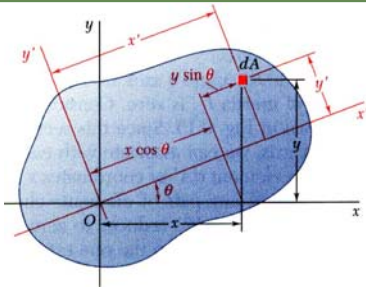


- Parallel axis theorem for products of inertia:

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + \bar{x}\bar{y}A$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

محورهای اصلی و گشتاورهای لختی اصلی سطح



Given $I_x = \int y^2 dA$ $I_y = \int x^2 dA$

$$I_{xy} = \int xy dA$$

we wish to determine moments and product of inertia with respect to new axes x' and y' .

Note: $x' = x \cos \theta + y \sin \theta$
 $y' = y \cos \theta - x \sin \theta$

- The change of axes yields

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$

- The equations for $I_{x'}$ and $I_{x'y'}$ are the parametric equations for a circle,

$$(I_{x'} - I_{ave})^2 + I_{x'y'}^2 = R^2$$

$$I_{ave} = \frac{I_x + I_y}{2} \quad R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

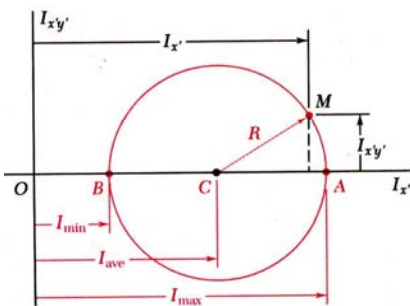
- The equations for $I_{y'}$ and $I_{x'y'}$ lead to the same circle.

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس کرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

محورهای اصلی و گشتاورهای لختی اصلی سطح



- At the points A and B, $I_{x'y'} = 0$ and $I_{x'}$ is a maximum and minimum, respectively.

$$I_{\max, \min} = I_{ave} \pm R$$

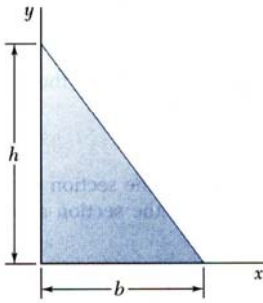
$$\tan 2\theta_m = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

- The equation for θ_m defines two angles, 90° apart which correspond to the *principal axes* of the area about O.

- $I_{\max}$ and $I_{\min}$ are the *principal moments of inertia* of the area about O.

$$(I_{x'} - I_{ave})^2 + I_{x'y'}^2 = R^2$$

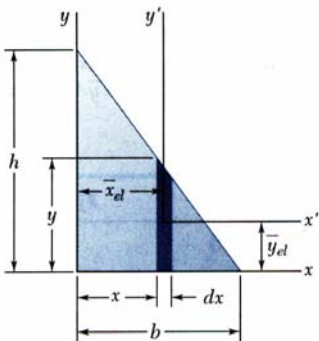
$$I_{ave} = \frac{I_x + I_y}{2} \quad R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$



SOLUTION:

- Determine the product of inertia using direct integration with the parallel axis theorem on vertical differential area strips
- Apply the parallel axis theorem to evaluate the product of inertia with respect to the centroidal axes.

Determine the product of inertia of the right triangle (a) with respect to the x and y axes and (b) with respect to centroidal axes parallel to the x and y axes.



SOLUTION:

- Determine the product of inertia using direct integration with the parallel axis theorem on vertical differential area strips

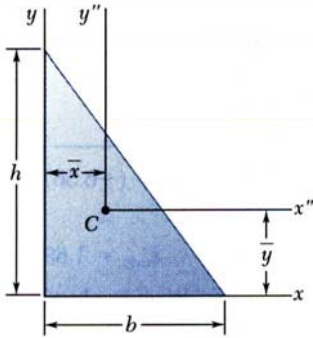
$$y = h\left(1 - \frac{x}{b}\right) \quad dA = y dx = h\left(1 - \frac{x}{b}\right) dx$$

$$\bar{x}_{el} = x \quad \bar{y}_{el} = \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}h\left(1 - \frac{x}{b}\right)$$

Integrating dI_x from $x = 0$ to $x = b$,

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int dI_{xy} = \int \bar{x}_{el} \bar{y}_{el} dA = \int_0^b x \left(\frac{1}{2}h\right) \left(1 - \frac{x}{b}\right)^2 dx \\ &= h^2 \int_0^b \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{b} + \frac{x^3}{2b^2}\right) dx = h^2 \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3b} + \frac{x^4}{8b^2} \right]_0^b \end{aligned}$$

$$I_{xy} = \frac{1}{24} b^2 h^2$$



- Apply the parallel axis theorem to evaluate the product of inertia with respect to the centroidal axes.

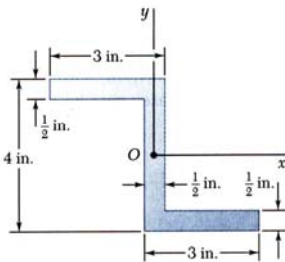
$$\bar{x} = \frac{1}{3}b \quad \bar{y} = \frac{1}{3}h$$

With the results from part a,

$$I_{xy} = \bar{I}_{x''y''} + \bar{x}\bar{y}A$$

$$\bar{I}_{x''y''} = \frac{1}{24}b^2h^2 - \left(\frac{1}{3}b\right)\left(\frac{1}{3}h\right)\left(\frac{1}{2}bh\right)$$

$$\bar{I}_{x''y''} = -\frac{1}{72}b^2h^2$$

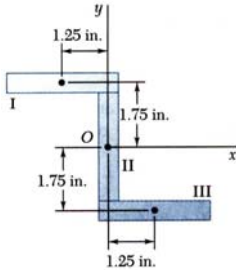
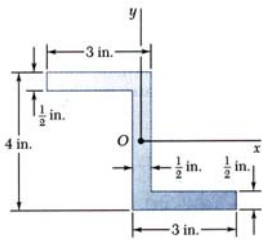


SOLUTION:

- Compute the product of inertia with respect to the xy axes by dividing the section into three rectangles and applying the parallel axis theorem to each.
- Determine the orientation of the principal axes (Eq. 9.25) and the principal moments of inertia (Eq. 9.27).

For the section shown, the moments of inertia with respect to the x and y axes are $I_x = 10.38 \text{ in}^4$ and $I_y = 6.97 \text{ in}^4$.

Determine (a) the orientation of the principal axes of the section about O , and (b) the values of the principal moments of inertia about O .



SOLUTION:

- Compute the product of inertia with respect to the xy axes by dividing the section into three rectangles.

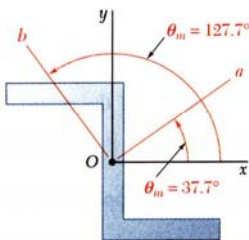
Apply the parallel axis theorem to each rectangle,

$$I_{xy} = \sum (\bar{I}_{x'y'} + \bar{x}\bar{y}A)$$

Note that the product of inertia with respect to centroidal axes parallel to the xy axes is zero for each rectangle.

Rectangle	Area, in ²	$\bar{x}$, in.	$\bar{y}$, in.	$\bar{x}\bar{y}A$, in ⁴
I	1.5	-1.25	+1.75	-3.28
II	1.5	0	0	0
III	1.5	+1.25	-1.75	-3.28
				$\sum \bar{x}\bar{y}A = -6.56$

$$I_{xy} = \sum \bar{x}\bar{y}A = -6.56 \text{ in}^4$$



- Determine the orientation of the principal axes (Eq. 9.25) and the principal moments of inertia (Eq. 9.27).

$$\tan 2\theta_m = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = -\frac{2(-6.56)}{10.38 - 6.97} = +3.85$$

$$2\theta_m = 75.4^\circ \text{ and } 255.4^\circ$$

$$\theta_m = 37.7^\circ \text{ and } \theta_m = 127.7^\circ$$

$$I_x = 10.38 \text{ in}^4$$

$$I_y = 6.97 \text{ in}^4$$

$$I_{xy} = -6.56 \text{ in}^4$$

$$I_{\max, \min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

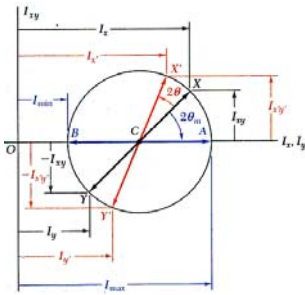
$$= \frac{10.38 + 6.97}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10.38 - 6.97}{2}\right)^2 + (-6.56)^2}$$

$$I_a = I_{\max} = 15.45 \text{ in}^4$$

$$I_b = I_{\min} = 1.897 \text{ in}^4$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

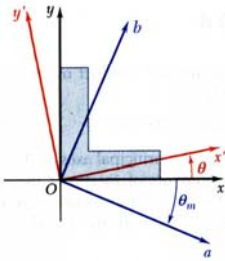
دایره مور برای گشتاورها و حاصل ضربهای لختی



- The moments and product of inertia for an area are plotted as shown and used to construct Mohr's circle,

$$I_{ave} = \frac{I_x + I_y}{2} \quad R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

- Mohr's circle may be used to graphically or analytically determine the moments and product of inertia for any other rectangular axes including the principal axes and principal moments and products of inertia.



© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

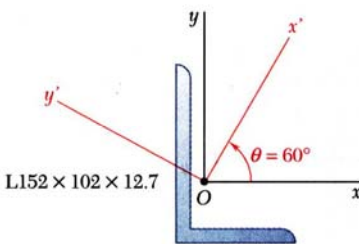
9 - 31

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس گرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال از دایره مور



SOLUTION:

- Plot the points (I_x, I_{xy}) and $(I_y, -I_{xy})$. Construct Mohr's circle based on the circle diameter between the points.
- Based on the circle, determine the orientation of the principal axes and the principal moments of inertia.
- Based on the circle, evaluate the moments and product of inertia with respect to the x' and y' axes.

The moments and product of inertia with respect to the x and y axes are $I_x = 7.24 \times 10^6 \text{ mm}^4$, $I_y = 2.61 \times 10^6 \text{ mm}^4$, and $I_{xy} = -2.54 \times 10^6 \text{ mm}^4$.

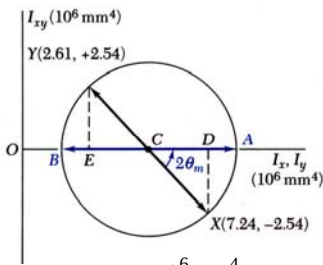
Using Mohr's circle, determine (a) the principal axes about O , (b) the values of the principal moments about O , and (c) the values of the moments and product of inertia about the x' and y' axes

© 2010 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

9 - 32

Vector Mechanics for Engineers: Statics

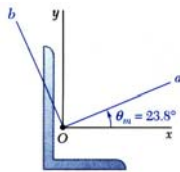
حل



$$I_x = 7.24 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y = 2.61 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy} = -2.54 \times 10^6 \text{ mm}^4$$



SOLUTION:

- Plot the points (I_x, I_{xy}) and $(I_y, -I_{xy})$. Construct Mohr's circle based on the circle diameter between the points.

$$OC = I_{ave} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) = 4.925 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$CD = \frac{1}{2}(I_x - I_y) = 2.315 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$R = \sqrt{(CD)^2 + (DX)^2} = 3.437 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

- Based on the circle, determine the orientation of the principal axes and the principal moments of inertia.

$$\tan 2\theta_m = \frac{DX}{CD} = 1.097 \quad 2\theta_m = 47.6^\circ \quad \theta_m = 23.8^\circ$$

$$I_{max} = OA = I_{ave} + R \quad I_{max} = 8.36 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

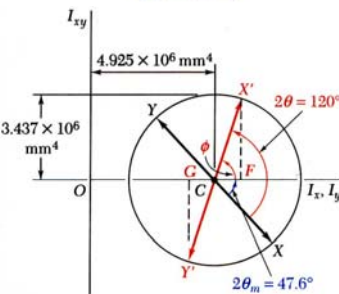
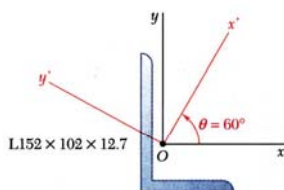
$$I_{min} = OB = I_{ave} - R \quad I_{min} = 1.49 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

دانشکده ثامن الحجج (ع) مشهد

درس استاتیک مهندس کرمی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

ادامه حل



$$OC = I_{ave} = 4.925 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$R = 3.437 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

- Based on the circle, evaluate the moments and product of inertia with respect to the $x'y'$ axes.

The points X' and Y' corresponding to the x' and y' axes are obtained by rotating CX and CY counterclockwise through an angle $\Theta = 2(60^\circ) = 120^\circ$. The angle that CX' forms with the x' axes is $\phi = 120^\circ - 47.6^\circ = 72.4^\circ$.

$$I_{x'} = OF = OC + CX' \cos \phi = I_{ave} + R \cos 72.4^\circ$$

$$I_{x'} = 5.96 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{y'} = OG = OC - CY' \cos \phi = I_{ave} - R \cos 72.4^\circ$$

$$I_{y'} = 3.89 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{x'y'} = FX' = CY' \sin \phi = R \sin 72.4^\circ$$

$$I_{x'y'} = 3.28 \times 10^6 \text{ mm}^4$$