تحلیل سازه

استاد : جناب آقای دکتر زرفام

تعداد صفحات : ۱۳۲

www.civil-eng.ir

tel : 09362602895

۱- معینی و پایداری سازه‌ها

۲- خط تاثیر (معین و نامعین)

۳- سطح لنگر، تیر مزدوج

۴- قضایای کاستیلیانو و بتی ماکسول

۵- کار مجازی - بار واحد نامعین

۶- روش های سختی - فرمولهای حفظی

۷- شیب افت، پخش لنگر

۸- سازه های متقارن (مستقیم و معکوس)

«استاتیک و تغییر شکل ها»

« فصل اول »

۱) معین و نامعین ، مسطح ، فضایی ، شبکه

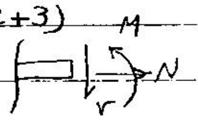
۲ ـ پایداری و ناپایداری

کل $\left\{\begin{array}{l}\Sigma F_x=0\\ \Sigma F_y=0\\ \Sigma M=0\end{array}\right.$

n.8 (۲بعدی)

$$\left\{\begin{array}{l}\overbrace{3k+r}^{\text{مجهولات}}-(\overbrace{C+3}^{\text{معادلات تعادل}})\\ \overbrace{3m+r}^{\text{مجهولات}}-(\overbrace{C+3j}^{\text{معادلات تعادل}})\\ m+r-2j \rightarrow \text{خرپا ✓}\end{array}\right.$$

تیر $\rightarrow n=r-(C+3)$



ـ قاب ✓

ـ خرپا

ـ مرکب ✓

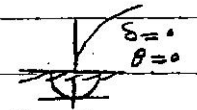
n : درجه معینی سازه
k : تعداد فضاهای بسته
m : تعداد اعضا
j : تعداد گره‌ها
r : تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی
C : تعداد معادلات شرط

تعداد معادلات تعادل استاتیکی ـ تعداد مجهولات = n درجه معینی سازه

تیر $n=r-(C+3)$

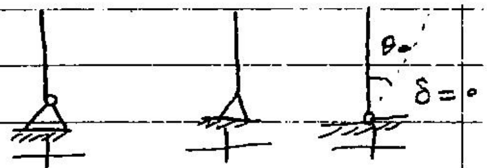
* در رابطه اول سریعتر به جواب می‌رسیم.

$$\left\{\begin{array}{lll}\text{مجهولات} = \text{معادلات تعادل} & \Rightarrow & \text{سازه معین} \quad (n=0)\\ \text{مجهولات} > \text{معادلات تعادل} & \Rightarrow & \text{سازه نامعین} \quad (n>0)\end{array}\right.$$


$\delta=0$
$\theta=0$

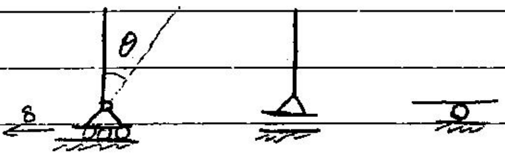
$r=3$

تکیه‌گاه گیردار


$\theta=0$
$\delta=0$

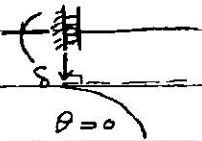
$r=2$

تکیه‌گاه مفصلی


θ
δ

$r=1$

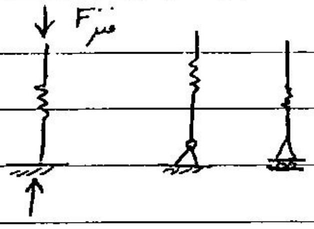
تکیه‌گاه غلتکی


δ
$\theta=0$

$r=2$

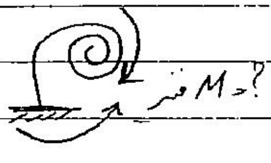
تکیه‌گاه غلتکی-برشی

(فرق این تکیه‌گاه با تکیه‌گاه گیردار این است که این تکیه‌گاه حرکت می‌کند)



$r=1$

فنر انتقالی

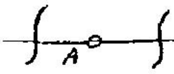


$r=1$

فنر پیچشی / خمشی

* C «تعداد معادلات شرط»

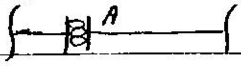
۱) مفصل خمشی



$C=1$

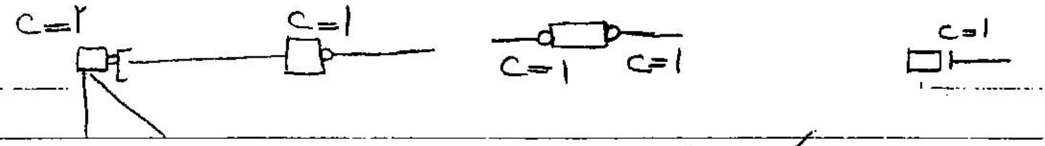
$$M_A=0 \begin{cases} \Sigma M_{LA}=0 \\ \Sigma M_{RA}=0 \end{cases}$$

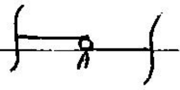
۲) مفصل برشی داخلی



$C=1$

$$V_A=0 \begin{cases} \Sigma V_{LA}=0 \\ \Sigma V_{RA}=0 \end{cases}$$



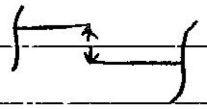


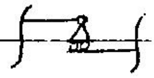
C = 2

۳) غلتک داخلی

$M_{A}=0$

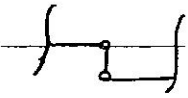
$N_{A}=0$





C = 2

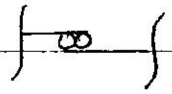
۴) این هم غلتک داخلی است.



✓ * این هم معادل شکل غلتک داخلی است

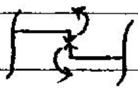
فروشگاه اینترنتی جزوه
www.jezve.info
شماره تماس: ۰۹۳۶۲۶۰۲۸۹۵

۵)

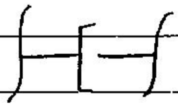


C = 1

$N_{A}=0 \begin{cases} \Sigma N_{LA}=0 \\ \Sigma N_{RA}=0 \end{cases}$



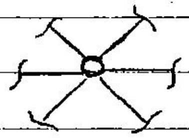
فقط نیروی محوری صفر است.



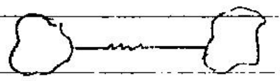
C = 1

$N_{A}=0$

۶) اتصال کشویی / غلتکی / پیستونی

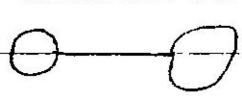


m عضو ⟸ C = m − 1 *



C = 2

۷) فنر داخلی، فنر هم کشش هم فشار را تحمل می‌کند.

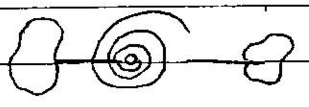


C = 2

۸) کابل

کابل فقط کشش تحمل می‌کند

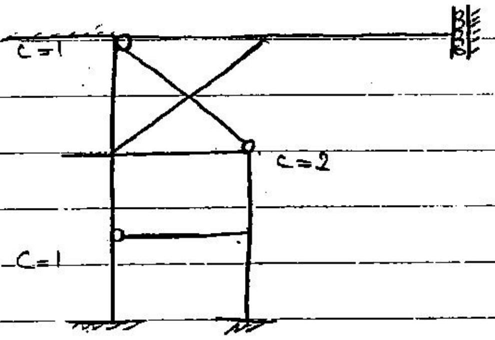
۹) فنر پیچشی داخلی



$C = ۰$

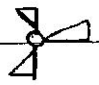
برش - لنگر و نیروی محوری دارد

مثال ۱) درجه نامعینی سازه را مشخص کنید.



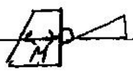
$n = ۳k + r - (c + 3)$

$n = ۳(۴) + ۸ - (۴ + ۳) = ۱۳ > ۰$ نامعین



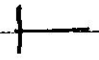
$C = 3 - 1 = 2$

مفصلی



$C = 2 - 1 = 1$

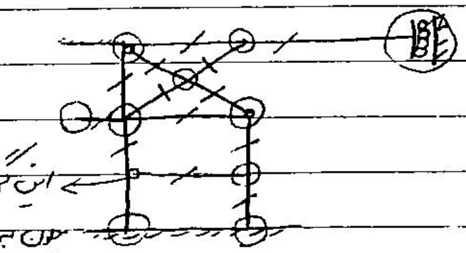
نیمه مفصلی



$C = ۰$

گیردار

مثال ۲) این شکل با شکل قبلی فرقی ندارد و اگر فضای بسته بین تیر و زمین بود، فضای بسته محسوب نمی‌شود و k همان مقدار قبلی را دارد



این گوشه چون به وسط ستون خورده و [illegible] کرده

همین مثال را از روش دوم حل کنید؟

$r = ۸$

$C = ۴$

$m = ۱۳ \rightarrow ۱۴$

$J = ۱۰ \xrightarrow{۱} ۱۱$

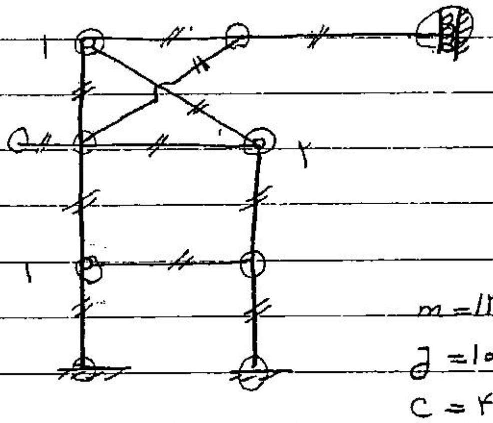
$n = ۳m + r - (C + ۳J) = 13$

این هم شمرده می‌شود

به موارد زیر گره می‌گوییم :

۱) تکیه گاه‌ها ۲) انتهای آزاد اعضا ۳) محل تقاطع انتهای تمام اعضا

مثال ۳)



* وقتی نتوانیم فضای بسته را ببینیم یا در شمارش فضاها دچار شک شویم از رابطه دوم استفاده می‌کنیم.

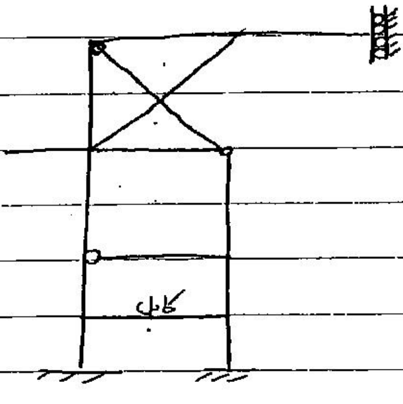
$m=۱۲$
$j=۱۰$
$c=۴$
$r=۸$

یعنی $(۳\times ۱۲)+\overset{۳۶}{۸}-(۴+۳\times ۱۰)=۱۰>۰$

۴۴

$m=۱۱$

مثال ۴) درجه نامعینی چیست؟



$k=۵$
$r=۸$
$c=۴+\overset{\text{کابل}}{۲}=۶$

$n=۳k+r-(c+۳)=۱۴$

۱۴ درجه نامعین

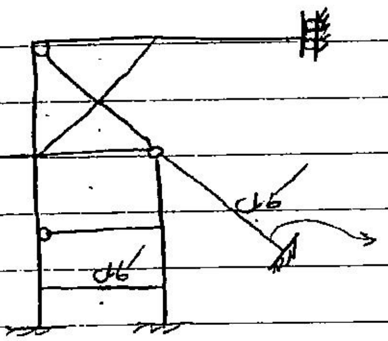
$۱۵+۸-(۶+۳)=۱۴$

$r=۸$
$c=۴$
$k=۴$
$۱۲+۸-(۴+۳)=۱۳+۱=۱۴$

این راه برای سازه‌های کابلی است :

کابل را حذف می‌کنیم ← درجه نامعینی سازه را بدون کابل محاسبه می‌کنیم (n) ← به ازای کابل حذف شده یک مجهول به سازه اضافه می‌کنیم $(n+1)$

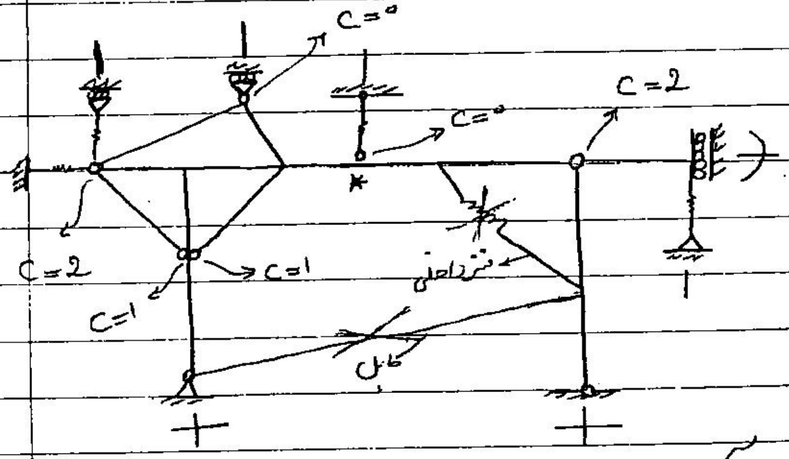
۵) درجه نامعینی سازه چیست؟



درجه نامعین $13 + 2 = 15$

- این کابل وقتی حذف می‌شود
تکیه‌گاهش حذف می‌شود و
در روابط اعمال نمی‌شود.

سوال ۶)


c=0
c=0
c=2
c=2
c=1
c=1
فنر داخلی
کابل

* فنر داخلی و کابل می‌توانند حذف گردند و
در اضافه فرض شوند.

فنرهای تکیه‌گاهی هم می‌توانند حذف شوند و در اضافه فرض شوند.

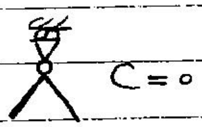
* فنر مثل تکیه‌گاهی غلتکی عمل می‌کند (*)

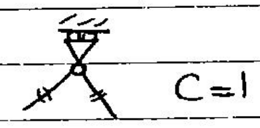
$$n = 3k + r - (c + 3)$$

$3k \to 3$، $r \to 11$، $c \to 6$

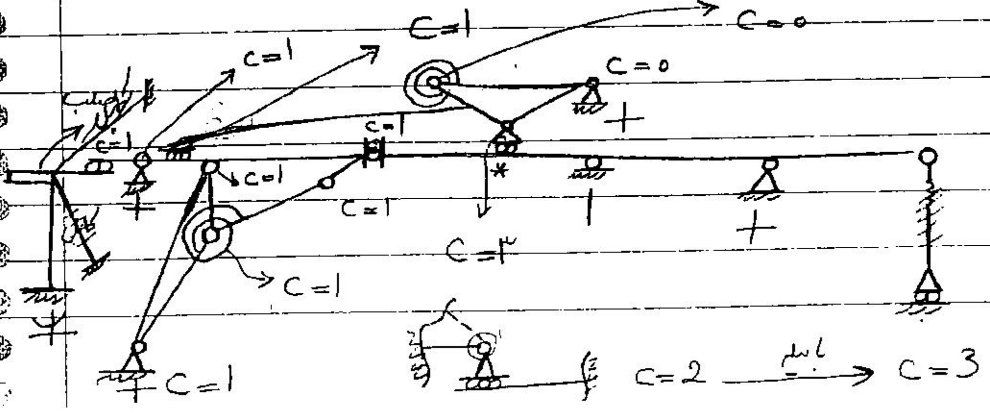
$\to n = 11 + 2 = 13$ درجه نامعینی

$2 \to$ کابل و فنر داخلی





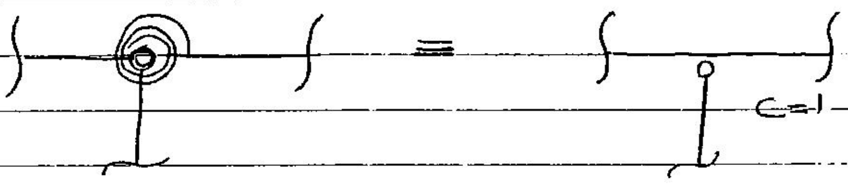
سوال ۷)

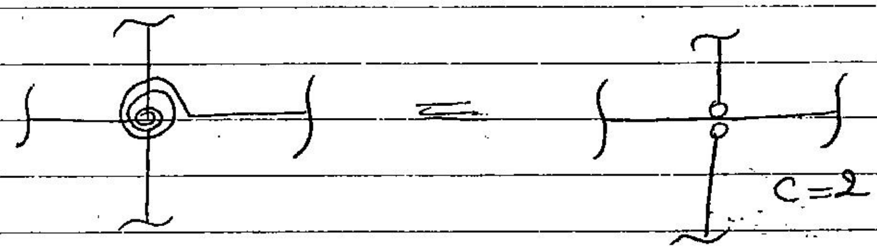

C=1
C=0
c=1
C=0
c=1
c=1
c=1
c=1
C=1
C=3
C=1
C=1
c=2
c=3

$r = 12$

۲ کابل و ۱ فنر را حذف می‌کنیم .

فقط وقتی روی زمین بود، ۲ داریم اگر روی زمین نبود c داریم . (*)



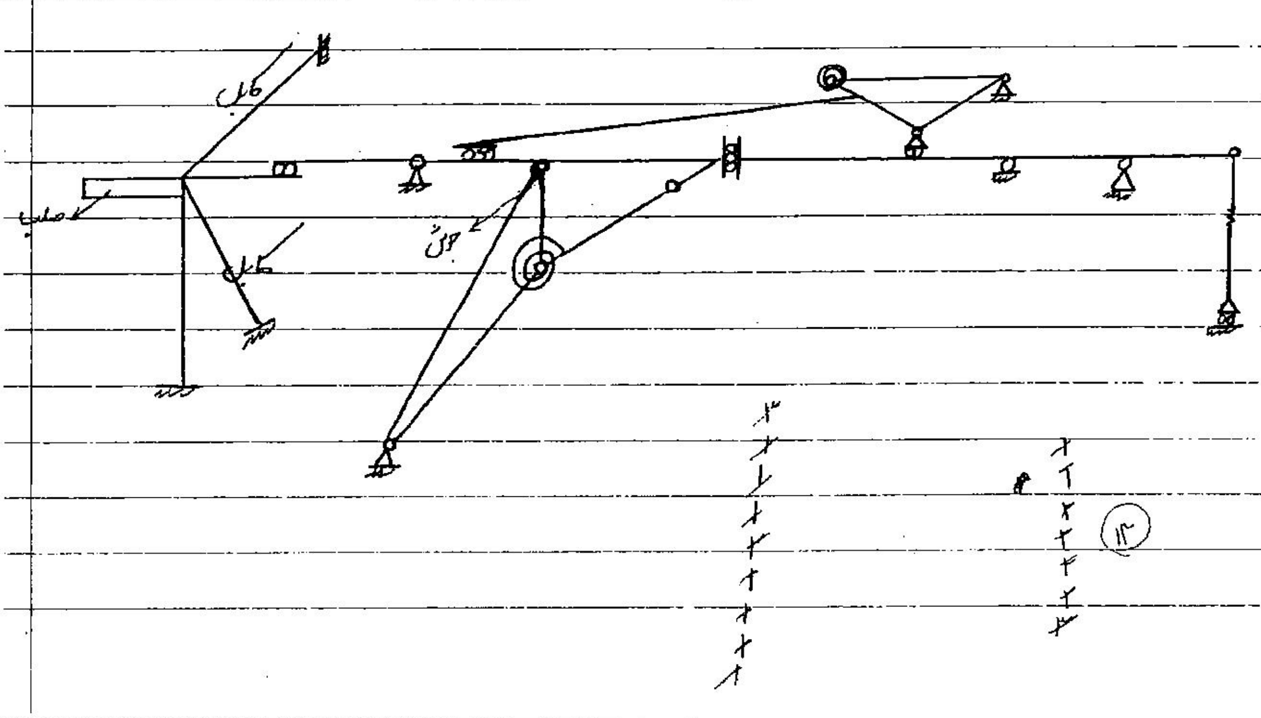


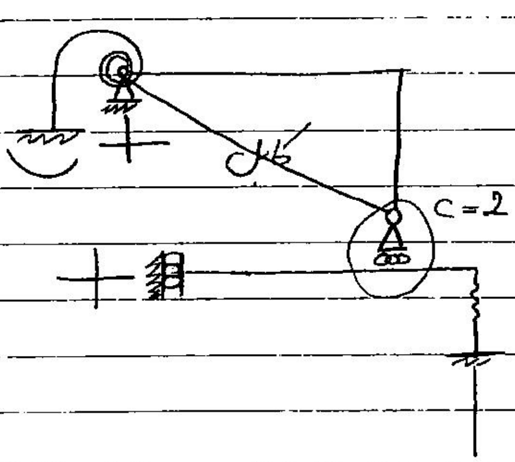
مفصل صلب در اینجا نقش ندارد

$r = 12$
$c = 11$
$k = 4$

$\Rightarrow n = ۳k + r - (c + ۳) = 10 + 3 = 13$

۲ کابل و ۱ فنر حذف شده .

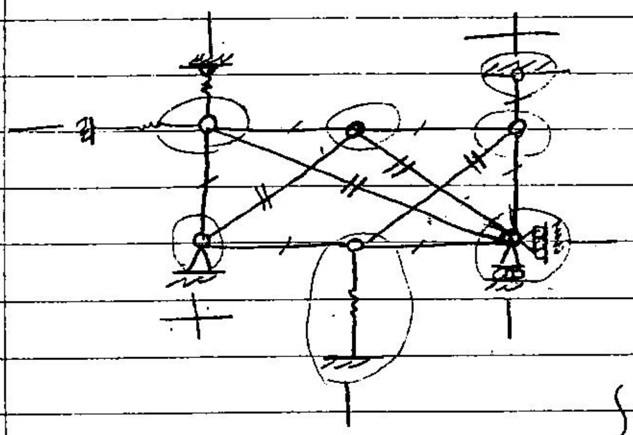

کابل
صلب
کابل
جوش
۱۴



سوال ۸) چند درجه نامعین است؟ (ک۸۸)

$n = ۳k + r - (C + ۳)$

$\begin{cases} k = ۰ \\ r = ۶ \\ C = ۲ \end{cases} \Rightarrow n = ۱ + \underset{\text{کابل}}{۱} = ۲$



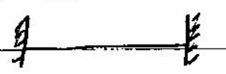
سوال ۹) تعداد درجات نامعینی سازه چقدر است؟

$n = m + r - ۲J$

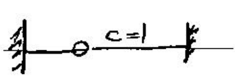
$\begin{cases} r = ۹ \\ m = ۱۱ \\ J = ۷ \end{cases} \Rightarrow n = ۶$

سوال ۱۰) درجه نامعینی تیر را تعیین کنید.

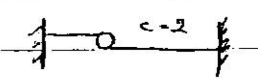
* اگر بارها هم قائم و هم مایل باشند از n استفاده می‌شود



$\Rightarrow n = 6 - 3 = 3 \qquad n' = ۴ - ۲ = ۲ \qquad n = r - (C + 3)$



$\Rightarrow n = 6 - 4 = 2 \qquad n' = ۴ - ۳ = ۱$



$\Rightarrow n = 6 - (2+3) = 1 \qquad n' = ۴ - ۳ = ۱$ $c' = ۱$ چون نیروی محوری در نظر گرفته نمی‌شود.

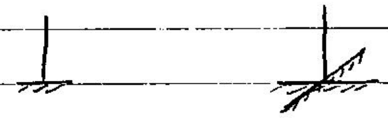
$n' = r' - (c' + 2)$ ← وقتی از تغییر طول محوری صرف نظر شده باشد

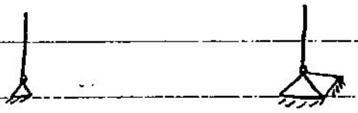
بجز نیروهای محوری

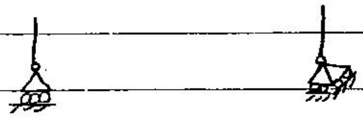
اگر بارها همه قائم باشند از فرمول n′ استفاده می‌شود.

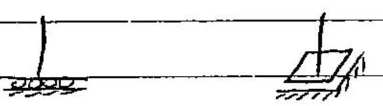
درجه نامعینی قابهای ۳ بعدی:

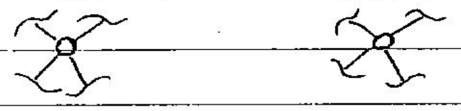
$$n:\begin{cases} 6m+r-(C+6J) & \text{سایر سازه‌ها} \\ m+r-3j & \text{خرپاهای سه بعدی} \end{cases}$$

r=3

r=6

r=2

r=3

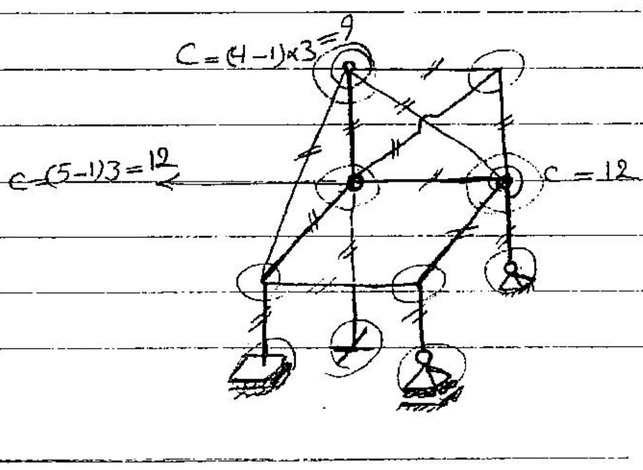
r=1

r=1

r=2

r=3



$C=m-1$ $\qquad$ $C=(m-1)3$

سوال 11) عضو دو سر مفصل



$C=(12+12+9-4)$

$n=6m+r-(C+6J)$

$$\begin{cases} r=13 \\ c=33 \\ m=14 \\ J=10 \end{cases}$$

~~$\hookrightarrow n=4$~~

درجه نامعین

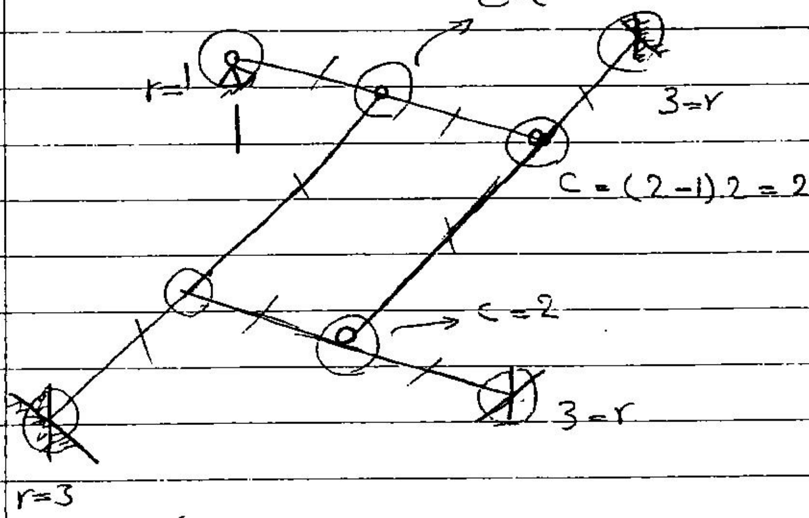
$n=8$ ✓

شکل ۷

در قاب مفصلی به ازاء هر عضو دو سر مفصل می بایست یکی از معادلات شرط کم نمود (به علت پیچش)

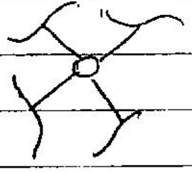
* درجه نامعینی شبکه:

بارگذاری شبکه عمود بر سطح است



* تکیه گاه مفصلی با تکیه گاه غلطکی در شبکه فرقی ندارند.

شبکه $n=3m+r-(c+3j)$



$$\begin{cases} m=8 \\ r=10 \\ j=8 \\ c=8 \end{cases}$$

۲۴+۱۰−(۶+۲۴)

c شبکه : $(m-1)\times 2$

$\downarrow$

$c=8-2=6$

عضو دو سر مفصل

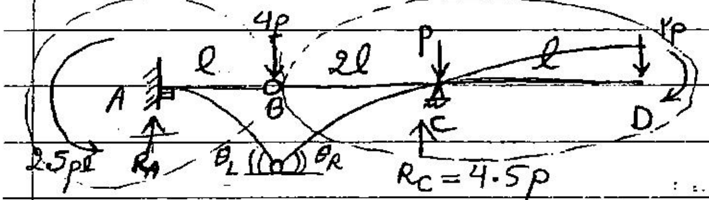
$\hookrightarrow n=4$

استاتیک .

۱) بدست آوردن عکس العمل های تکیه گاهی سازه های معین دو بعدی (تیر - قاب - خرپا)

۲) رسم نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی در تیرها و قاب ها

۳) بدست آوردن نیروهای داخلی خرپاها به کمک روش "مفصل و گره یا روش مقطع یا برش"


4p
P
2p
l
2l
l
pl
A
B
C
D
2.5pl
R_A
θ_L
θ_R
$R_C = 4.5p$

مثال اول)
درجه نامعینی را تعیین کنید!

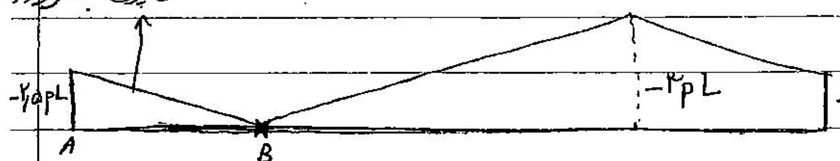
$n = r - (c + 2)$
$n = ۳ - (1 + ۲) = 0$
سازه معین ← استاتیک

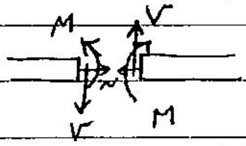
$\Sigma M_{RB} = 0$
$p \times 2L + 2p \times 3l + pl = R_C \times 2l$
$\Rightarrow R_C = 4.5\,p$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 2.5p$

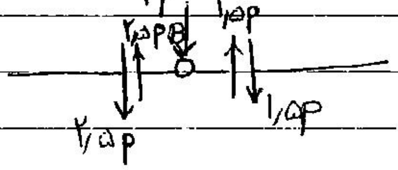
$\Sigma M_{BLi} = 0 \Rightarrow M = \ominus 2.5\,pl$

رسم نمودار لنگر خمشی:


خط چون بار متمرکز دارد
-۲/۵pL
-۴pL
-pl
A
B



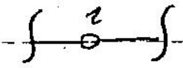
M : $\frac{\ominus}{\oplus}$ جهت قرارداد

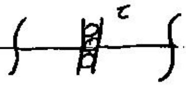

۴p
۲/۵p
B
۱/۵p
۲/۵p
۱/۵p

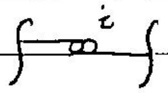
۱) کل $\sum F_x = 0$

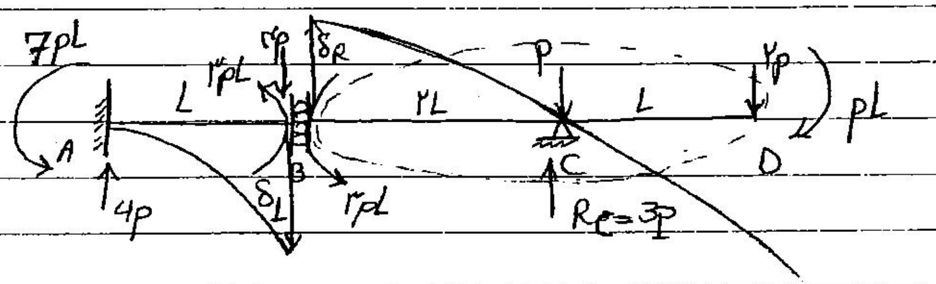
۲) کل $\sum F_y = 0$

۳) کل $\sum M_{\text{نقطه}} = 0$

۴)  $\sum M_{\substack{Li\\Ri}} = 0$

۵)  $\sum V_{\substack{Li\\Ri}} = 0$

۶)  $\sum N_{\substack{Li\\Ri}} = 0$


7pL
A
L
۳pL
۲p
δ_R
δ_L
B
۲pL
P
۲L
L
۲p
C
D
pL
4p
$R_C = 3P$

مثال ۲) $\frac{۳p}{۴}l - \frac{pL}{۴}$

$n' = ۳ - (c' + ۲)$

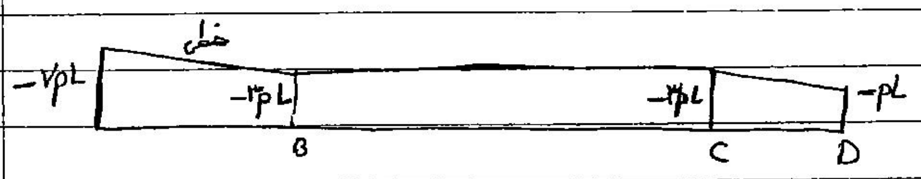
$n' = ۳ - (۱ + ۲) = ۰$

معین استاتیک

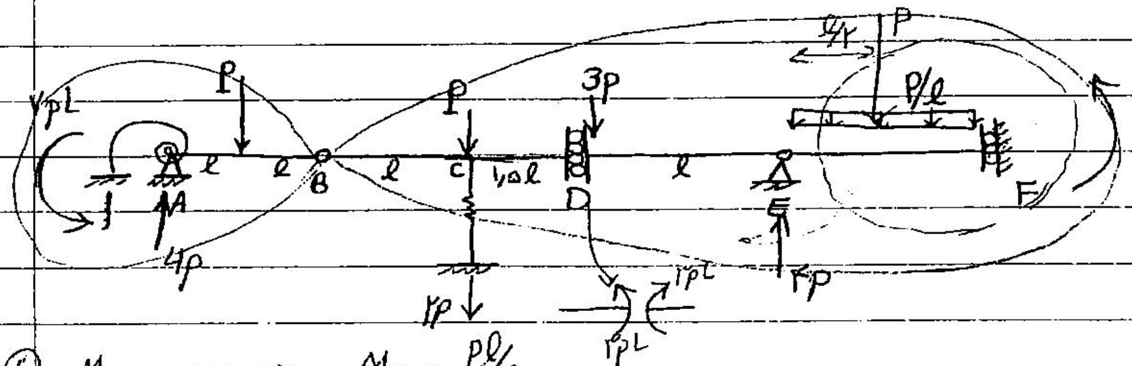
کل $\sum M_C = 0 \Rightarrow ۲p\,l + pl + 4p \times 3L = 4p \times 2L + M_A$

$M_A = 7pL$ ↶

* نمودار لنگر خمشی


خطی
$-۷pL$
$-۳pL$
$-۳pL$
$-pL$
B
C
D

مثال ۳)
در تیر درجه n
نیرو داریم


۲pL
P
A
l
l
B
l
P
C
۱٫۵l
3p
D
l
E
P
l/۲
P/l
F
4p
۲p
۲pL
۲pL
۴p

⑥ $M_{M\,RE} = 0 \Rightarrow M_F = Pl/2$

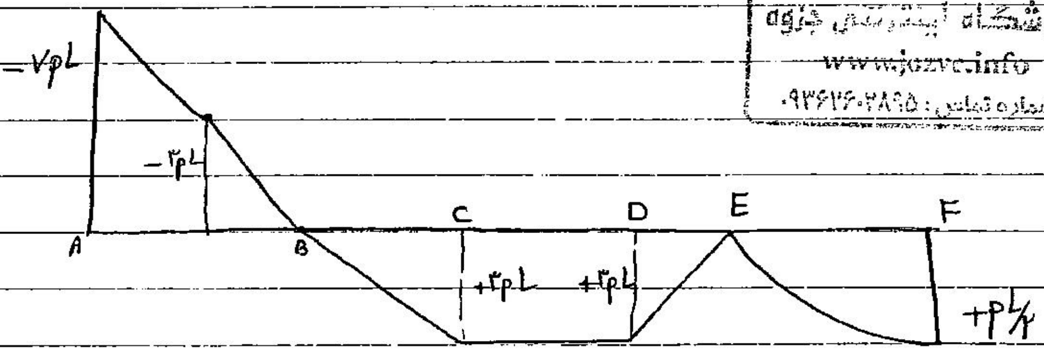
⑤ $\sum V_{LD} = 0 \Rightarrow F_{yE} = 4p$

⑤ $\sum M_{BL} = 0 \longrightarrow F_{y\,ج} = 2p$

$n' = ۳ - (c' + ۲)$

$n' = ۵ - (۳ + ۲) =$

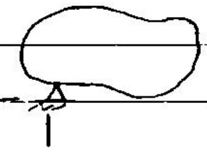
معین استاتیک

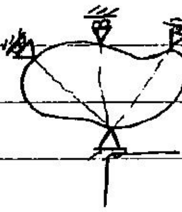

-7pL
-3pL
A
B
C
D
E
F
+3pL
+3pL
+pL/2

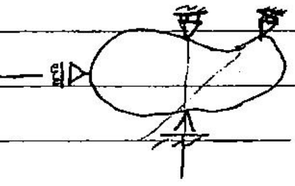
«پایداری و ناپایداری»

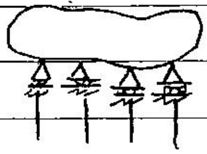
* سازه‌ای پایدار است که هم از نظر داخلی، هم از نظر خارجی پایدار باشد.

- پایداری خارجی ← به حداقل سه قید مشروط داشته باشد. مشروط یعنی ↗ غیر موازی (هر سه قید متقاطع نیست) ↙ غیر متقارب




ناپایدار
چون همه هم‌راستند




موازی‌اند ← ناپایدار

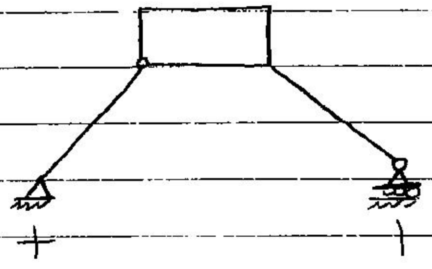
روش‌های تشخیص پایداری و ناپایداری سازه‌ها:

۱) روش بررسی ۲) روش اعمال بار ۳) روش آزمایش بار صفر

۴) روش هنبرگ ۵) دترمینان ضرایب

"روش بررسی"

مثال ۱)



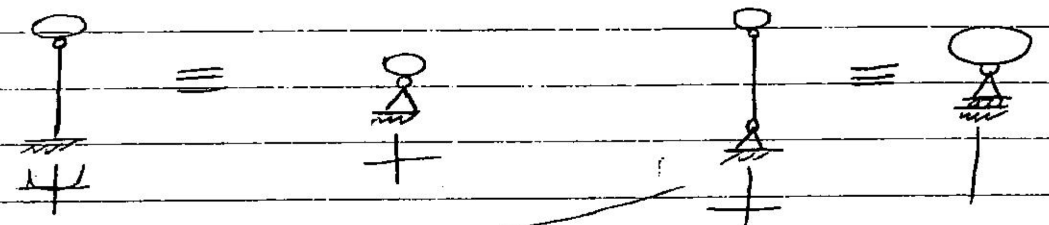
① مرحله اول : معادل سازی وساده سازی

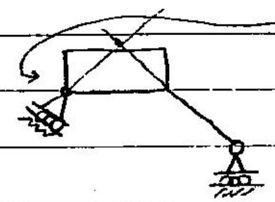
② مرحله دوم : $n<0$ ← ناپایدار

$$n = \underset{1}{3k} + \underset{3}{r} - (\underset{2}{c} + 3) = 1$$

نامعین

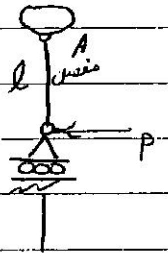
مهم!





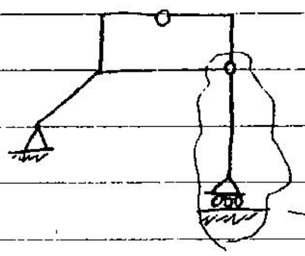
چون هم راستند پس ناپایدار است

$\Sigma M_A \neq 0$



* این را نمی توان معادل سازی کرد چون خودش ناپایدار است.

مثال ۲)

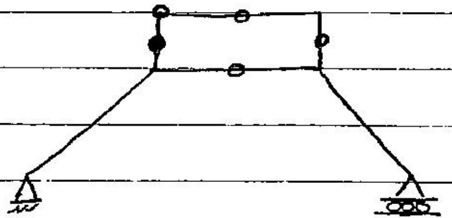


معین

ناپایدار است چون عامل ناپایداری دارد

معین و نامعین برای سازه ناپایدار معنی ندارد.

مثال ۳)



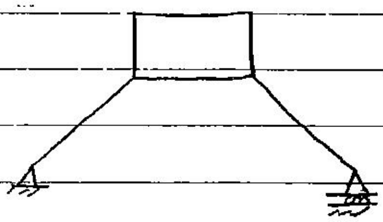
n = ۳k + r − (c+۳)

n = ۳×۱ + ۳ − (۴+۳) = −۱

این سازه چون n<0، ناپایدار است.

n {
n>0 → نامعین } بررسی می‌شود
n = 0 → معین }
n<0 → ناپایدار استاتیکی - ایستایی - مکانیکی

مثال ۴)



k=1   r=۳   ۳+۳−۳=۳=n

n = 3

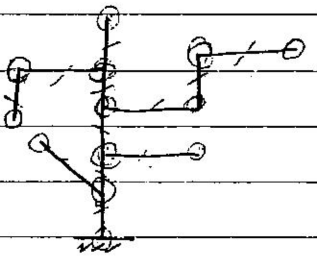
نامعین - پایدار خارجی

پایدار داخلی ⇐ کلاً پایدار

* مرحله ۳ روش بررسی:

③ یافتن اجسام با اتصالات صلب

مثال ۴)

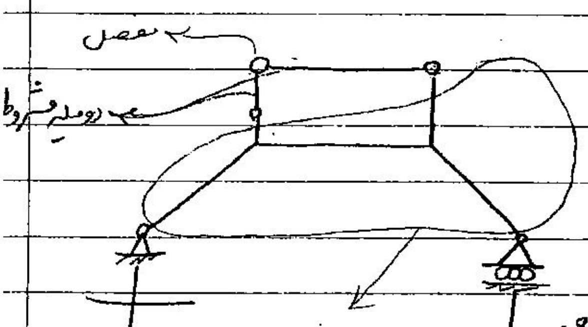


$$n = \overbrace{\underset{m}{3\times 12}}^{36} + \underset{r}{3} - (\underset{c}{39}) = 39 - 39 = 0$$

پایدار داخلی و خارجی ⇐ پایدار

چون اتصالات صلب هستند.

مثال ۵)



۳+۳−(۳+۳)=۰=n

n=0 ⇐ معین و پایدار خارجی

۴ روش بررسی: یک مفصل و دو میله مشروط

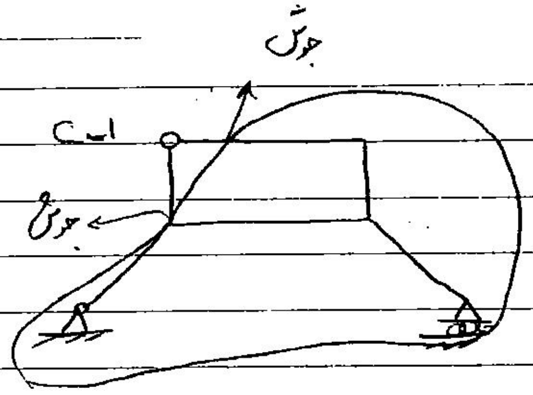
(دو میله در یک راستا نباشند، یعنی زاویه بین آنها α=۱۸۰° نباشد)

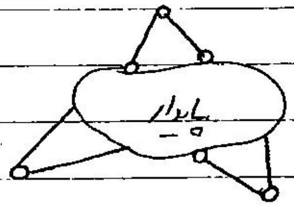
از نظر داخلی پایدار

پس کل سازه پایدار است.

مثال ۶) $n=2$ و نامعین

پایدار

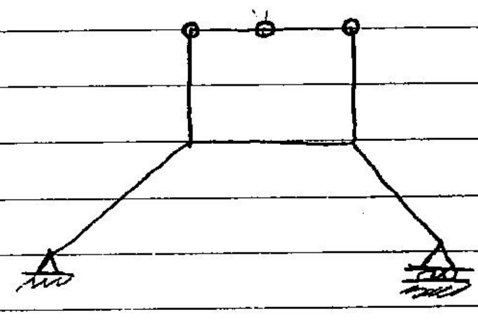




تذکر!

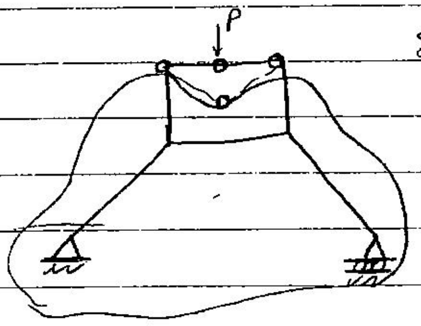
مفصل عامل پایداری نیست و تعداد آن‌ها در سازه باعث ناپایداری نمی‌شود.

مثال ۷) ناپایدار



$\Sigma F_y = P \neq 0 \Rightarrow$ ناپایداری

مثال ۸)



$n=0$

معین ← ناپایداری آنی

شاخص ۵ روش بررسی: اگر سه مفصل در یک راستا باشند به طوریکه مفصل وسطی رها باشد، باعث ناپایداری می‌شود ← ناپایداری آنی (لحظه‌ای)

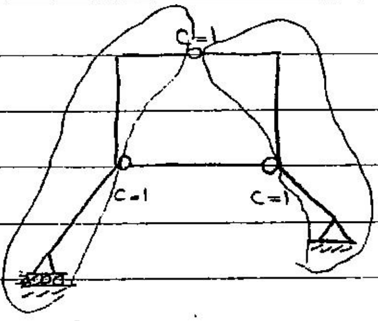
ناپایداری آنی ← در ابتدا سازه ناپایدار است و بعد از تغییر شکل به صورت پایدار در می‌آید.

این سازه ناپایدار آنی است و بعد از آن به صورت پایدار در می‌آید با استفاده از روش

۳ و ۴ بحث بررسی.

* روش بررسی: ۱) معادل سازی و ساده سازی
۲) اگر $n<0$ ← سازه ناپایدار است
۳) یافتن اجسام با اتصالات صلب
۴) کشف یک مفصل و دو میله مشروط
۵) اگر سه مفصل در یک راستا باشند، ناپایدار آنی می‌شود
۶) انواع اتصالات پایدار بین دو جسم پایدار

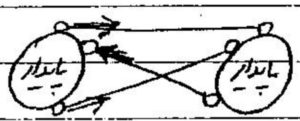
مثال)



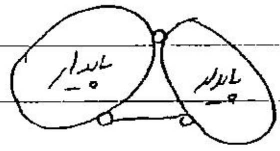
$n=0$ یعنی

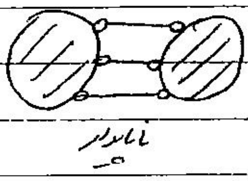
طبق ۶ حالت دوم ← پایدار است.

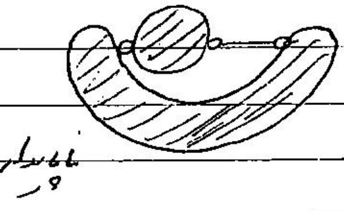
۶ حالت اول)
اتصال بین دو جسم پایدار به کمک ۳ میله مشروط غیر موازی و غیر هم راس

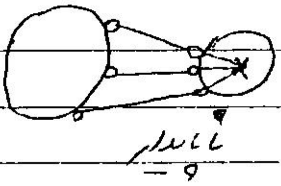


۶ حالت دوم) اتصال بین دو جسم پایدار به کمک یک مفصل و یک میله مشروط (مفصل در امتداد میله نباشد)

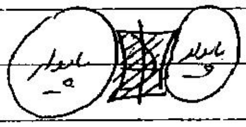




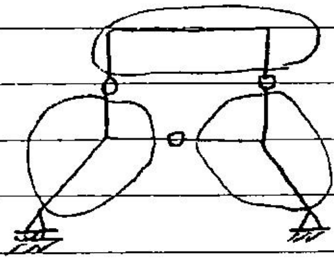




۶. حالت سوم) اتصال بین دو جسم پایدار به کمک اتصال صلب (جوش)


پایدار
پایدار

مثال ۱۰) پایدار یا ناپایدار؟



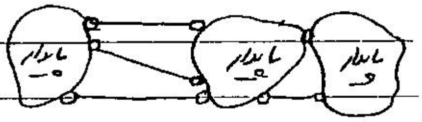
پایدار خارجی است.

طبق حالت ۳-۷ پایدار است.

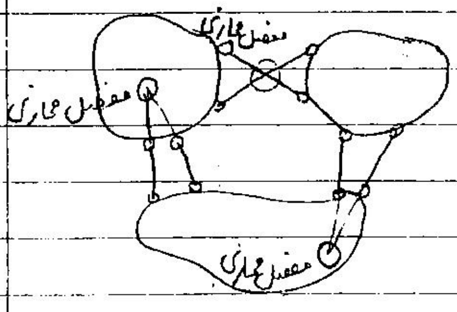
*مسأله ۷ روش بررسی)

انواع اتصالات پایدار بین سه جسم پایدار.

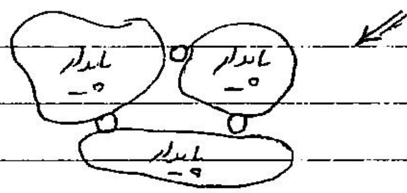
۷-۱) اتصال بین سه جسم پایدار بصورت سری و به کمک یکی از حالات شاخه ششم.

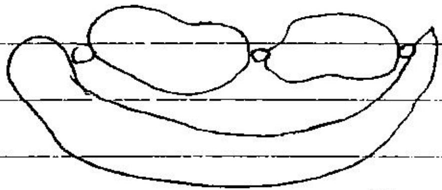

پایدار
پایدار
پایدار

۷-۲) اتصال بین سه جسم پایدار به کمک ۶ میله مشروط (حداقل ۶ میله باشد بین هر دو جسم حداقل ۲ میله ـ مفصل های مجازی تشکیل شده از محل تقاطع میله ها در یک راستا نباشند)

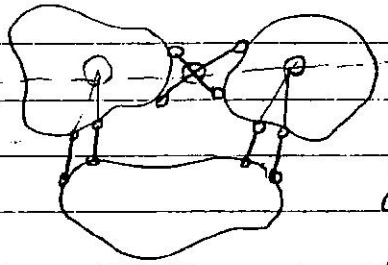

مفصل مجازی
مفصل مجازی
مفصل مجازی

۷-۳) اتصال سه جسم پایدار به کمک سه مفصل مشروط (سه مفصل در یک راستا نباشند)





ناپایدار (سه مفصل در یک راستا)

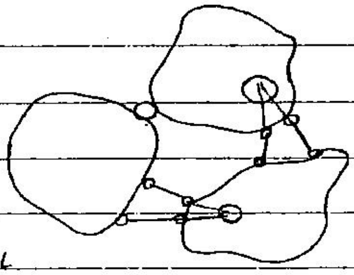


ناپایدار (سه مفصل در یک راستا به کمک ۶ میله)

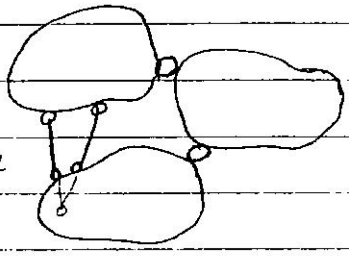
۷-۴) اتصال سه جسم پایدار به کمک ترکیبی از حالات قبل.

(مفصل معادل ۲ میله است)

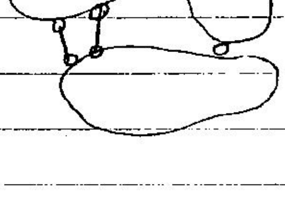
در اینجا هم سه مفصل نباید در یک راستا باشند.



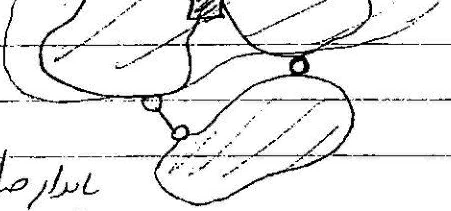
پایدار



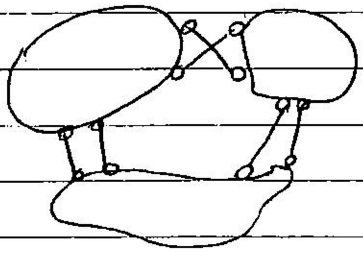
پایدار



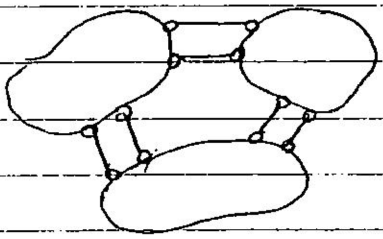
پایدار



پایدار طبق ۶-۲ و ۶-۳



اگر دو میله موازی باشند چون همدیگر را در بی نهایت قطع می کند و در یک راستا هستند، ناپایدار است.



⇐ ناپایدار است چون همه میله‌ها در بی نهایت همدیگر را قطع می کند.

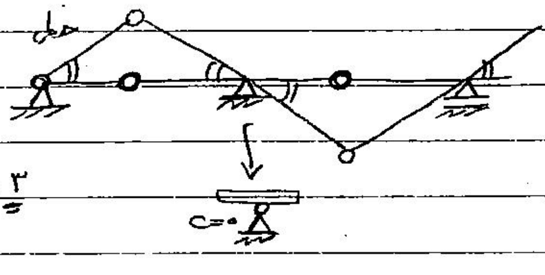
! تمام ساختمان‌های ۶ و ۷ برای ناپایداری داخلی سازه‌ها بودند. و بدون تکیه‌گاه بودند

ساختمان ۸ روش کریس) پایداری و ناپایداری تیرها

۸-۱) اگر بتوان مکانیزم تیر را رسم نمود آن تیر، ناپایدار است.

۸-۲) اگر نتوان مکانیزم تیر را رسم نمود آن تیر، پایدار است.

مثال ۱۱)



۳ مفصل دارم

چون مکانیزم را توانستیم رسم کنیم، تیر ناپایدار است.

فقط در مفصل‌ها می‌توان شکست، باید به تکیه‌گاه‌ها برسیم.

۱) مکانیزم همواره خطی است منحنی نمی‌شود.

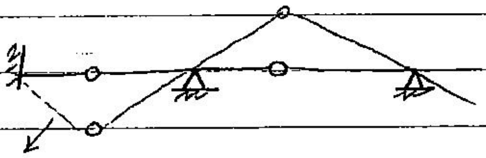
۲) تکیه‌گاهی (تکیه‌گاه‌های غیر چرخ‌دار) نمی‌توانند جابجا شوند.

۳) شیب در تکیه‌گاه گیردار و غلطکی برشی، صفر است.

۴) شیب طرفین مفصل برشی باید باهم برابر باشد.

۵) فقط و فقط در محل مفصل خمشی می‌توان شکست.

مثال ۱۲)

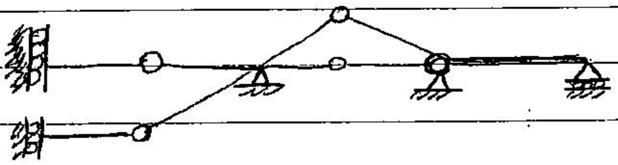


شیب در تکیه‌گاه گیردار صفر است.

⇐ نمی‌توان مکانیزم را رسم کردیم

پایدار است.

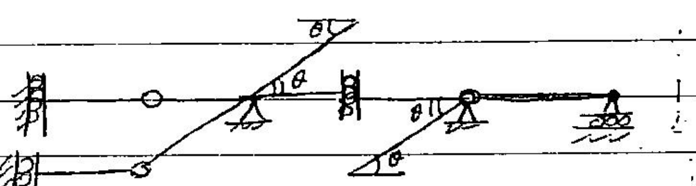
مثال ۱۳)



چون چرخ دار است می‌توان جابجا شود ...

می‌توان مکانیزم را رسم کردیم

ناپایدار است.

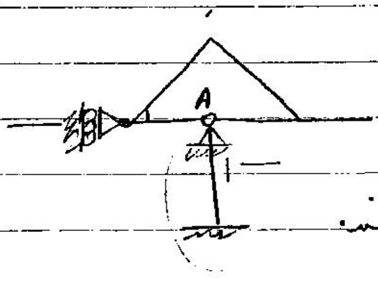


مثال ۱۴)

ناپایدار است.

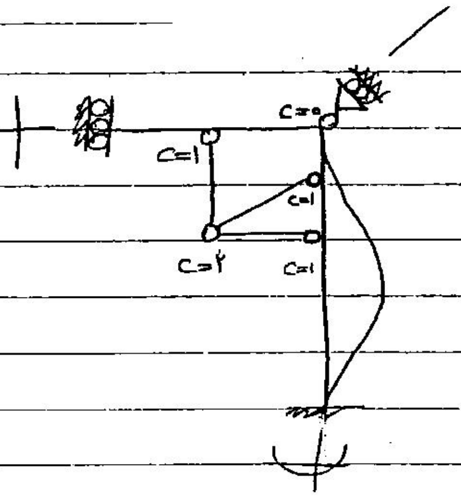
نکته ۴ ★ شیب طرفین مفصل برشی باید برابر باشند.

مثال ۱۵)



ناپایدار ـ
چون نیروها هم‌راستند.
در نقطه A

مثال ۱۶)


C=0
C=1
C=1
C=2
C=1

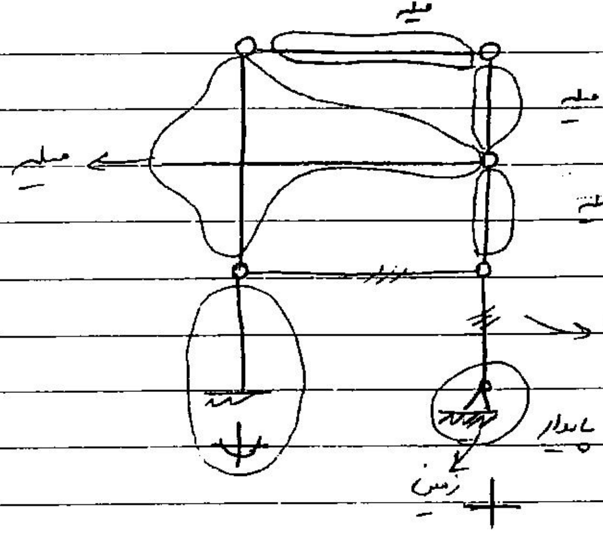
خارجی ← پایدار

← پایدار

داخلی ← پایدار

طبق شاخه ۳ و ۴

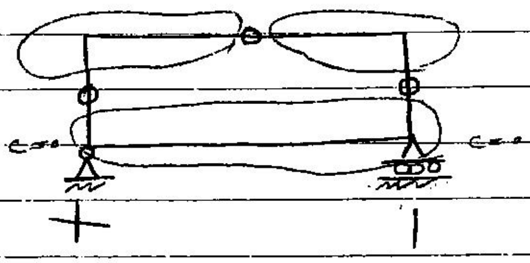
مثال ۱۷)


میله
میله
میله
میله
پایدار
پایدار
زمین

* طبق مفصل و دو میله فوق پایدار است

کل سازه طبق یک مفصل و دو میله پایدار است.

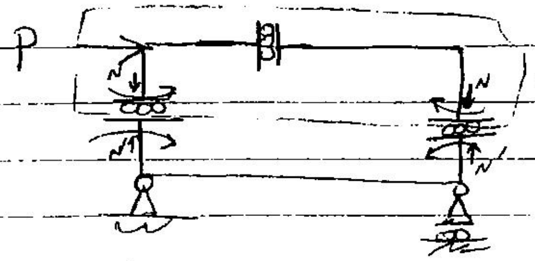
مثال ۱۸)



خارجی ← پایدار

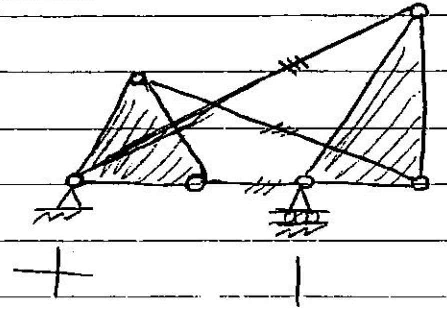
داخلی ← پایدار (طبق ۳-۷)

مثال ۱۹)



$\longrightarrow \Sigma F_x = P \neq 0$

سازه ناپایدار است.



مثال ۲۰)

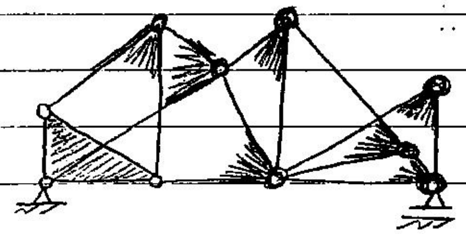
در اینجا اعضا از روی هم عبور کرده اند *

خارجی ← پایدار

* مثلث طبق شاخص ۳-۲ ، بدون تکیه گاه ، همیشه از نظر داخلی پایدار است.

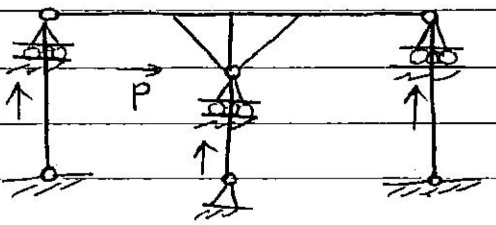
* طبق شاخص ۱-۶ پایدار است ، کل سازه

مثال ۲۱)



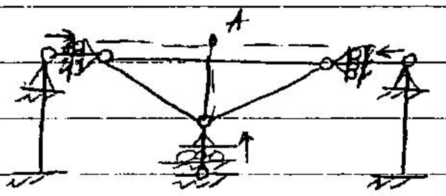
این خرپا طبق شاخص ۴ ، از نظر داخلی و خارجی پایدار است.

مثال ۲۲)



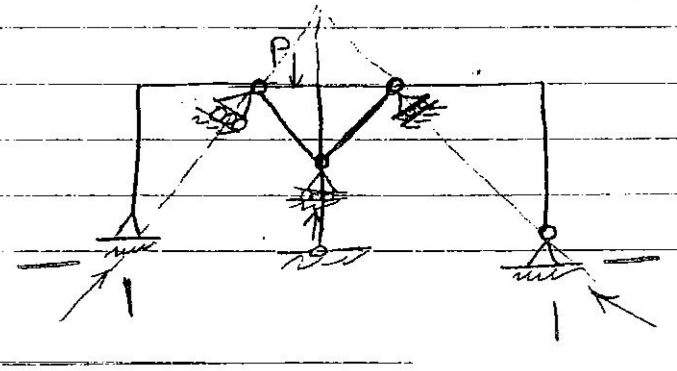
ناپایدار $\Sigma F_x = P \neq 0$

مثال ۲۳)



ناپایدار

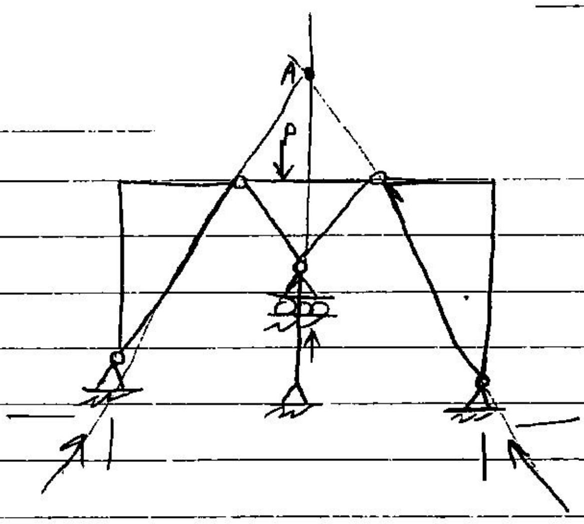
مثال ۲۴) ناپایدار است



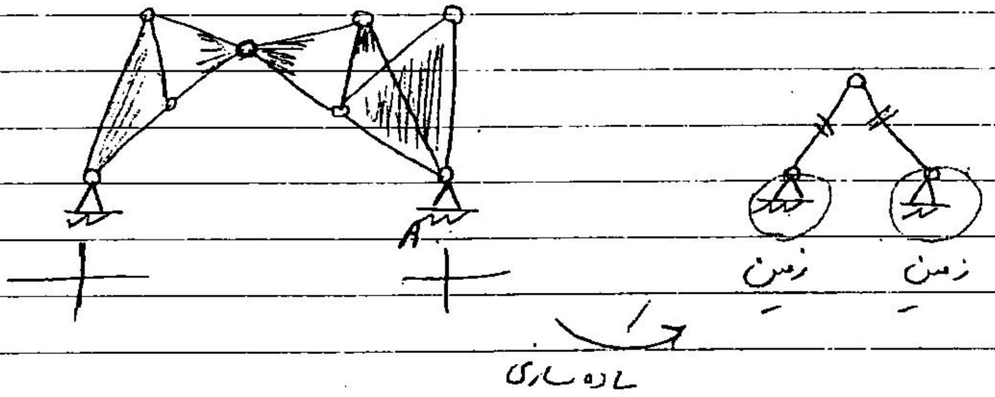
اگر سازه متقارن شود ،
پایدار است.

مثال ۲۵) سازه متقارن است.

ناپایدار

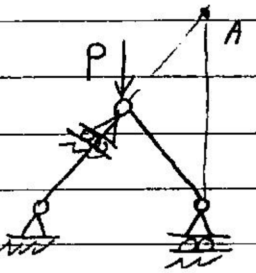


مثال ۲۶)


A
زمین
زمین
ساده سازی

سازه پایدار است.

۲۷) اگر تکیه گاه A غلطکی شود؟

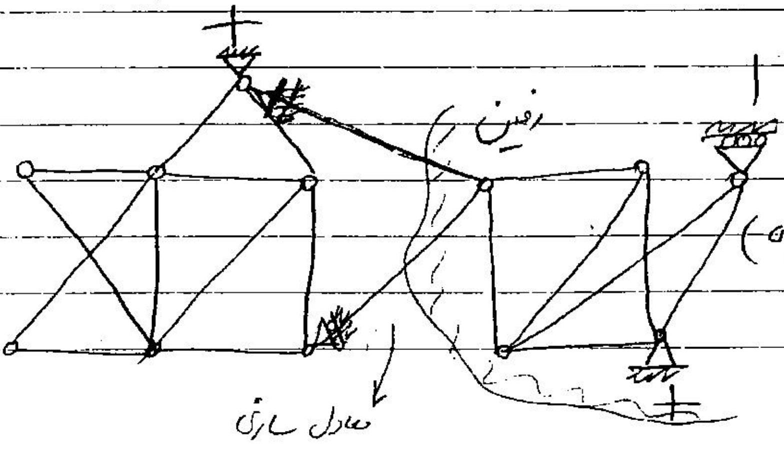


دلیل اول: اگر P را قرار دهیم حرکت دارد

" دوم: $n=m+r-2j=-1<0 \Rightarrow n<0$

" سوم: معادل سازی می شود و نیروها هم راستا و ناپایدار است.

مثال ۲۸)


زمین
معادل سازی

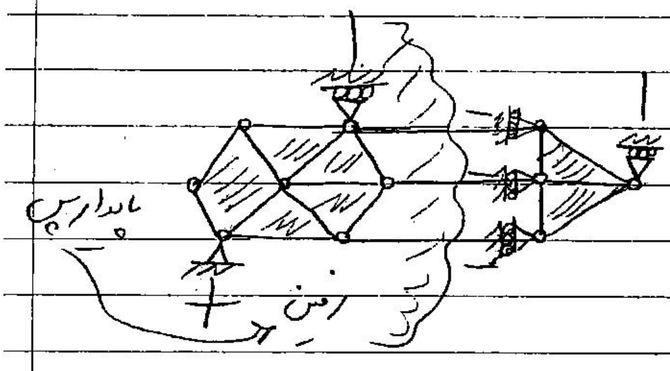
(داخلی + خارجی)

ناپایدار

سازه بالا هم از نظر داخلی و هم خارجی پایدار است و می‌تواند در حکم زمین باشد و هنگام معادل سازی یک صلب می‌تواند بصورت تکیه‌گاه غلطکی شود.

تست (مهم) اگر صلب‌ها بصورت [illegible] باشند:

چون بارها هم راستند ناپایدار است.



(۲۹

پایدار است چون ۴ نیروی غیر موازی و غیر هم راس دارد.

* اگر ۲ صلب باشد پایدار است.

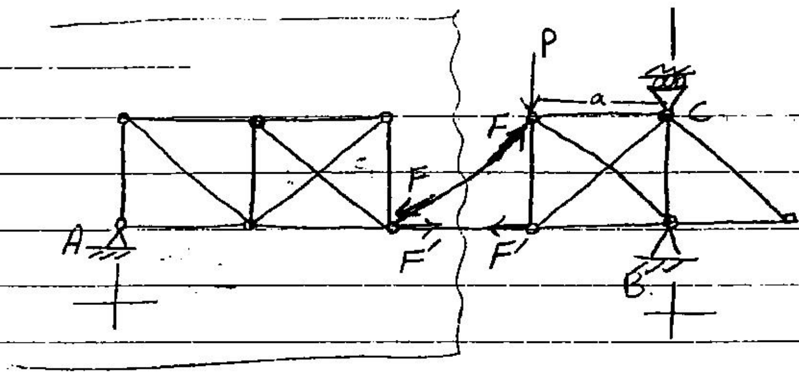
* اگر ۱ صلب باشد و تکیه‌گاه مفصلی بود هم پایدار است ولی اگر صلب وسطی باشد ناپایدار است.
یا بالایی یا پایینی

« روش اعمال بار »

در این روش یک نیروی $P \neq 0$ به سازه اعمال می‌کنیم، چنانچه در گره‌ای یا صلبی و یا کل سازه، یکی از معادلات تعادل استاتیکی برقرار نگردد سازه ناپایدار است.

دقت شود به کمک این روش فقط ناپایداری سازه‌ها را می‌توان نتیجه گرفت.

مثال ۳۰)



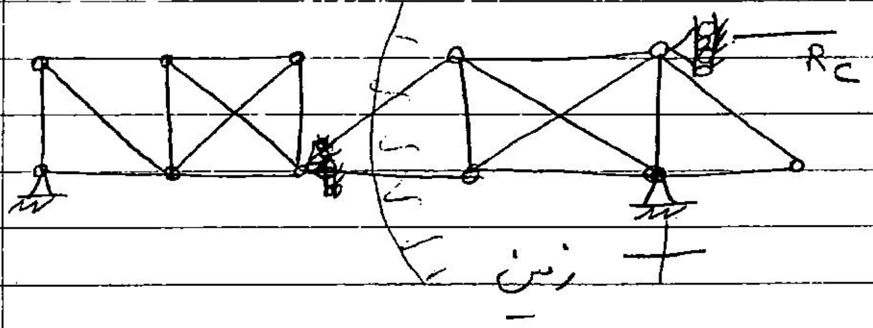
$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow F = 0$

چپ

$\Sigma M_B = P \times a \neq 0$ ✗

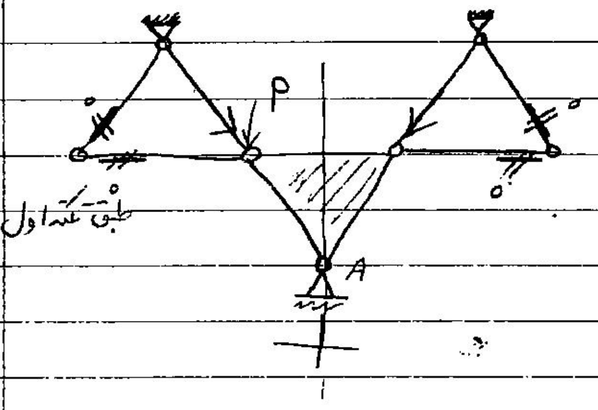
ناپایدار

(۳۱



ناپایدار است

(۳۲


P
A
0
0
طبق نکته اول

$\Sigma M_A = P \times a \neq 0$

ناپایدار

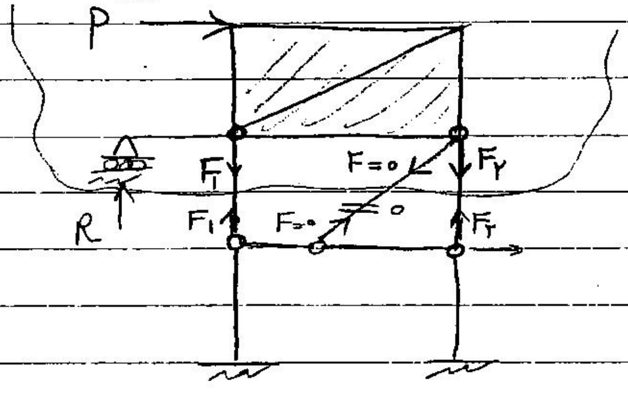
نکته اول (اعضای صفر نیرویی)

اگر دو عضو روی سر مفصل یا خرپایی (گره‌ای) به هم متصل شوند بطوریکه:

۱) باری روی آن گره اعمال نشده باشد. ۲) این دو عضو در یک راستا نباشند

آنگاه هر دو عضو صفر نیرویی می‌باشند.

(۳۲


P
R
F_1
F_2
F=0
$\neq 0$

$\Sigma F_x = P \rightarrow \neq 0$

ناپایدار

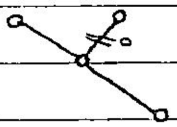
طبق سه

کنترل دوم (اعضای صفر نیرویی)

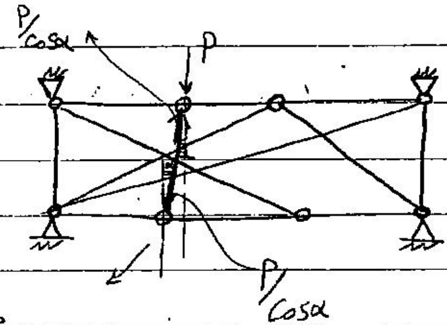
اگر سه عضو دو سر مفصل در گره‌ای به هم برسند بطوریکه:

۱) باری در آن گره اعمال نشده باشد. ۲) ۲ عضو از این سه عضو در یک راستا باشند

آنگاه عضو سوم، صفر نیرویی می‌باشد.



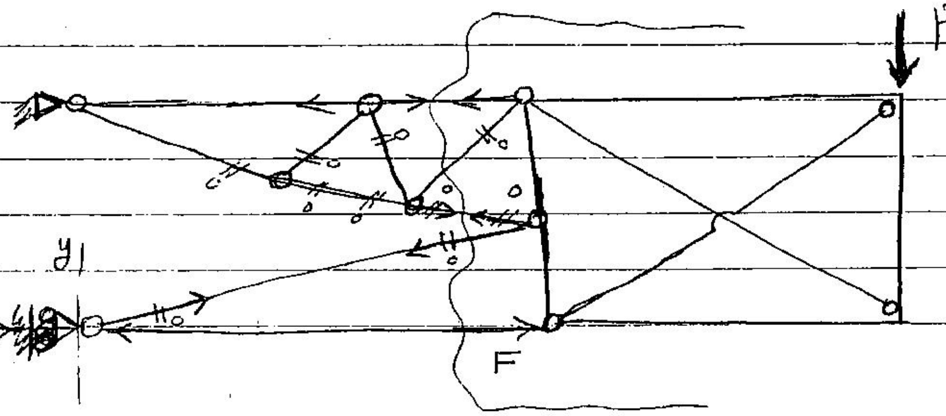
(۳۳


$P/\cos\alpha$
P
$P/\cos\alpha$

ناپایدار

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow P \neq 0$ ✗ ناپایدار

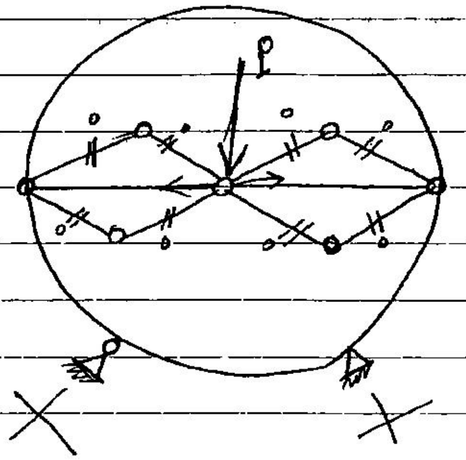
(۳۴



$\Sigma F_y = P \neq 0$

ناپایدار

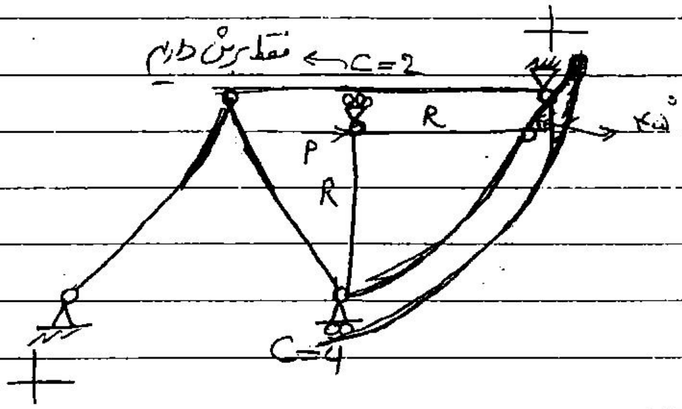
(۳۵



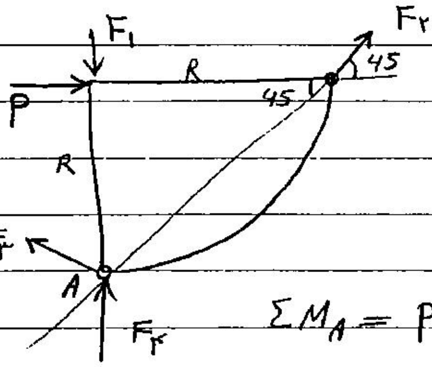
از نظر خارجی ناپایدار

$\Sigma F_y = P \neq 0$ ناپایدار

(۳۶

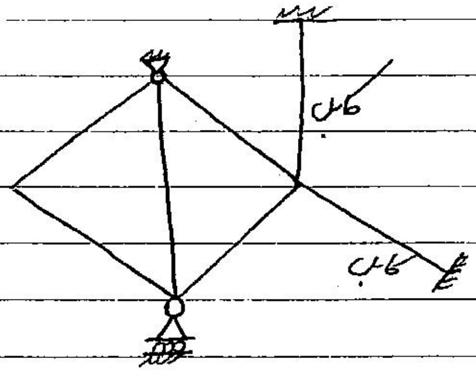

مقطع برش داریم ← C=2
P
R
R
C=4

ناپایدار است یا پایدار ؟


F₁
F₂
45
R
45
P
R
F₃
A
F₄

$\Sigma M_A = P \times R \neq 0$

(۳۷



۳- "آزمایش بار صفر"

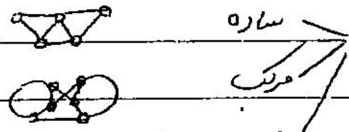
در این روش نیروی داخلی یکی از اعضا و یا عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را برابر S فرض می‌کنیم سپس بقیه نیروها و عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را برحسب S بدست می‌آوریم چنانچه در گره‌ای یا قسمتی و یا کل سازه یکی از معادلات تعادل استاتیکی برقرار نگردد و در نتیجه $S = 0.0$ شود سازه پایدار است ولی اگر تمامی نیروها و عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی برحسب S بدست آیند (به ازای هر مقداری برای S) سازه ناپایدار است.

$$\begin{cases} S = 0 \rightarrow \text{پایدار} \\ S \neq 0 \rightarrow \text{ناپایدار} \end{cases}$$

* این روش فقط برای پایداری و ناپایداری سازه‌های معین است.

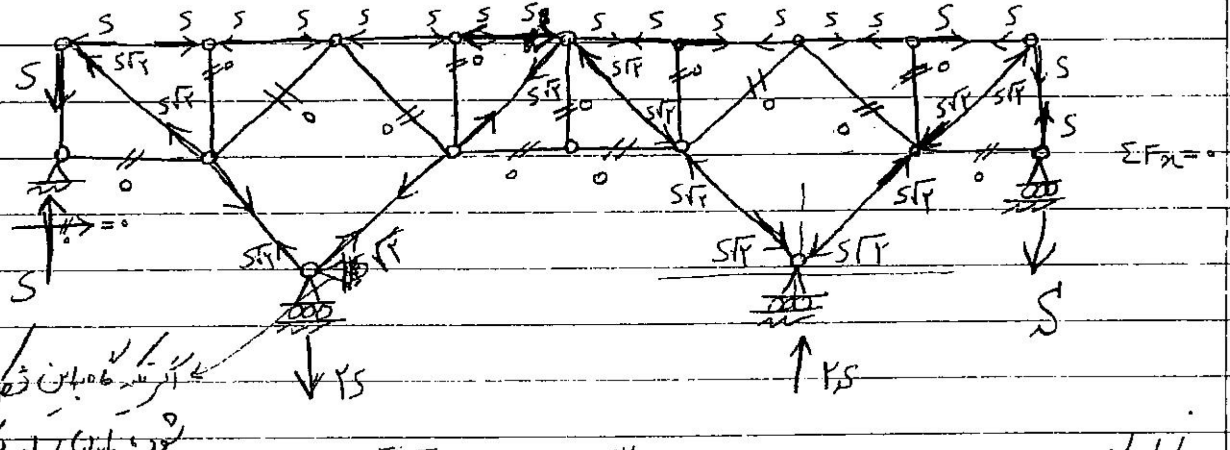
* بهتر است که در این روش، ابتدا اعضای صفر نیرویی را بدست آوریم.

* خرپا



مختلط: خرپایی که نه ساده است و نه مرکب.

* این روش برای بیشتر خرپاها آن هم از نوع مختلط استفاده می‌شود.

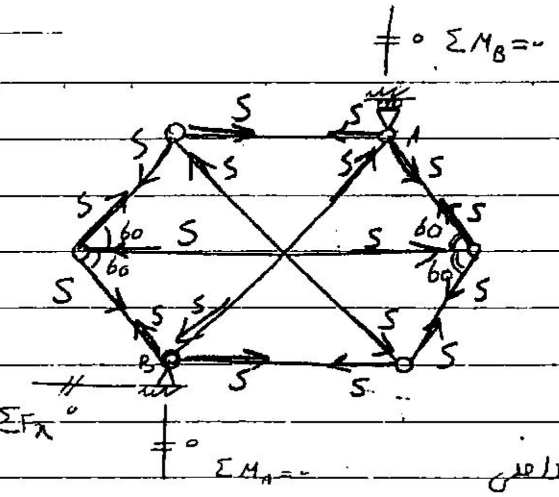


اگر تکیه‌گاه این شکل شود، پایداری را بررسی کنید.

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow ۳S - ۳S = 0$

ناپایدار

(۳۸


≠0 ΣM_B=0
S
60
A
B
ΣF_x 0
≠0 ΣM_A=0

$r=0$ معین

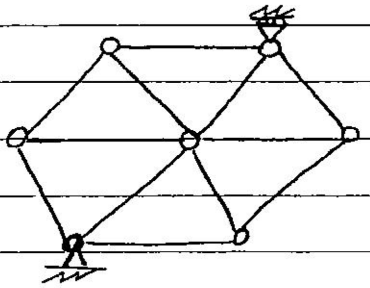
عضو صفر نیرویی نداریم

عکس العمل ها صفر نیست پس یکی از نیروهای داخلی
را صفر می گیریم

$S \neq 0 \Rightarrow$ ناپایدار

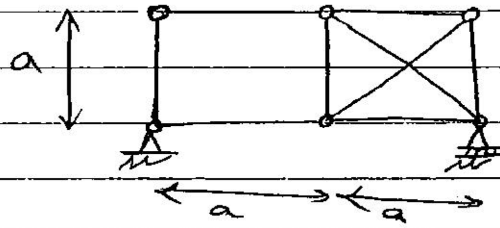
(۳۸′) اگر ۶ ضلعی منتظم شود، ناپایدار می شود، چرا ؟

(۳۸″



خرپای ساده ـ پایدار

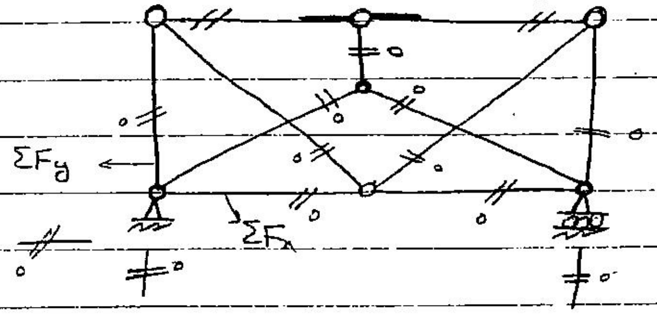
؟ (۳۹



ناپایدار است

خط تأثیر

۴۰)

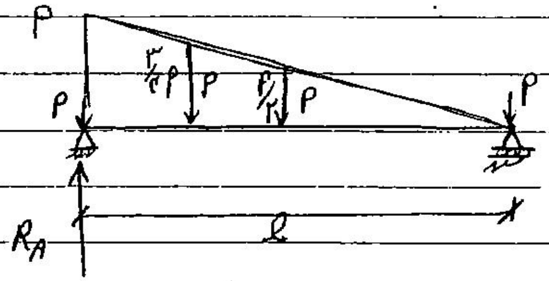

ΣF_y
ΣF_x
۰
۰
۰
۰
۰
۰
۰
۰
۰
۰
۰

پایدار
۲ -

* اگر نیروی تمام اعضا صفر شود، پایدار است.

« فصل دوم »

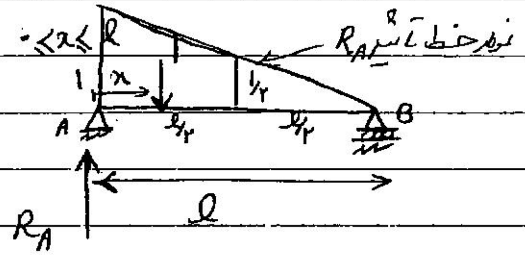
« خط تاثیر »


P
P
$\frac{3}{4}P$
P
$\frac{P}{2}$
P
P
R_A
l

$R_A = P$ و $\frac{3}{4}P$ و $\frac{P}{2}$ و ۰

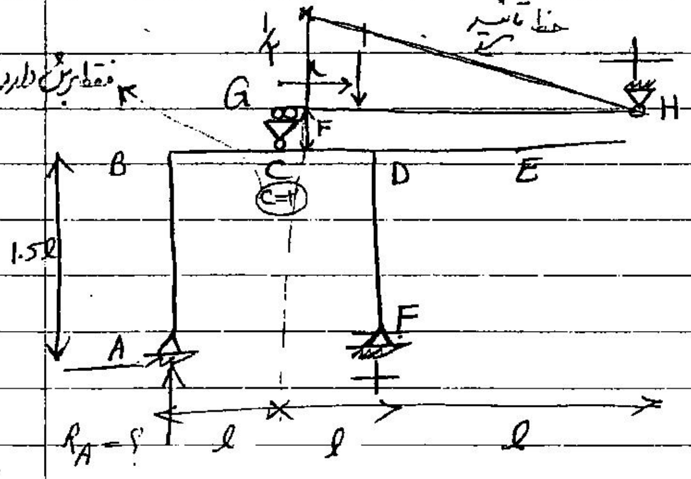
خط تاثیر:

* تغییرات کمیت (نیروی برشی، نیروی محوری و لنگر خمشی) به ازای حرکت بار واحد.


$0 \leq x \leq l$
1
1
x
$\frac{1}{2}$
A
B
$\frac{l}{2}$
$\frac{l}{2}$
R_A
l
نمودار خط تاثیر R_A

$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow R_A \times l = 1 \times (l - x)$

$R_A = \frac{l-x}{l}$ $\begin{cases} x = 0 \rightarrow R_A = 1 \\ x = l \rightarrow R_A = 0 \end{cases}$


$\frac{1}{2}$
خط تاثیر
1
x
نقطه برش دارد
G
F
H
B
C
$C=1$
D
E
$1.5l$
A
F
$R_A = ?$
l
l
l

مثال ۱) بار در جهت GH حرکت می‌کند

خط تاثیر عکس‌العمل تکیه‌گاه A را بیابید؟

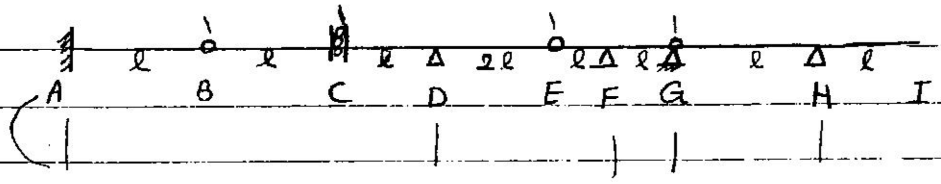
بالا $\Sigma M_H = 0 \Rightarrow F \times ۲L = 1 \times (۲L - x) \Rightarrow F = \frac{۲L - x}{۲L}$

پایین $\Sigma M_F = 0 \rightarrow R_A \times ۲l = F \times l \Rightarrow R_A = \frac{۲L - x}{۴L}$ $\begin{cases} x = 0 \\ x = ۲l \end{cases}$

net

خط تاثیر همیشه در حالتی رسم می شود که بار حرکت می کند.

مثال ۲)



$n' = r' - (c'+2) = ۶ - (۴+۲) = ۰$ معین

خط تاثیر :

۱) معین

تیر ۷۰٪ → برش V، لنگر M

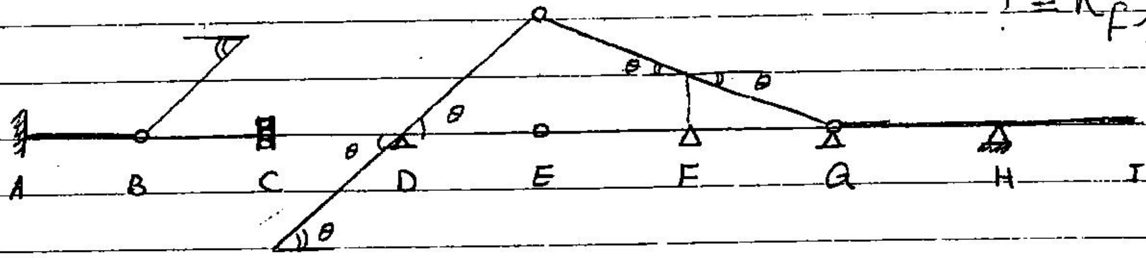
قاب ۸۵٪ → محوری N، برشی V، خمشی M

خرپا → محوری N

۱) خط تاثیر، تیر، معین، نیروی برشی، عکس العمل قائم تکیه گاه :

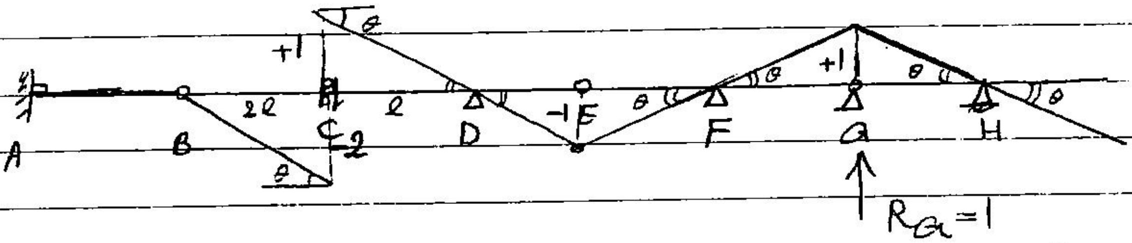
در نقطه مورد نظر به اندازه یک واحد بالا می رویم، سپس مکانیزم تغییر شکل تیر را که حفظ است رسم می کنیم. این مکانیزم همان خط تاثیر عکس العمل قائم تکیه گاه مورد نظر می باشد. بدیهی است که شیب طرفین تمامی نقاط در مکانیزم (به جز مفصل خمشی) می بایست با هم برابر باشد

خط تأثیر $R_F = ?$


θ
θ
θ
θ
θ
θ
A
B
C
D
E
F
G
H
I

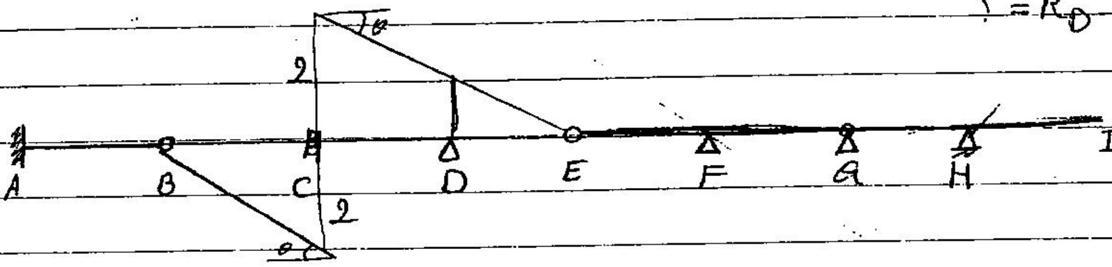
! فقط در B و G و E می‌توانند بشکنند یعنی فقط در مفصل‌ها

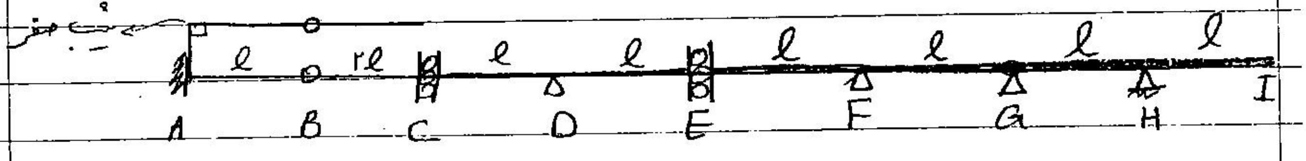
خط تأثیر R_G


θ
+1
2l
l
θ
-E
θ
θ
+1
θ
θ
θ
A
B
C
2
D
F
G
H
$R_G=1$

تمام ارتفاع‌ها R_G را نشان می‌دهند، چون خط تأثیر R_G را رسم کردیم

$R_D = ?$

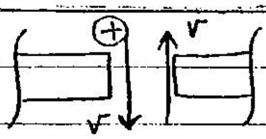

θ
2
2
θ
A
B
C
D
E
F
G
H
I


شیب صفر
l
2l
l
l
l
l
l
l
A
B
C
D
E
F
G
H
I

$R_A = ?$

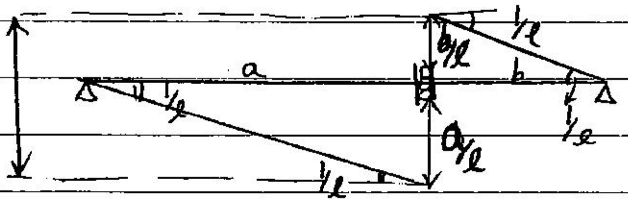
! مفصل هم می‌تواند بشکند، هم نشکند

۲) خط تأثیر، تیر معین، نیروی برشی، برش داخلی:

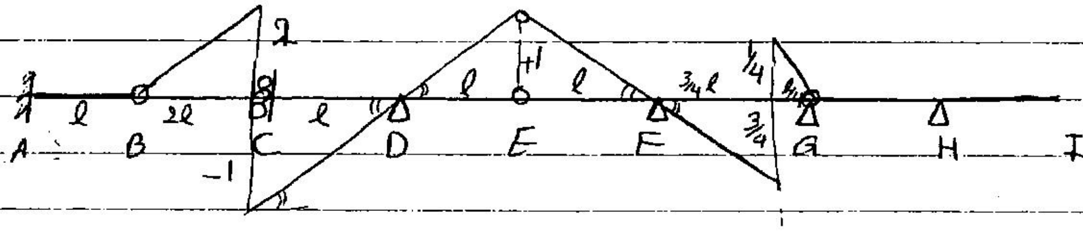


در نقطه مورد نظر یک مفصل برشی فرضی قرار می دهیم سمت راست مفصل را به اندازه b/l بالا می بریم و سمت چپ آن را به اندازه a/l پایین می آوریم، سپس مکانیزم تغییر شکل تیر را که خطوط است رسم می کنیم. این مکانیزم همان خط تأثیر برش داخلی نقطه مورد نظر می باشد.

$$\frac{l}{l} = \frac{a}{l} + \frac{b}{l} = \delta = 1$$

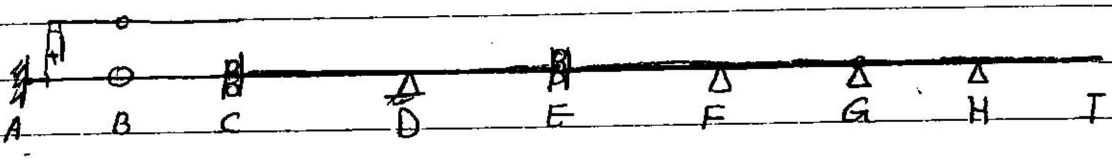


بدیهی است که شیب طرفین مفصل برشی فرضی می بایست باهم برابر باشد مگر اینکه مفصل برشی فرضی روی مفصل خمشی قرار بگیرد (خط اثر نیروی برشی در محل مفصل برشی)

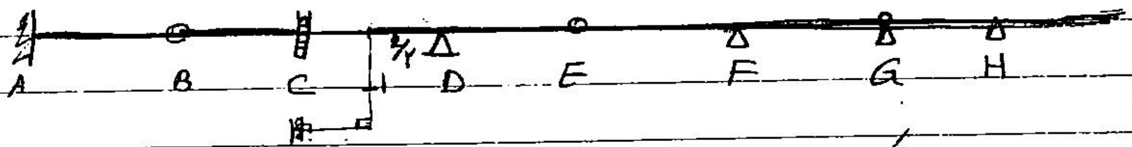


خط تأثیر G در فاصله $l/4$ ؟

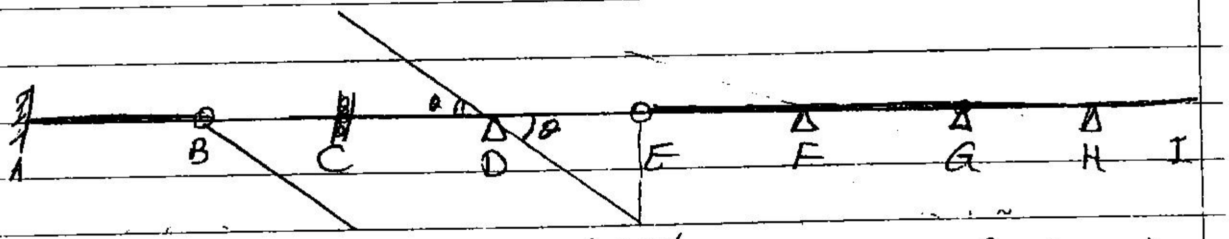
خط تاثیر A به فاصله $l/4$ ؟


+1
A
B
C
D
E
F
G
H
I

* سمت چپ پایین می رود

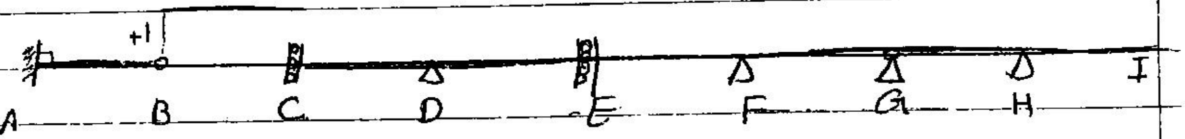

1/4
1
A
B
C
D
E
F
G
H

در F نمی تواند بشکند و در G هم باید سر جایش بماند

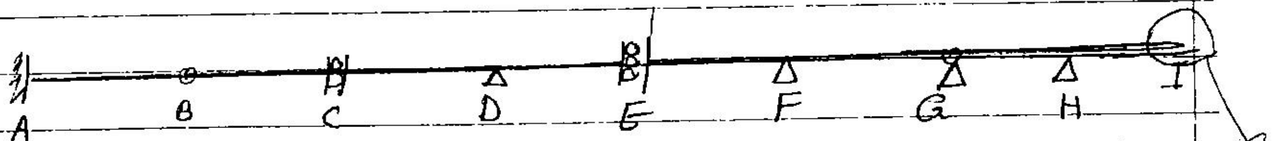

θ
θ
A
B
C
D
E
F
G
H
I

برش در E ؟

استثناء - در مفصل برشی می تواند برابر باشد، می تواند نباشد.


+1
A
B
C
D
E
F
G
H
I

برش در B ؟

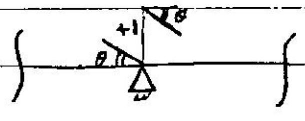


برش در E ؟ خط تاثیر در مفصل برشی صفر است.

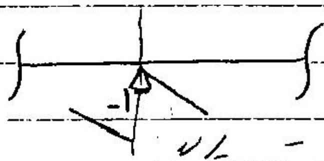
انجام صفر است

!خط تاثیر در مفصل برش و کنسول صفر است

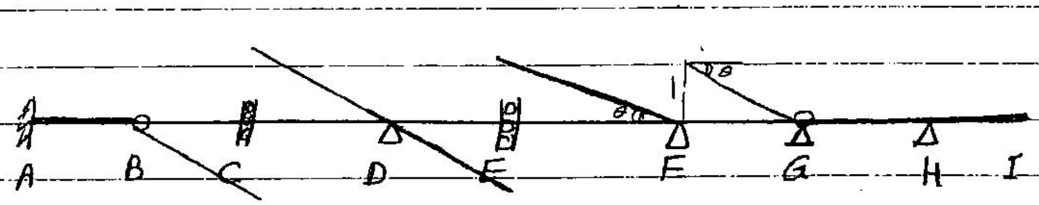
۳) خط تاثیر تیر، خمش، نیروی برشی، برش سمت چپ و راست تکیه گاه :



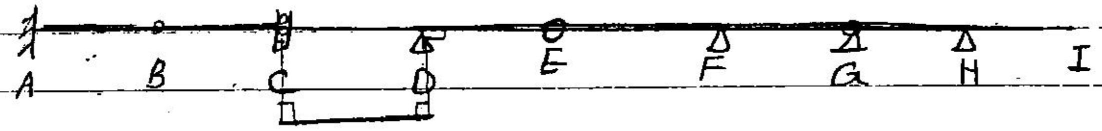
برش سمت راست تکیه گاه



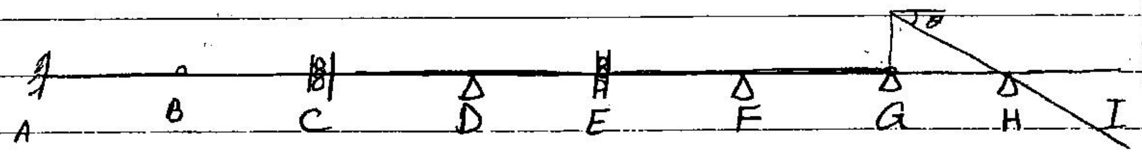
برش سمت چپ تکیه گاه


1
θ
θ
A
B
C
D
E
F
G
H
I

برش سمت راست F ؟



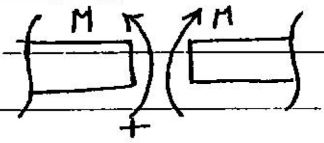
برش سمت چپ D ؟


θ
A
B
C
D
E
F
G
H
I

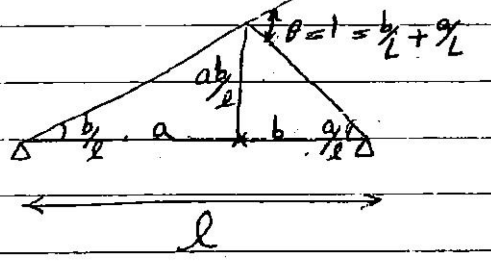
برش راست G ؟

شیب مفصل در دو طرف می تواند برابر باشد !

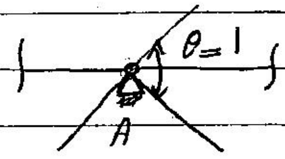
۴) خط تأثیر، تیر معین با لنگر خمشی (هم لنگر داخلی و هم لنگر تکیه‌گاه) :

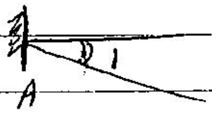


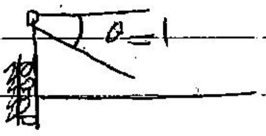
در نقطهٔ مورد نظر یک مفصل خمشی فرض قرار داده، مفصل را به اندازه $\frac{ab}{l}$ بالا می‌بریم، سپس طرفین مفصل را پایین آورده و مکانیزم تغییر شکل تیر را که خطی است رسم می‌کنیم. این مکانیزم همان خط تأثیر لنگر خمشی داخلی نقطهٔ مورد نظر می‌باشد

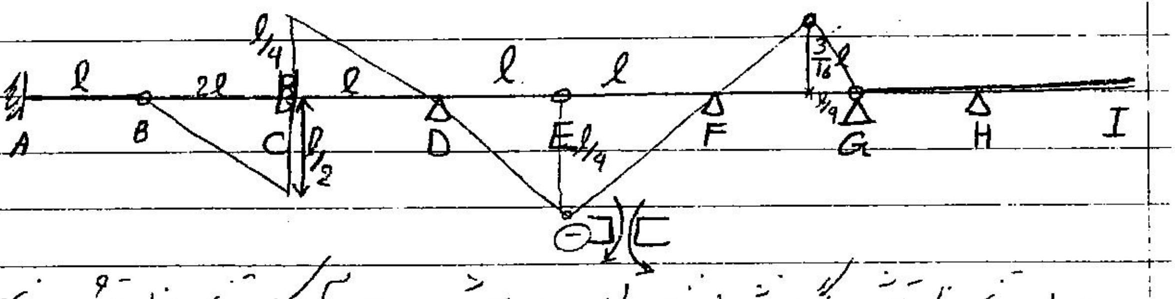

$\theta=1=\frac{b}{L}+\frac{a}{L}$
$\frac{ab}{l}$
$\frac{b}{l}$
a
b
$\frac{a}{l}$
l

بدیهی است که برای رسم خط تأثیر لنگر خمشی تکیه‌گاه (تکیه‌گاه غیرگیردار) نمی‌توانیم در آن تکیه‌گاه بالا برویم.

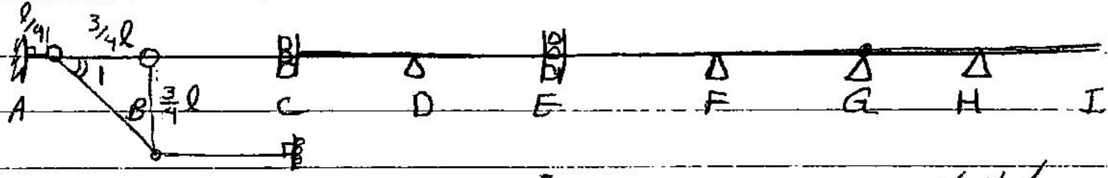






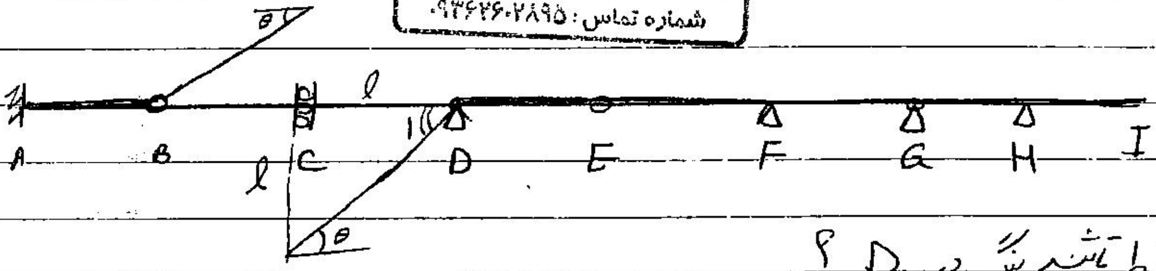

l
2l
l
l
l
$l/4$
$l/2$
$l/4$
$\frac{3}{16}l$
$l/4$
A
B
C
D
E
F
G
H
I
−

بعد ارتفاع خط تأثیر لنگر خمشی از نوع طول می‌باشد. حال آنکه ارتفاع خط تأثیر نیروی برشی بدون بعد است.



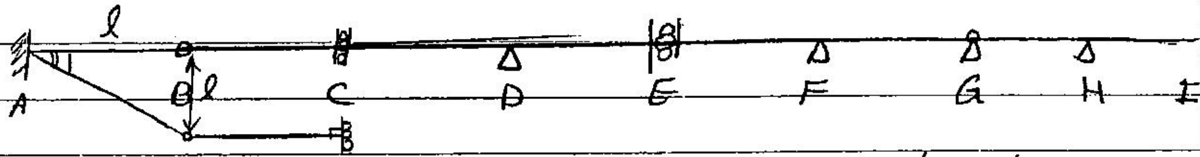
l/4
1
3/4 l
A
B
3/4 l
C
D
E
F
G
H
I

خط تاثیر لنگر L/4 از تکیه گاه گیردار؟



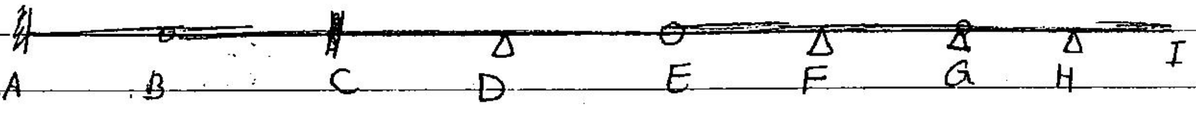
θ
l
1
A
B
l
C
D
E
F
G
H
I
θ

خط تاثیر لنگر در D ؟



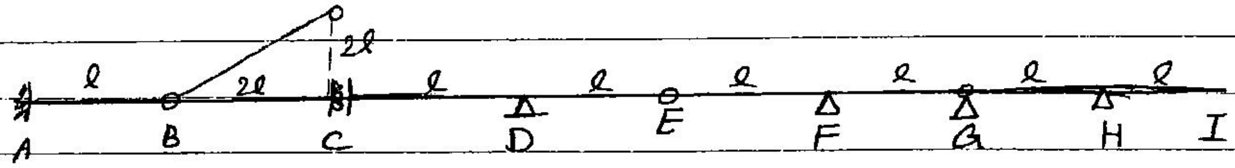
l
1
A
B
l
C
D
E
F
G
H
I

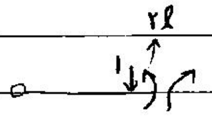
خط تاثیر لنگر تکیه گاه گیردار؟



خط تاثیر در E ؟ در مفصل خمشی، لنگر صفر است.

در اینجا در نقاط B و E و G و I ، خط تاثیر صفر است

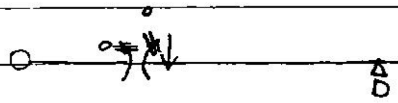

2l
l
2l
l
l
l
l
l
l
A
B
C
D
E
F
G
H
I



خط تاثیر لنگر در C ؟

شیب طرفین مفصل برشی در رسم خط تاثیر نیروی برشی برابر است.

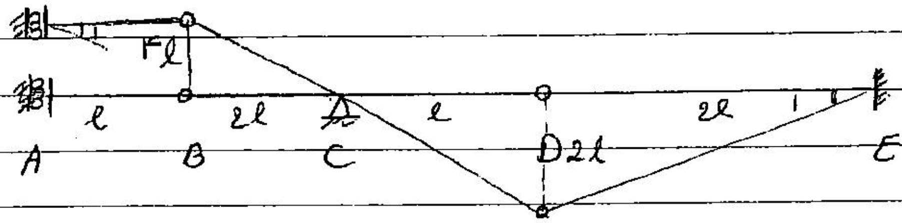
هم اختلاف δ داریم و هم اختلاف θ داریم.



$\Sigma M = 0 \Longrightarrow$

4th sec

مثال)

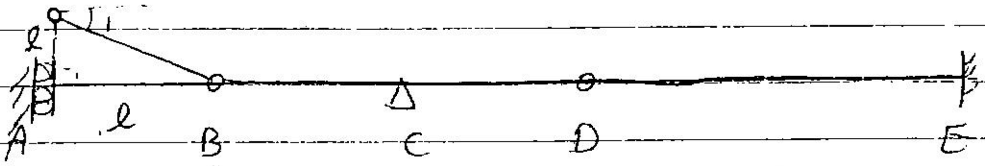

۱
۴l
l
2l
l
2l
۱
A
B
C
D2l
E

خط تاثیر M_{max} E = ؟

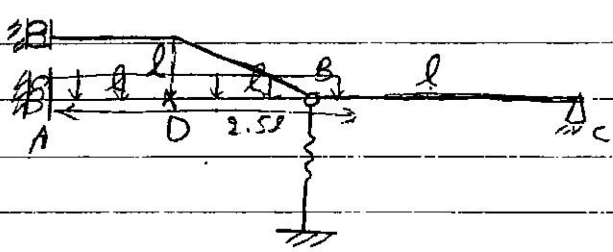
اگر بار ۳p حرکت کند M_{max} را بدست آورید.

$M_{max}\,E = 3p \times 4l = 12pl$

بیشترین ارتفاع



$M_{max}\,A = 3p \times l = 3pl$

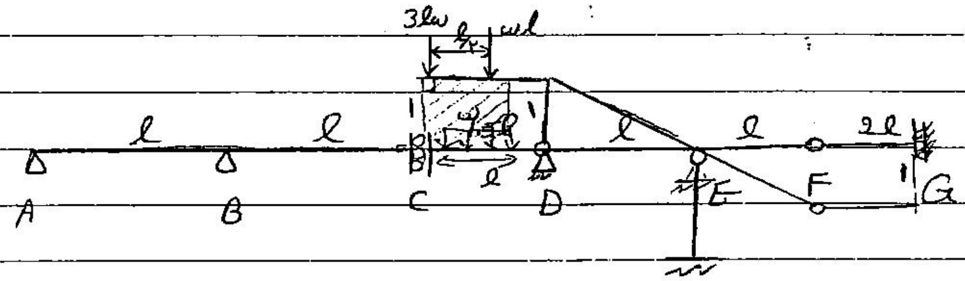

B
l
l
l
B
l
A
D
2.5l
C

۳) بار گسترده یکنواختی به شدت w و طول ۲l در روی تیر حرکت می‌کند. حداکثر [illegible] در
لنگر خمشی
D کدام است.

نیروی متمرکز در ارتفاع ضرب می‌شود و بار گسترده در مساحت ضرب می‌شود.

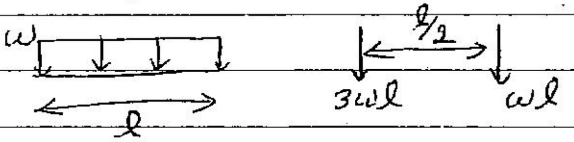
$$M_{max}D = w\left[\frac{2l+l}{2}\times l\right] = \frac{3}{2}wl^2$$

۴)


3wl
l/2
wl
l
l
1
1
l
l
l
2l
1
l
A
B
C
D
E
F
G

بار گسترده به شدت w حرکت می‌کند طول بار l است و به شکل زیر دو بار متمرکز هم داریم.

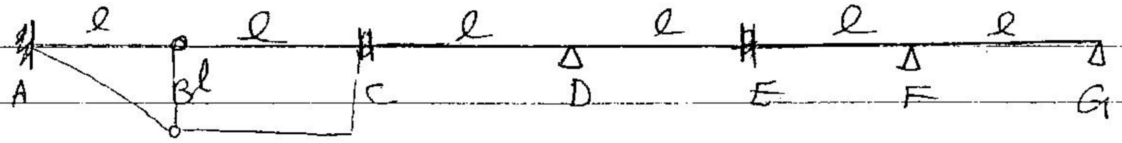
حداکثر عکس‌العمل تکیه‌گاه D ؟

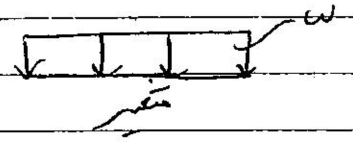


$$R_D^{max} = w\times\left[\underbrace{1\times l}_{\text{مساحت}}\right] + 3wl\times 1 + wl\times 1 = 5wl$$

بیشترین ارتفاع

۵)

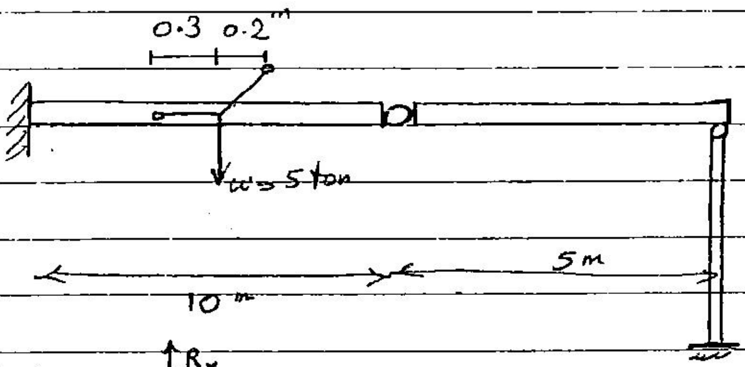

l
l
l
l
l
l
A
B
l
C
D
E
F
G

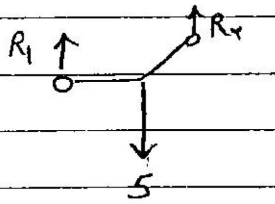


$$M_{max}A = \omega \times \left[\frac{2l+l}{2} \times l\right] = \frac{3}{2}\omega l^2$$

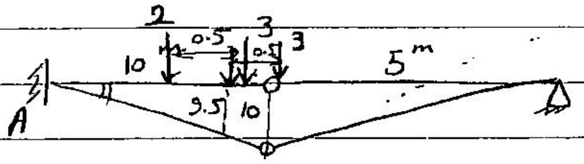
وقتی طول متغیر بود در جایی قرار می‌دهیم که max شود. در اینجا بر 2l باید قرار می‌دهم.

$? = M_{max}A$ (4


0.3
0.2 m
w = 5 ton
10 m
5 m



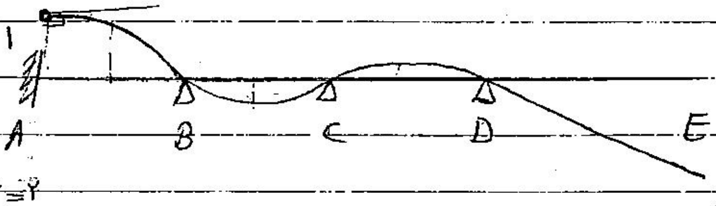
$$\left.\begin{aligned} R_1 + R_2 &= 5 \\ R_1 \times 0.3 &= R_2 \times 0.2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} R_1 &= 2\,t \\ R_2 &= 3\,t \end{aligned}$$


2
3
3
10
0.5
0.5
9.5
10
5 m
A

$$M_{max}A = 3 \times 10 + 2 \times 9.5 = 49\ t.m$$

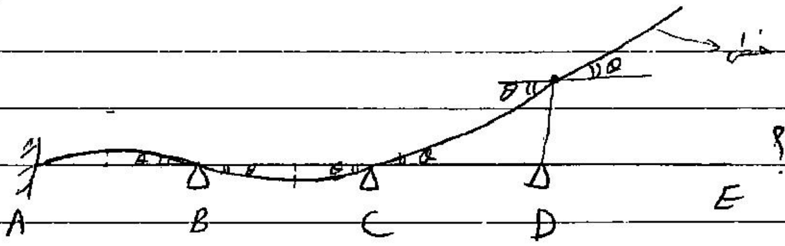
خط تاثیر تیر نامعین: < روش دقیق
روش تاثیر (اصل مولر برسلاو)

روش تاثیری: تمام قوانین ذکر شده در مورد تیرهای معین در اینجا نیز بکار می رود با این تفاوت که نمودار خط تاثیر در قسمت های نامعین تیر به صورت منحنی می باشد.



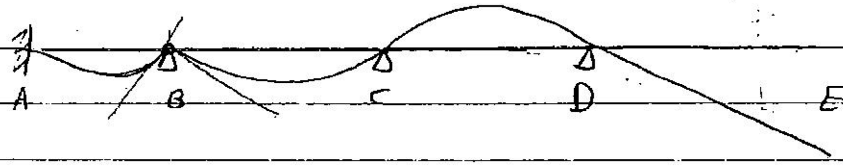
کنسول چون معین است خطی است

$n' = ۵ - ۳ = ۲$ نامعین

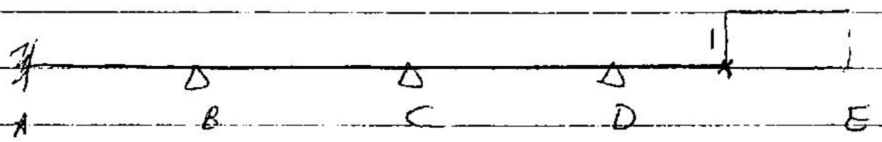


خط تاثیر عکس العمل D؟

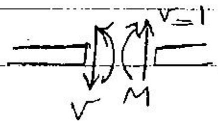
معادله های درجه ۳ هستند.



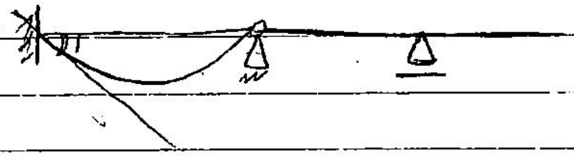
خط تاثیر برش B؟



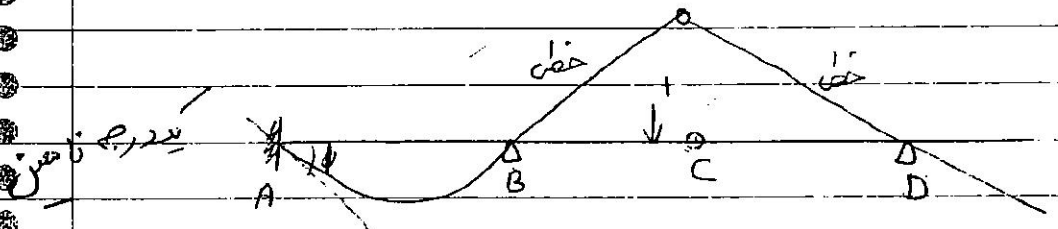
* چون خط تاثیر تکه معین را رسم کردیم باید اصول خطی رعایت بود.

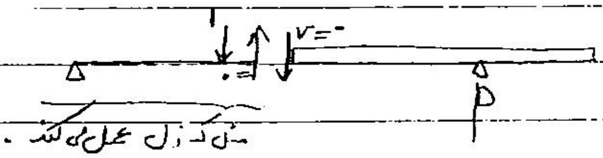


خط تأثیر تکیه گاه گیردار (لنگر)



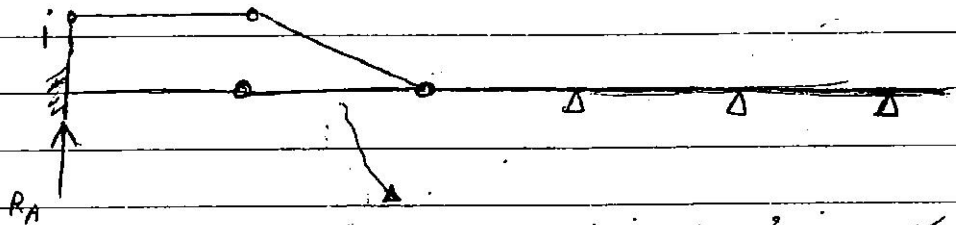
خط تأثیر تکیه گاه گیردار (لنگر A)؟


یک درجه نامعین
خطی
خطی
A
B
C
D

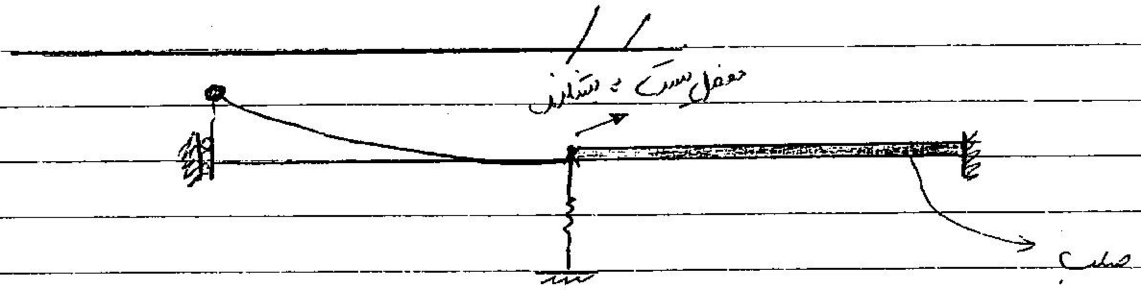

V=0
مثل کنسول عمل می‌کند.

$M_D = V = 0$

۲ درجه نامعین



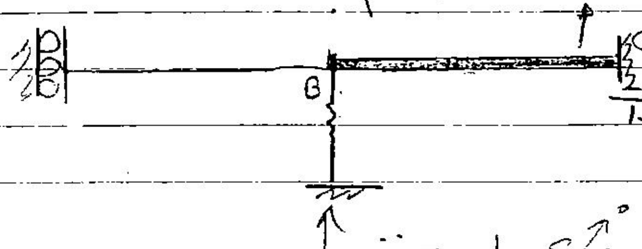
عضو دو سر مفصل، اگر بار نداشته باشد فقط نیروی محوری دارد


مفصل بسته و تشکیل
صلب

خط تأثیر لنگر تکیه گاه غلطکی برشی. سازه نامعین است.

خط تأثیر نیروی فنر؟

میله صلب است پس خم نمی‌شود و تکیه گاه گیردار است و ثابت می‌ماند



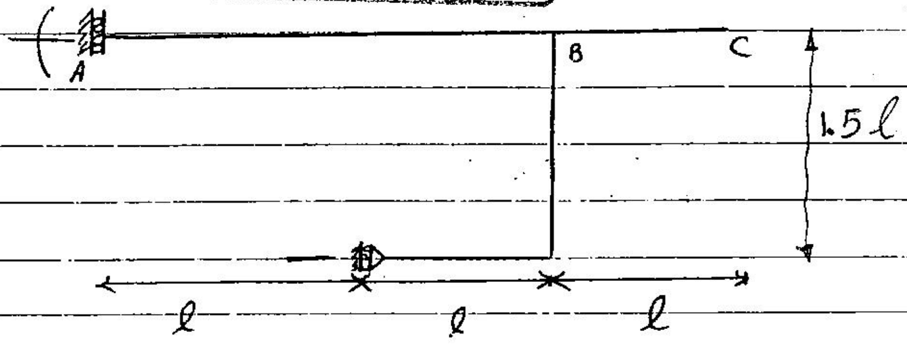
تکیه گاه B حرکت نمی‌کند چون BC صلب است

$F_{\text{فنر}} = k \cdot \delta_{\text{فنر}} = 0.0$

هر جا بار بگذاریم نیروی فنر صفر است.

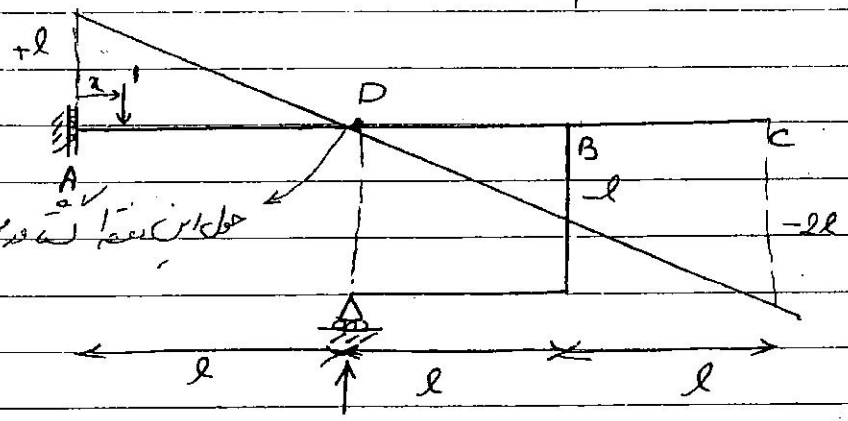
قاب معین :

خط تأثیر لنگر A ؟



این سازه ناپایدار است. چون بار P را قرار دهیم ΣFy برقرار نیست.

۲) بار روی ABC حرکت می‌کند


+l
x
1
D
A
B
-l
C
-2l
l
l
l

حول این نقطه لنگر می‌گیریم.

$M_A = 1 \times (l - x)$ $\longrightarrow$ $M_A = (l - x)$

$0 < x < 3l$

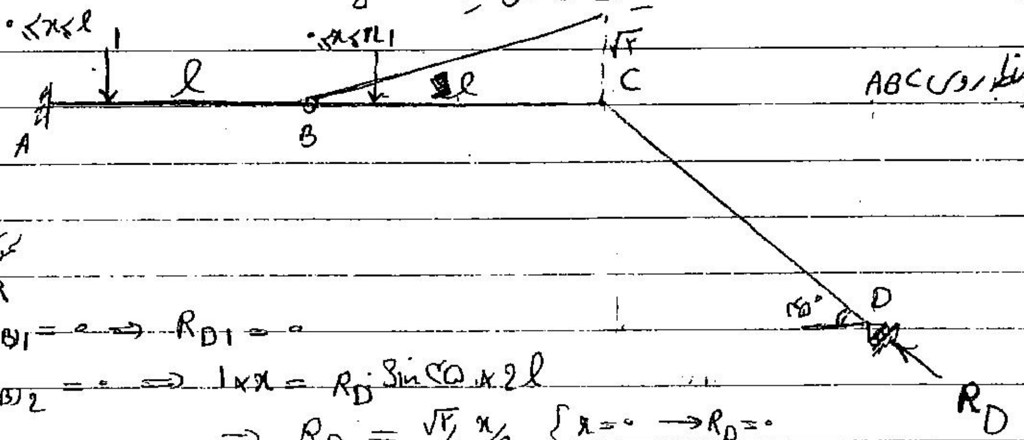
خطی چون توان x ①

---

۳) بار روی ABC حرکت می‌کند. خط تأثیر شکل اول تکیه‌گاه غلتکی

یعنی بار فقط روی ABC

B لولا

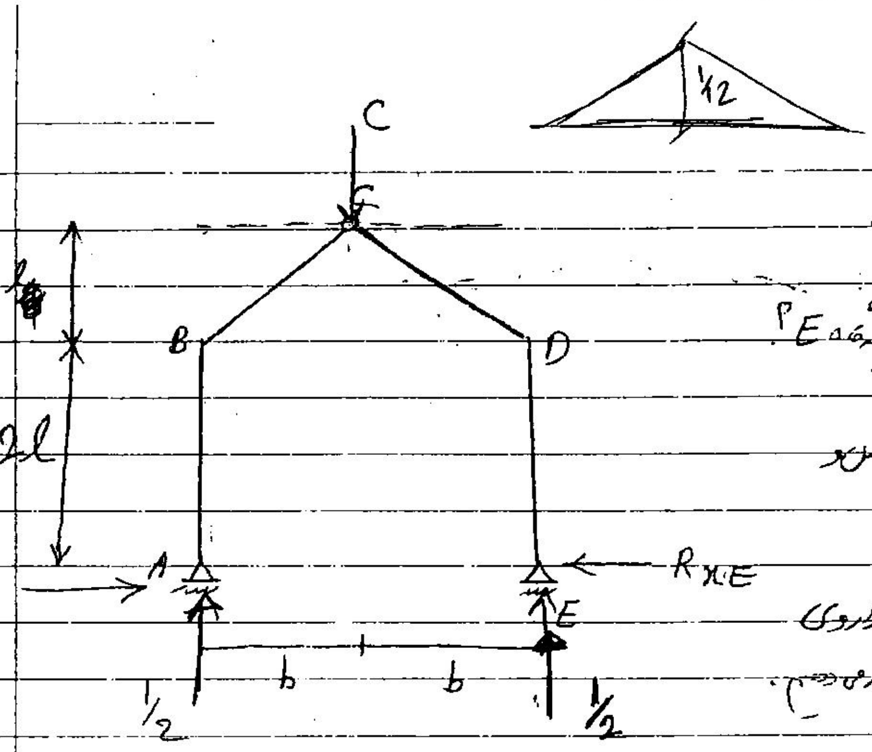

$0 \leq x \leq l$
1
$0 \leq x \leq 2l$
l
l
$\sqrt{2}$
A
B
C
D
45°
R_D

سمت راست B

$\underset{AB}{\sum M_{R(B)_1}} = 0 \Rightarrow R_{D1} = 0$

$\underset{BC}{\sum M_{R(B)_2}} = 0 \Rightarrow 1 \times x = R_D \sin 45 \times 2l$

$\Rightarrow R_D = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{x}{l}$ $\begin{cases} x = 0 \longrightarrow R_D = 0 \\ x = 2l \longrightarrow R_D = \sqrt{2} \end{cases}$



۴) بار روی خط اصلی حرکت می‌کند.

خط تأثیر عکس‌العمل افقی تکیه‌گاه E؟

سازه معین و پایدار است طبق معمول رو می‌کنیم.

چون همه گزینه‌ها یکسان است بار روی C قرار داده و R_{xE} را قرار می‌دهیم.

$$\sum M_{AC} = 0 \Rightarrow R_{xE} \times 3l = \frac{1}{2} \times \frac{b}{2}$$ ~~[illegible]~~

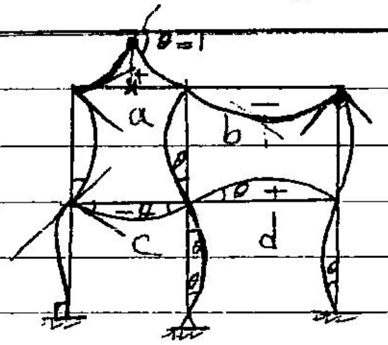
$$\Rightarrow R_{xE} = \frac{1}{12}$$

اگر به جای مفصل، جفت مفصل گردشی بگذاریم سازه ناپایدار می‌شود. (از روش اعمال بار) (ص ۲۴)

خط تأثیر سازه‌های معین، خطی است.

قاب نامعین:

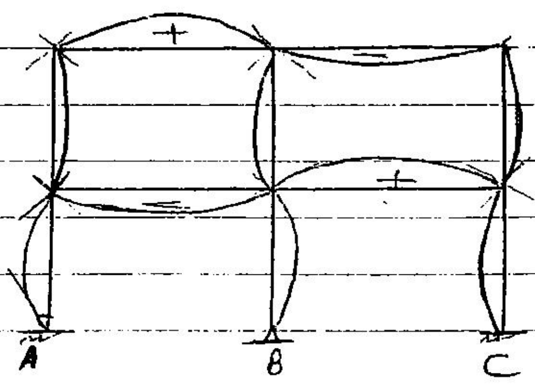
۱) خط تأثیر لنگر نقطه x را مشخص کنید.



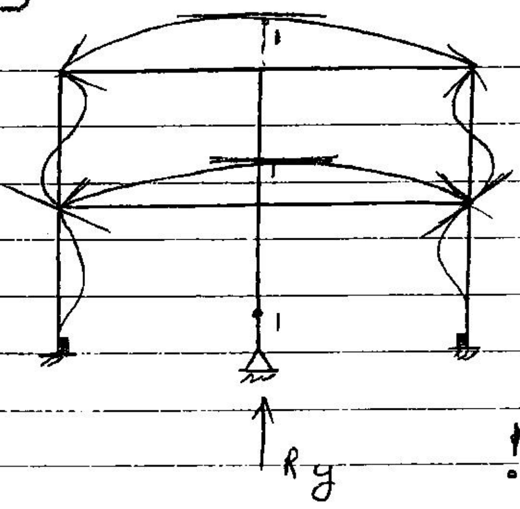
اگر بار گسترده را در a و d قرار دهیم، max مثبت و اگر در b و c قرار دهیم max منفی خواهد شد.

۲* خط تأثیر لنگر A را رسم کنید.

جهت ساعتگرد مثبت

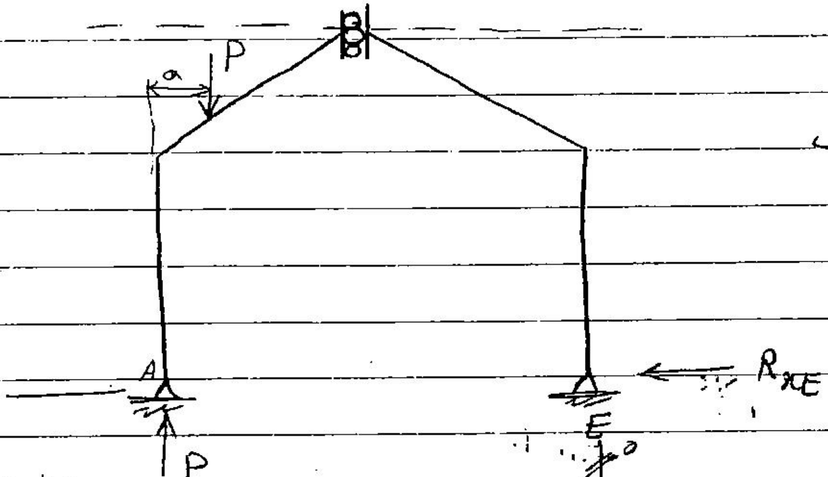


۳) R_y ؟



زاویه صلب را باید رعایت کرد!

۴)

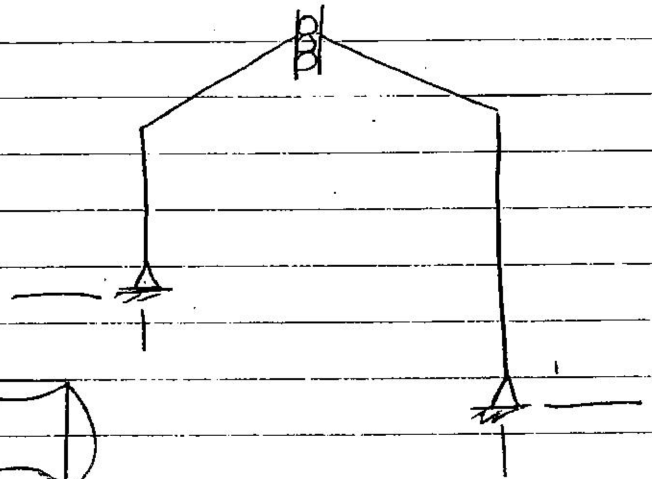


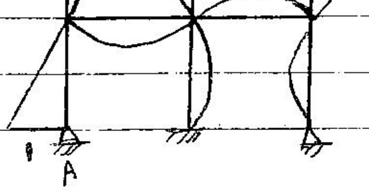
سازه ناپایدار است

پس خط تاثیر ندارد!

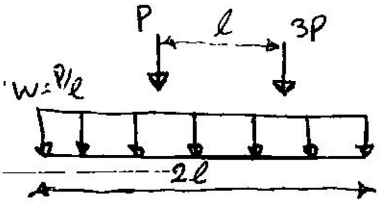
$\Sigma M_A = p.a \neq 0$

۵) تمرین





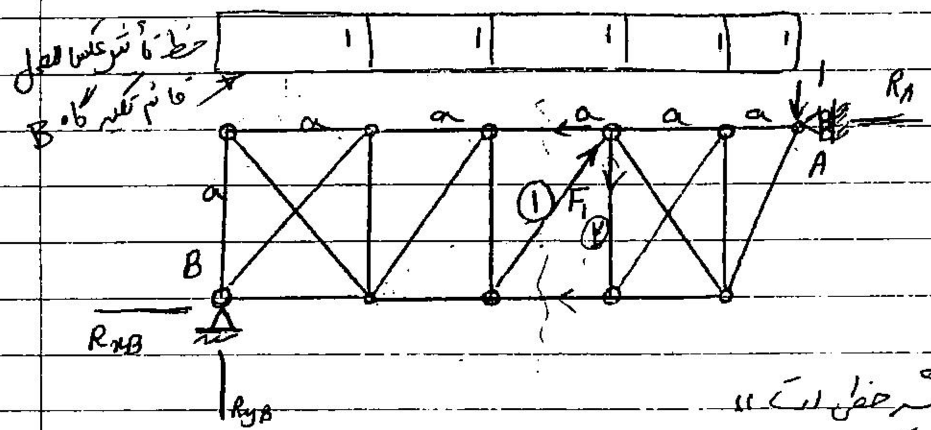
خط تاثیر عکس العمل افقی A ؟



$$R_{yB\,max} = 3P\times1 + P\times1 + w(2l\times1) = 6P$$

P/l

« خرپا »


خط تاثیر عکس العمل
قائم تکیه گاه B
1
1
1
1
1
a
a
a
a
a
a
A
B
R_A
① F_1 ②
R_xB
R_yB

۱- عکس العمل تکیه گاهی

۲- نیروی داخلی اعضا

« در خرپاها خط تاثیر خطی است »

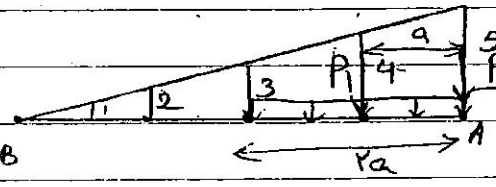
در این سوال، بار در تار فوقانی حرکت می کند.

بار را روی هر گره می گذاریم و ΣF_y محاسبه می شود.

* در این سوال خط تاثیر R_A را رسم کنید.

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow 1\times ۵a = R_a \times a \Rightarrow \boxed{R_a = ۵}$$

(۲


a
5
P_1
4
P_2 ω
3
2
1
B
A
۲a

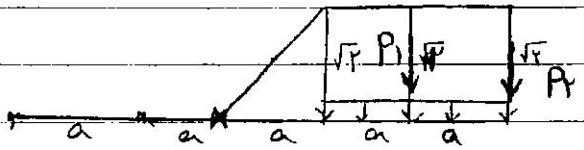
~~خط~~ نیروی واحد را در گره ها می گذاریم و ΣM حول B می گیریم.

* اگر یک بار گسترده به شدت ω و طول ۲a و دو بار متمرکز P_1 و P_2 $(P_2 > P_1)$ به فاصله ثابت a روی تیر حرکت کنند؟

$$R_A^{max} = \omega\left[\frac{3+5}{2}\times 2a\right] + 3P_2\times5 + P_1\times4$$

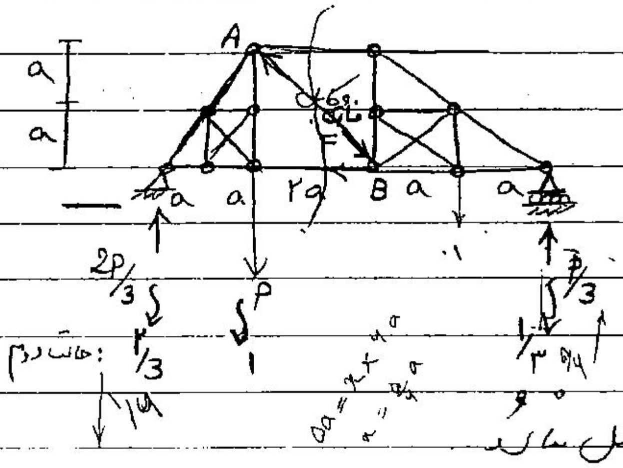
۳) خط تأثیر نیروی داخلی عضو ۱.

$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_1 \cos ۴۵ = 1 \Rightarrow F_1 = \sqrt{۲}$
راست


√۲
P1
√۲
√۲
P۲
a
a
a
a
a

برای قسمت × حول های راست $F_1 \cos ۴۵ = 0$ می شود و $F_1 = 0$ خواهد شد
چون سمت راست نیرویی نداریم

$F_{①}^{max} = \omega\left[\sqrt{۲} \times ۲a\right] + P_۲ \times \sqrt{۲} + P_1 \times \sqrt{۲}$


A
B
F
a
a
a
a
۲a
a
a
2P/3
P
P/3
۲/۳
۱
۱/۳
حالت دوم:

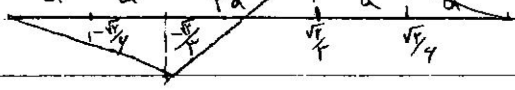
۴) خط تأثیر نیروی کابل را رسم کنید.

چون کابل فشار تحمل نمی کند پس ناپایدار است و خط تأثیر ندارد. $\sum F_y$ را در قسمت راست می نویسیم
نیروی کابل فشاری می شود.

سوال را در صورتی حل کنید که AB ، کابل نباشد

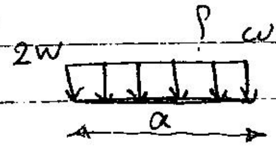
راست $\sum F_y = 0 \Rightarrow F \cos ۴۵ = \frac{1}{۳} \Rightarrow F = \frac{\sqrt{۲}}{۳}$ فشاری

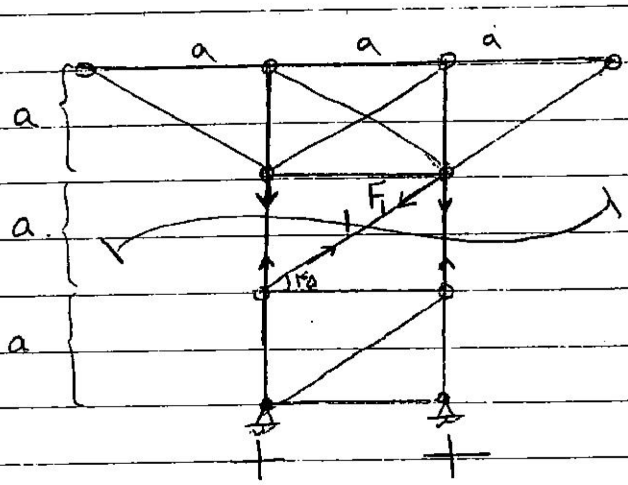
$\sum F_y = 0 \Rightarrow \underbrace{F \sin ۴۵}_{\sim} = \frac{1}{۴} \Rightarrow F = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$ فشاری


a
a
۲a
a
a
-√۲/۴
-√۲/۴
√۲/۴
√۲/۴

۵) نیروی حداکثر عضو ۱ را در صورت

وجود بار w ؟




a
a
a
a
a
a
F1
1
۴۵
1

خط تاثیر ۰ می‌شود.

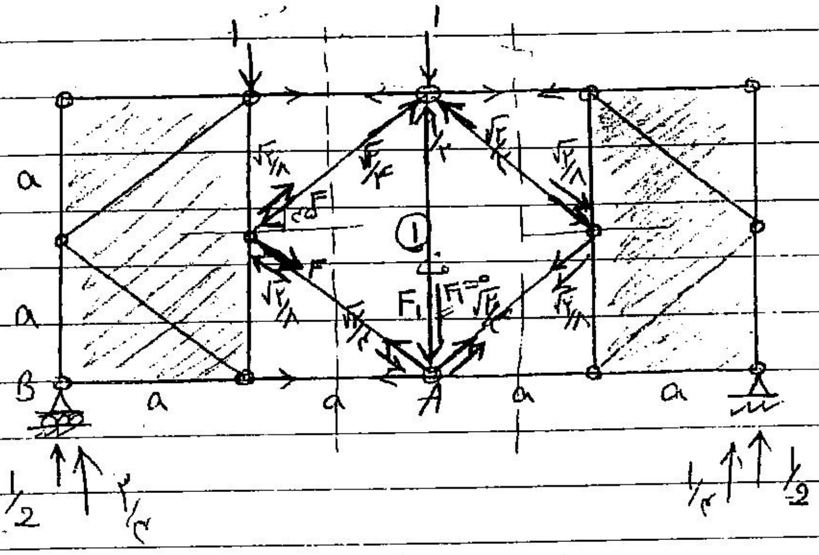
پل $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_1 \cos ۴۵ = 0 \Longrightarrow F_1 = 0$

---

۶)

بار واحد بر روی عرشه خرپای K شکل حرکت می‌کند

نیروی عضو ۱ ؟


1
1
a
a
a
a
a
a
√۲/۸
√۲/۴
۴۵
F
√۲/۴
√۲/۸
√۲/۸
√۲/۸
√۲/۴
√۲/۴
√۲/۸
1
①
F1
√۲/۴
B
A
1/2
۲/۳
۱/۳
1/2

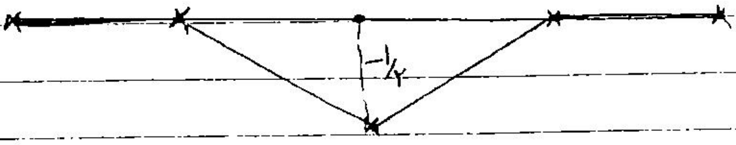
$\Sigma F_y = 0$

پس جهت F ها رو به پایین می‌شود

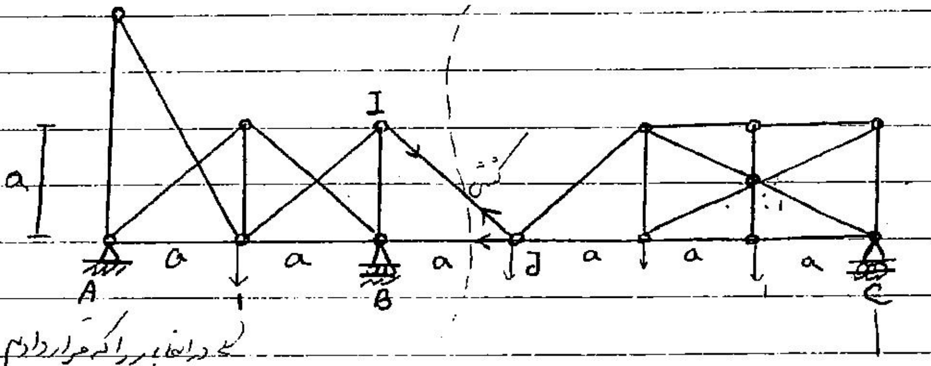
چپ $\Sigma F_y = 0 \longrightarrow ۲F\sin۴۵ = \frac{1}{۲} \Longrightarrow F = \sqrt{۲}/۴$

در گره A : $\Sigma F_y = 0 \Longrightarrow F_1 = ۲\times\left(\sqrt{۲}/۴ \, \cos ۴۵\right) = \frac{1}{۲}$

تکیه B



۷) خط تأثیر نیروی عضو IJ ؟

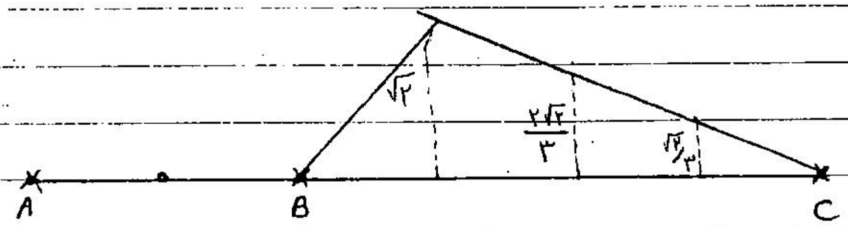

I
a
a
a
a
J
a
a
a
A
1
B
C
کشش

پایدار است.

! اول پایداری را چک می‌کنیم.

یک واحد بار را که قرار دادیم حول مفصل C گشتاور می‌گیریم

! وقتی بار روی تکیه‌گاه قرار بگیرد، تمام نیروهای دیگر صفر می‌شوند و فقط نیروی تکیه‌گاه ۱ است


$\sqrt{2}$
$\frac{2\sqrt{2}}{3}$
$\sqrt{2}/3$
A
B
C

$F\cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

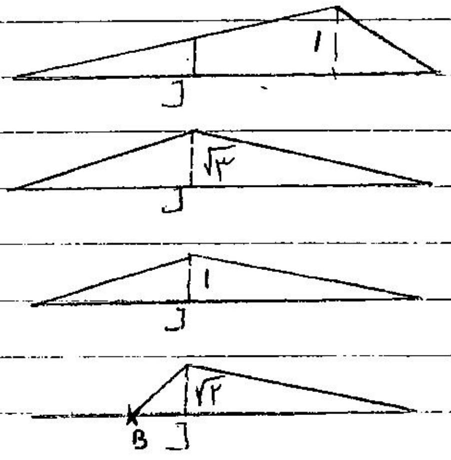
$F = \frac{2}{\sqrt{2}}$

$F\cos 45 \times 2 = 2 \times 1$

$F = \frac{2}{\sqrt{2}\cdot 2}$

برای $\sum M_C = 0 \Rightarrow (F_{IJ}\cdot \sin 45)3a = 1\times a \Rightarrow F_{IJ} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

روش استفاده از گزینه‌ها

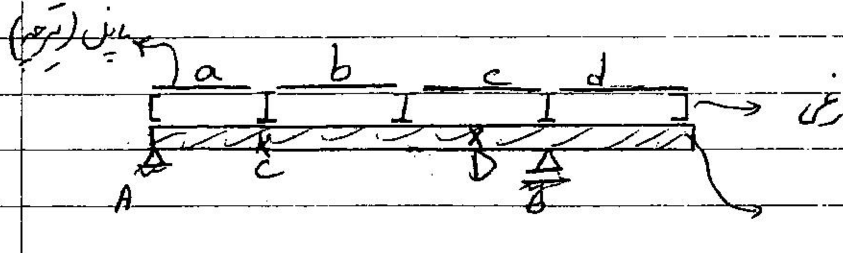

1
J
$\sqrt{3}$
J
1
J
$\sqrt{2}$
B
J
✓

چون بار در مفصل B قرار بگیرد تمام بار را خودش می‌گیرد پس در B خط تأثیر صفر است.

یا

J را چون متغیر است، مقطع می‌زنیم و مقدار آن را بدست می‌آوریم

خط تاثیر پانل ها:

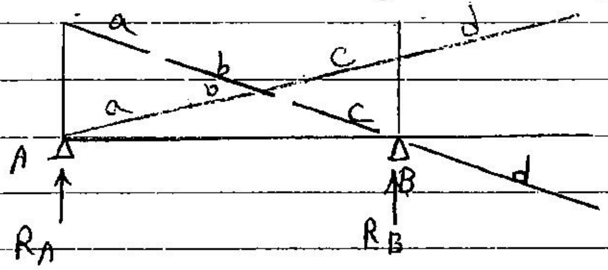

پانل (تیرچه)
a
b
c
d
تیرهای فرعی
تیر اصلی
A
C
D
B

۱) بار روی پانل حرکت می کند پس نمودار روی پانل رسم می شود.

۲) اتصال بین دو پانل تکیه گاه مفصلی است و لنگر صفر است.

۳) خط تاثیر پانل برای گسست های تیر اصلی معنی دارد

۴) بار از پانل به تیر اصلی از طریق تیر فرعی و به صورت نیروی متمرکز منتقل می شود.

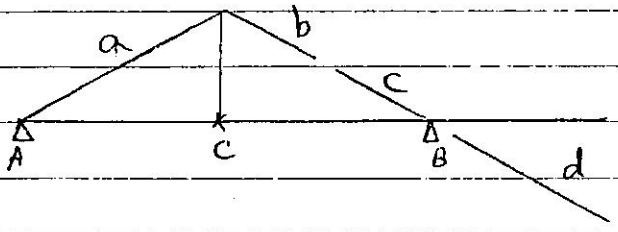

a
b
c
d
a
b
c
A
B
R_A
R_B
d

۱) خط تاثیر R_A را رسم کنید.

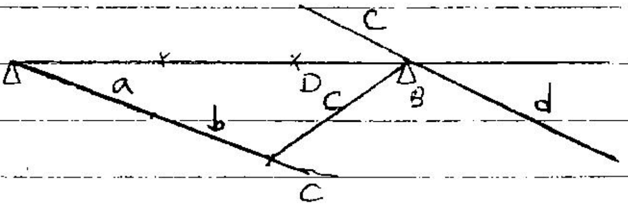
در مورد پانل های متعارف ابتدا

نمودار خط تاثیر R_A را رسم می کنیم بعد شکاف می دهیم

خط تاثیر لنگر C ؟

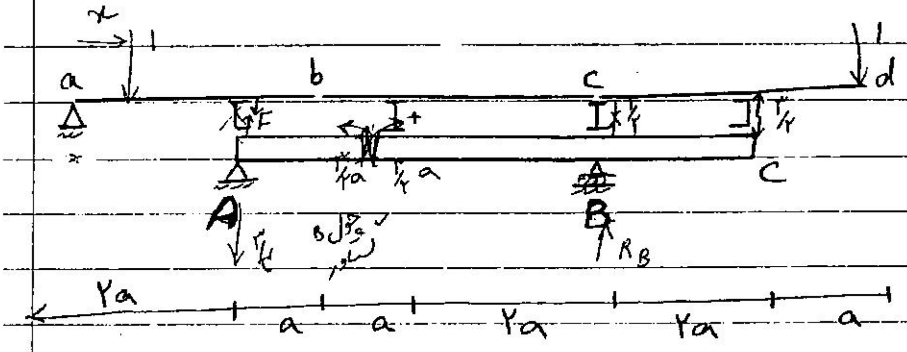


خط تاثیر برش D ؟

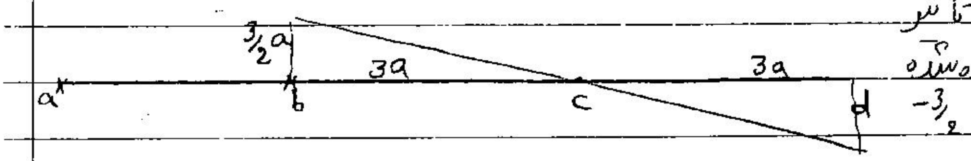


پل هرگز نباید شکسته و باید سروته پل را به هم وصل کنیم.

* پل نامتعارف:


x
1
1
a
b
c
d
1/4
1/4
1/4
1/4 a
1/4 a
A
B
C
3/4
R_B
محل برش
2a
a
a
2a
2a
a

بار را به مقطع A منتقل می کنیم
بار روی دهانه های a تا d حرکت می کند. نیروی ایجاد شده از این حرکت توسط تیرهای فرعی به تیر ABC می رسد. خط تأثیر لنگر خمشی در مقطع نشان داده شده از تیر اصلی کدام است.


3/2 a
3a
3a
a
b
c
d
-3/2 a

"فصل سوم" "سطح لنگر"

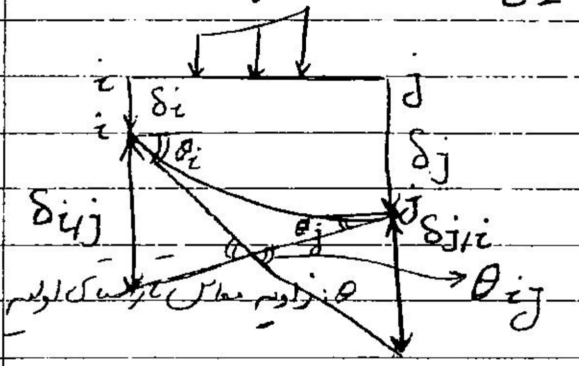
۱) نمودار تغییر شکل سازه ۲) روابط هندسی ۳) قوانین سطح لنگر

قوانین:

قانون اول: $\theta_{i/j} = \int_i^j \frac{M dx}{EI} = \frac{A_M}{EI} = \theta_{j/i}$

[EI: صلبیت خمشی]

مساحت زیر نمودار لنگر خمشی: $A_M = \int M dx$


i
j
δ_i
δ_j
θ_i
θ_j
$\delta_{i/j}$
$\delta_{j/i}$
θ_{ij}
θ: زاویه مماس تا مماس که اولیه

۲) قانون دوم:

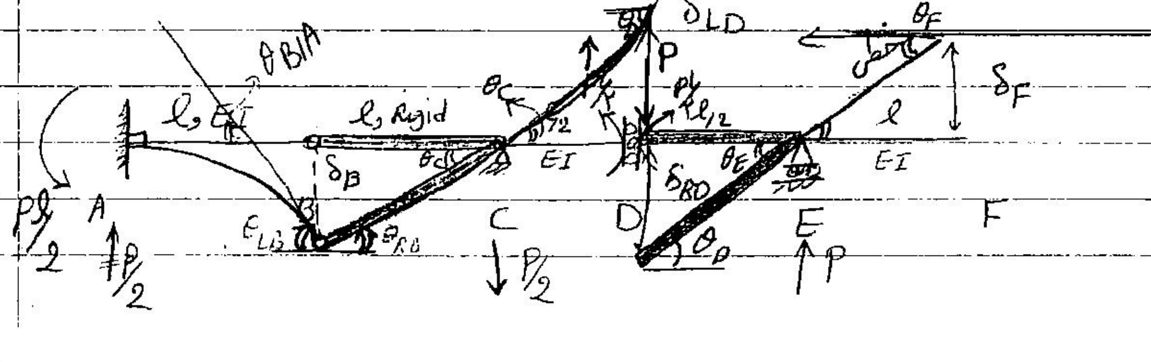
$$\delta_{i/j} = \int_i^j \frac{M x \, dx}{EI} = \frac{A_m}{EI} \cdot \bar{x} \neq \delta_{j/i}$$

* $\bar{x}$: فاصله مرکز سطح نمودار لنگر خمشی تا نقطه اول (i)

* $\delta_{i/j}$: فاصله نقطه اول (i) در نمودار تغییر شکل سازه تا مماس رسم شده از نقطه دوم (j)

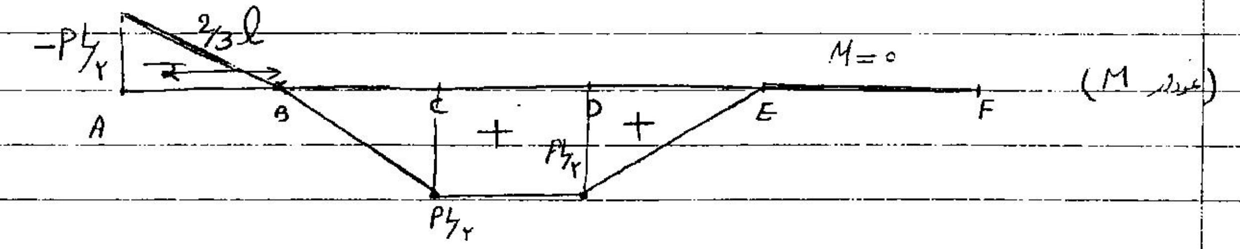
* روش سطح لنگر هم برای سازه های معین و هم نامعین بکار می رود.

مثال


$\theta_{B/A}$
l, EI
l, Rigid
θ_C
$l/2$
EI
δ_{LD}
P
Pl
Pl/2
θ_F
δ_F
l
EI
δ_B
θ_C
δ_{RD}
θ_E
θ_D
θ_{LD}
θ_{RD}
A
B
C
D
E
F
Pl/2
P/2
P/2
P

$\delta_B = ?$ ، $\Delta\theta_B = ?$

$n' = r' - (c'+2) = ۴ - (۲+۲) = ۰$ معین



نکته ۱: برای نمودار تغییر شکل داریم:

$$\begin{cases} M > 0 \Rightarrow \overset{\uparrow}{\smile} \\ M < 0 \Rightarrow \underset{\downarrow}{\frown} \\ M = 0 \Rightarrow \text{خطی} \end{cases}$$

⟸ میله صلب هم تغییر شکل خطی دارد

(۲۴b

$$\delta_B = \delta_{B/A} = \frac{A_M}{EI} \times \bar{x} = \frac{Pl/2 \times l}{2EI} \times \frac{2}{3}l = \frac{Pl^3}{6EI}$$

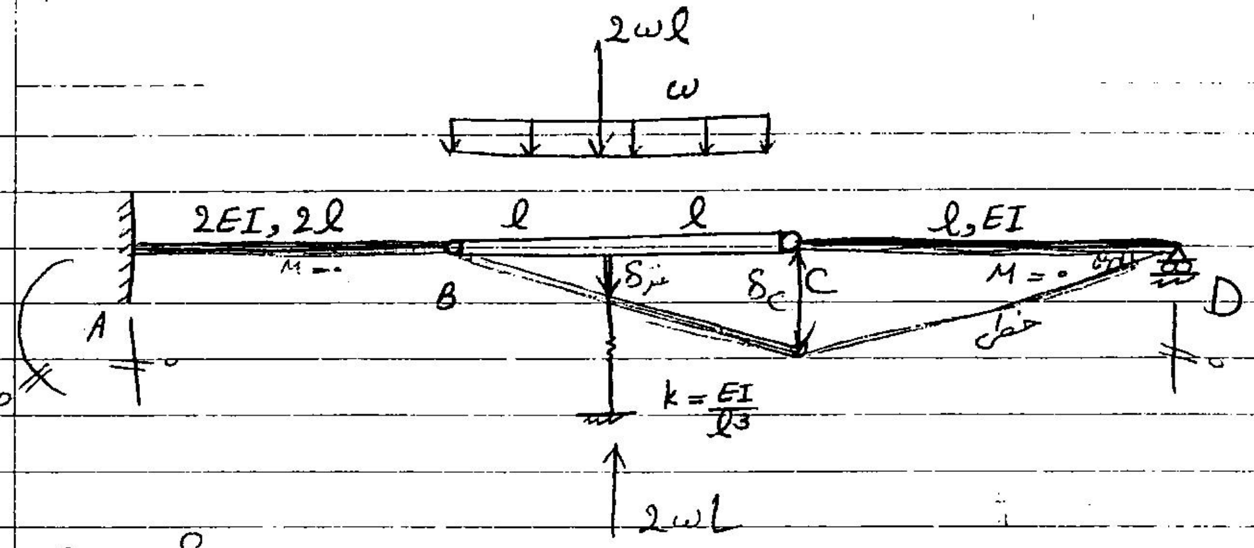
$$\begin{cases} \theta_{RB} = \theta_C = \dfrac{\delta_{B/A}}{l} = \dfrac{Pl^2}{6EI} \\ \theta_{LB} = \theta_{B/A} = \dfrac{Pl/2 \times l/2}{EI} = \dfrac{Pl^2}{4EI} \end{cases}$$

θ_{LB} θ_{RB}

$\theta_{RB} + \theta_{LB} = \Delta\theta_B$

$$\Delta\theta_B = \frac{5}{12}\frac{Pl^2}{EI}$$

$$\begin{cases} \delta_{RD} , \delta_{LD} , \delta_F = ? \\ \theta_F = \theta_E = \theta_D = ? \end{cases}$$


2ωl
ω
2EI, 2l
l
l
l, EI
A
B
C
D
M = 0
M = 0
δ فنر
δ_C
خطی
k = EI/l³
2ωL

$\theta_D = ?$

$$\delta_{\text{فنر}} = \frac{F}{k} = \frac{2\omega L}{EI/l^3} = \frac{2\omega L^3}{EI}$$

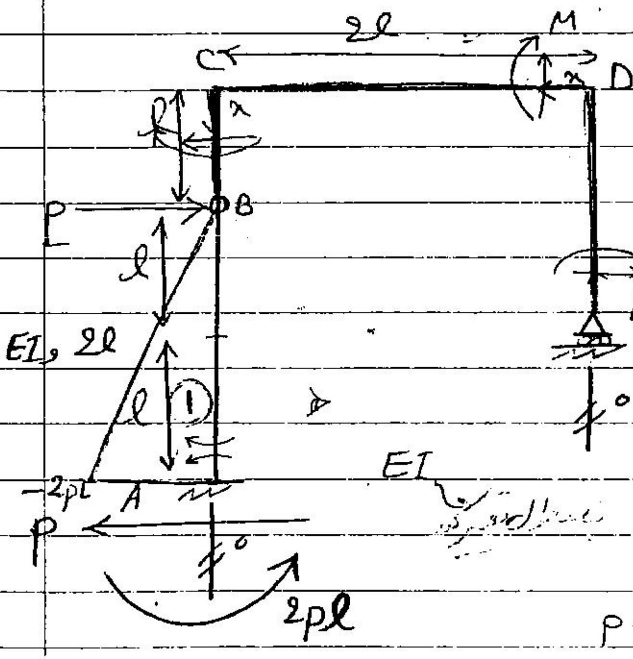
$$\theta_D = \frac{\delta_c}{L} = \frac{4\omega l^3}{EI}$$

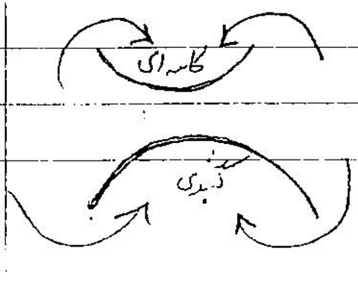
$\delta_c \leftarrow 2\delta_{\text{فنر}}$

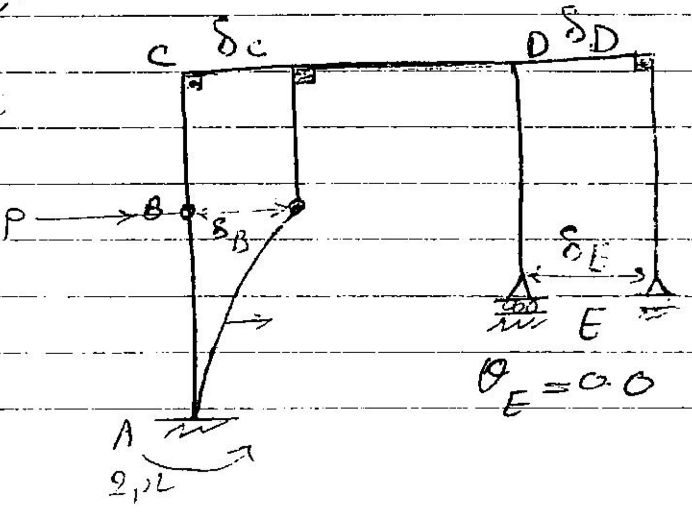
مثال) تغییر مکان و دوران E ؟

وقتی EA داریم یعنی متعاقباً تغییر طول محوری داریم.

نمودار تغییر


2l
M
C
D
x
l
P
B
l
EI, 2l
l
①
M = 0
E
-2pl
A
EI
P
2pl


کاسه‌ای
گنبدی

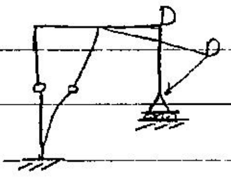

C
δ_C
D
δ_D
P
B
δ_B
δ_E
E
A
2pL

$\theta_E = 0.0$

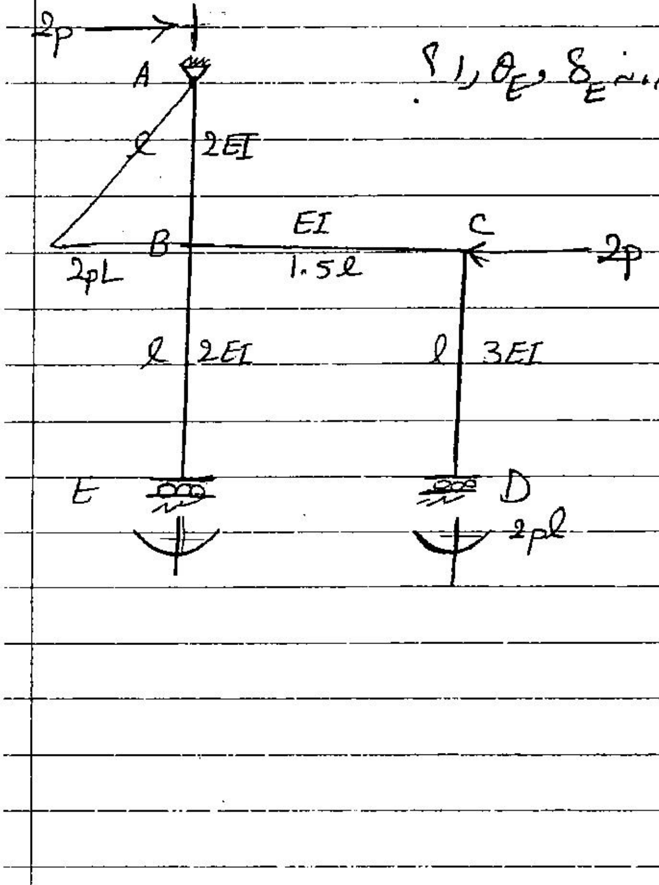
$$\delta_E = \delta_C = \delta_D = \delta_B = \delta_{B/A} = \frac{A_M}{EI}\cdot\bar{x} = \frac{2pl^2}{EI}\times\left(\frac{2}{3}\times 2l\right)$$

$$= \frac{8}{3}\frac{pl^3}{EI}$$

وقتی EA نداده یعنی تغییر طول محوری صفر است و B بالا نمی‌رود.



⇐ غ ⇐ چون دچار تغییر طول می‌شود


2p
A
l
2EI
B
2pL
EI
1.5l
C
2p
l
2EI
l
3EI
E
D
2pl

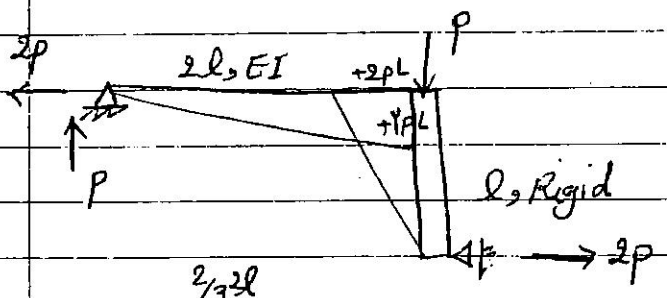
تمرین) باید خود لنگر را بکشیم چون $\theta_{A/B}$ را خواسته، نه δ_E و θ_E را؟

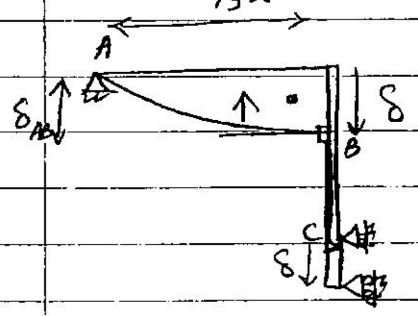
$$\theta_{A/B} = ?$$

$$= \frac{A_M}{EI} = \frac{2pl\times l/2}{2EI}$$

$$\theta_{AB} = \frac{pl^2}{2EI}$$

مثال) تغییر مکان تکیه‌گاه غلطکی را محاسبه کنید.

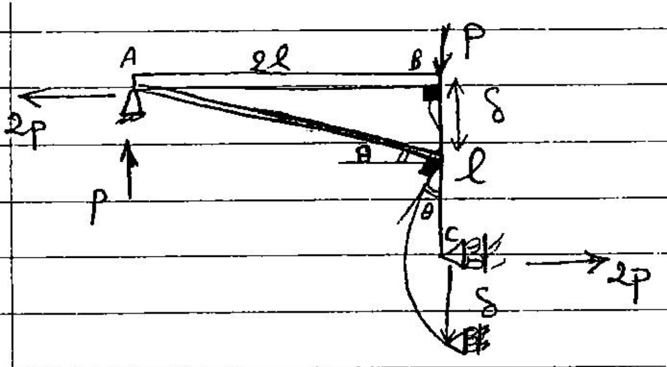

2p
2l , EI
+2pL
P
+2pL
P
l , Rigid
2p


2/3 2l
A
δ_{AB}
δ
B
C
δ

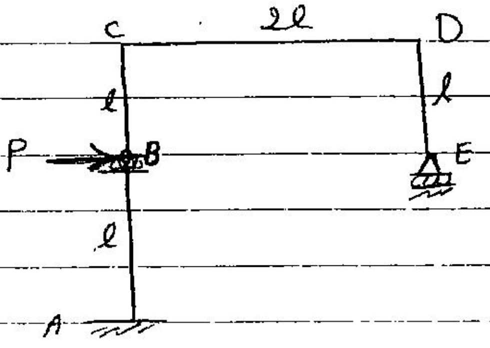
$$\delta = \delta_{A/B} \overset{\text{قضیه دوم}}{=} \frac{AM}{EI}\cdot\bar{x} = \frac{(2pL)(2L)/2}{EI}\times\frac{2}{3}\times 2L$$

$$= \frac{8}{3}pL^{3}\cancel{6}/EI$$

تمرین) $\delta_{A/B}$ را در این تمرین محاسبه کنید.

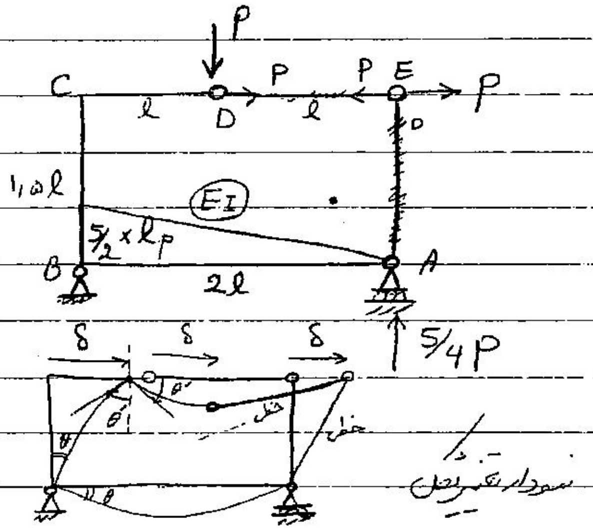

A
2l
B
P
2p
δ
θ
l
P
θ
C
2p
δ

مثال) تغییر مکان نقطه E و θ نقطه E را
بدست آورید.


C
2l
D
l
l
P
B
E
l
A

* سازه ناپایدار است و تغییر شکل ندارد.

مثال) $\delta_{B/A}$ را محاسبه کنید.

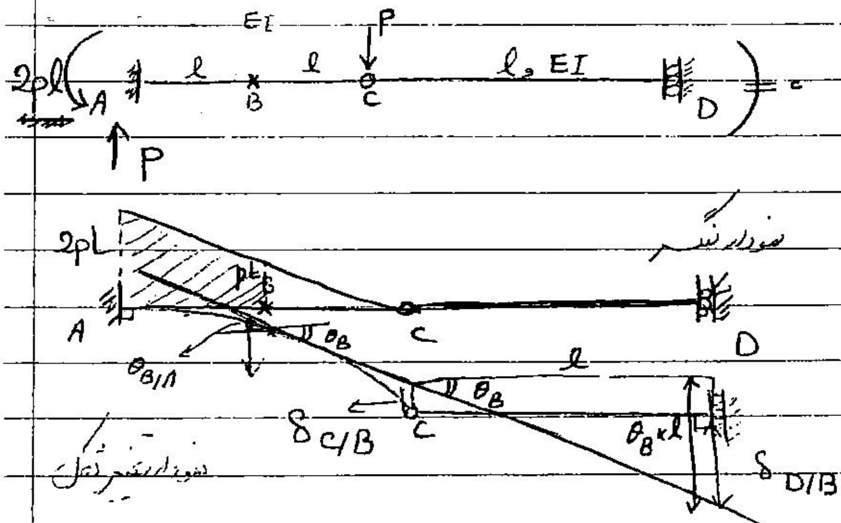

P
C
D
P
P
E
P
l
l
1,5l
EI
5/2 × lP
B
2l
A
5/4P
δ
δ
δ
θ
θ'
θ'
l
خط
خط
نمودار تغییر شکل

$$\delta_{B/A} = \frac{A_M}{EI}\cdot\bar{x}$$

$$\frac{5/2\,Pl \times 2l/2}{EI} \times \left(\frac{1}{3}\,2l\right)$$

$$= \frac{5}{3}\,\frac{Pl^3}{EI}$$

مثال) $\delta_{D/B}$ را محاسبه کنید.

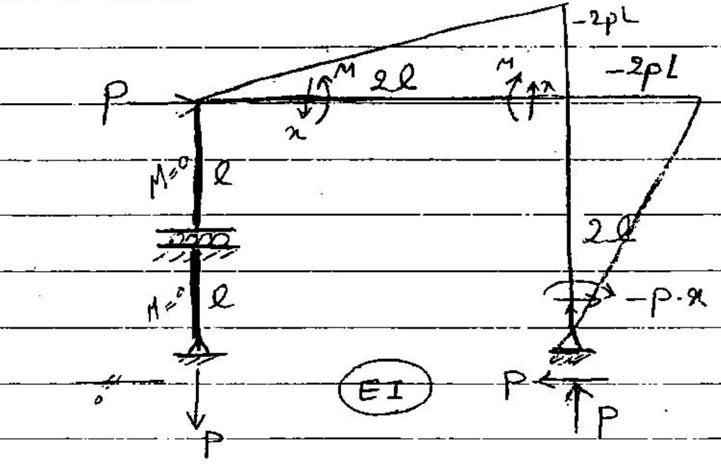

2pl
A
P
EI
l
B
l
P
C
l
EI
D
=
2pL
pl
B
A
C
D
θ_B
$\theta_{B/A}$
$\delta_{C/B}$
θ_B
l
$\theta_B \times l$
$\delta_{D/B}$
نمودار شکسته
نمودار تغییر شکل

چون از D تا B مفصل وجود دارد و نمودار شکسته است و پیوسته نیست باید نمودار خط کش را بکشیم.

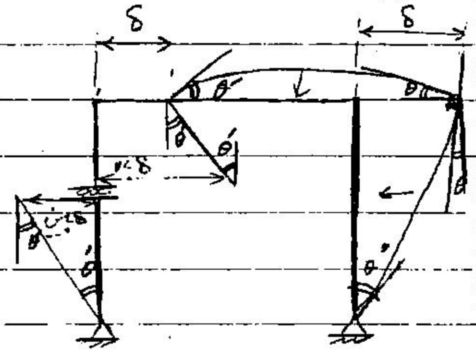
اگر مفصل وجود نداشته باشد و پیوسته باشد می توان از نمودار شکل تغییر مکان را بدست آورد.

$$\delta_{D/B} = \underset{\theta_{B/A}}{\theta_B} \times l - \delta_{C/B} = \frac{(2pl+pl)\,l/2}{EI} \times l - \frac{pl \times l/2}{EI} \times \frac{2}{3}l$$

$$= \frac{7}{6}\left(\frac{Pl^3}{EI}\right)$$


-2pL
P
M
2l
x
-2pL
M=0
l
2l
M=0
l
-P.x
EI
P
P
P

مثال)



۱) اگر اتصال صلب و جوش باشد   ۲) دو تا عضو فقط به هم رسیده باشند.

۳) در گره لنگر متمرکز وجود نداشته باشد.

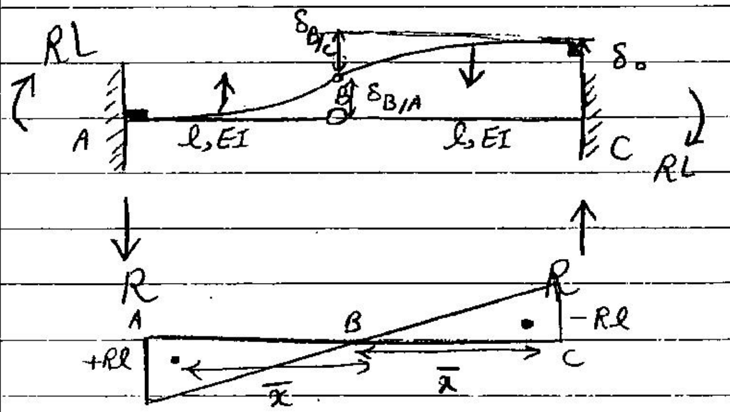
اگر سه شرط بالا برقرار باشد آنگاه گوشه‌ها باهم برابر است.

θ و θ' و θ'' و δ را بدست آورید.

مثال) ۱ درجه نامعین $n'=1$

δ_0 خطای ساخت داریم عکس‌العمل‌ها

تکیه‌گاهی را بدست آورید.

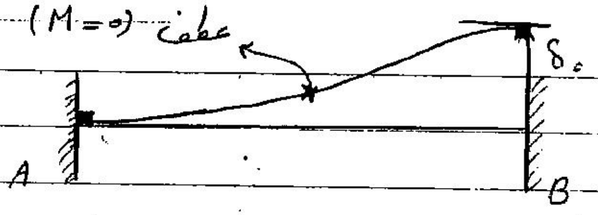

RL
δB/C
δ0
δB/A
A
l, EI
l, EI
C
RL
R
R
A
B
-Rl
+Rl
C
x̄
x̄

$$\delta_{B/A}+\delta_{B/C}=\delta_0 \Rightarrow \frac{Rl\times l/2}{EI}\times\frac{2}{3}l+\frac{Rl\times l/2}{EI}\times\frac{2}{3}l$$

$$\Rightarrow R=1.5\,\frac{EI\,\delta_0}{l^3}$$

۳- مزدوج

حل ۲


عطف (M=0)
δ_0
A
B

تمرین) ۲ درجه نامعین.

در نقطه عطف، لنگر صفر است یعنی

بار هم در وسط تیر، لنگر صفر است و جواب مثل مثال قبل است

« تیر مزدوج »

(EI)

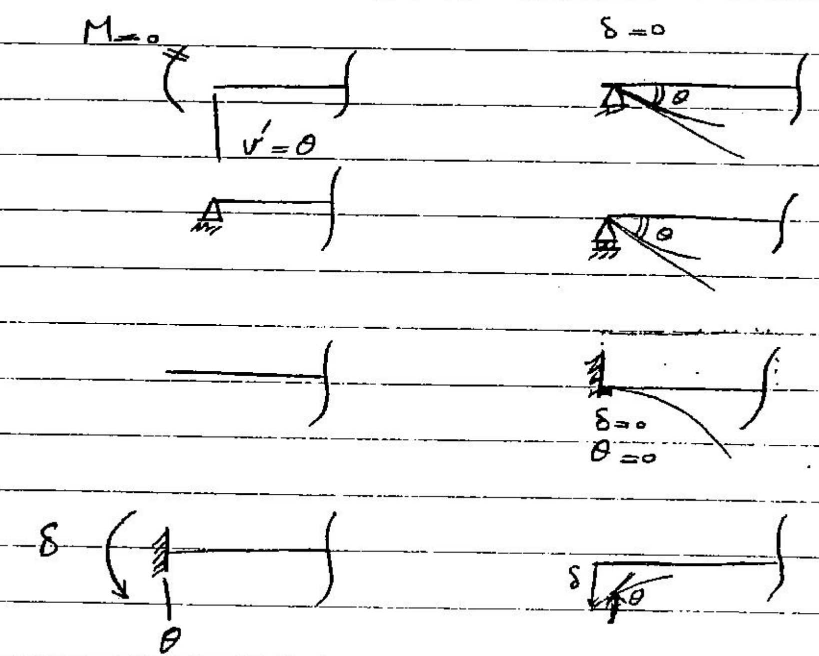
هم معین و هم نامعین

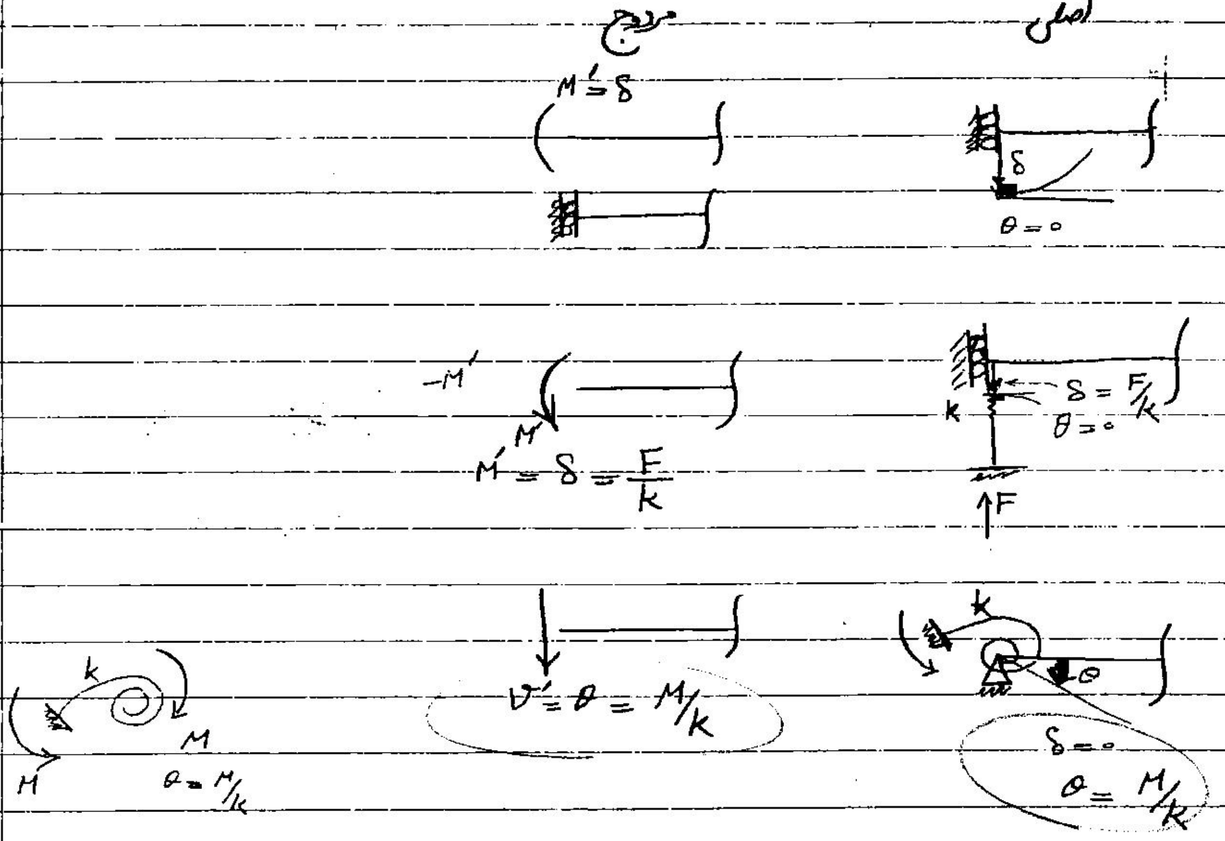
۱) کیفی
۲) کمی

$$\begin{cases} \delta_{\text{اصلی}} = M'_{\text{مزدوج}} \\ \theta_{\text{اصلی}} = V'_{\text{مزدوج}} \end{cases}$$

اصلی $< \begin{matrix}\delta \\ \theta\end{matrix}$

مزدوج


$\delta=0$
θ
$M=0$
$V'=\theta$
θ
$\delta=0$
$\theta=0$
δ
θ
δ
θ

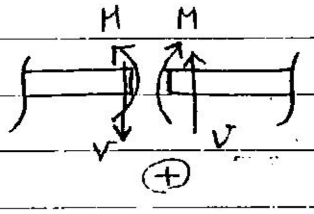

مزدوج
اصلی
M' = δ
δ
θ = 0
−M'
M'
M' = δ = F/k
δ = F/k
θ = 0
k
F
k
M
M
θ = M/k
k
V' = θ = M/k
δ = 0
θ = M/k

* قرارداد علامت در تیر مزدوج :

(۱) علامت δ : رو به بالا مثبت و رو به پایین منفی

(۲) علامت θ : در جهت مثلثاتی مثبت و خلاف جهت منفی

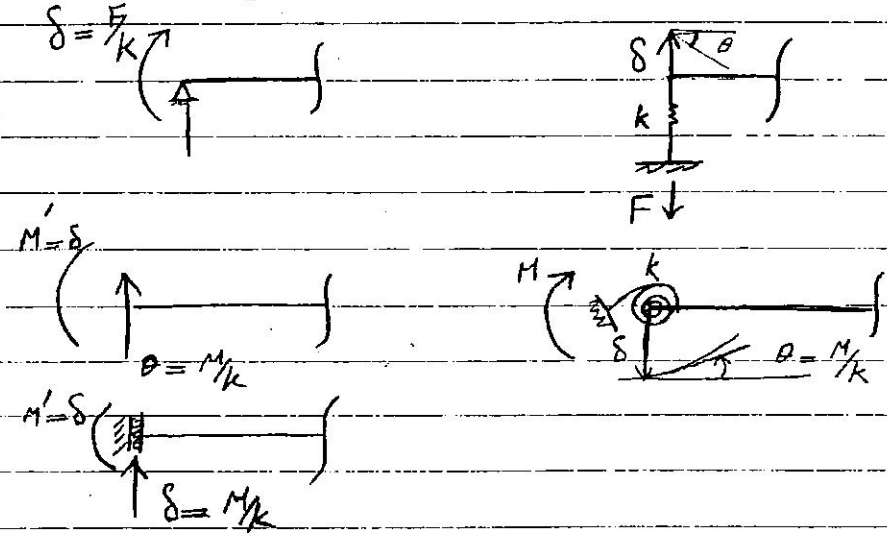
(۳) علامت نیروها : همان قرارداد علامت در استاتیک.

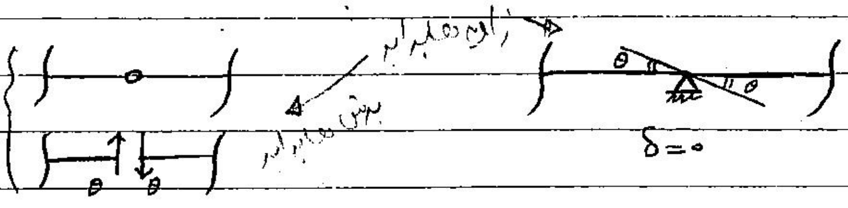


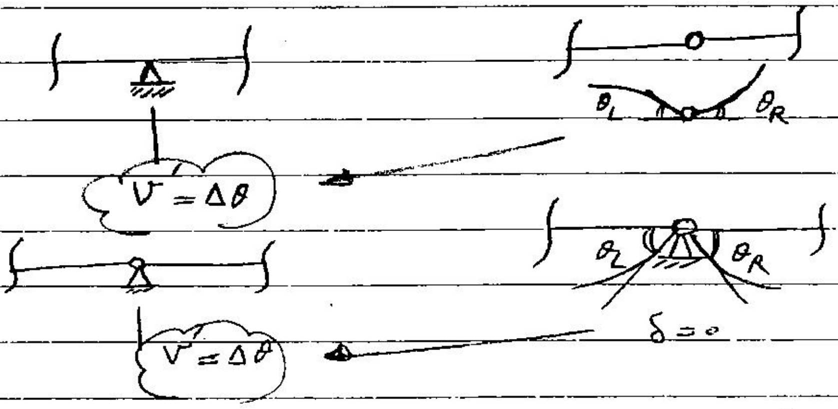
V ساعتگرد بچرخاند مثبت است

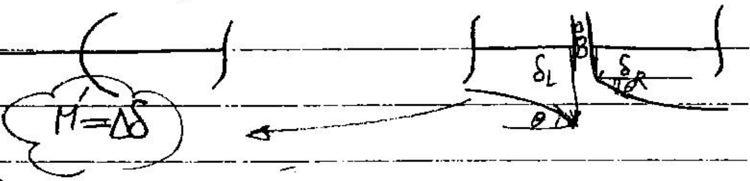
M تار بالا تحت فشار است

اصلی　　　　مزدوج


$\delta = F/K$
δ
θ
k
F
$M' = \delta$
$\theta = M/k$
M
k
δ
$\theta = M/k$
L
$M' = \delta$
$\delta = M/k$

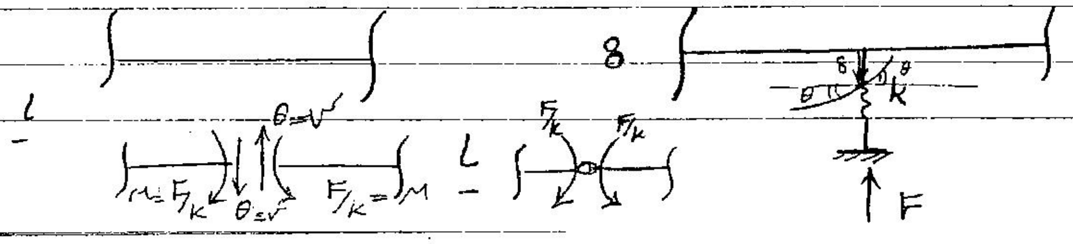

زاویه ها برابر
برش ها برابر
θ
θ
θ
θ
$\delta = 0$


θ_L
θ_R
$V' = \Delta\theta$
θ_L
θ_R
$\delta = 0$
$V' = \Delta\theta$


δ_L
δ_R
θ
θ
$M' = \Delta\delta$

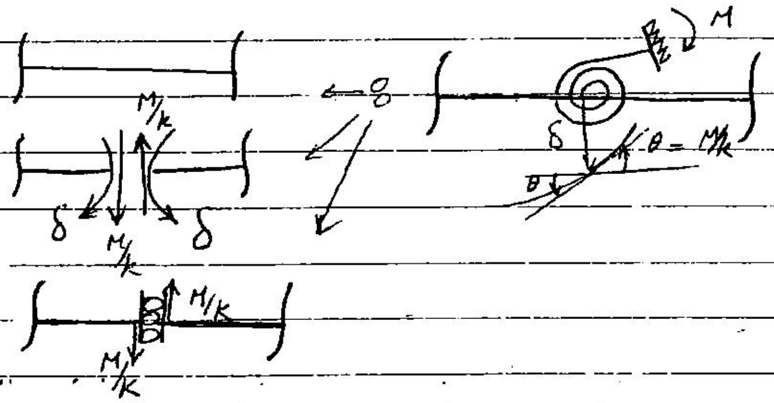
در وسط تیر [illegible]
اختلاف ها برابر بود

به اندازه ی اختلاف
δ چپ و راست ممان است M !

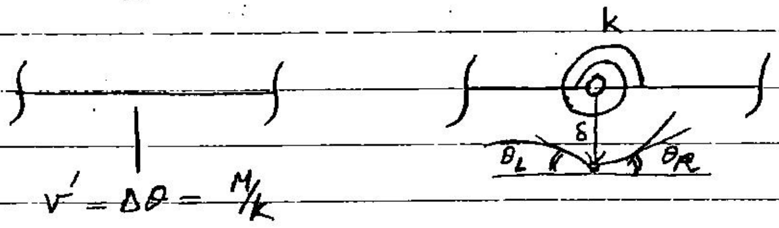

δ
θ
θ
k
F
L
$\theta = V'$
$M = F/K$
$\theta = V'$
$F/K = M$
L
F/k
F/k

اصلی مزدوج

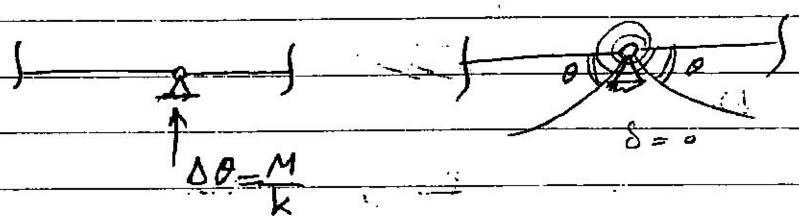
اختلاف θ داریم چون مفصل نیست.



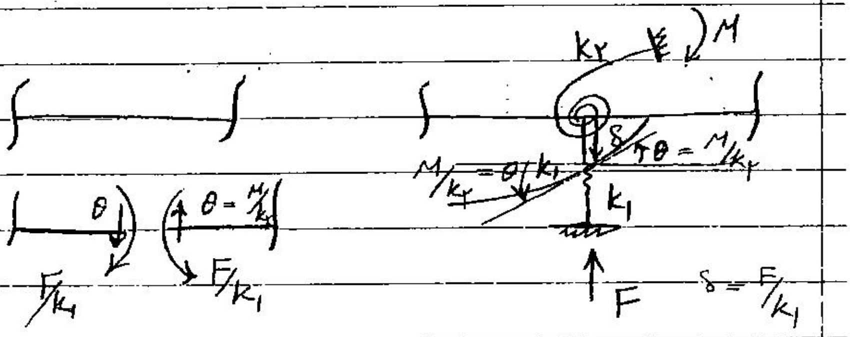
M
δ
$\theta = M/k$
θ
δ
M/k
δ
δ
M/k
M/k
M/k



k
δ
θ_L
θ_R
$v' = \Delta\theta = M/k$

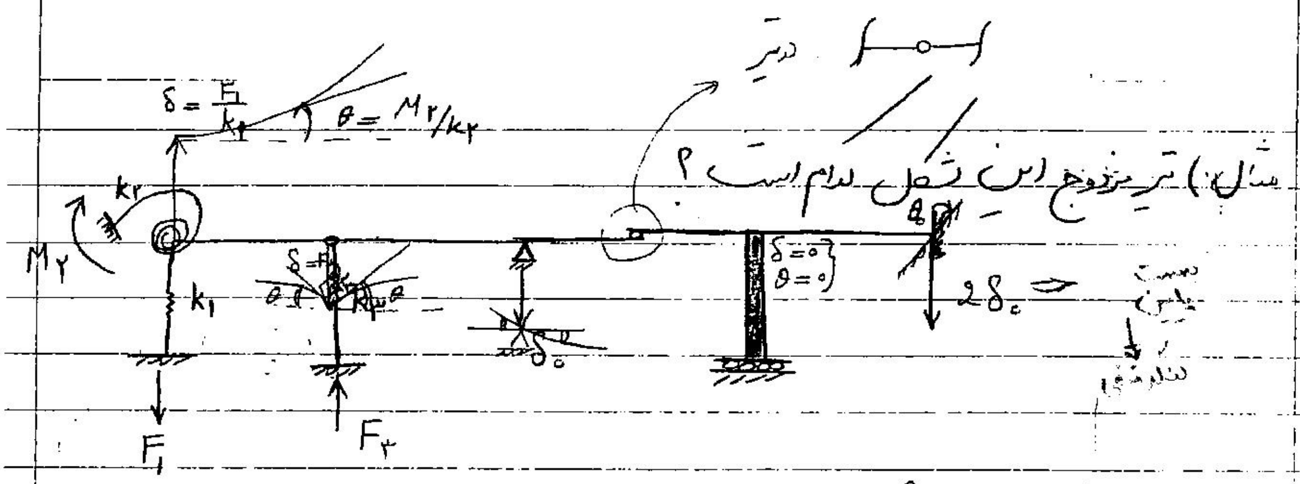


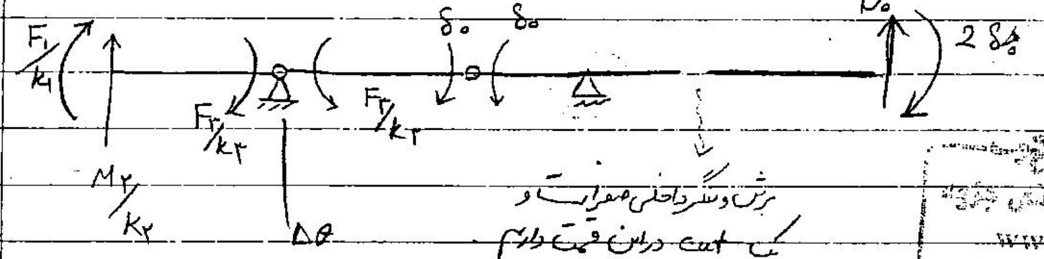
θ
θ
δ = 0
$\Delta\theta = \frac{M}{k}$



k_2
M
δ
$\theta = M/k_2$
$M/k_2 = \theta/k_1$
k_1
F
$\delta = F/k_1$
θ
$\theta = M/k_2$
F/k_1
F/k_1

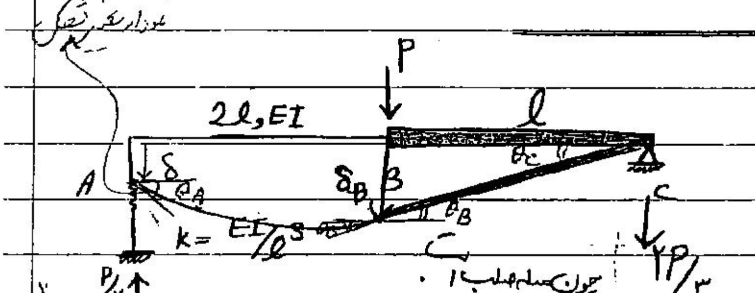
مثال ۷) تیر مزدوج این شکل کدام است؟

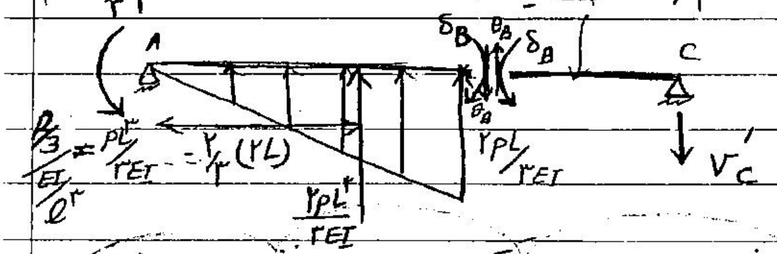

درتیر
$\delta = \frac{F_1}{k_1}$
$\theta = M_2/k_2$
k_2
M_2
k_1
F_1
F_2
δ_0
$\delta = 0$ $\theta = 0$
$2\delta_0$

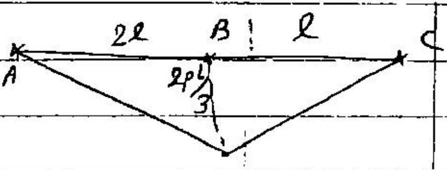

F_1/k_1
M_2/k_2
F_2/k_2
$\Delta\theta$
δ_0
θ_0
$2\delta_0$

برش ولنگر داخلی صفر است و
یک cut در این قسمت داریم

ex) تغییر مکان نقطه B ؟


نمودار تغییر شکل
P
$2l, EI$
l
A
B
C
δ_A
θ_A
δ_B
θ_B
θ_C
$k = EI/l^3$
$P/3$
$2P/3$
چون مسئله مطلب ۱


A
C
δ_B
θ_B
$\frac{P/3}{EI/l^3} = \frac{Pl^3}{3EI}$
$2/3(2L)$
$\frac{2Pl^2}{3EI}$
$2PL/3EI$
V'_C


$2l$
B
l
A
C
$2Pl/3$

نکته) بارگذاری در تیر مزدوج همان نمودار لنگر خمشی در تیر اصلی تقسیم بر EI نظیر می باشد

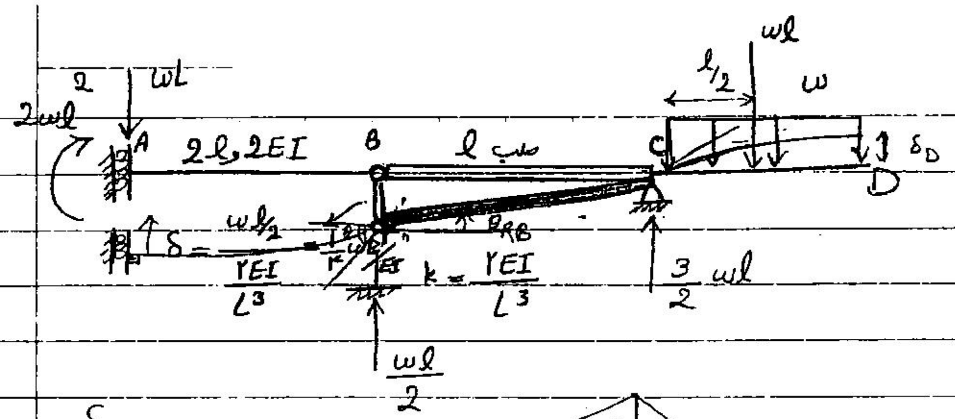
$$\delta_B = M'_{B\,\text{تیر مزدوج}} = V'_C \times l = \frac{11Pl^3}{27EI}$$

حل) $\Sigma M'_A = 0 \rightarrow V'_C \times 3L = \frac{2PL^3}{3EI} \times \frac{4}{3}l + \frac{PL^3}{3EI}$

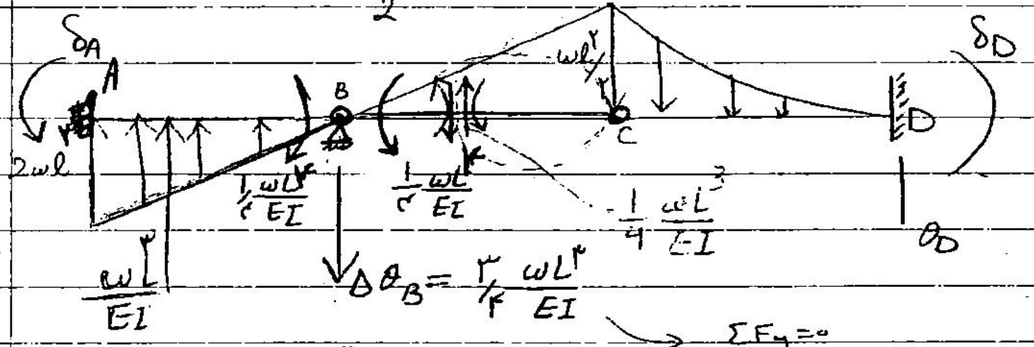
$$\Longrightarrow V'_C = \frac{11}{27}\frac{PL^3}{EI}$$

مثال ۱)

اختلاف دوران (θ) در محل مفصل خمشی کدام است.



wL
2wl
A
2l, 2EI
B
l صلب
C
wl
l/2
w
D
δ_D
$\delta = \frac{wl/2}{\frac{2EI}{L^3}} = \frac{1}{4}\frac{wl^3}{EI}$
θ_{RB}
$k = \frac{2EI}{L^3}$
$\frac{3}{2}wl$
$\frac{wl}{2}$

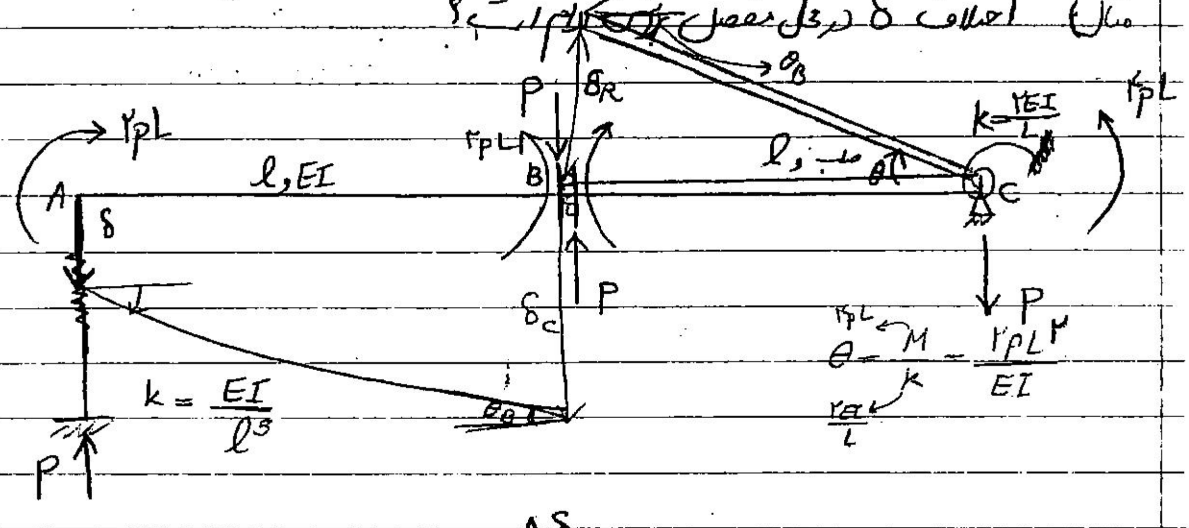


δ_A
A
2wl
B
C
$\frac{wl^2}{2}$
δ_D
D
θ_D
$\frac{1}{4}\frac{wL^3}{EI}$
$\frac{1}{2}\frac{wL^3}{EI}$
$\frac{1}{4}\frac{wL^3}{EI}$
$\frac{wL^3}{EI}$
$\Delta\theta_B = \frac{3}{4}\frac{wL^3}{EI}$
$\Sigma F_y = 0$

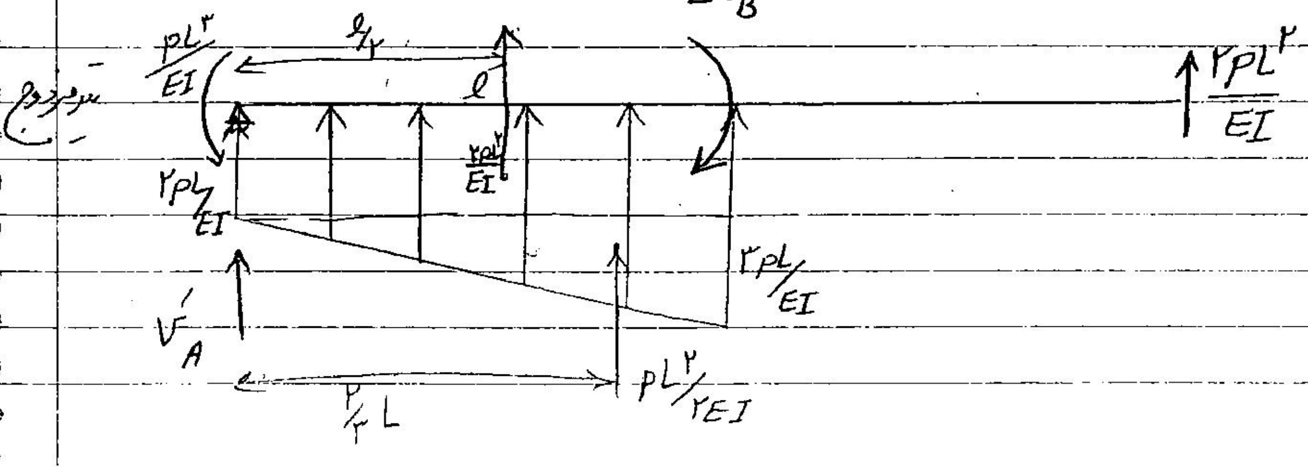
تیر مزدوج

$$\Delta\theta_B = \frac{3}{4}\frac{wL^3}{EI}$$

مثال اختلاف δ در محل مفصل ~~برشی~~ کدام است؟



θ_B
δ_R
P
2pL
2pL
A
δ
l, EI
B
l صلب
θ
C
$k = \frac{2EI}{L}$
2pL
P
δ_C
P
$k = \frac{EI}{l^3}$
θ_B
P
P
$\theta = \frac{M}{k} = \frac{2pL^2}{EI}$
2pL
$\frac{2EI}{L}$

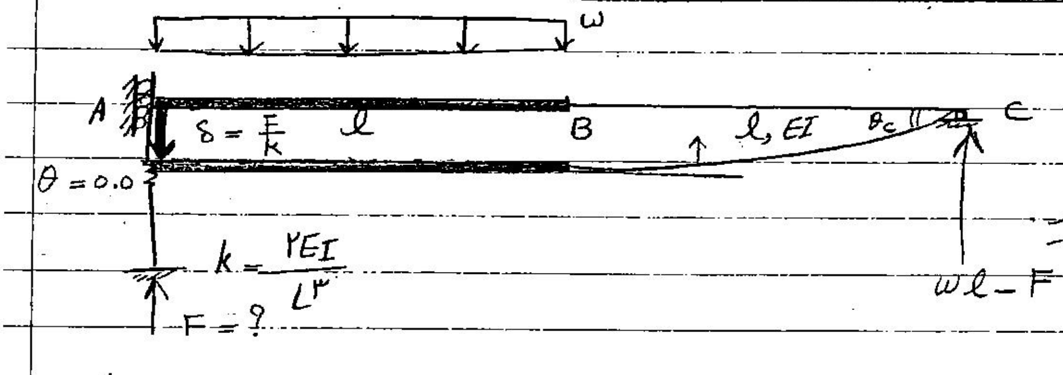


$\Delta\delta_B$
تیر مزدوج
$\frac{pL^3}{EI}$
l/2
l
$\frac{2pL^2}{EI}$
$2pL/EI$
$3pL/EI$
$\frac{2pL^2}{EI}$
V'_A
$\frac{2}{3}L$
$pL^2/2EI$

$$\Delta\delta_B = \frac{Pl^3}{EI} + \frac{2Pl^2}{EI}\times 2l + \frac{2Pl^2}{EI}\times\frac{l}{2} + \frac{Pl^2}{2EI}\times\frac{2}{3}l = \frac{19}{3}\times\frac{PL^3}{EI}$$

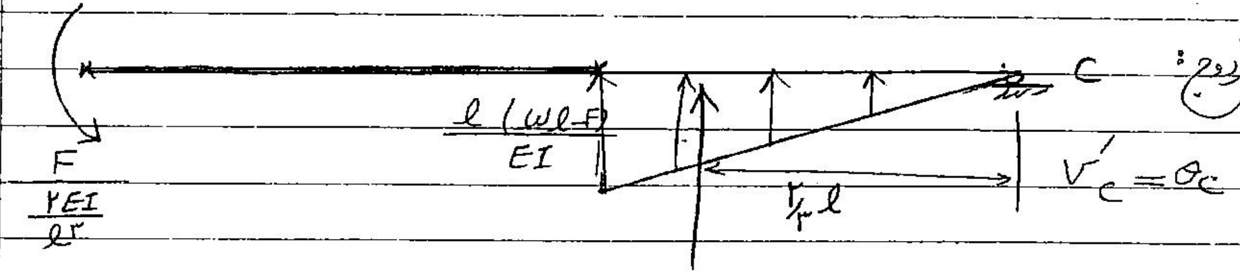
$$\Sigma M'_A = 0.0$$

مسـ (۵۵


ω
A
B
C
$\delta = \frac{F}{k}$
l
l, EI
θ_C
$\theta = 0.0$
$k = \frac{2EI}{L^3}$
$F = ?$
$wl - F$

نیروی فنر را [illegible]

تیر مزدوج:


C
$\frac{l(wl-F)}{EI}$
F
$\frac{2EI}{l^3}$
$\frac{2}{3}l$
$V'_C = \theta_C$

$$\Sigma M'_C = 0 \Rightarrow \frac{l^2(wl-F)}{EI}\times\frac{2}{3}l = \frac{F}{\left(\frac{2EI}{L^3}\right)}$$

$$\Rightarrow F = 0.4wl$$

«روش کار مجازی»

برای سازه‌های معین استفاده می‌شود.

۲) خرپاها ← خرپای معین
- نیرو ← استاتیک
- تغییر شکل ← کار مجازی

تیرها و قاب‌ها

$W_{ext} = W_{int}$

تغییر مکان (اصلی) × نیرو (واحد) = کار مجازی

$$\underbrace{1\times\delta}_{۱/۰} + \overline{w_R} = \underbrace{\sum\frac{nNl}{EI}}_{\text{بارگذاری خارجی}} + \underbrace{\sum n\alpha\Delta T\cdot l}_{\text{حرارت}} + \underbrace{\sum\frac{fF}{k}}_{\text{فنر}} + \underbrace{\sum n\delta}_{\text{اشتباه در ساخت}} \pm \sum \overset{}{|}ns$$

نشست های تکیه گاهی

اشتباه در ساخت ([illegible])

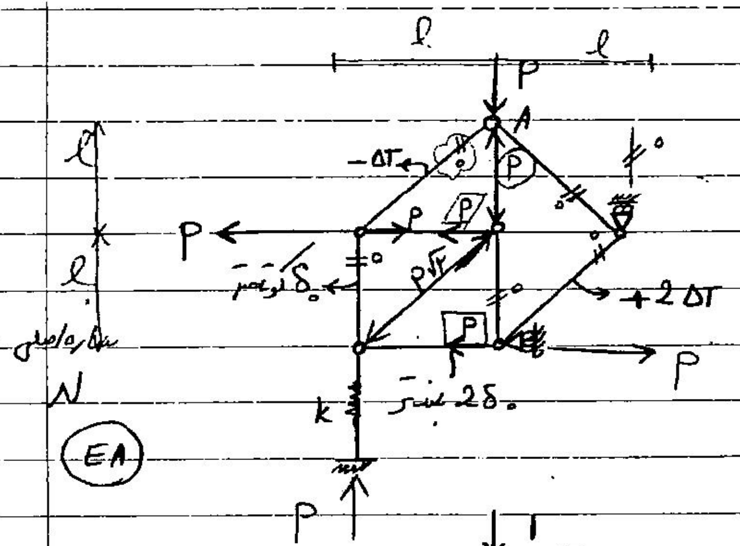
خطای [illegible] ساخت

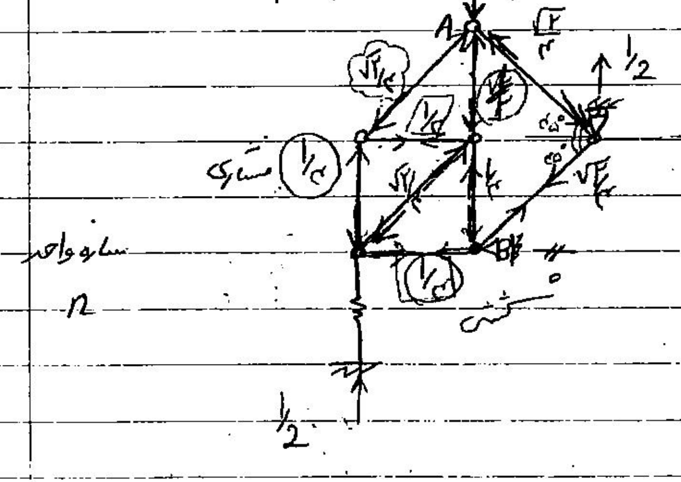
سازه اصلی ⇐ N و F — سازه واحد ⇐ n و f

مثال)

* سازه واحد حرارت، نشست، خطای ساخت و بارگذاری خارجی ندارد - فقط یک بار واحد دارد.

- تغییر مکان قائم گره A کدام است؟


l
l
P
A
$-\Delta T$
P
P
P
$P\sqrt{2}$
δ_0 کوتاه‌تر
$+2\Delta T$
P
P
k
$2\delta_0$ بلندتر
l
l
سازه اصلی
N
EA
P


1
A
$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{۲}$ فشاری
$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
$\frac{1}{۲}$
$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
سازه واحد
n
$\frac{1}{۲}$ کششی
$\frac{1}{2}$

$$1\times\delta_A = \sum n\alpha\Delta T\cdot l + \sum\frac{nNl}{EA} + \frac{fF}{k} + \sum n\delta$$

$f \to \frac{1}{2}$ ، $F \to P$

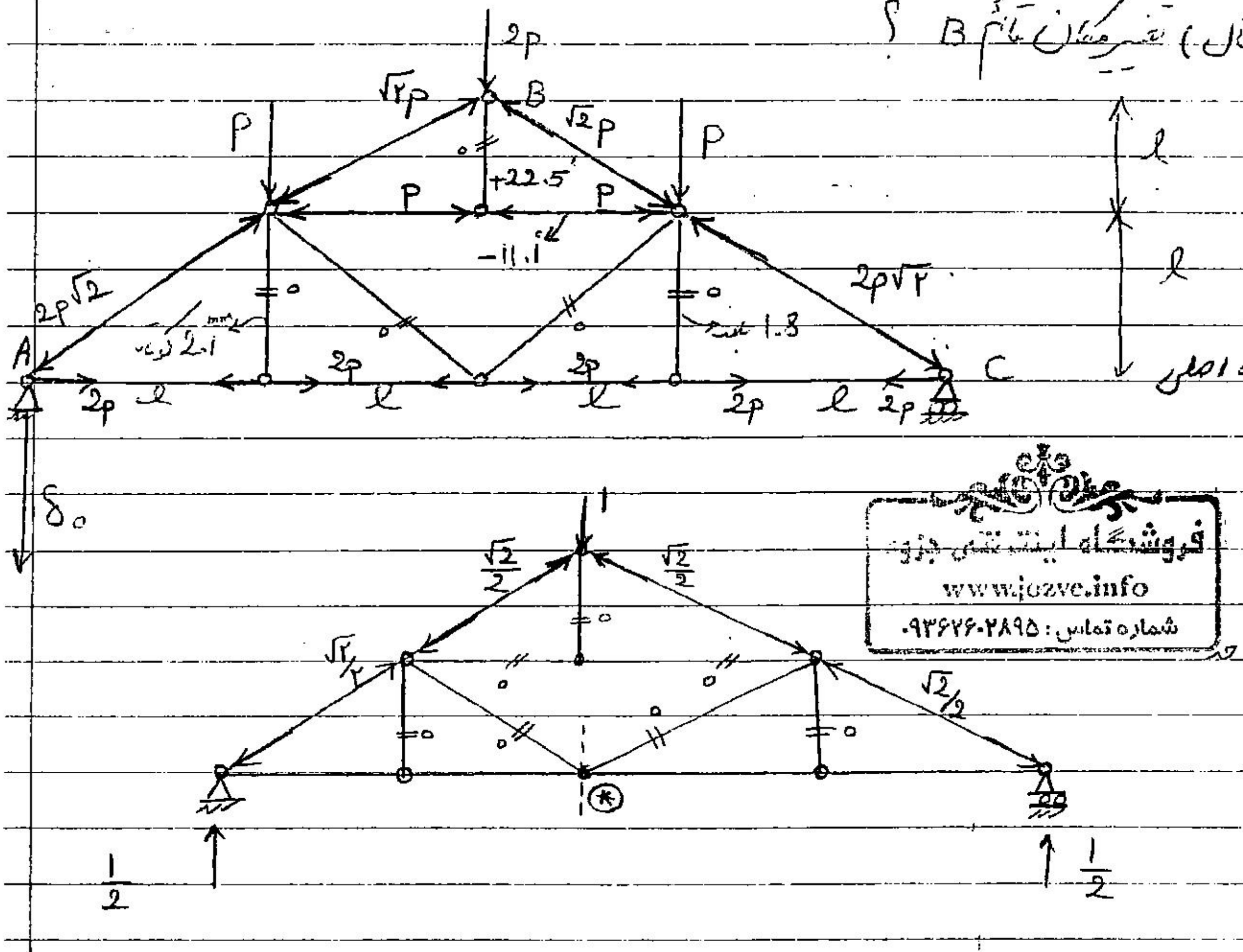
$\sum n\alpha\Delta T\cdot l \to \left\{ \left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)(\alpha)(-\Delta T)(l\sqrt{2}) + \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)(\alpha)(+۲\Delta T)(-l\sqrt{۲}) \right\}$

$\sum n\delta$: $(-\delta_0)(-\frac{1}{۲}) + (+2\delta_0)(+\frac{1}{۲})$

$$\Sigma \frac{nNl}{EA} = \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(p\sqrt{2})\,l\sqrt{2} + \frac{1}{2}\times(P)(l)\times 2 + \frac{1}{2}pL\right] \Big/ EA$$

$$\boxed{\delta_{VA} = \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{Pl}{EA} + \frac{3}{2}\alpha\,\Delta T.\,l + \frac{P}{2k} + \frac{3}{4}\delta_0}$$

مثال) تغییر مکان قائم B ؟


2p
√۲p
B
√2p
P
P
P
P
+22.5
-11.1
2p√2
2p√۲
A
C
2.1 کوتاه mm
1.3 بلند
2p
2p
2p
2p
2p
l
l
l
l
l
l
δ_0
سازه اصلی
1
√2/2
√2/2
√۲/۲
√2/2
1/2
1/2
سازه واحد

(*) چون گره تقارن را که بکشیم و تعادل بنویسیم، نیروها یکدیگر را خنثی می کنند و تعادل برقرار می شود.

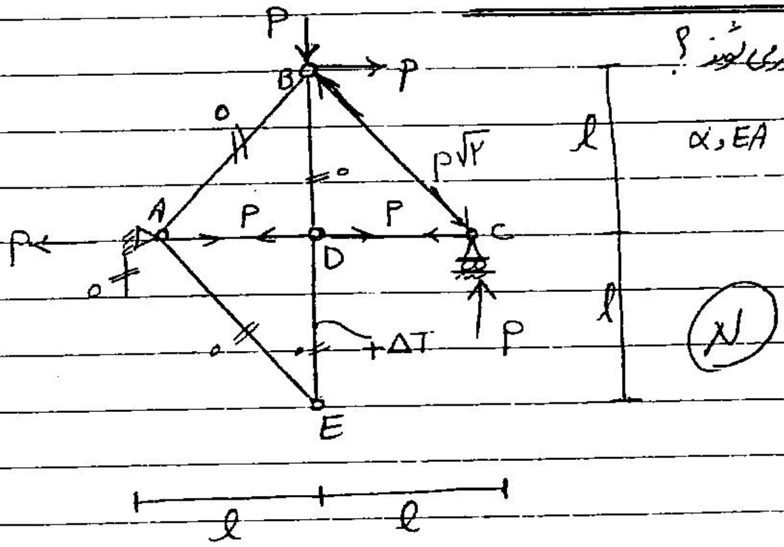
$$1\times\delta_{VB} + \underbrace{\omega_R}_{-\frac{1}{2}\times\delta_0} = \Sigma\frac{nNl}{EA} + \Sigma n\alpha\,\cancel{\Delta T}^{\,0}.\,l + \Sigma\,\cancel{n\delta}^{\,0}$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}\times 2p\times l\right)\times 4 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times 2p\sqrt{2}\times l\sqrt{2}\right)\times 2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}p\times l\sqrt{2}\right)\times 2\right] \Big/ EA$$

$$\Longrightarrow \delta_{V_B} = \frac{\delta_0}{2} + \frac{(4+6\sqrt{2})Pl}{EA}$$

مثال) نقاط B و E چقدر از هم دور می‌شوند؟

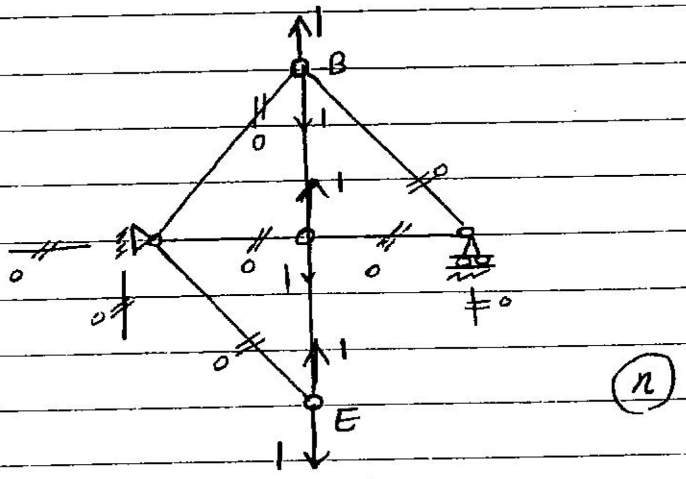
α , EA



P
B
P
0
$P\sqrt{2}$
0
l
A
P
P
P
C
P
D
0
0
$+\Delta T$
P
l
E
l
l
N

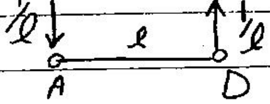
$$1 \times \delta_{B,E} = \cancelto{0}{\Sigma \frac{nNl}{EA}} + \Sigma n\alpha\Delta T l$$

$$\delta_{B,E} = \alpha . \Delta T . l$$



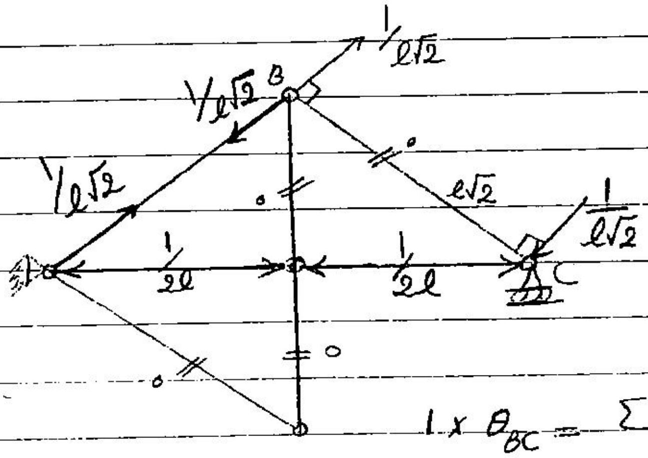
1
B
0
1
0
1
0
0
1
0
0
0
=0
0
1
E
1
n

* برای دوران عضو AD :



* دوران میله BC چقدر است؟

برای دوران عضو یک جفت نیروی عمود بر عضو به صورت $\frac{1}{\text{طول عضو}}$ قرار می‌دهیم.



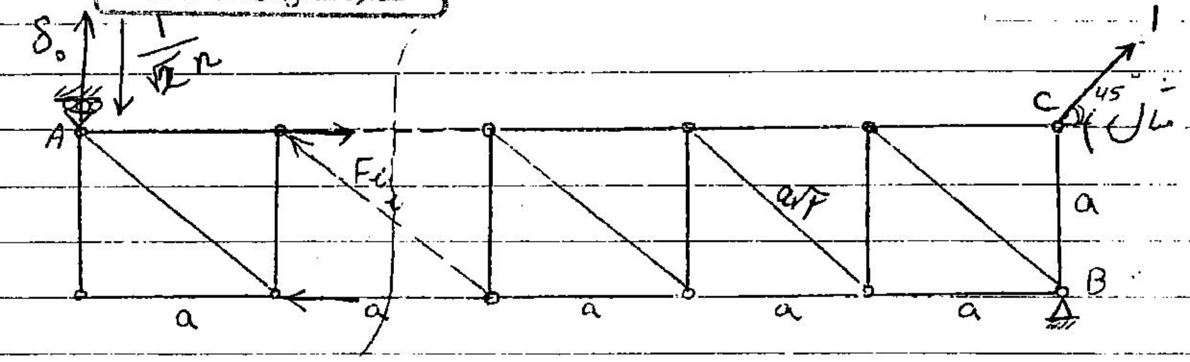
$1/l\sqrt{2}$
$1/l\sqrt{2}$
B
$1/l\sqrt{2}$
0
0
$l\sqrt{2}$
$\frac{1}{l\sqrt{2}}$
$\frac{1}{2l}$
$\frac{1}{2l}$
C
=0
0

$$1 \times \theta_{BC} = \Sigma \underbrace{\frac{n.Nl}{EA}}_{\left[(-\frac{1}{2l})(P)\frac{l}{EA}\right]\times 2} + \underbrace{\Sigma n\alpha\Delta T.l}_{0}$$

$$\Longrightarrow \theta_{BC} = -\frac{P}{EA}$$

* جهت اشتباه انتخاب شده

مثال)



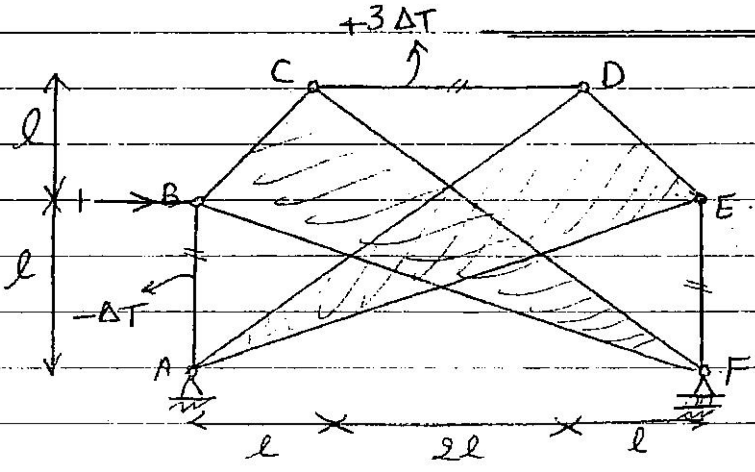
چنانچه تکیه‌گاه A به اندازه δ_0 نشست داشته باشد و دمای اعضای قطری سوم و سیزدهم و بیست و دوم را به اندازه ΔT افزایش دهیم، تغییرمکان گره C در امتداد 45° کدام است؟

$$1\times\delta_{C,45^\circ} + \underset{-(\delta_0\times\frac{1}{\sqrt2 n})}{W_R} = \underbrace{\sum n\alpha\Delta T\, l}_{3(\frac{1}{n})\alpha(+\Delta T)(a\sqrt2)} = \boxed{\frac{\delta_0}{\sqrt2 n} - \frac{3\sqrt2\,\alpha\,\Delta T_0}{n}}$$

$$(1\times\cos45)a = R_A(na)$$
$$\Rightarrow R_A = \boxed{\frac{1}{\sqrt2 n}}$$

$$\sum F_y = 0$$
$$\Rightarrow F_i\left(\frac{\sqrt2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt2 n} = \frac{1}{n} \Rightarrow \boxed{F_i = \frac{1}{n}}$$

نیروی تمام عضوها $1/n$ است و فشاری.



مثال) تغییرمکان افقی گره B، چقدر است؟ و به کدام جهت است؟

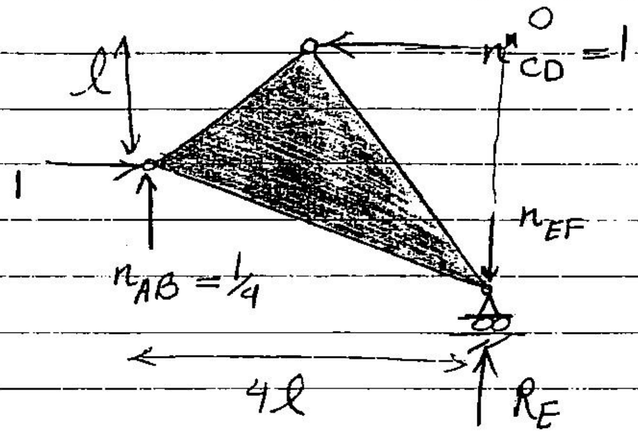
* سازه واحد ⟵

ترکیب ناپایدار با سه میله مشروط ⇐ پایدار

$$1\times\delta_{H,B}=\underbrace{\sum n\alpha\Delta T\ell}_{}$$

$$\alpha\left[(-\tfrac{1}{4})(-\Delta T)\ell+(-1)(3\Delta T)(2\ell)\right]$$

$$\Rightarrow \delta_{HB}=\frac{-23}{4}\alpha\Delta T$$

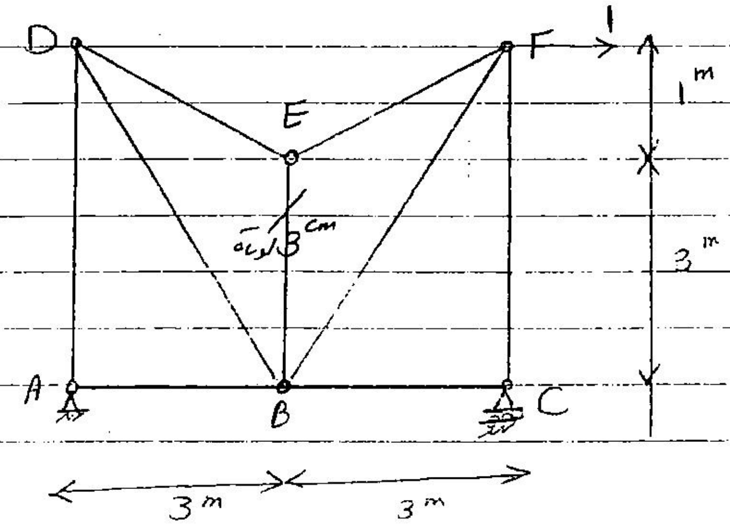


(−) یعنی نقطه B به سمت چپ حرکت می‌کند

تست ۸۸)

تست ۶ صفحه ۱۰۴

۸۸) در خرپای شکل مقابل عضو EB موقع مونتاژ 3 cm کوتاه است. چنانچه با اعمال بار افقی 5 تن در نقطه F نیروی داخلی عضو EB، 3 تن فشاری باشد تغییر مکان افقی نقطه F پس از مونتاژ و قبل از هرگونه بارگذاری چند cm است؟



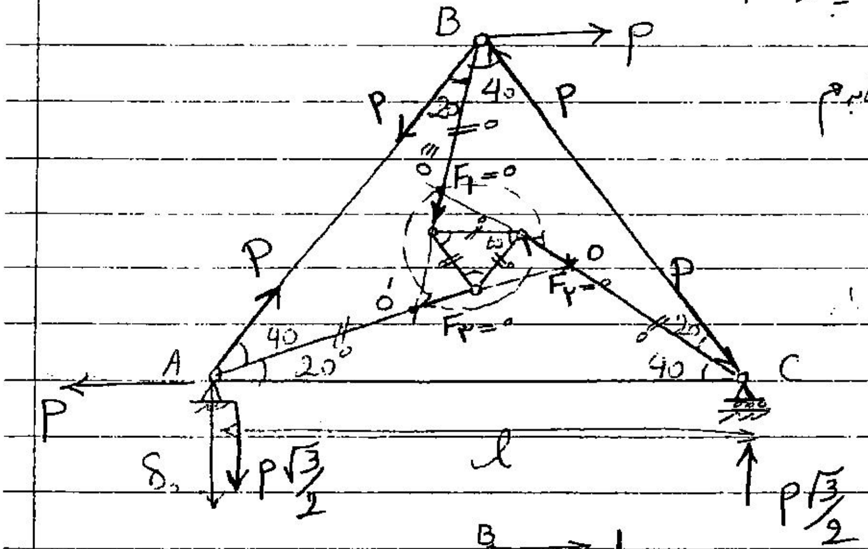
$$\begin{cases}1\times\delta_{HF}=n_{EB}\cdot\delta_{EB}\\ \delta_{HF}=(-\frac{3}{5})(-3^{cm})=1.8^{cm}\end{cases}$$

$$\frac{\overrightarrow{5\,ton}}{\overrightarrow{1}}=\frac{\text{فشاری}\ 3^{ton}}{n_{EB}=?}$$

$$n_{EB}=-\frac{3}{5}$$

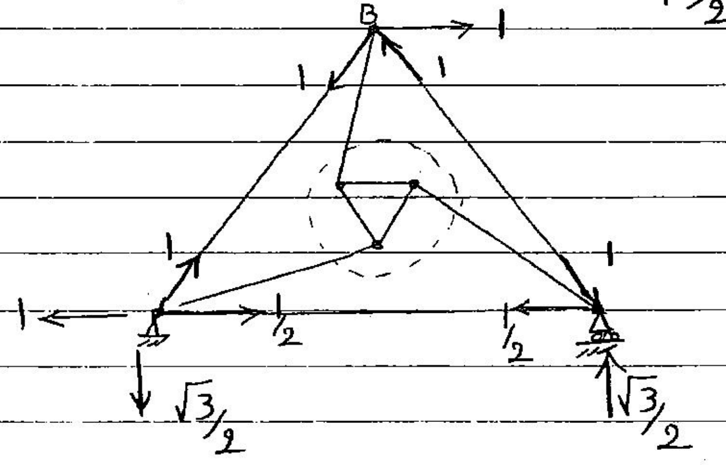
خطای ساخت در سازه‌های معین فقط تغییر مکان ایجاد می‌کند، نیرو بوجود نمی‌آید.

مثال) تغییر مکان افقی نقطه B چقدر است؟


B
P
P
40
P
20
=0
0
F₁=0
P
P
O
F₂=0
O'
F₃=0
A
40
20
40
20
C
P
δ₀
P√3/2
l
P√3/2

پایدار ← دو مثلث با سه میله مشخص به هم وصل شده‌اند.

$$\begin{cases} \Sigma M_O = 0 \longrightarrow F_1 = 0 \\ \Sigma M_{O'} = 0 \longrightarrow F_2 = 0 \\ \Sigma M_{O''} = 0 \longrightarrow F_3 = 0 \end{cases}$$


B
1
1
1
1
1
1/2
1/2
√3/2
√3/2

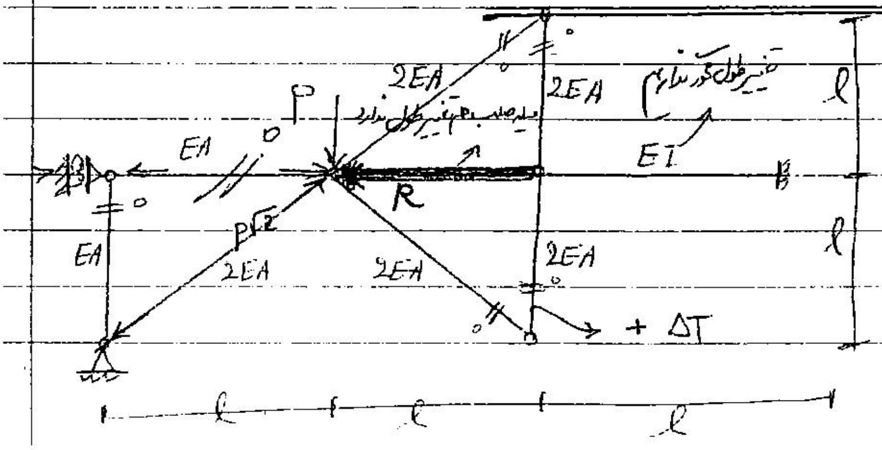
$$1 \times \delta_{HB} + \omega_A = \Sigma \frac{nNl}{EA}$$

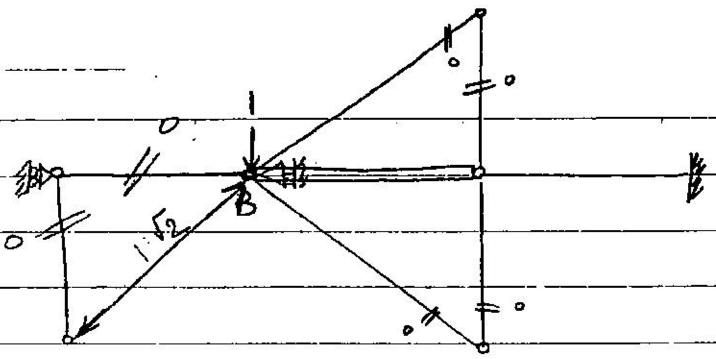
$$\omega_A = \frac{\sqrt{3}}{2}\delta_0$$

$$\Sigma \frac{nNl}{EA} = \frac{1 \times P \times l}{EA} + \frac{(1/2)(P/2)(l)}{EA}$$

$$\Rightarrow \delta_{HB} = \frac{9}{4} \times \frac{PL}{EA} - \frac{\sqrt{3}}{2}\delta_0$$

مثال) تغییر مکان D از اثر P ؟


2EA
0
2EA
تغییر طول کوتاه نداریم
l
P
میله صلب و تغییر طول ندارد
EA
0
EI
R
=0
EA
P√2
2EA
2EA
2EA
0
0
+ ΔT
l
l
l
l

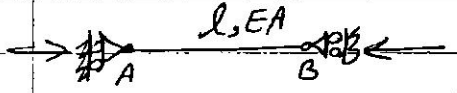


1
B
$1\cdot\sqrt2$
0
0
0
0
0

به خاطر تکیه‌گاه گیردار و صلب و EI
نقطهٔ B نمی‌تواند حرکت کند

$$1\times\delta_{VB}=\sum\frac{nNl}{EA}+\cancel{\sum n\alpha\Delta T\cdot l}^{\,0}$$

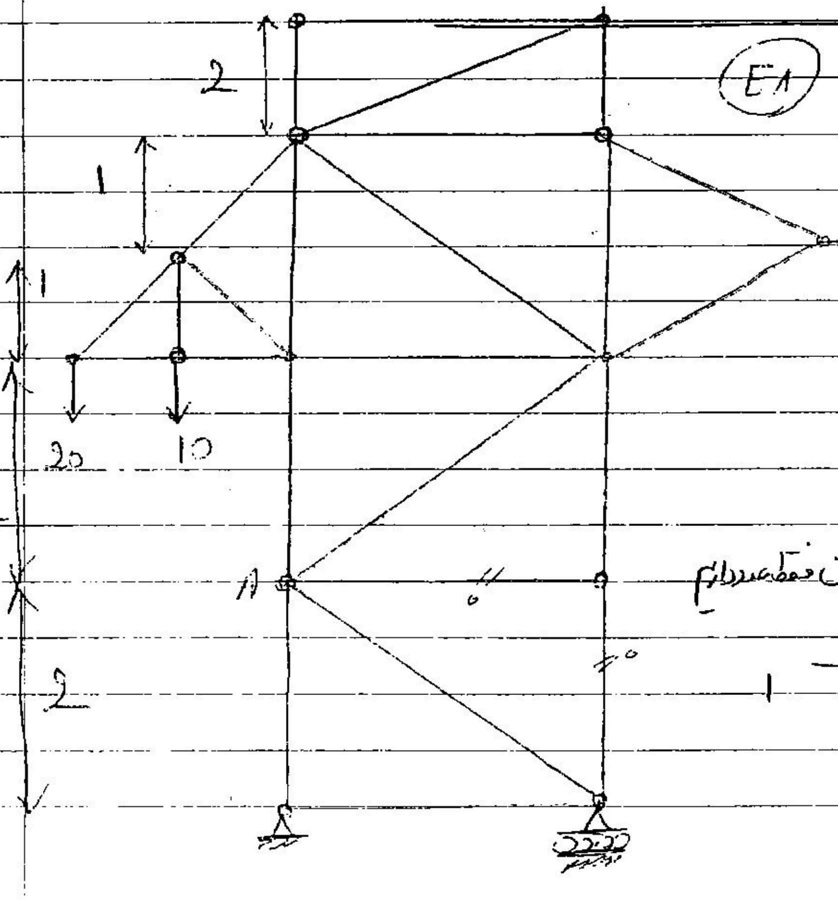
$$\frac{(\sqrt2)(P\sqrt2)(l\sqrt2)}{2EA}\Rightarrow \boxed{\delta_{VB}=2\sqrt2\,\frac{Pl}{EA}}$$



$$\delta_{AB}=0=\frac{\cancel{F_{AB}}^{\,0}\,l}{EA}\Rightarrow F_{AB}=0$$

حل:

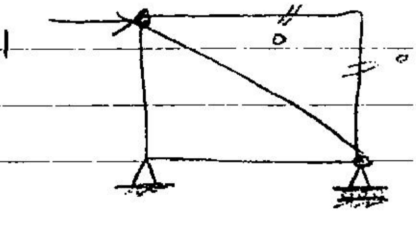
مثال) تغییر مکان نقطهٔ A ؟
افقی



EA
2
1
1
2
2
10 kN
20
10
A
0
0

$$\delta_{HA}=?$$

در سازه واحد داریم [illegible]، در سازه بالا چون فقط [illegible]
نیروها صفر هستند.



کار مجازی (بار واحد مجازی) در تیر و قاب های معین ← نیروها ← استاتیک

$n = 0$

(تغییر شکل ← [illegible]

$$\omega_{ext} = \omega_{int}$$

بارهای خارجی

$$1 \times \underset{\pm\theta}{\delta} + \omega_R = \int \frac{mM\,dx}{EI} + \int f_s \frac{v \cdot V\,dx}{GA} + \int \frac{nN\,dx}{EA} + \int \frac{tT\,dx}{GJ}$$

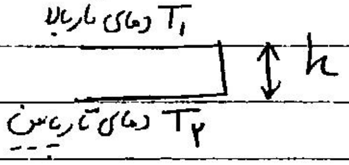
نشست تکیه‌گاهی

واحد → n, t, m, v اصلی → V, M, T, N

$$\begin{cases} 0 < f_s < \alpha_s \\ 0 < 1.2 < 1.5 \end{cases}$$

ضریب شکل

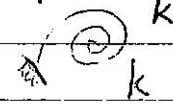
مستطیل



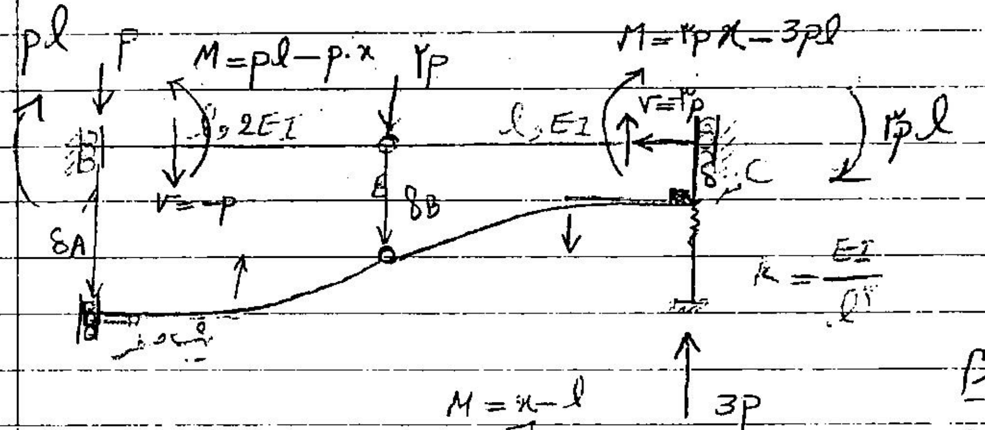
ادامه

$$\Rightarrow + \int n\alpha \left(\underbrace{\frac{T_1+T_2}{2} - \overset{\text{دمای اولیه}}{T_0}}_{\Delta T} \right) dx + \int m\alpha \left(\frac{T_2 - T_1}{h} \right) dx + \sum \frac{fF}{k}$$

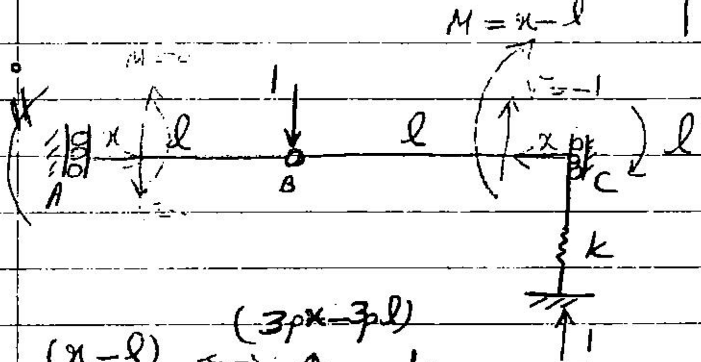
$$+ \frac{\sum mM}{k} + \underset{\text{اشتباه ساخت}}{\sum n\delta} \pm \underset{\text{خطا}}{\sum |n\delta|} + \cdots$$



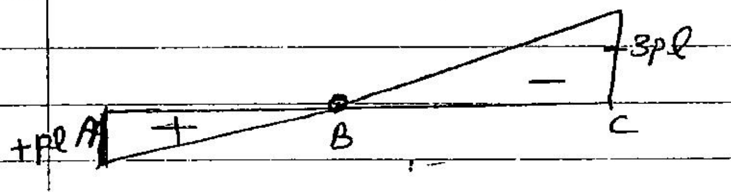
مثال) تغییرمکان نقطه B را محاسبه کنید.

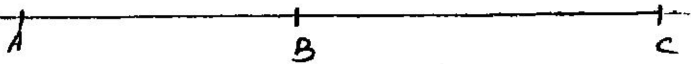

pl
P
M=pl−p.x
2P
M=2px−3pl
l, 2EI
l, EI
V=2P
V=−P
2pl
B
C
δA
δB
k = EI/l³
3P

* جمله برشی را در نظر نمی‌گیریم چون GA را ننوشته و EI نوشته. پس آن را در نظر نمی‌گیریم.


M = x−l
1
l
l
l
x
x
A
B
C
k
1

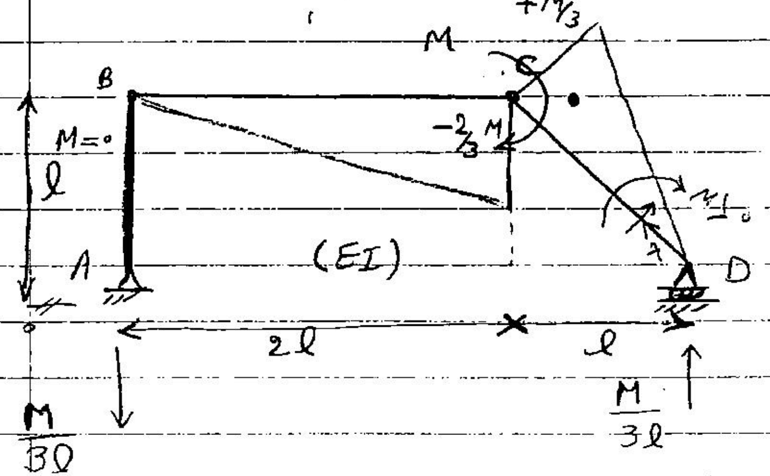
$$1\times\delta_B=\int_0^{l}\frac{\overset{(x-l)}{m}\,\overset{(3px-3pl)}{M}\,dx}{EI}+\frac{\overset{1}{f}\,\overset{3p}{F}}{\underset{EI/l^3}{k}}=\frac{pl^3}{EI}+\frac{3pl^3}{EI}=4\frac{pl^3}{EI}$$

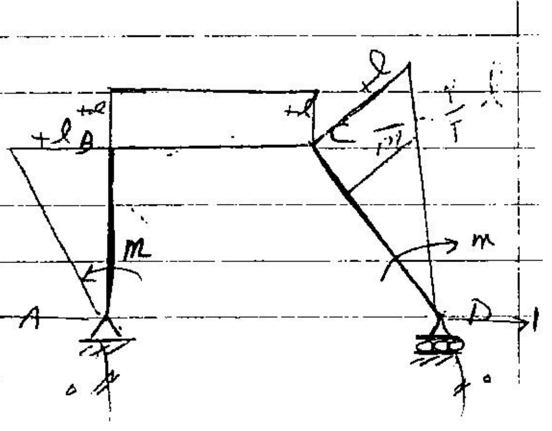




مثال) تغییرمکان نسبی نقطه‌ها؟

در C چون لنگر متمرکز داریم، شکستگی می‌شود.


+M/3
M
C
−2/3 M
B
M=0
l
A
(EI)
2l
l
D
M/3l
M/3l


+l
+l
B
C
l
l/2
m
m
1
A
D
1

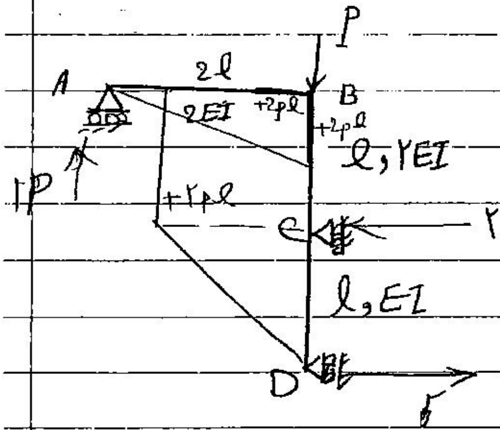
$$1\times\delta_{HD}=\int\frac{mM\,dx}{EI}=\frac{A_M}{EI}\cdot\bar{m}=\frac{A_m}{EI}\cdot\bar{M}$$

$$\delta_{HD}=\frac{A_M}{EI}\cdot\bar{m}=\frac{(M/3)(\sqrt{2}l)/2}{EI}\cdot\frac{2}{3}l+\frac{-(\frac{1}{4}M\times ۲l)}{EI}(+l)$$

$$\delta_{HD}=\left(\frac{\sqrt{2}}{9}-\frac{2}{3}\right)\frac{Ml^2}{EI}$$

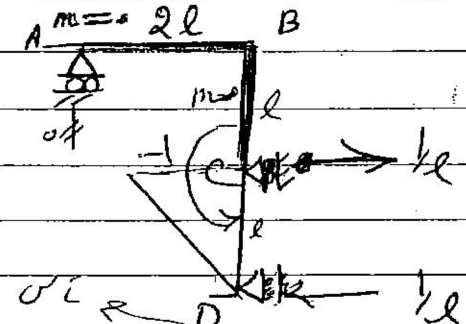
علامت δ منفی است پس جهت عوض می‌شود و جهت D به سمت چپ است.

مثال) دوران تکیه‌گاه C کدام است؟

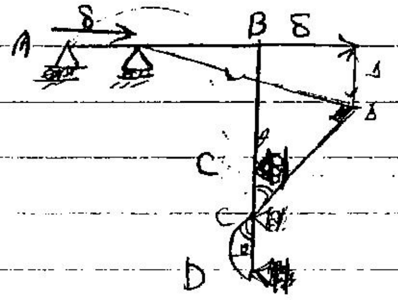

P
A
2l
B
2EI
+2pl
+2pl
l, ۲EI
۲P
+۲pl
C
۲p
l, EI
D

برای محاسبه θ، لنگر واحد قرار می‌دهیم

خلاف ساعت ← مثبت فرض شده

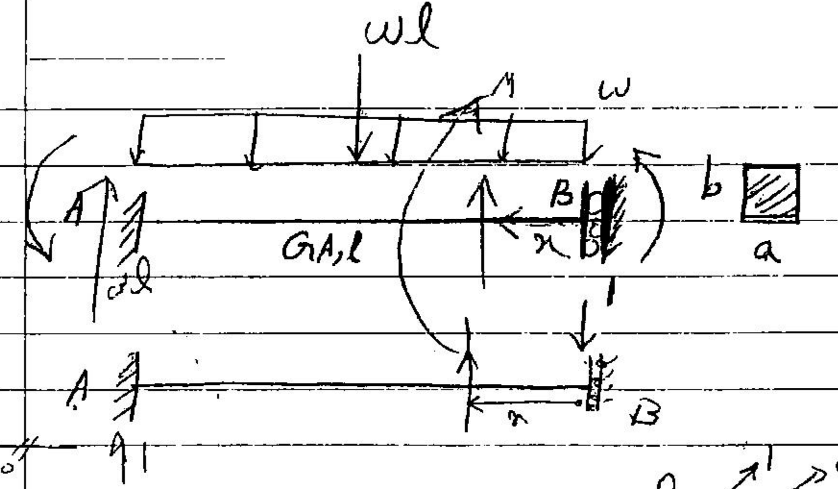

A
m=0
2l
B
m
l
-1
C
1/l
l
D
1/l

$$1\times\theta_C=\frac{M_M}{EI}\cdot\bar{m}=\frac{2pl\times l/2}{EI}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}\frac{Pl^2}{EI}$$



θ_C در جهت ساعت می‌شود.

مثال) تغییر مکان نقطه B ؟


wl
w
1
A
B
b
a
GA, l
x
1
A
B
x
91

GA یعنی فقط برش را در نظر بگیریم.

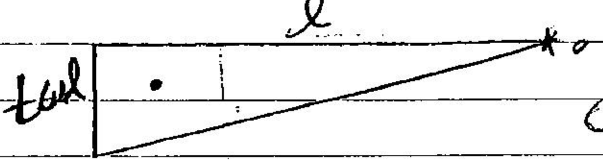
$$1\times\delta_B = \int F_s \frac{vV\,dx}{GA} = \int_0^l \frac{v.V\,dx}{GA} \Rightarrow$$

$u_R = \delta_0 A - 1 = 0$

$$\delta_B = \delta_0 + \frac{wl^2}{2\,GA}\times 1.2$$

حل مسئله از روش دایره مور:

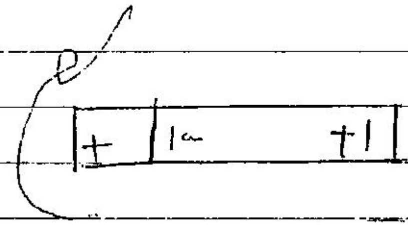
$$\int \frac{V\,dx}{GA} = \frac{\overset{\frac{wl\cdot l}{2}}{A_V}\cdot \overset{1}{v}}{GA} = \frac{wl^2}{2\,GA}$$



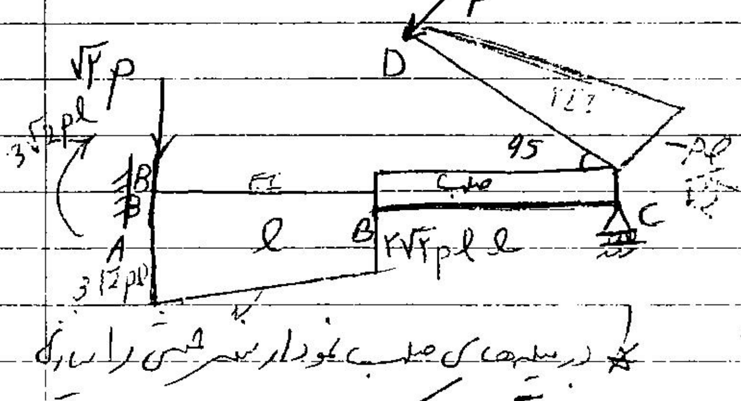
تغییر فاصله

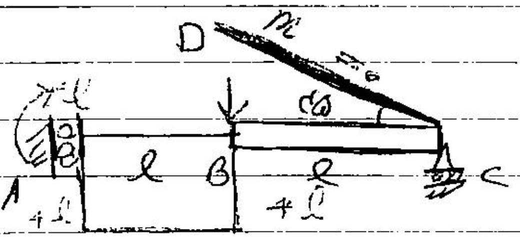
در سه زبانه و اهرم

v :



مثال) تغییر مکان نقطه B ؟


P
D
√2 P
3√2 pl
45
EI
صلب
B
B
A
l
B
2√2 pl
C
l
3√2 pl

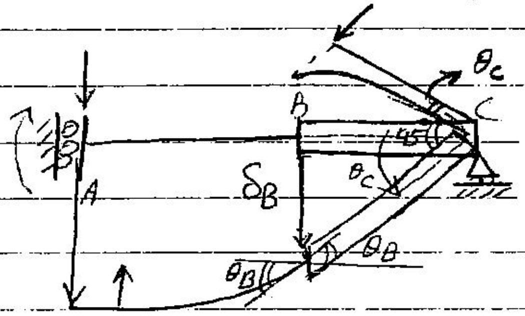

D
45
A
B
l
B
l
C
4l
4l

☆ در سیستم‌های صلب نمودار ممان خمشی را نباید رسم کرد.

$$1\times\delta_B=\frac{Am}{EI}\cdot\bar{m}=\left(\frac{3\sqrt{2}p\ell+2\sqrt{2}p\ell}{2}\right)\ell\downarrow/EI\times\ell$$

$$\Rightarrow\delta_B=\frac{5\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{p\ell^3}{EI}$$

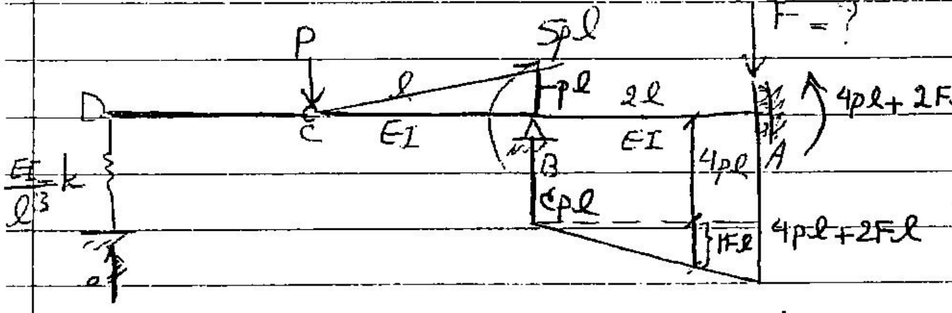
نمودار تغییر شکل :



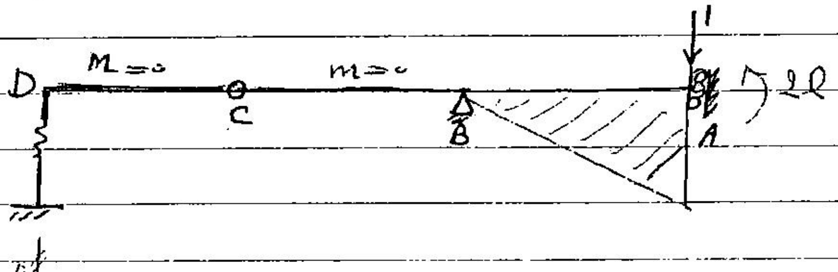
θ_C
B
C
A
45
δ_B
θ_C
θ_B
θ_B

$$\theta_C=\theta_B=\frac{\delta_B}{\ell}$$

مثال) نیروی F چقدر باشد تا
تغییر مکان نقطه A
[illegible] برشی صفر گردد؟



P
$5p\ell$
F = ?
D
C
ℓ
EI
$p\ell$
2ℓ
EI
B
A
$4p\ell+2F\ell$
$\frac{EI}{\ell^3}k$
$4p\ell$
$6p\ell$
$2F\ell$
$4p\ell+2F\ell$

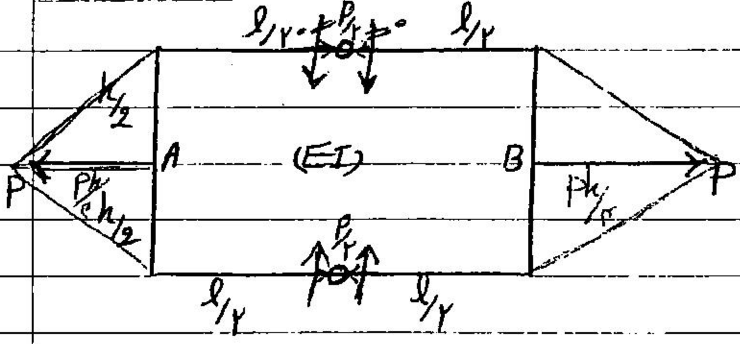


1
D
M = 0
C
m = 0
B
A
2ℓ

$$1\times\cancel{\delta_A}^{\,0}=\frac{Am}{EI}\bar{M}+\frac{fF}{k}=\frac{(2\ell\times2\ell)/2}{EI}\times\left(4p\ell+\frac{2}{3}(2F\ell)\right)$$

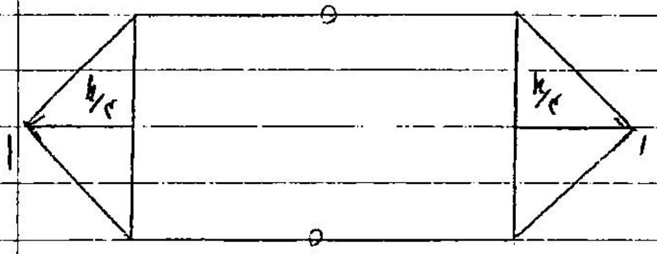
$$\Rightarrow F=-8p$$

مثال) نقاط A و B چه‌قدر از هم دور می‌شوند؟


l/2
P/2
l/2
h/2
A
(EI)
B
P
Ph/4
h/2
Ph/4
P
P/2
l/2
l/2

✓ برای اینکه هم تعادل و هم تقارن برقرار بوده، در روی محور تقارن، برش صفر است.

✓ لنگر هم به خاطر مفصل صفر است.



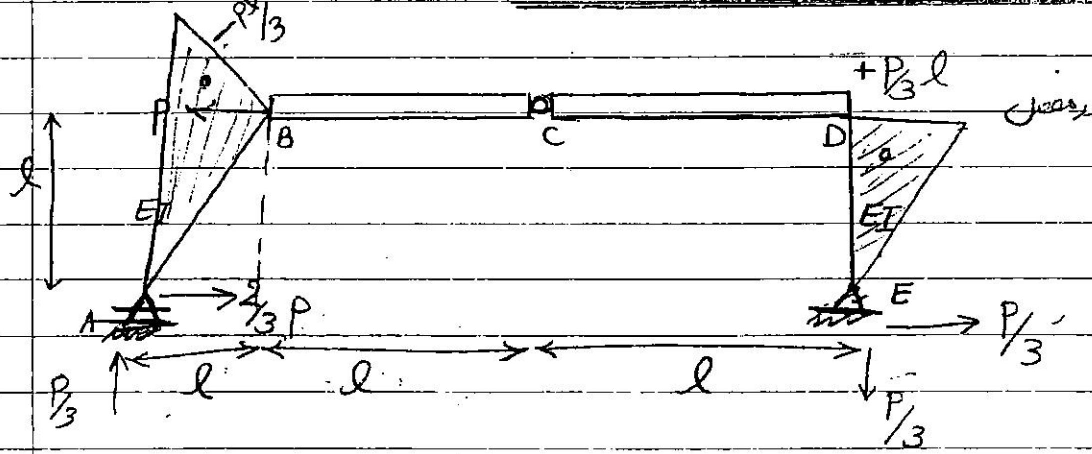
$$\frac{h}{2}\times\frac{Ph}{4}=\frac{2\times Ph^2}{8A}=\frac{Ph^2}{4}/EI\times\frac{h}{2}\qquad\frac{ph^3}{16EI}$$

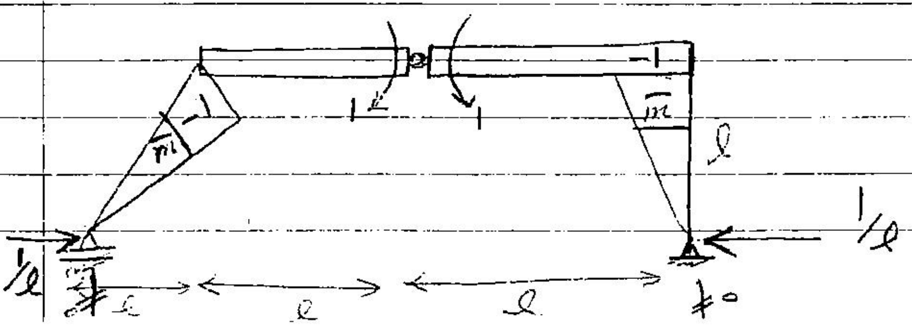
$$1\times\delta_{A,B}=\int\frac{mM\,dx}{EI}=\frac{A_M}{EI}\cdot\bar{m}$$

$$=\left[\left[\frac{Ph/4}{2}\times\frac{h}{2}\right]\times 2\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{h}{4}\right)\right]\times 4=\frac{Ph^3}{24EI}$$

✓ هنگامی مفصل موهومی به کار می‌رود که ناپیوستگی باشد

مثال) اختلاف شیب در مفصل C ؟

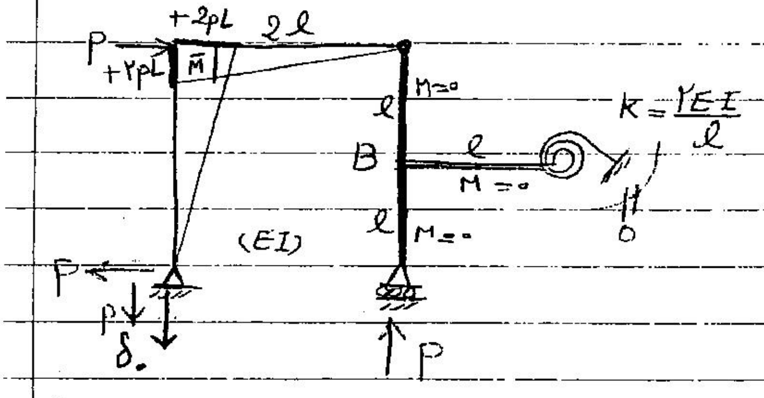

P/3
P
B
C
+P/3 l
D
l
EI
EI
A
2/3 P
E
P/3
P/3
l
l
l
P/3

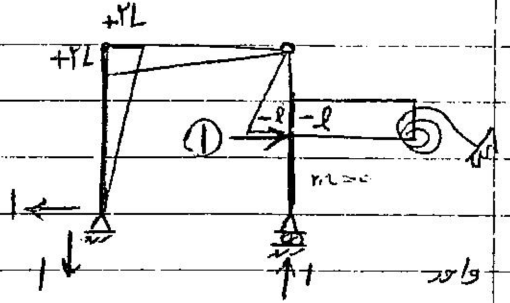

1
1
-1
-1
m̄
m̄
l
1/l
1/l
l
l
l

$$1\times\Delta\theta_C=\frac{A_M}{EI}\cdot\bar m=\frac{(-Pl/3)(l\sqrt2)/2}{EI}\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{(Pl/3\times l/2)}{EI}\times\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt2-1}{9}\right)\left(\frac{Pl^2}{EI}\right)$$

تغییرمکان افقی B ؟


P
+2pL
2l
+۲pL
M̄
M=0
l
B
l
M=0
k = ۲EI/l
l
M=0
(EI)
P
P
δ₀
P


+۲L
+۲L
①
-l
-l
m=0
1
1
1
واحد

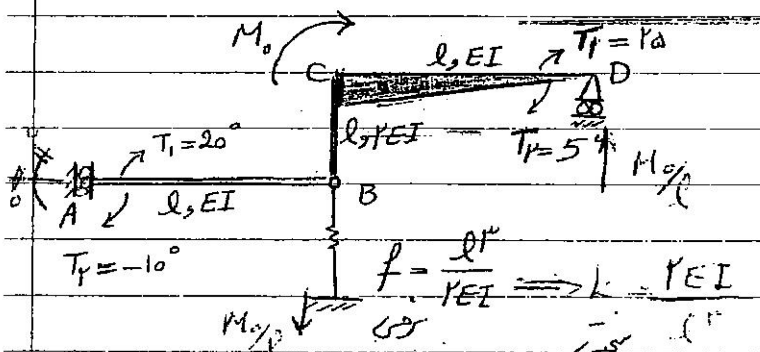
اصلی

$$1\times\delta_{HB}+\cancel{\omega R}=\frac{A_M}{EI}\cdot\bar M+\cancel{\frac{mM}{k}}\ \text{صفر}$$

$$(\delta_0\times1)\qquad\left[\frac{\left(\frac{2l\times2l}{2}\right)}{EI}\times\frac{2}{3}\times2pl\right]\times2$$

$$\Longrightarrow\ \delta_{HB}=\frac{16}{3}\frac{Pl^3}{EI}-\delta_0$$

مثال) تغییرمکان [illegible] ؟


M₀
C
l, EI
T₁ = ۲۵
D
l, ۲EI
T₂ = 5°
T₁ = 20°
A
l, EI
B
T₂ = -10°
M₀/l
M₀/l
0

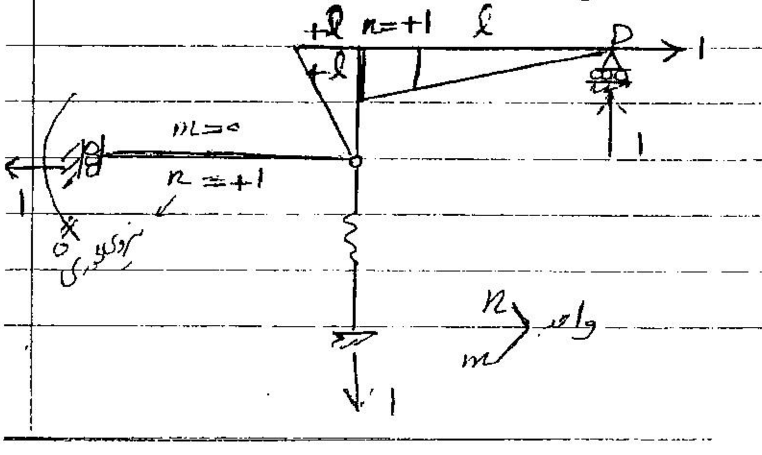
$f=\frac{l^3}{۲EI}\Longrightarrow k=\frac{۲EI}{l^3}$

فنر سختی

$$1\times\delta_{HD}=\frac{A_M}{EI}\cdot\bar m+\frac{fF}{k}+\int n\alpha\left(\frac{T_1+T_2}{۲}-\cancel{T_0}\right)dx+\int m\alpha\left(\frac{T_2-T_1}{h}\right)dx$$

$\left(\frac{M_0 l}{2}\right)$ $\frac{2}{3}l$ 1 $\frac{M_0}{l}$ 0

$$\frac{\alpha(5-25)}{h}\left(\frac{l_?}{2}\right)$$


+l
n=+1
l
D
1
+l
1
m=0
n=+1
1
نیروی محوری
n, m واحد
1

$$\int n\alpha\left(\frac{T_1+T_2}{۲}-T_0\right)dx$$

$$=(+1)\alpha\left(\frac{20+(-10)}{2}\right)l+$$

$$(+1)\alpha\left(\frac{25+5}{2}\right)l=20\alpha L$$

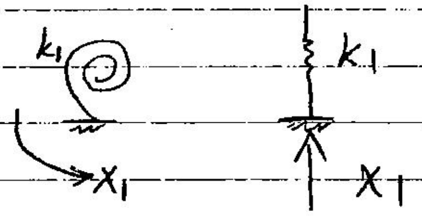
$$\Rightarrow \delta_D=\frac{M_0 l^2}{3EI}+\frac{M_0 l^2}{2EI}-\frac{10\alpha}{h}l^2+20\alpha l$$

* بار واحد نامعین :

برای سازه‌های یک درجه نامعین

$$\Delta'_1+\delta_{11}X_1=0 \quad \text{یا} \quad \frac{-X_1}{k_1}$$

→ اگر فنر بود



$$f_1=\frac{1}{k_1}$$

$$\Delta'_1+\omega_R=\int\frac{mM_0\,dx}{EI}+\int\frac{nN_0\,l}{EA}$$
$$+\sum n\alpha\,\Delta T.\,l+\cdots$$

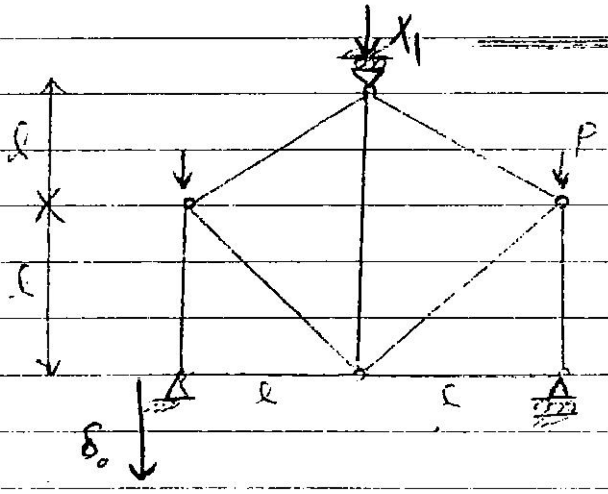
$$\delta_{11}=\int\frac{m^2dx}{EI}+\int\frac{n^2dx}{EA}+\cdots$$

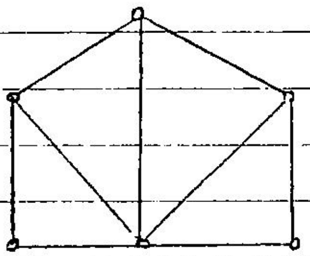
M_0 و N_0 و ... سازه مبنا

m و n و ... ⟸ واحد

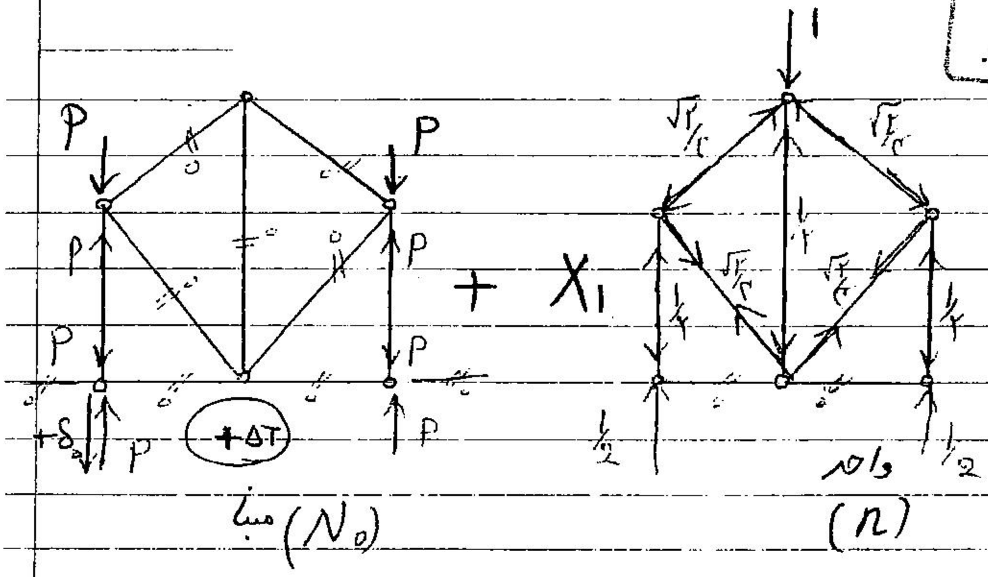
مثال)

۱ درجه نامعین خارجی





$$\begin{cases} +\Delta T \leftarrow \text{تمام اعضا} \\ EA \text{ و } \alpha \end{cases}$$



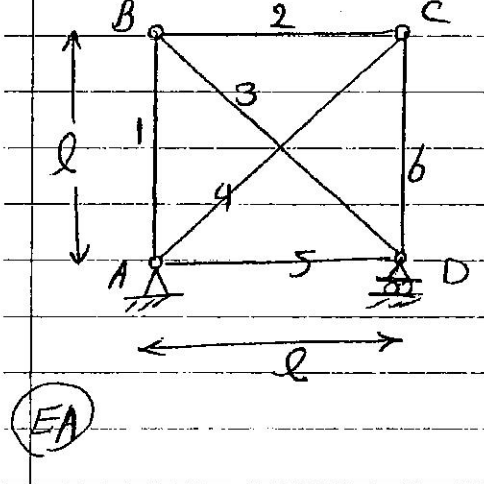
$$\Delta_1' + \delta_{11}\cdot X_1 = 0 \Rightarrow X_1 = \frac{2\alpha\Delta T.\ell - \delta_0/2 - P\ell/EA}{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ell/EA}$$

$$* \ \Delta_1' + \omega_R = \underbrace{\sum \frac{nN_0\ell}{EA}}_{2\times\frac{(-1/2)(-P)\ell}{EA}} + \sum n\alpha.\Delta T.\ell = \frac{P\ell}{EA} + \frac{\delta_0}{2} - 2\alpha\Delta T.\ell$$

$$\omega_R \swarrow \left(\delta_0 \times -\tfrac{1}{2}\right) \qquad \sum n\alpha.\Delta T.\ell \searrow \alpha(+\Delta T)\left[-\tfrac{1}{4}\times\ell\times 2 + \tfrac{-1}{4}\times 2\ell\right]$$

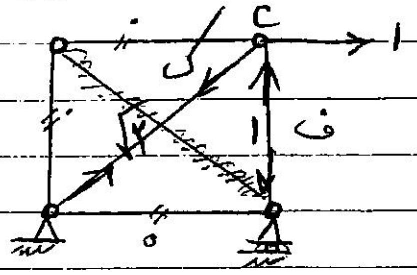
$$* \ \delta_{11} = \sum\frac{n^2\ell}{EA} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2\times(\ell\sqrt{2})\times 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\times\ell\times 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\times 2\ell}{EA} = \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\ell}{EA}$$

۸۷) اگر بر اثر بارگذاری خارجی نیروی محوری اعضای خرپای نامعین نشان داده شده را F_i بنامیم، تغییر مکان افقی C کدام است؟ (EA ثابت)



1) $\frac{\ell}{EA}(\sqrt{2}F_4 - F_6)$
2) $\frac{\ell}{EA}(F_4 - 2F_6)$
3) $\frac{\ell}{EA}(2F_4 - F_6)$
4) $\frac{\ell}{EA}(F_4 - \sqrt{2}F_6)$

۷ نامعین داخلی ← اعضا حذف
نامعین خارجی ← تکیه‌گاه حذف



$$1\times\delta_{HC}=\frac{\sum nNl}{EA}$$

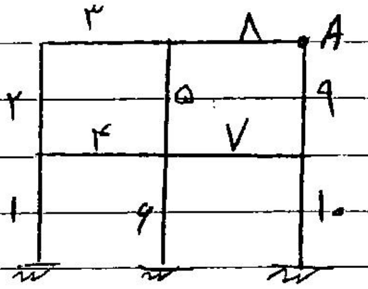
(n) واحد

به جای آنکه سازه واحد را که سازه‌ای نامعین است حل کنم می‌توانم یکی از اعضا را حذف کنم و سازه را به شکلی که معین و ناپایدار تا تحلیل کرد.

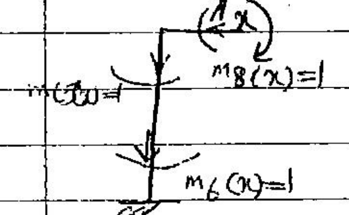
$$\Rightarrow=\frac{\sqrt{2}\times F_c\times l\sqrt{2}+(-1)F_y\times l}{EA}$$

$=$ گزینه ۳

مثال) اگر لنگر خمشی عضو شماره ۸ را با M_i نشان دهیم، بطوریکه در طول عضو متغیر باشد یعنی $M_i=M_i(x)$ آنگاه دوران


۳
۸
A
۲
۵
۹
۴
۷
۱
۶
۱۰

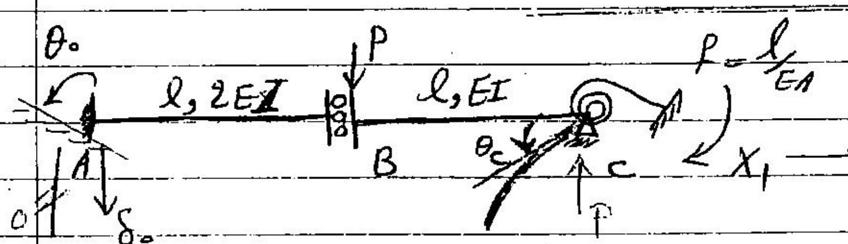
گره A کدام است؟ (۸۸)


$m_8(x)=1$
$m(x)=1$
$m_6(x)=1$

$$1\times\theta_c=\int\frac{m(x)\,M(x)\,dx}{EI}$$

گزینه‌ها نیست!

مثال ۸۶) لنگر فنر؟ $f=\frac{l}{EA}$

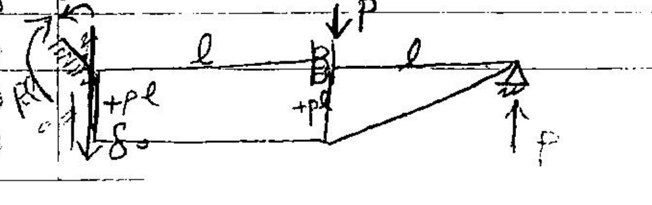

θ_0
P
$l, 2EI$
l, EI
A
B
θ_c
C
P
δ_0
o

$X_1\longrightarrow$ جهت فرضی

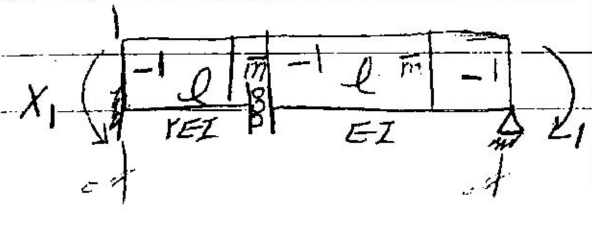
$\Delta'_1=-X_1$

$$\frac{A_m}{EI}\cdot\bar{m}=\frac{2l}{EI}\times\frac{l}{2}=\frac{l^2}{EI}$$

$$\Delta'_1+\delta_{11}X_1=-X_1 f_1$$


δ_0
P
l
l
B
$+Pl$
$+Pl$
δ_0
P

$+\;X_1$


1
-1
l
$\bar{m}$
-1
l
$\bar{m}$
-1
2EI
EI
1

$$\frac{A_{M_0}}{EI}\cdot\bar{m}=\frac{+Pl\times l}{2EI}\times(-1)+\frac{(+Pl\times l)}{EI}\times -1$$

فروشگاه اینترنتی جزوه
www.ujozve.info
شماره تماس: ۰۹۳۶۹۰۷۸۴۶۳۶۹

$$\Delta_1'+\omega_R=\int\frac{mM_0\,dx}{EI}=\overbrace{\frac{A\,M_0}{EI}\cdot\bar{m}}$$

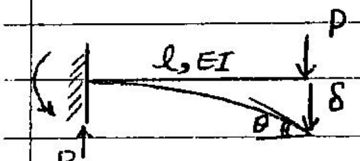
$$\swarrow$$

$$(\theta_0\times 1)+(\delta_0\times 0)$$

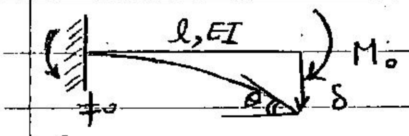
$$\delta_{11}=\frac{A_m}{EI}\cdot\bar{m}=\frac{l\times 1}{2EI}\times 1+\frac{l\times 1}{EI}\times 1=\frac{3}{2}\,l/_{EI}$$

$$\Rightarrow\Delta_1'=\frac{-Pl^2}{EI}-\theta_0$$

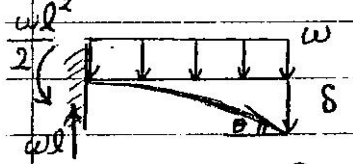
$$\Delta_1'+\delta_{11}X_1=-X_1\;\delta_1\Rightarrow X_1=\frac{2}{5}Pl+\frac{2}{5}\frac{\theta_0 EI}{l}$$



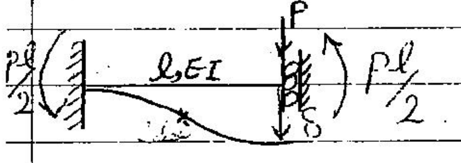
$$\begin{cases}\delta=\dfrac{Pl^3}{3EI}\\ \theta=\dfrac{Pl^2}{2EI}\end{cases}\qquad (1$$



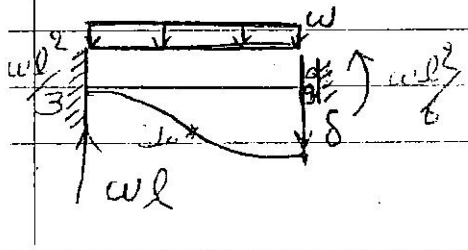
$$\begin{cases}\delta=\dfrac{M_0l^2}{2EI}\\ \theta=\dfrac{M_0l}{EI}\end{cases}\qquad (2$$



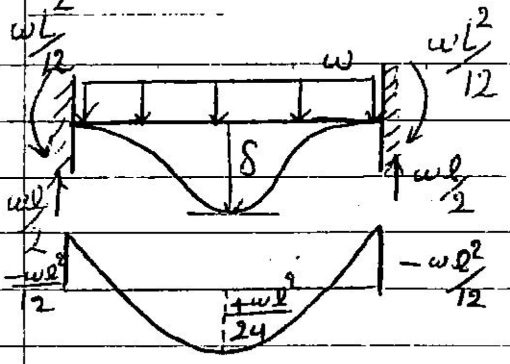
$$\begin{cases}\delta=\dfrac{wl^4}{8EI}\\ \theta=\dfrac{wl^3}{6EI}\end{cases}\qquad (3$$



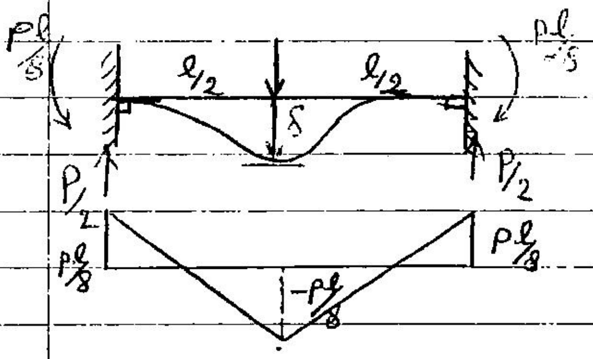
$$\delta=\frac{Pl^3}{12EI}\qquad (4$$



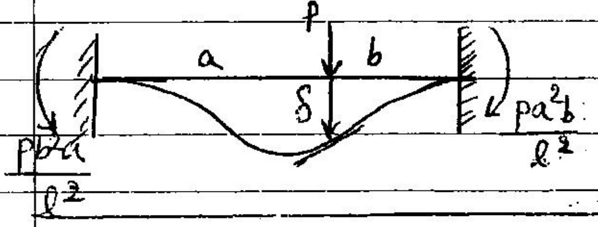
$$\delta=\frac{wl^4}{24EI}\qquad (5$$


$\frac{\omega l^2}{12}$
ω
$\frac{\omega l^2}{12}$
δ
$\frac{\omega l}{2}$
$\frac{\omega l}{2}$
$-\frac{\omega l^2}{12}$
$+\frac{\omega l^2}{24}$
$-\frac{\omega l^2}{12}$

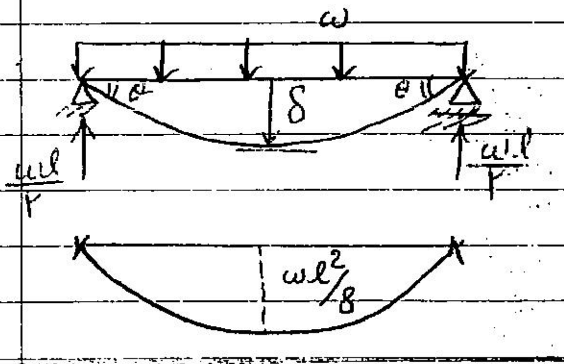
$$\delta = \frac{\omega l^4}{384EI}$$ (6


$\frac{Pl}{8}$
$l/2$
$l/2$
$\frac{Pl}{8}$
δ
$P/2$
$P/2$
$Pl/8$
$Pl/8$
$-Pl/8$

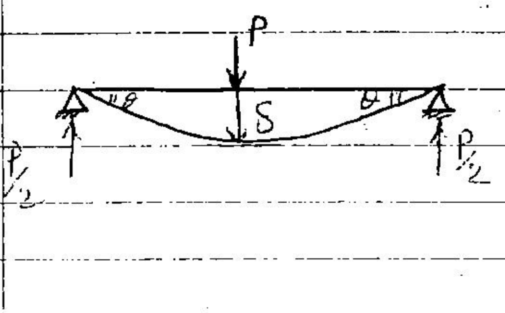
$$\delta = \frac{Pl^3}{192EI}$$ (7


P
a
b
δ
$\frac{Pb^2a}{l^2}$
$\frac{Pa^2b}{l^2}$

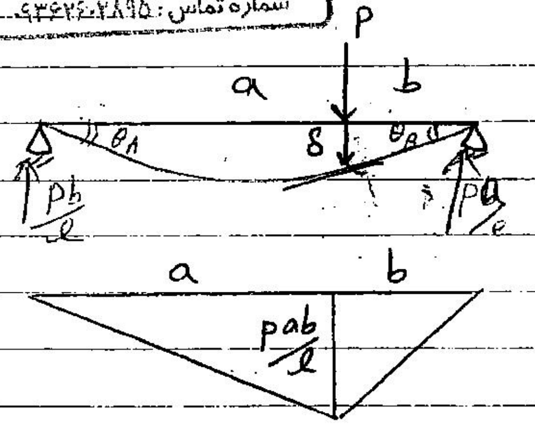
$$\delta = \frac{Pa^3b^3}{3EIl^3}$$ (8


ω
θ
θ
δ
$\frac{\omega l}{۲}$
$\frac{\omega l}{۲}$
$\omega l^2/8$

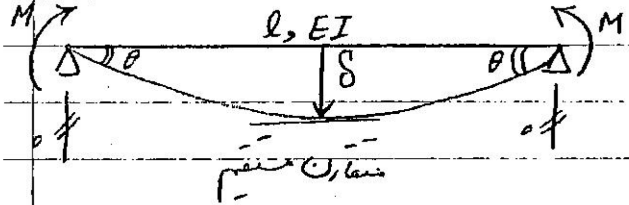
$$\begin{cases} \delta = \dfrac{5\omega l^4}{384EI} \\ \theta = \dfrac{\omega l^3}{24EI} \end{cases}$$ (9


P
θ
θ
δ
$P/2$
$P/2$

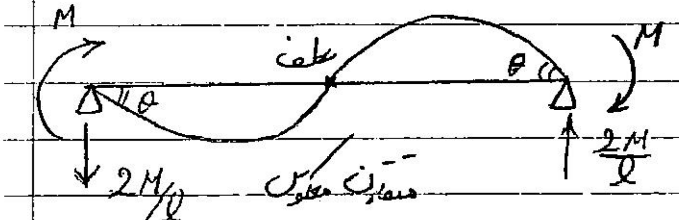
$$\begin{cases} \delta = \dfrac{Pl^3}{48EI} \\ \theta = \dfrac{Pl^2}{16EI} \end{cases}$$ (10


P
a
b
θ_A
δ
θ_B
$\frac{Pb}{l}$
$\frac{Pa}{l}$
a
b
$\frac{Pab}{l}$

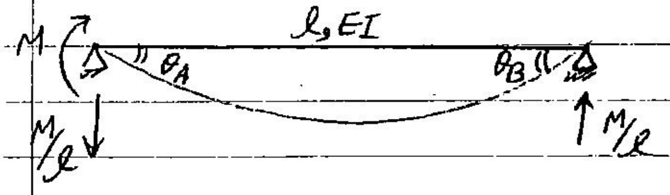
$$\begin{cases} \delta = \dfrac{Pa^2b^2}{3EIl} \\ \theta_A = \dfrac{Pab(l+b)}{6EIl} \\ \theta_B = \dfrac{Pab(l+a)}{6EIl} \end{cases}$$ (11


M
M
l, EI
θ
θ
δ
0
0
متقارن مستقیم

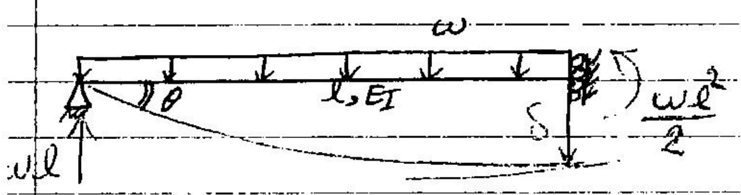
$$\begin{cases} \delta = \dfrac{Ml^2}{8EI} \\ \theta = \dfrac{Ml}{EI} \end{cases}$$ (12


M
M
عطف
θ
θ
$2M/l$
$\frac{2M}{l}$
متقارن معکوس

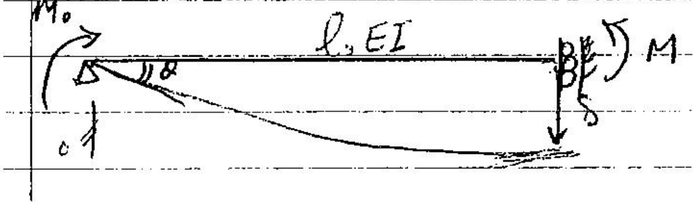
$$\theta = \frac{Ml}{6EI}$$ (13


M
l, EI
θ_A
θ_B
M/l
M/l

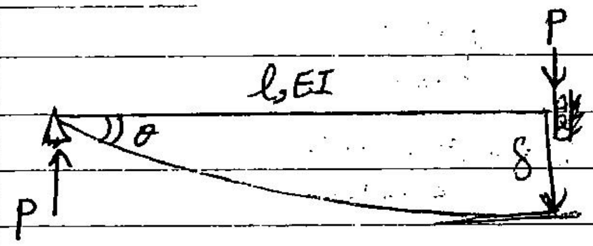
$$\begin{cases} \theta_A = \dfrac{Ml}{3EI} \\ \theta_B = \dfrac{Ml}{6EI} \end{cases}$$ (14


ω
l, EI
θ
δ
$\frac{\omega l^2}{2}$
ωl

$$\begin{cases} \delta = \dfrac{5\omega l^4}{24EI} \\ \theta = \dfrac{\omega l^3}{3EI} \end{cases}$$ (15


M_o
l, EI
θ
M
B
δ
0

$$\begin{cases} \delta = \dfrac{M_o l^2}{2EI} \\ \theta = \dfrac{M_o l}{EI} \end{cases}$$ (16



$$\begin{cases}\delta = \frac{Pl^3}{3EI}\\ \theta = \frac{Pl^2}{2EI}\end{cases}$$ (17

«نکات»

1) در تمام فرمولها [illegible] θ از δ یکی کمتر است.

2) در نقاط عطف که در بعضی سازه‌ها داریم، M صفر است.

3) 4 و 5 و 6 و 7 و 8، سازه‌های نامعین اند.

4) فرمول 1 = 17 و فرمول 16 = 2

$\underbrace{1، 4، 7، 8، 10 و 11 و 17}_{\text{سختی خمشی دارند}}$

تیرها، قابها، خرپا

معین — روابط تعادل

نامعین

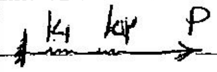
روابط تعادل

روش سختی — فنرها

روش سازگاری

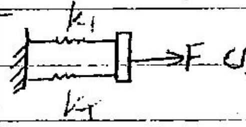
فنرها → سری

فنرها → موازی



سری

$$\begin{cases}F_1 = F_2 = \dots = F\\ k = k_1 = \dots = k\end{cases}$$



موازی

$$\begin{cases}\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta\\ F = F_1 + F_2 + \dots\end{cases}$$

* در فنرهای سری: $\frac{1}{k_{کل}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots$

* در فنرهای موازی: $k_{کل} = k_1 + k_2 + \dots$

$$F_i = \frac{k_i}{\Sigma k_i} \times F$$

فروشگاه اینترنتی [illegible]
شماره تماس : ۰۹۳۶۴۶-۷۸۹۵

* انواع سختی‌ها :

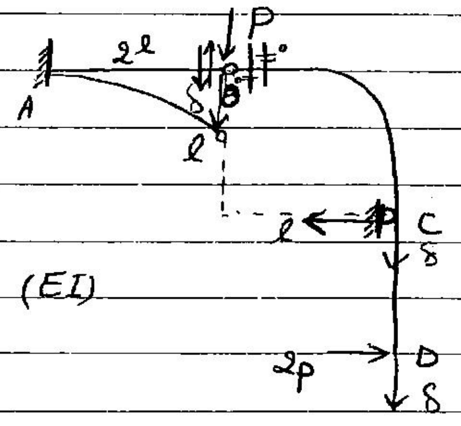
محوری : $\frac{EA}{l}$

پیچشی : $\frac{GJ}{l}$

خمشی : → انتقالی : وقتی اتفاق می‌افتد که بار متمرکز داشته باشیم ... $\alpha\ \frac{EI}{l^3}$

↙ دورانی :

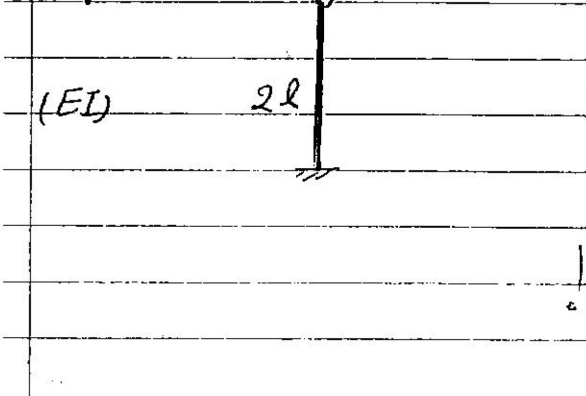
مثال) تغییر مکان قائم گره D ؟


P
2l
A
B
δ
l
C
δ
l
2P
D
δ
(EI)

$$\delta_{VD}=\delta=\frac{P(2l)^3}{3EI}=\frac{8}{3}\frac{Pl^3}{EI}$$

فرمول ۱

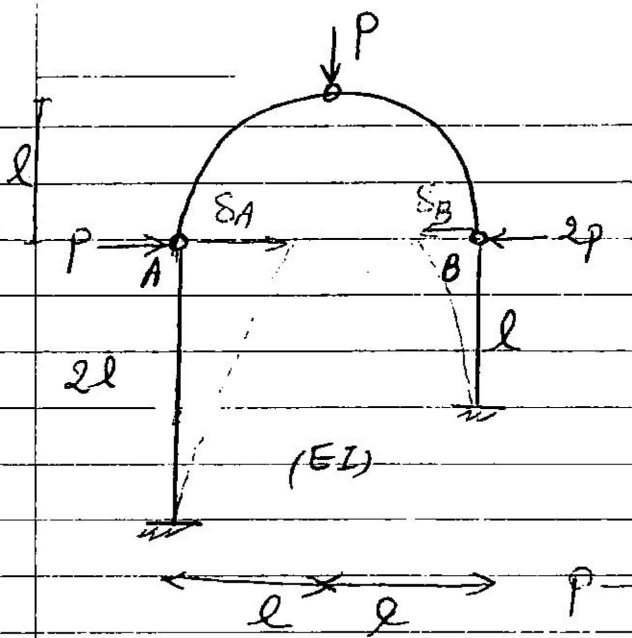
مثال) نقاط A و B چقدر از هم دور می‌شوند؟


P
l
δ
$\frac{P\sqrt2}{2}$
$\frac{P\sqrt2}{2}$
Δ=?
A
δ
B
B'
δ
l
$l\sqrt2$
$l\sqrt2$
(EI)
2l

$$\delta=\frac{(P\sqrt2/2)(l\sqrt2)^3}{EI}=\frac{2}{3}\frac{Pl^3}{EI}$$

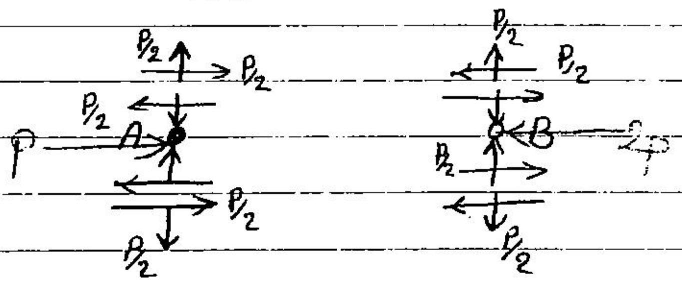
$$\delta_{A,B}=2\Delta=2\delta\cos45=\frac{2\sqrt2}{3}\frac{Pl^3}{EI}$$

! اعضائی که دو سر مفصل خرپایی فرض می‌شوند !


P
l
δ_A
δ_B
P
A
B
2p
l
2l
(EI)
l
l

مثال) نقاط A و B چقدر به هم نزدیک می‌شوند؟

$$\delta_{A,B} = \delta_A + \delta_B$$


P/2
P/2
P/2
P
A
P/2
P/2
P/2
P/2
P/2
B
2p
P/2
P/2

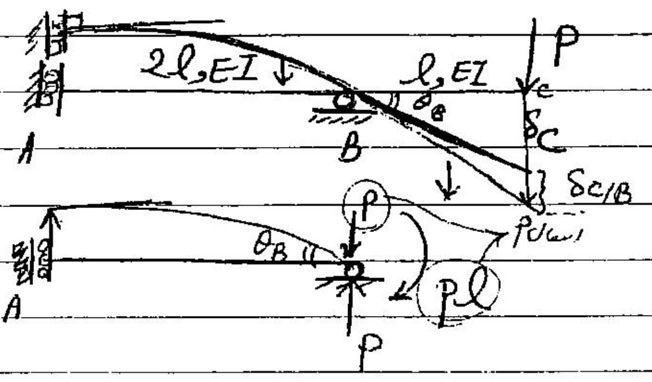
$$\delta_A = \frac{(P/2)(2l)^3}{3EI} \quad , \quad \delta_B = \frac{(3/2\,P)(l)^3}{3EI}$$

$$\Longrightarrow \delta_{A,B} = \frac{11}{6}\frac{Pl^3}{EI}$$

مثال) تغییرمکان نقطه A را

محاسبه کنید

فرمول 16


2l, EI
P
l, EI
C
θ_B
δ_C
$\delta_{C/B}$
A
B
P
انتقال P
θ_B
Pl
A
P

$$\delta_A = \frac{(Pl)(2l)^2}{2EI} = \frac{2Pl^3}{EI}$$

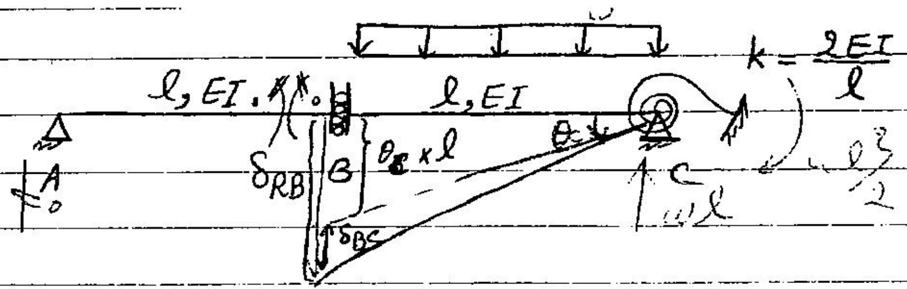
$$\theta_B = \frac{(Pl)(2l)}{EI} = \frac{2Pl^2}{EI} \qquad \delta_{C/B} = \frac{Pl^3}{3EI}$$

فرمول 12

فرمول 1

$$\delta_C = \theta_B \cdot l + \delta_{C/B} = \frac{7Pl^3}{3EI}$$

مثال) $? = \theta_C$

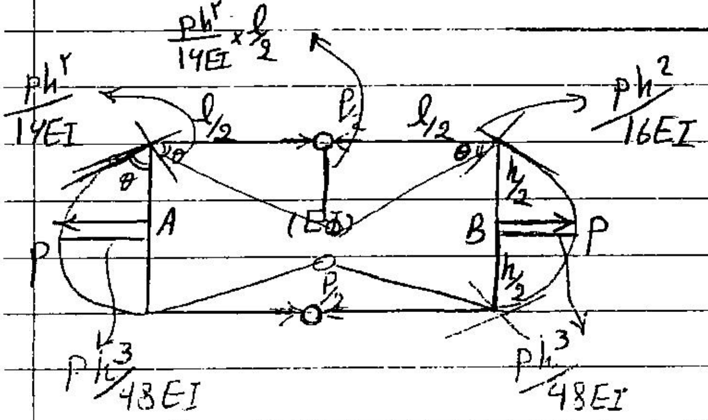

w
l, EI
l, EI
$k = \frac{2EI}{l}$
A
B
C
$\theta_B \times l$
δ_{RB}
δ_{BC}
θ_C
wl
$\frac{wl^2}{2}$

$$\theta_C = \theta_{\text{فنر}} = \frac{M}{k} = \frac{wl^3}{4EI}$$

$$\delta_{RB} = \underbrace{\theta_C \times l}_{\frac{wl^3}{4EI}} + \underbrace{\delta_{B/C}}_{\frac{wl^4}{8EI}} = \frac{3}{8}\,\frac{wl^4}{EI}$$

جدول ۲

مثال)


$\frac{ph^2}{16EI} \times \frac{l}{2}$
$\frac{ph^2}{16EI}$
$\frac{ph^2}{16EI}$
$l/2$
$l/2$
$P/2$
$P/2$
θ
A
B
(EI)
P
P
$h/2$
$h/2$
$\frac{ph^3}{48EI}$
$\frac{ph^3}{48EI}$

فرمول 10)

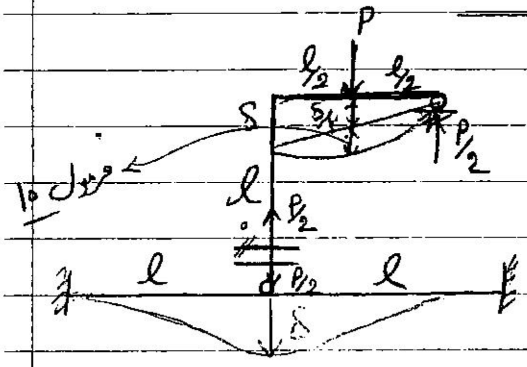
$$\delta_{A,B} = \frac{2ph^3}{48EI} = \frac{ph^3}{24EI}$$

نقاط C و D چقدر به هم نزدیک می‌شوند؟

$$\delta_{C,D} = \delta_C + \delta_D = 2 \times \frac{ph^2}{16EI} \times \frac{l}{2} = \frac{ph^2 l}{16EI}$$

مثال) تغییر مکان زیر بار P چقدر است؟

* نامعین است.


P
$l/2$
$l/2$
$\delta/2$
$P/2$
S
فرمول ۱۰
l
$P/2$
$P/2$
l
l
δ

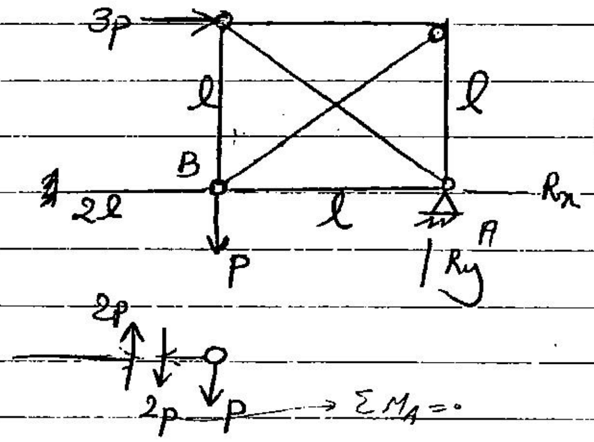
فرمول 7) برای تیر

$$\delta = \frac{(P/2)(2l)^3}{192EI} = \frac{Pl^3}{48EI}$$

(تیر 2EI)

$$\delta_{\text{زیر بار } P} = \underbrace{\frac{\delta}{2} + \frac{Pl^3}{48EI}}_{\text{فرمول } 10} = \frac{Pl^3}{32EI}$$

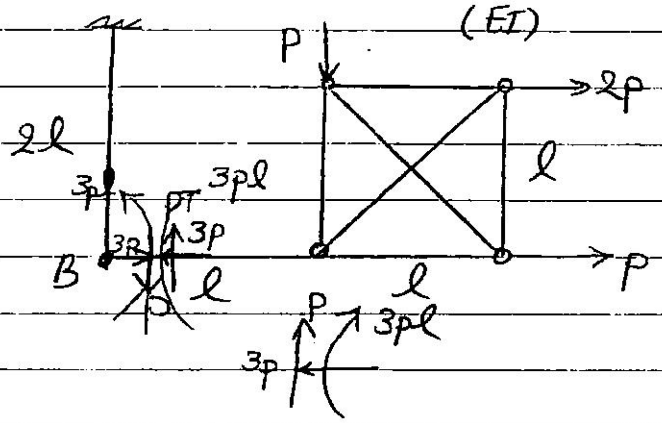
مثال ۸۸) تغییر مکان گره B ؟


3p
l
l
B
2l
l
Rx
P
Ry
A
2p
2p
P
ΣM_A = 0

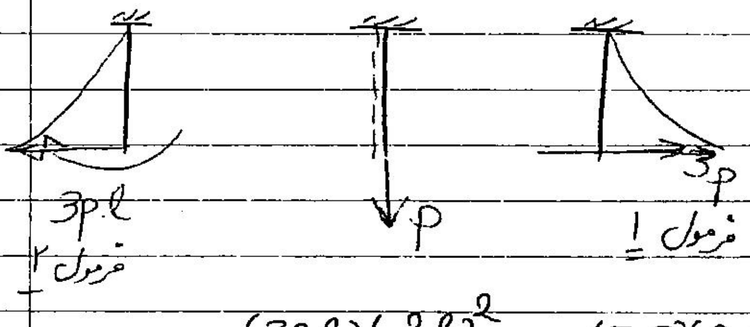
(EI)

$$\delta_B = \frac{(2P)(2l)^3}{3EI} = \frac{16}{3}\frac{pl^3}{EI}$$

مثال) تغییر مکان گره B ؟

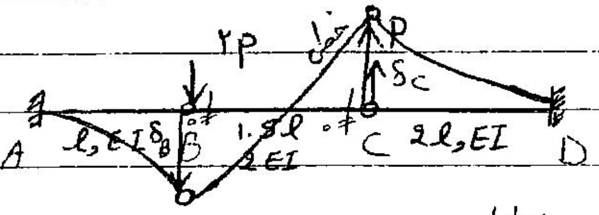

P
(EI)
2p
2l
l
3pl
3p
3p
3p
B
l
l
P
P
3pl
3p

$P \times 2l + 2p \times l - P \times l = 3pl$


3pl
فرمول ۲
P
3p
فرمول ۱

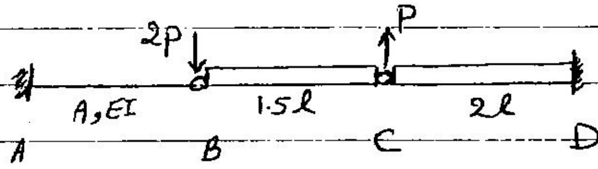
$$\delta_B = \frac{(3pl)(2l)^2}{2EI} - \frac{(3P)(2l)^3}{3EI} = -\frac{2pl^3}{EI}$$

مثال) دوران عضو BC چقدر است؟

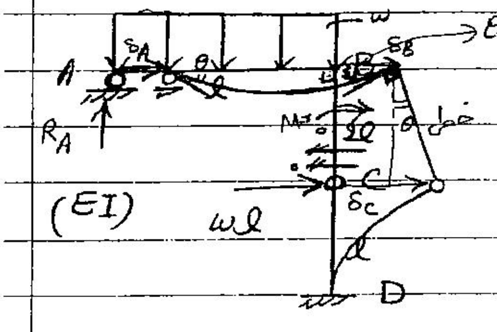

۲P
P
خط
δ_C
δ_B
A
B
C
D
l, EI
1.5l
2EI
2l, EI

BC عضو دو سر مفصل است که مثل میله عمل می‌کند.

$$\theta_{BC}=\frac{\delta_B+\delta_C}{1.5l}=\frac{\overset{\text{رابطه ۱}}{\frac{2Pl^3}{3EI}}+\overset{\text{رابطه ۱}}{\frac{P(2l)^3}{3EI}}}{1.5l}=\frac{20}{9}\,\frac{Pl^2}{EI}$$


2P
P
A, EI
1.5l
2l
A
B
C
D

مثال) تغییر مکان گره C؟


w
A
δ_A
θ
δ_B
θ
B
M=0
2l
خط
R_A
(EI)
wl
C
δ_C
l
D

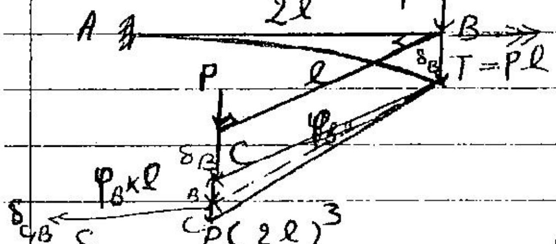
$$\delta_C=\frac{(wl)(l^3)}{3EI}$$

مثال) تغییر مکان گره B چقدر است؟

$$\delta_A=\delta_B=\delta_C=2l\,\theta=\frac{wl^4}{4EI}$$

⑨ فرمول: $\frac{wl^3}{24EI}$

مثال) تغییر مکان گره C چقدر است؟


A
2l
P
B
$T=Pl$
δ_B
P
l
φ_B
C
δ_B
$\varphi_B \times l$
δ_{CB}

$$\delta_B=\frac{P(2l)^3}{3EI}$$

$\nu=0.2$

E

$$G=\frac{E}{2(1+\nu)}=\frac{E}{2.5}$$

$$\varphi_B=\varphi_{BA}=\frac{\overset{Pl}{T}\,2l}{\underset{2I}{J}\,\underset{E/2.5}{G}}=2.5\,\frac{Pl^2}{EI}$$

$$\delta_C = \delta_B + \varphi_B \times l + \delta_{C/B} = 5.5\ Pl^3/EI$$

$$\frac{Pl^3}{3EI}$$

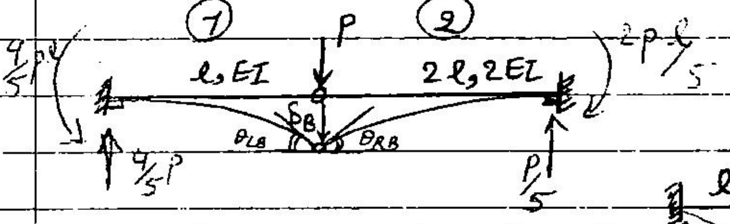
نیروی متمرکز گره‌ای ← روش سختی خمشی انتقالی

بارگذاری عضوی ← روش سازگاری

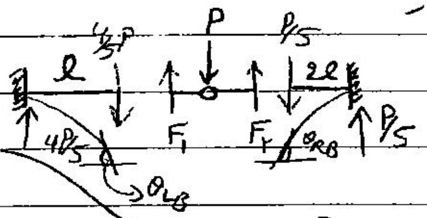
نامعین

مثال)

سازه نامعین است.



①
②
P
l, EI
$2l, 2EI$
$\frac{4}{5}Pl$
$\frac{2Pl}{5}$
δ_B
θ_{LB}
θ_{RB}
$\frac{4}{5}P$
$P/5$



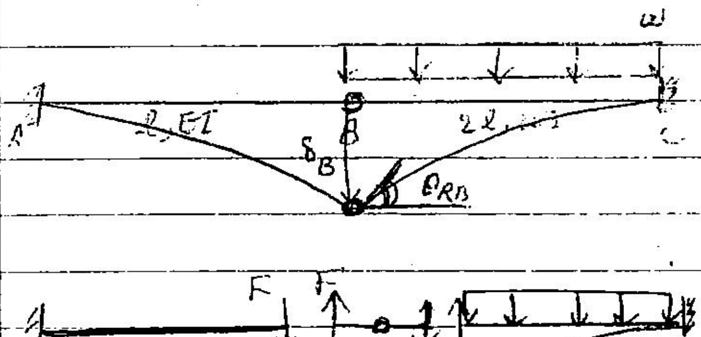
l
$\frac{4}{5}P$
P
$P/5$
$2l$
F_1
F_2
$4P/5$
θ_{RB}
$P/5$
θ_{LB}

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_B = \frac{F_1}{k_1} = \frac{F_2}{k_2} = \frac{F_B}{k_B} = \frac{P}{k_1+k_2} = \frac{4}{15}\frac{Pl^3}{EI}$$

$$F_1 = \frac{3EI/l^3}{\underbrace{3EI/l^3}_{k_1} + \underbrace{\frac{3(2EI)}{(2l)^3}}_{k_2}} \times P = \frac{4}{5}P$$

$$\theta_{RB} = \frac{(P/5)(2l)^2}{2(2EI)}$$

مثال)



w
A
l, EI
B
δ_B
$2l$
θ_{RB}
C
F
F
F

چون بارگذاری عضوی است از رابطه سختی نمی‌توان استفاده کرد و از روش سازگاری حل می‌شود.

$$\delta_1 = \delta_2 \Rightarrow \frac{Fl^3}{3EI} = \frac{\omega(2l)^4}{8(2EI)} - \frac{F(2l)^3}{3(2EI)}$$

$$\Rightarrow F = \frac{3}{5}\omega l$$

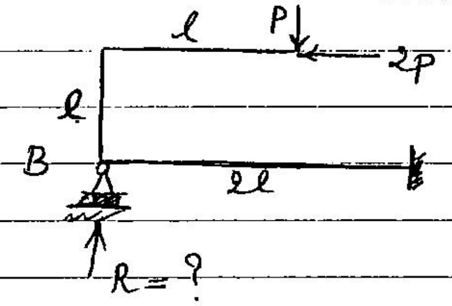
فروشگاه اینترنتی جزوه
شماره تماس : [illegible]

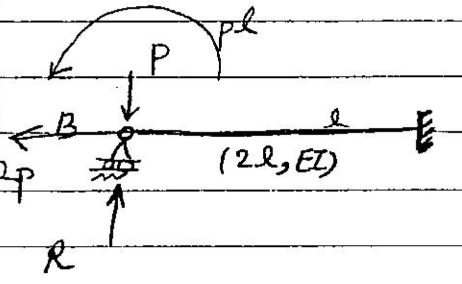
$$\delta_B = \frac{Fl^3}{3EI} = \frac{(\frac{3}{5}\omega l)(l^3)}{3EI} = \frac{\omega l^4}{5EI}$$

$$\theta_{RB} = \frac{\omega(2l)^3}{\underset{2EI}{6EI}} - \frac{F(2l)^2}{\underset{2EI}{2EI}}$$

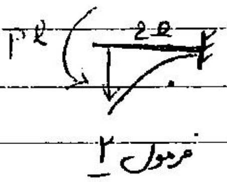
مثال) ۸۸) عکس العمل تکیه‌گاه غلطکی چقدر می‌باشد؟

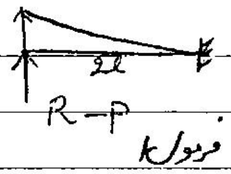
سازه نامعین است پس از روش‌های تقریبی استفاده می‌کنیم.


l
P
2P
l
(EI)
B
2l
R = ?


Pl
P
B
2P
l
(2l, EI)
R

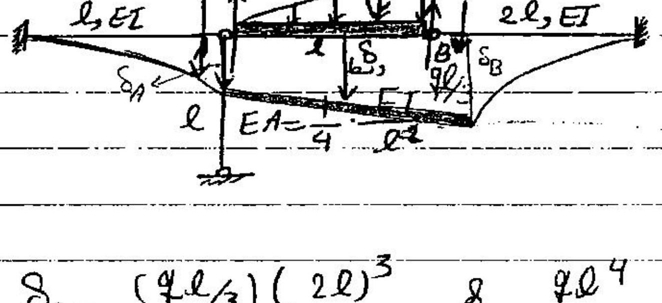
$$\delta_B = 0 \Rightarrow \frac{(Pl)(2l)^2}{2EI} = \frac{(P-R)(2l)^3}{3EI}$$


Pl
2l
فرمول ۲


2l
R − P
فرمول k

$$\Rightarrow R = \frac{P}{4}$$

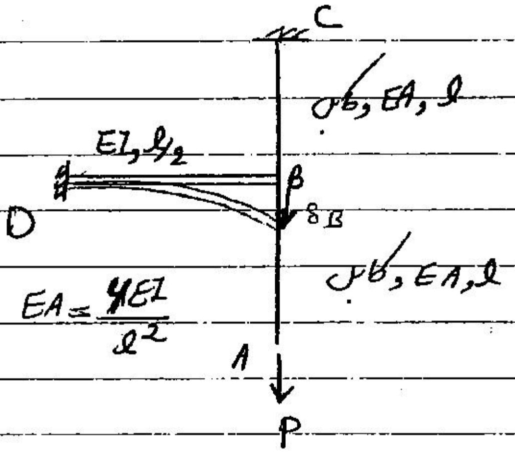
مثال) تغییر مکان در وسط عضو صلب؟


ql/2
ql/4
q
l, EI
2l, EI
l
δ وسط
B
δ_B
δ_A
ql/3
EI
l
EA = 1/4 l²

روش فنری
$$\delta_A = \frac{ql/6}{\frac{3EI}{l^3} + \frac{EA}{l}} = \frac{2}{39}\frac{ql^4}{EI}$$

$$\delta_B = \frac{(ql/3)(2l)^3}{3EI} = \frac{8}{9}\frac{ql^4}{EI} \Rightarrow \delta_{\text{وسط}} = \frac{\delta_A + \delta_B}{2} =$$

فرمول ۱


C
کابل, EA, l
EI, l/2
B
δB
D
کابل, EA, l
A
P

$EA = \frac{4EI}{l^2}$

مثال) تغییر مکان گره A چقدر است؟

$$\delta_{A,B} = \overset{\text{کشش}}{\frac{Pl}{EI}} = \delta_A - \delta_B$$

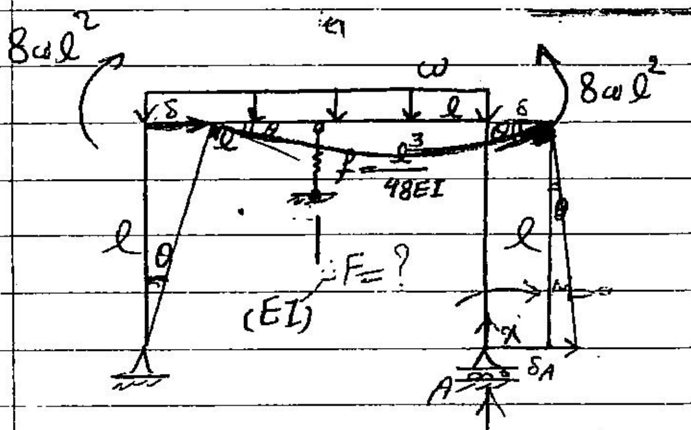
چون میله طول افزایش پیدا کند می (A−B)

$$\delta_A = \delta_B + \frac{Pl}{EA} = \frac{Pl^3}{5EI}$$

$$\frac{6EI}{l^2}$$

$$\delta_B = \frac{P}{\frac{EA}{l} + \frac{3EI}{(l/2)^3}} = \frac{Pl^3}{30EI}$$

مثال)

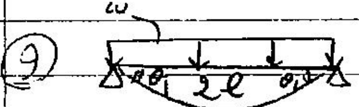

8wl²
w
8wl²
δ
δ
l
θ
l
k = l³/48EI
l
θ
l
θ
F = ?
(EI)
x
δA
A

$$\delta_{\text{فنر}} = \delta_{\text{وسط تیر}}$$

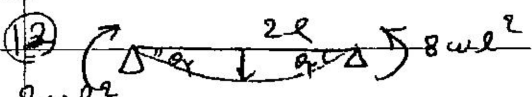
$$\frac{F}{k} = \frac{5w(2l)^4}{384EI} + \frac{(8wl^2)(2l)^2}{8EI} - \frac{F(2l)^3}{48EI}$$

$$k = \frac{48EI}{l^3}$$

⑨



⑫

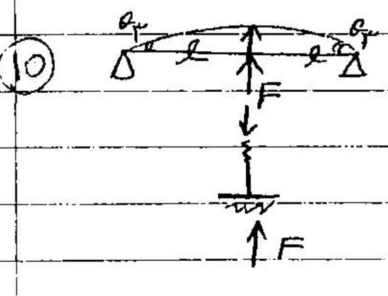

8wl²
2l
θ2
θ2
8wl²

$\hookrightarrow F = ?$

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 - \theta_3$$

تغییر مکان تکیه‌گاه غلتکی؟

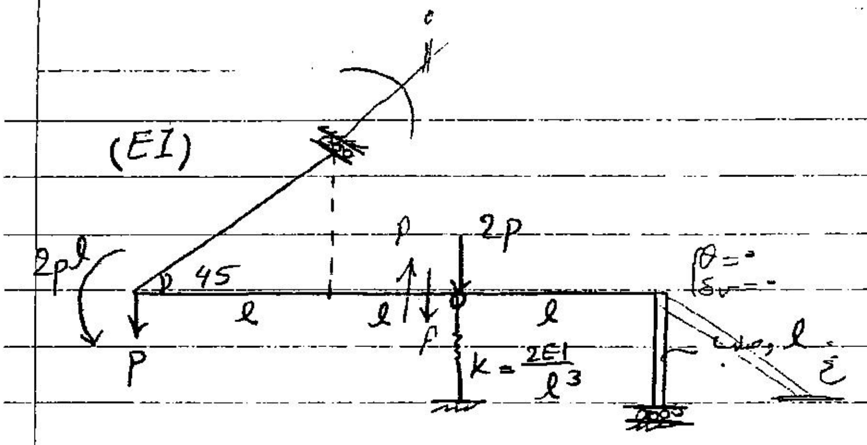
⑩

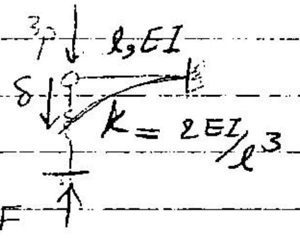


$$\delta_A = \delta + \theta l = 2\theta l$$

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{w(2l)^3}{24EI} & \theta_3 = \frac{F \times (2l)^2}{16EI} \\ \theta_2 = \frac{(8wl^2)(2l)}{2EI} & \longrightarrow \theta = ? \end{cases}$$

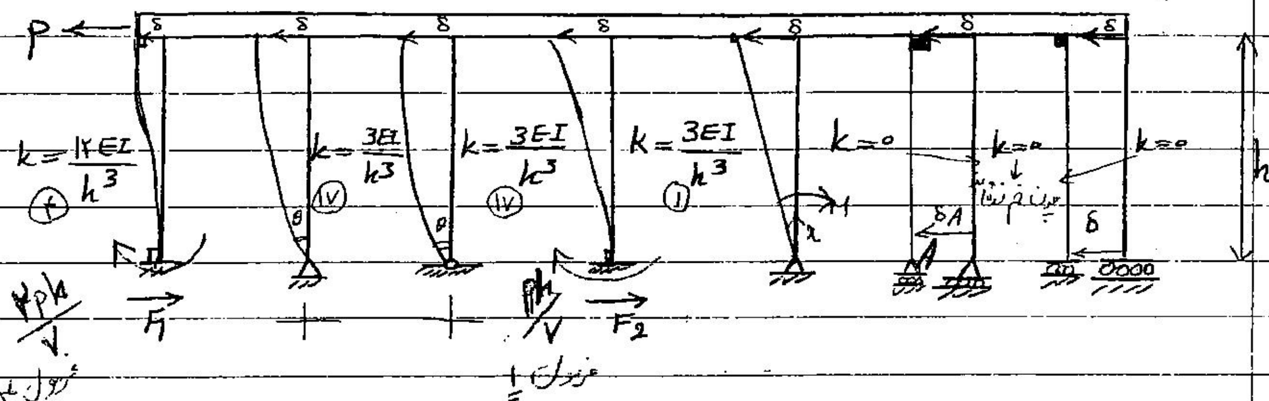
مثال ۱) نیروی فنر چقدر است؟


(EI)
2pl
P
45
l
l
p
2p
F
l
$k=\frac{2EI}{l^3}$
θ=۰
δv=۰
l و صلب

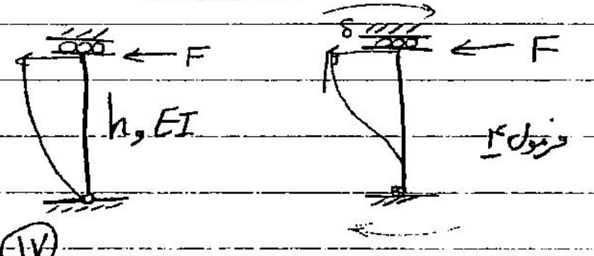

3p
l, EI
δ
$k=2EI/l^3$
F فنر

$$\delta_{\text{تیر}} = \delta_{\text{فنر}} \rightarrow F_{\text{فنر}} = \frac{2EI/l^3}{2EI/l^3 + 3EI/l^3} \times 3p = \frac{6}{5}P$$

مثال ۲)

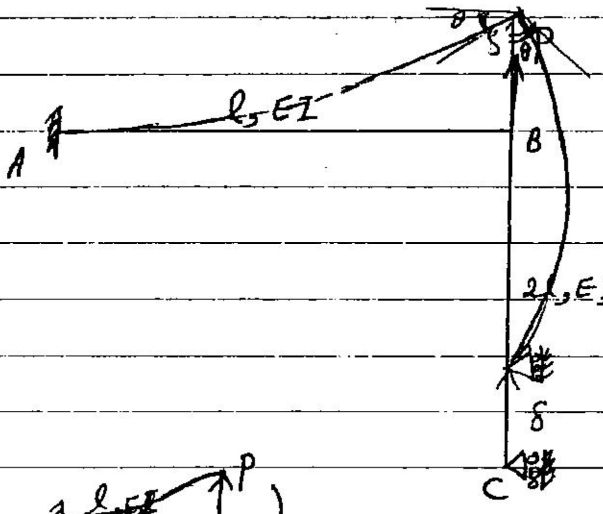

P
δ
$k=\frac{12EI}{h^3}$
④
$k=\frac{3EI}{h^3}$
(۱۷)
θ
$k=\frac{3EI}{h^3}$
(۱۷)
$k=\frac{3EI}{h^3}$
①
x
1
k=۰
k=۰
k=۰
بی‌نهایت
δA
δ
h
۴Ph/۷
F1
Ph/۷
F2
فرمول ۴
فرمول ۱

$$F_1 = \frac{\frac{12EI}{h^3}}{\underbrace{\frac{12EI}{h^3} + \frac{3EI}{h^3} * 3}_{k\text{ کل}}} \times P = \frac{4}{7}P \quad \text{و} \quad F_2 = \frac{P}{7}$$


F
h, EI
δ
F
فرمول ۴
(۱۷)

$$\delta_A = \delta = \frac{P}{k_{\text{کل}}} = \frac{Ph^3}{21EI}$$

مثال) تغییرمکان تکیه‌گاه غلطکی ؟

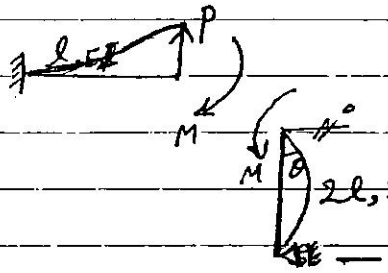


A
l, EI
B
2l, EI
δ
C
θ
δ

در روش سازگاری رابطه δ ها کارایی ندارد
رابطه θ را می‌نویسیم

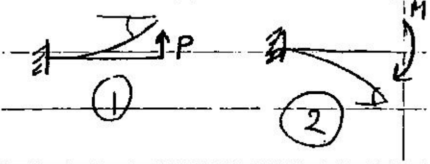
$$\theta^{B}_{\text{تیر}} = \theta^{B}_{\text{ستون}}$$

جدول ۱۴



l, EI
P
M
M
θ
2l, EI

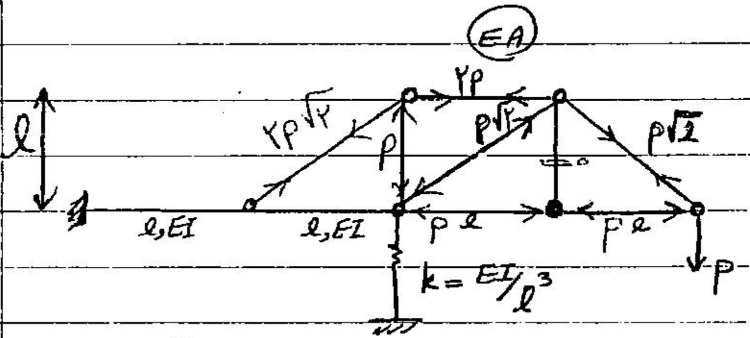
$$\frac{M(2l)}{3EI} = \frac{pl^2}{2EI} - \frac{Ml}{EI}$$



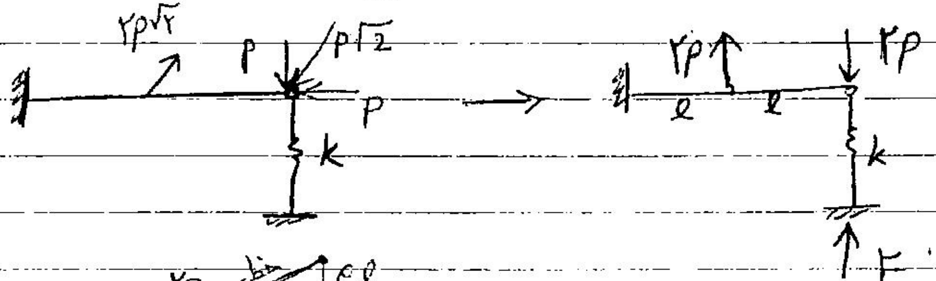
$$\hookrightarrow M = 0.3\,pl$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{pl^3}{3EI} - \frac{Ml^2}{2EI} = \frac{11}{60}\frac{pl^3}{EI}$$

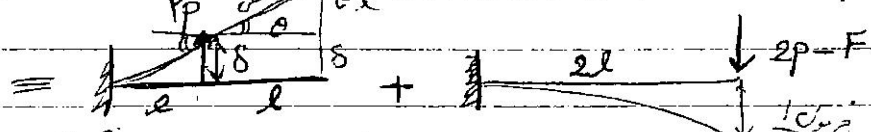
مثال) نیروی فنر ؟



EA
l
2p
$2p\sqrt{2}$
p
$p\sqrt{2}$
$p\sqrt{2}$
l, EI
l, EI
p l
p l
P
$k = EI/l^3$



$2p\sqrt{2}$
P
$p\sqrt{2}$
P
k
2p
2p
l
l
k
F



=
2p
θ
θl
δ
δ
l
l
+
2l
2p − F
جدول ۱

مهم * ! بار ۲p را نمی‌شود به انتهای تیر برد چون
[illegible] حذف [illegible]

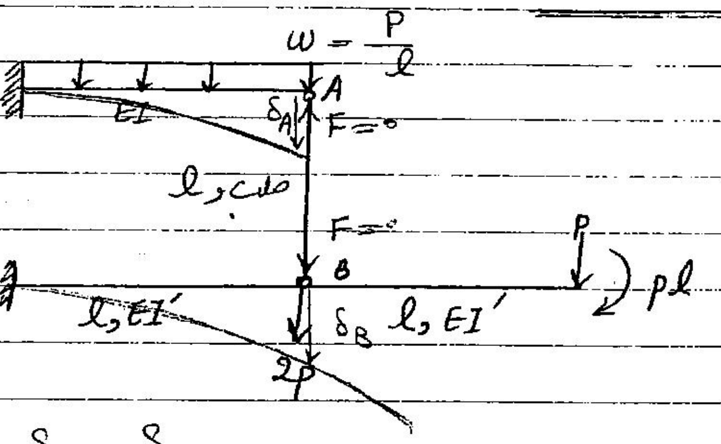
حل

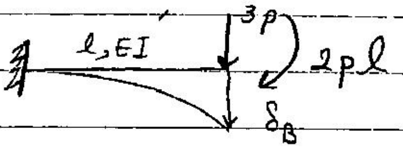
$$\delta_{\text{فنر}} = \delta_{\text{انتهای تیر}} \Rightarrow \frac{F}{k = EI/l^3} = \frac{(2p-F)(2l)^3}{3EI} - \left[\frac{2pl^3}{3EI} + \frac{2p(l^2)l}{2EI}\right]$$

$$\Rightarrow F = P$$

مثال) نسبت I' به I چقدر باشد

تا نیروی عضو AB صفر شود؟


w = P/l
A
EI
δA
F=0
l و صلب
F=0
B
P
pl
l, EI'
δB l, EI'
2P


l, EI'
3P
2pl
δB

$\delta_A = \delta_B$

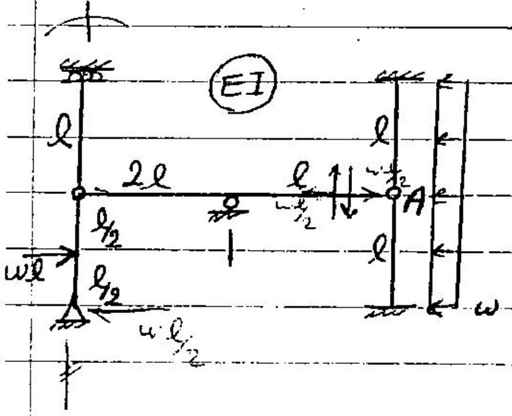
③

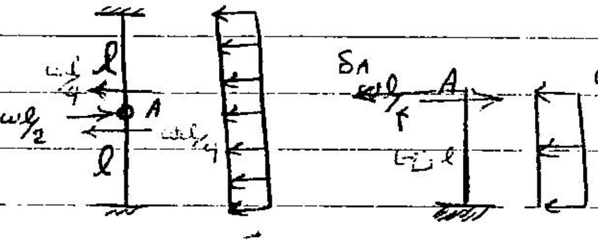
$$\frac{(P/l)(l^4)}{8EI} = \frac{3p\times l^3}{3\times EI'} + \frac{2pl\times l^2}{2EI'}$$

$$I'/I = 16$$

مثال)

$\delta_A = ?$


EI
l
2l
l
l/2
wl
l/2
wl/2
A
l
l
w
wl/2

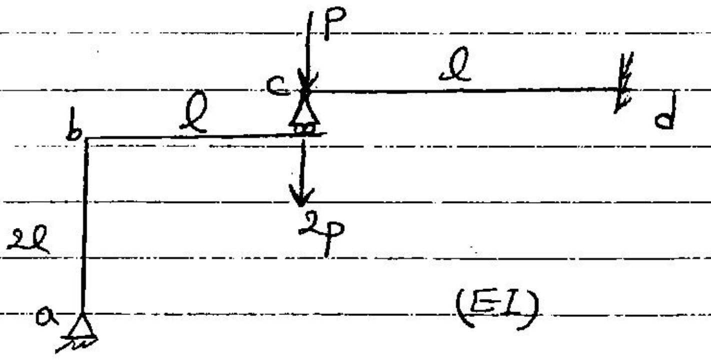

l
wl/4
wl/2
A
wl/4
l
δA
wl/4
A
l
w

$$\delta_A = \frac{wl^4}{8EI} - \frac{(wl/2)l^3}{3EI} = \frac{wl^4}{24EI}$$

③ ①

ادامه مقاومت خمش

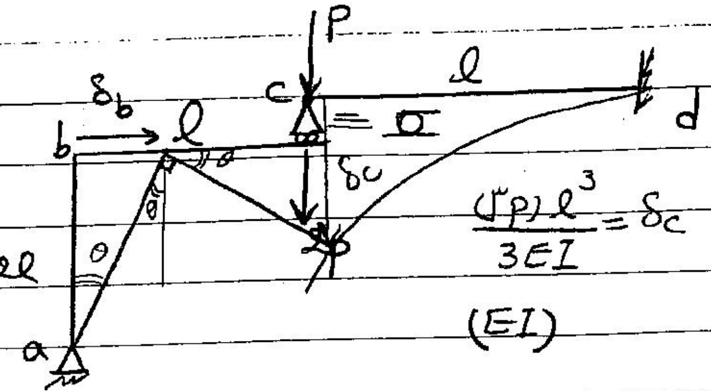
مثال: تغییر مکان نقطه b چقدر است؟


P
l
c
d
b
l
2p
2l
a
(EI)

ادامه

سؤال) تغییرمکان نقطه b چقدر است؟

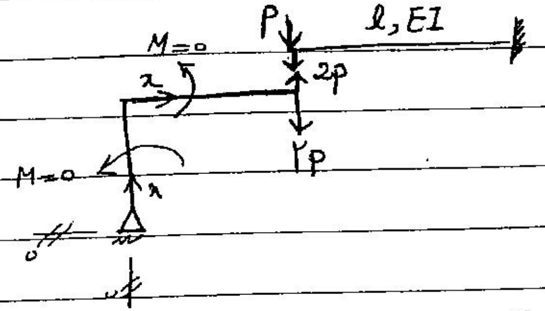
ت و معین است.



$$\frac{(3P)l^3}{3EI}=\delta_c$$

$$(EI)$$

$$\delta_b=\theta\cdot 2l \rightarrow \delta_b=\frac{2Pl^3}{EI}$$



$$\theta=\frac{\delta_c}{l}=\frac{Pl^2}{EI}$$

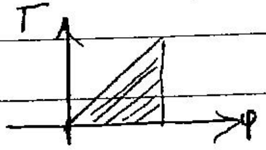
* این سوال از روش کار مجازی هم حل شود.

فروشگاه اینترنتی جزوه
www.ujozve.info
شماره تماس: ۰۹۳۶۲۴۰۲۸۹۵

* "کاستیلیانو" ← قضیه اول / قضیه دوم

$$0<f_s<\alpha_s$$

$$u=\int\frac{M^2dx}{2EI}+\int f_s\frac{V^2dx}{2(GA)}+\int\frac{T^2dx}{2(GJ)}+\int\frac{N^2dx}{2(EA)}+\Sigma\frac{F^2}{2k}+\Sigma\frac{M^2}{2k}$$



$$u=\frac{1}{2}T\cdot\varphi=\frac{T^2l}{2GJ}$$

$$\varphi=\frac{Tl}{GJ}$$

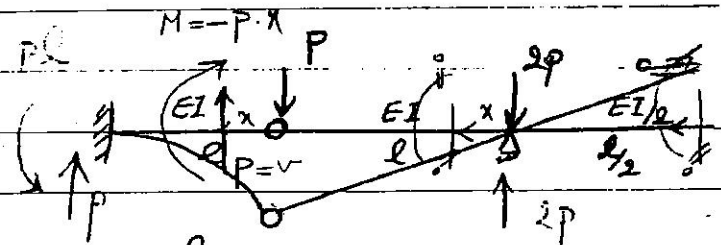
$$\begin{cases}u=\frac{1}{2}F\cdot\delta\\ u=\frac{1}{2}M\cdot\theta\end{cases}$$

$$f_s=\frac{A}{I^2}\int\frac{Q^2}{b^2}dA$$

فقط وقتی بارگذاری متمرکز داریم

یعنی نیرو یا لنگر متمرکز داریم از این رابطه ها استفاده می شود.

مثال: انرژی این تیر چقدر است؟


M = -P·x
P
EI
x
P=V
EI
l
x
2P
EI/2
l/2
P
2P

در سیستم‌هایی که خطی است و فنر نده

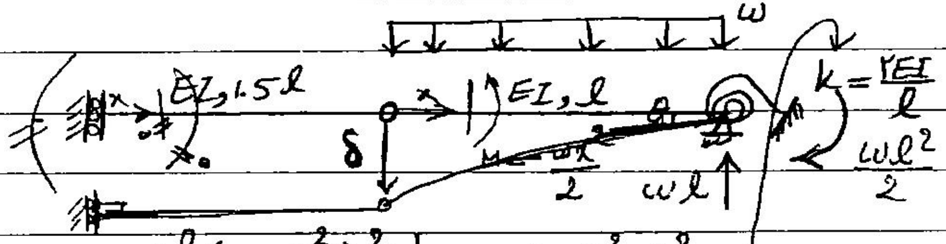
انرژی خمشی نداریم دورانی یا ۲ انرژی در
قسمت اول که عنصر خطی است قرار می‌گیرد.

$$u=\int_0^l \frac{M^2\,dx}{2EI}=\frac{P^2l^3}{6EI}$$

$-Px$

روش دوم: $u=\underbrace{\frac{1}{2}P\cdot\delta}_{\text{مساحت مثلث}}=\frac{1}{2}P\cdot\left(\frac{Pl^3}{3EI}\right)=\frac{P^2l^3}{6EI}$

مثال) انرژی تیر چقدر است؟

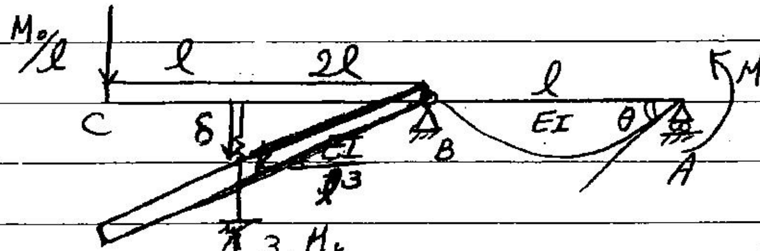

EI, 1.5l
x
δ
x
EI, l
θ
ω
M = ωx²/2
ωl
k = 2EI/l
ωl²/2

$$U=\int_0^l \frac{(-\omega x^2/2)^2\,dx}{2EI}+\frac{(\omega l^2/2)^2}{2k}=\frac{3}{20}\cdot\frac{\omega^2l^5}{EI}$$

$$\delta=\theta l+\frac{\omega l^4}{8EI}=\frac{3}{8}\cdot\frac{\omega l^4}{EI}$$

$$\frac{M}{k}=\frac{\omega l/2}{2EI/l}$$

مثال)


M₀/l
l
2l
l
M₀
C
δ
EI
θ
B
A
EI/l³
3/2 · M₀/l

$U=$ U فنر + U میله + $U_{AB}=\dfrac{\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{M_0}{l}\right)^2}{2k}+0+\dfrac{1}{2}M_0\,\theta$

$k \leftarrow EI/l^3$

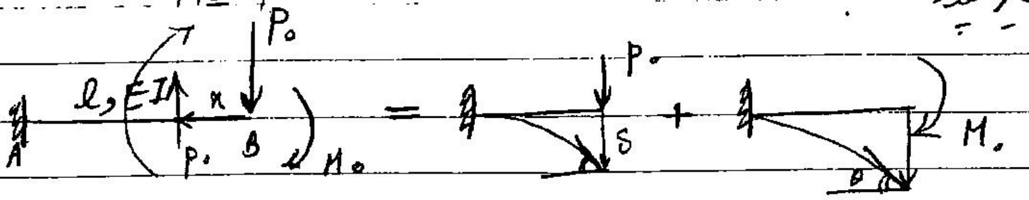
θ: فرمول ۱۴ $\Leftarrow \dfrac{M_0 l}{3EI}$

(۱) میله صلب خم نمی‌شود
(۲) EI صلب بی‌نهایت است

⇐ انرژی میله صلب صفر است

انرژی تیر چقدر است؟

$M = -P_0 x - M_0$



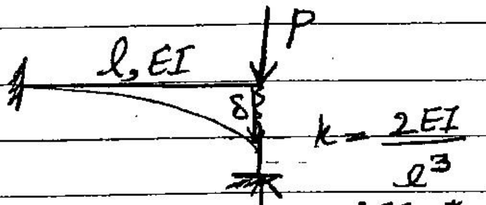
$$\times \quad u = \frac{1}{2} \cdot P_0 \cdot \delta + \frac{1}{2} \cdot M_0 \cdot \theta = \frac{P_0^2 l^3}{6EI} + \frac{M_0^2 l}{2EI} \quad \text{غلط}$$

$$\left(\frac{P_0 l^3}{3EI}\right) \qquad \left(\frac{M_0 l}{EI}\right)$$

$$L \checkmark \quad u = \int_0^l \frac{(-P_0 x - M_0)^2\,dx}{2EI} = \frac{P_0^2 l^3}{6EI} + \frac{M_0^2 l}{2EI} + \frac{P_0 M_0 l^2}{2EI}$$

* سوپرپوزیشن برای انرژی، غلط است.

مثال) انرژی کل این عضو کدام است؟



$k = \frac{2EI}{l^3}$

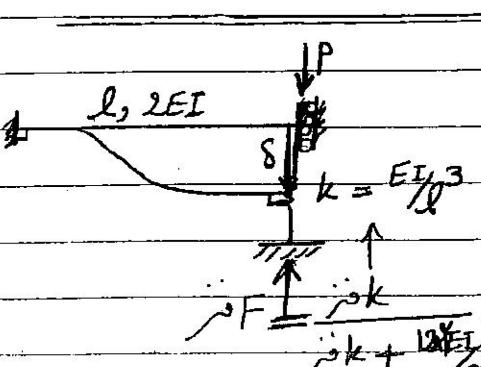
$$u = u_{\text{تیر}} + u_{\text{فنر}} = ?$$

$$\frac{3}{5}P \qquad \frac{2}{5}P$$

$$F_{\text{فنر}} = \frac{2EI/l^3}{2EI/l^3 + 3EI/l^3} \times P = \frac{2}{5}P$$

$$L \quad u = \frac{1}{2} P \delta = \frac{1}{2} P \times \left(\frac{P}{2EI/l^3 + 3EI/l^3}\right) = \frac{P^2 l^3}{10EI}$$

مثال) چند درصد انرژی کل در فنر ذخیره خواهد شد؟



$k = EI/l^3$

$$\frac{u_{\text{فنر}}}{u_{\text{کل}}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} F \cancel{\delta_{\text{فنر}}}}{\cancel{\frac{1}{2}} P \cdot \cancel{\delta_{\text{کل}}}} = \frac{F_{\text{فنر}}}{P}$$

$$F_{\text{فنر}} = \frac{k_{\text{فنر}}}{k_{\text{فنر}} + \frac{12 \times 2EI}{l^3}} \times P = \frac{P}{25}$$

$$\longrightarrow = \frac{1}{25} = 4\%$$

$$\delta_{\text{فنر}} = \delta_{\text{تیر}} = \delta$$

چون موازی اند.

قضیه دوم : «$\frac{\partial u}{\partial F_i} = \delta_i$ ، $\frac{\partial u}{\partial M_i} = \theta_i$»

$$\frac{\partial u}{\partial X} = \int \frac{M \frac{\partial M}{\partial X}}{EI} \cdot dx + \dots + \sum \frac{N \frac{\partial N}{\partial X} \cdot l}{EA} + \dots + \sum \frac{M \frac{\partial M}{\partial k}}{k} + \dots$$

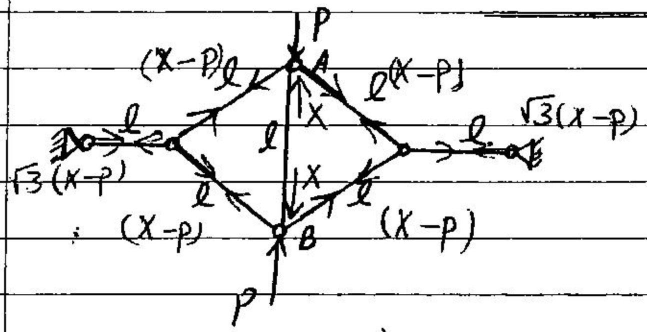
نیروی نشر

* قضیه حداقل کار ⟸ $\text{if} \quad \frac{\partial u}{\partial F_i} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial M_i} = 0$

$$\xrightarrow{\delta_i = 0}_{\theta_i = 0}$$

* قضیه اول : $\frac{\partial u}{\partial \delta_i} = F_i \quad \text{و} \quad \frac{\partial u}{\partial \theta_i} = M_i$

مثال) نقاط A و B چقدر به هم نزدیک می‌شوند؟



EA = ثابت

$$\delta_{A,B} = \frac{X \cdot l}{EA} = \frac{10\,Pl}{11\,EI}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum \frac{N_i \cdot \frac{\partial N_i}{\partial X} \cdot l_i}{(EA)_i} = 0 \Rightarrow \frac{l}{EA}\Big[(X-P)(1)\times 4 + (-X)(-1) + 2\times\sqrt{3}\,(X-P)\sqrt{3}\Big] = 0$$

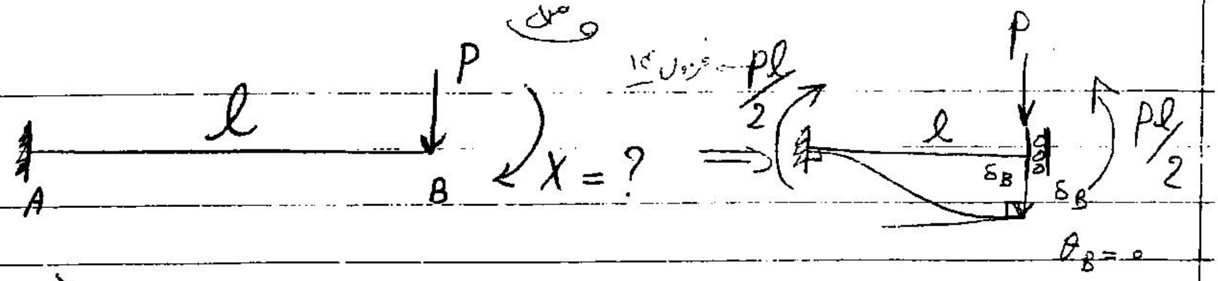
چون نیروی داخلی است و نسبت به هم دارای تغییرمکان صفرند.

$$\Rightarrow X = \frac{10}{11} P$$

* مشتق انرژی، همیشه نسبت به نیروهای داخلی صفر است.

مثال) مقدار نیروی x چقدر باشد تا انرژی این تیر min شود؟

مثال

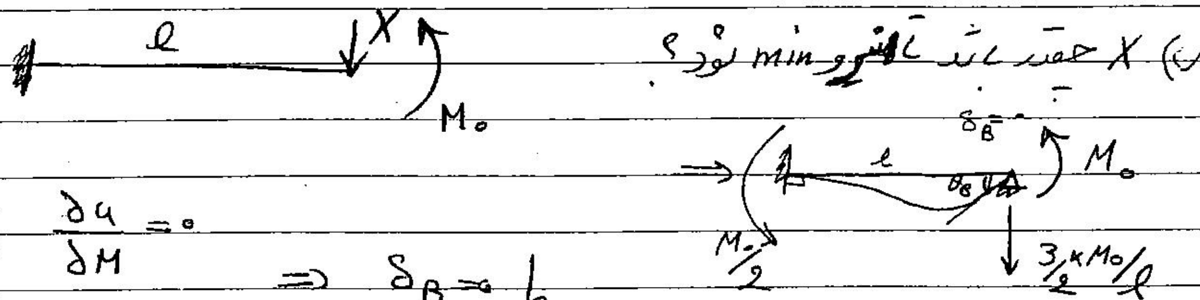

A
B
l
P
X = ?
جدول ۱۲
pl/2
Pl/2
δ_B
$\theta_B = 0$

[illegible] $\left\{ \frac{\partial u}{\partial M} = 0 \right.$

کاستیلیانو $\frac{\partial u}{\partial x} = \theta_B$

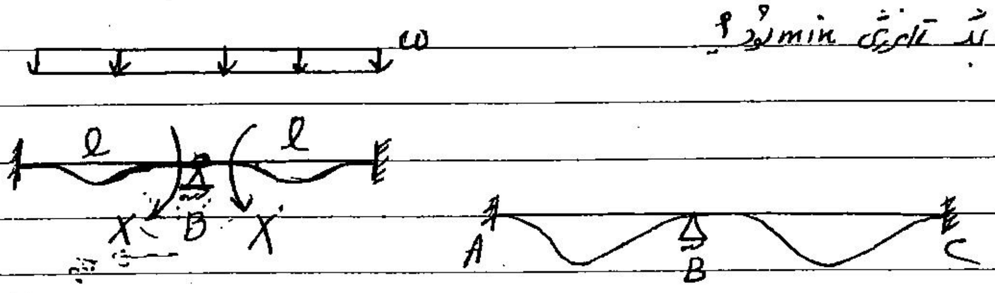
$\Rightarrow \theta_B = 0 \Rightarrow X = \frac{-Pl}{2}$

مثال) X چقدر باشد تا انرژی min شود؟


l
X
M_0
$\delta_B = 0$
θ_B
$M_0/2$
$3/2 \times M_0/l$

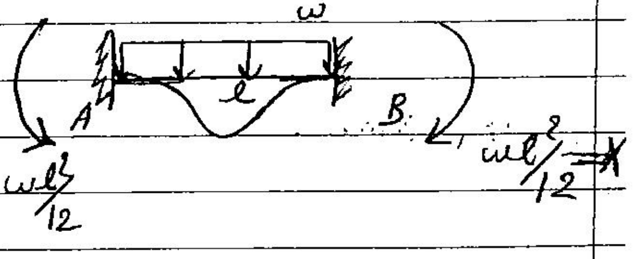
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial M} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \delta_B \end{array} \right. \Rightarrow \delta_B = 0$$

مثال) X چقدر باشد تا انرژی min شود؟



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \Delta \theta_B \end{array} \right. \Rightarrow \Delta \theta_B = 0$$

چون ۲ تا شیب است

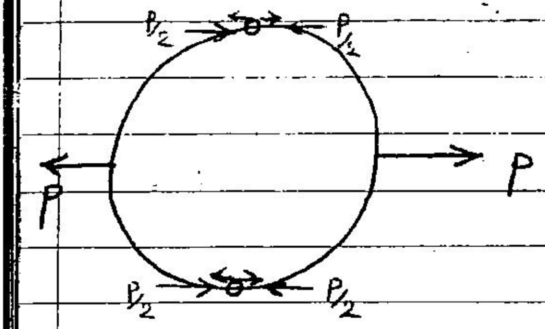

ω
A
l
B
$wl^2/12$
$wl^2/12$
X

هم $\delta = 0$ و هم $\theta = 0$ ← پس تکیه گاه گیردار قرار می‌دهیم.

www.[illegible].info
شماره تماس: [illegible]

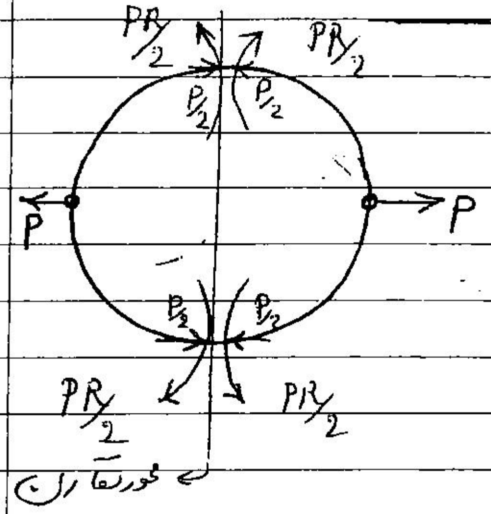
مثال) نیروهای داخلی روی محور قائم تقارن این حلقه کدام است؟

فقط نیروی محوری P/2 داریم.

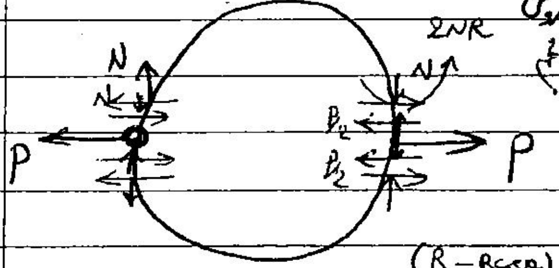

P/2
P/2
P
P
P/2
P/2

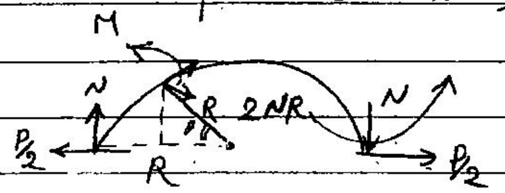
مثال) نیروهای داخلی روی محور قائم تقارن این حلقه کدام است؟

* روی محور تقارن نیروی برشی صفر است و باید روی محور تقارن بررسی شود.


PR/2
PR/2
P/2
P/2
P
P
P/2
P/2
PR/2
PR/2
محور تقارن

مثال) در اینجا برش روی محور تقارن صفر نیست چون بار P روی محور تقارن داریم اما فقط یک محور تقارن دارد.


2NR
N
N
N
P
P/2
P/2
P


M
N
R
2NR
N
P/2
R
P/2

$$\frac{\partial u}{\partial N} \overset{\text{[illegible]}}{=} 2\times\int \frac{M\,\partial M/\partial N\,ds}{EI} = 0$$

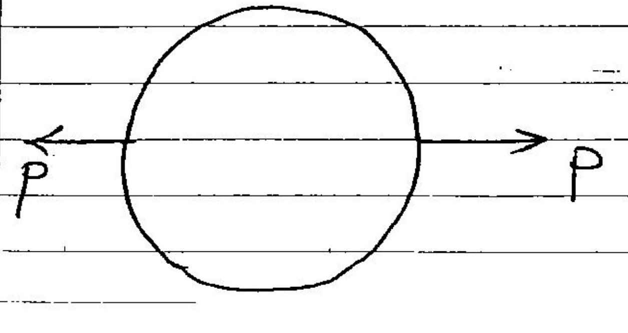
$\partial M/\partial N \rightarrow (R - R\cos\theta)$

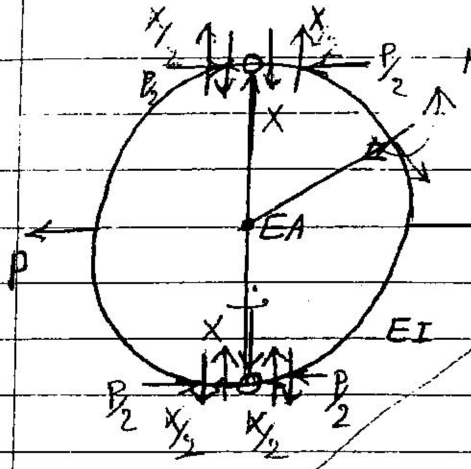
$ds \rightarrow R\,d\theta$

$\Longrightarrow N = ---$

$M = \left(\frac{P}{2}\times R\sin\theta\right) + N\times(R - R\cos\theta)$

(تست ۸۸




X/2
X/2
P/2
P/2
X
EA
P
P
X
EI
P/2
P/2
X/2
X/2

$M = \frac{X}{2} R\sin\theta - \frac{P}{2}(R - R\cos\theta)$

$EA = 8\frac{EI}{\pi R^2}$

مثال) نقاط A و B چقدر به هم نزدیک می‌شوند؟

۱ عضو X دو سر مفصل

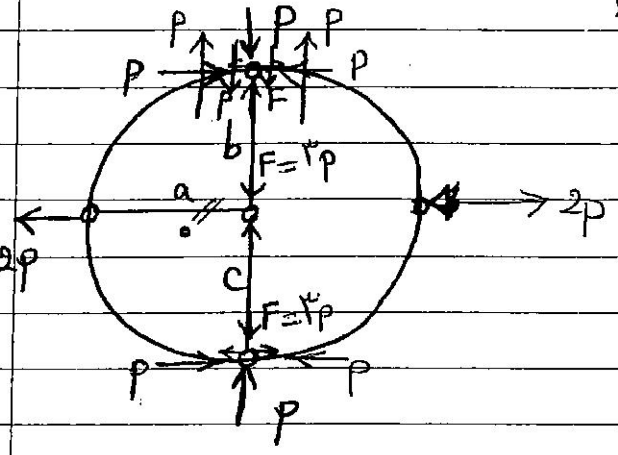
تغییر طول $\frac{F\ell}{EA}$ دارند ← $\delta_{A,B} = \frac{X \cdot 2R}{EA}$

$$\frac{\partial u}{\partial X} = 4\int_0^{\pi/2} \frac{(M)(\partial M/\partial X)(ds)}{EI} + \frac{(X)\overset{1}{(\partial N/\partial X)}\overset{2R}{(\ell)}}{\underset{\frac{8EI}{\pi R^2}}{(EA)}} \Rightarrow X = \frac{P}{\pi}$$

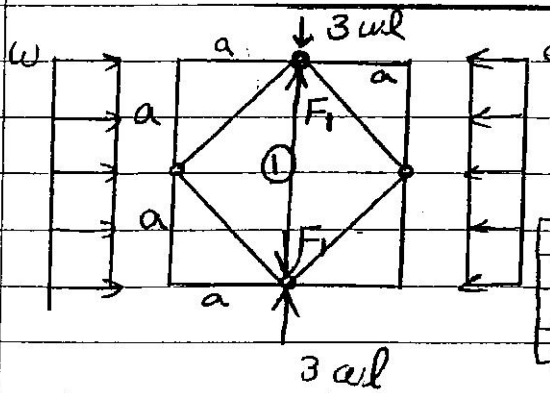
$\frac{1}{2}R\sin\theta$ $\qquad R\,d\theta$

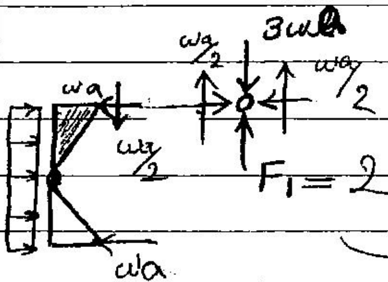
$$\Rightarrow \delta_{A,B} = \frac{X \cdot 2R}{EA}$$

مثال) نیروی اعضای a و b و c چقدر است؟

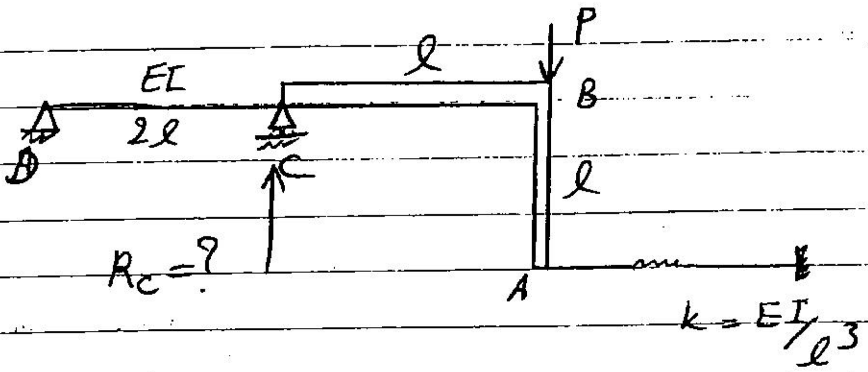

P
P
P
P
P
P
F
b
F=۳P
a
2P
2P
c
F=۳P
P
P
P

مثال) نیروی F_1 را محاسبه کنید.


3wl
w
a
a
a
a
F1
①
F1
w
a
3wl

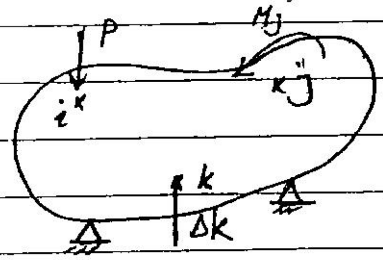

wa
wa/2
wa
wa/2
3wa
wa/2

$F_1 = 2wa$ (فشاری

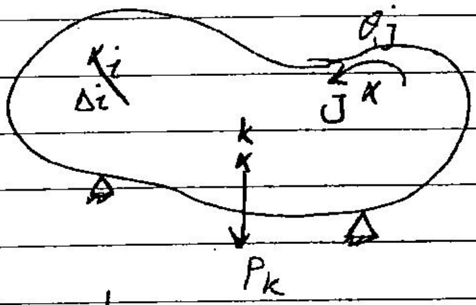

P
ℓ
EI
B
2ℓ
D
C
ℓ
$R_C = ?$
A
$k = EI/\ell^3$

جواب: $1.3P$

قانون بتی ماکسول

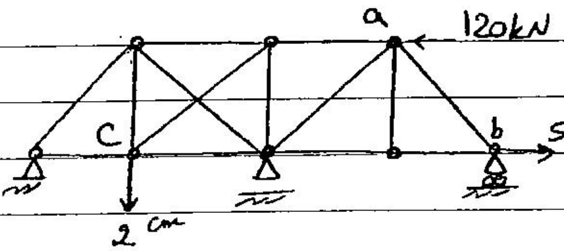

P
M_j
i
j
k
Δk

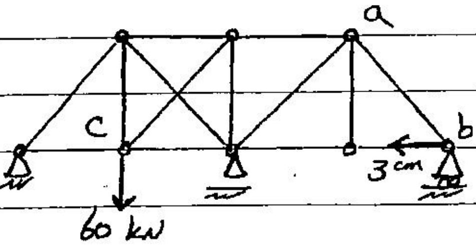
(الف


θ_j
i
Δi
J
k
P_k

$$\vec{P_i} \times \vec{\Delta_i} + \widehat{M_j}\, \overrightarrow{\theta_j} = \vec{P_k} \times \vec{\Delta_k}$$ مهم

این قانون فقط وقتی برقرار است که رفتار مصالح خطی باشد.


a
120kN
C
b
50 kN
2 cm


a
C
b
3 cm
60 kN

EA(ب

الف) EA

تغییر مکان افقی گره a تحت بارگذاری b کدام است؟

$$\downarrow 60^{kN} \times \downarrow 2^{cm} = \overleftarrow{120^{kN}} \times \overset{(ب)}{\delta_{Ha}} + \overrightarrow{50^{kN}} \times (-3^{cm})$$

$$\Rightarrow \overleftarrow{\delta_{Ha}} = +\frac{9}{4}^{cm}$$ [+ یعنی در جهت 120^{kN} است.]

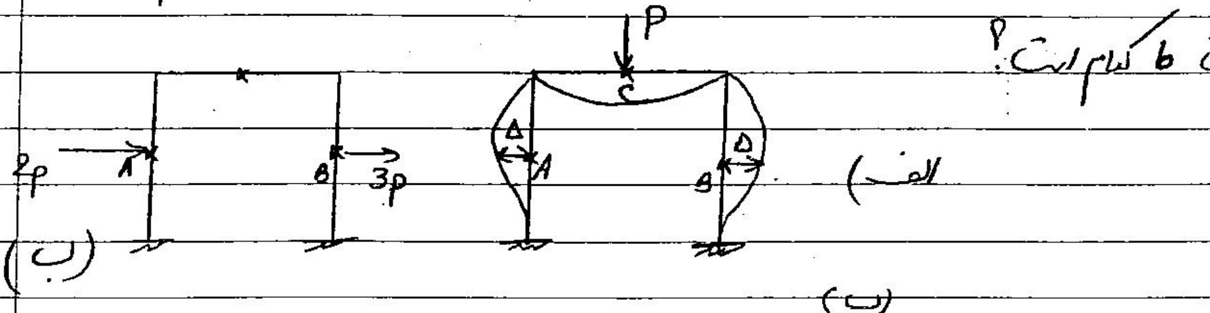
اگر صلبیت سازه B، 2EA شود؟

نکته مهم) طرفین تساوی بتی ماکسول را متناسب با تغییرمکان در صلبیت نظیر ضرب باید کرد.

$$60 \times 2 \times EA = 120 \times \delta_{Ha} \times 2EA + 50 \times (-3) \times 2EA$$

$$\Rightarrow \delta_{Ha} = \frac{7}{4}^{cm}$$

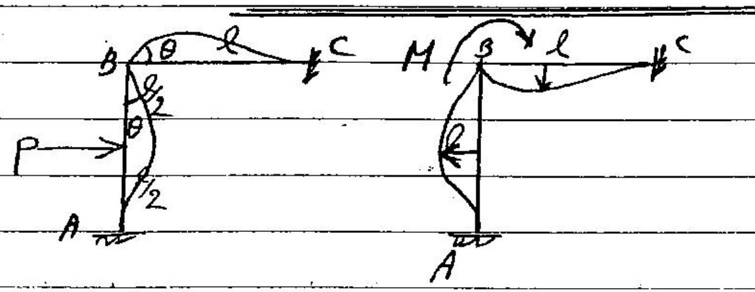
مثال) اگر تغییرمکان نقاط A و B در حالت الف برابر با Δ باشد، آنگاه تغییرمکان قائم نقطه C در حالت b کدام است؟



$$2p \times (-\Delta) \times EI + 3P \times \Delta \times EI = P \times (\overset{(ب)}{\delta_{vc}}) \times 3EI$$

$$\Rightarrow \overset{ب}{\delta_{vc}} = \Delta/3$$

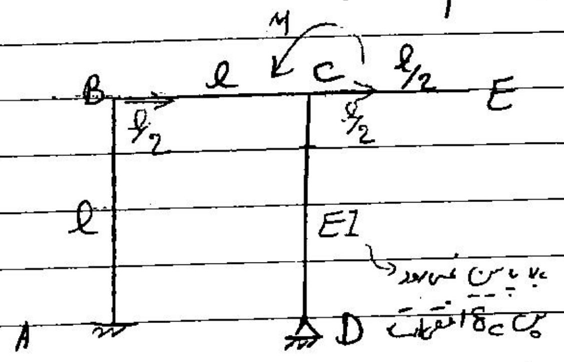
مثال) اگر دوران گره B در بارگذاری (الف) برابر θ باشد، آنگاه تغییرمکان وسط تیر در حالت B کدام است؟

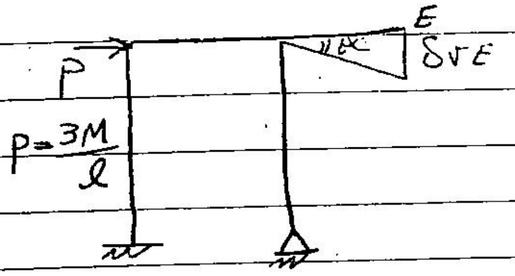


الف (2EI) ب (3EI) $M \times \theta \times 3EI +$

$$\vec{P}\times\vec{\delta}_{\text{وسط ستون}}\times 3EI = \overset{\frown}{M}\times\theta\times 3EI \Rightarrow \delta_{\text{وسط ستون}} = \frac{2}{3}\times\frac{M\theta}{P} = \delta_{\text{وسط تیر}}$$

مثال) در اثر اعمال لنگر M به گره C، این نقطه به اندازه Δ تغییر مکان می‌دهد. تغییر مکان قائم گره E بر اثر اعمال نیروی افقی $P=3M/l$ به گره B کدام است؟


M
B
l
C
l/2
E
l/2
l/2
l
EI
به پایین خم می‌شود
A
D
چون δ_C انتقالی است


E
δ_{vE}
P
$P=\frac{3M}{l}$

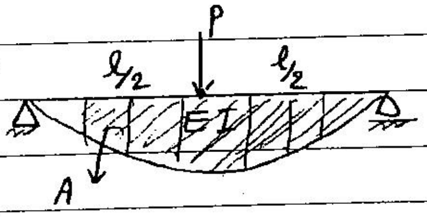
EI

$$\overset{\frown}{M}\times\vec{\theta}_C = \vec{P}\times\vec{\Delta} \Rightarrow \theta_C = \frac{3\Delta}{l}$$

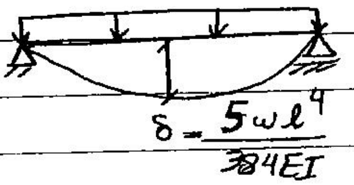
$$\Rightarrow \delta_{vE} = \theta_C\times\frac{l}{2} = \frac{3}{2}\Delta$$

تیر ساده = تیر دو سر مفصل

مثال) مساحت زیر نمودار تغییر شکل این سازه کدام است؟



(فرمول 10


$\delta = \frac{5wl^4}{384EI}$

$$P\times\frac{5wl^4}{384EI} = wA$$

$$\Rightarrow A = \frac{5Pl^3}{384EI}$$

بار گسترده در مساحت زیر نمودار ضرب می‌شود.

فصل ۶

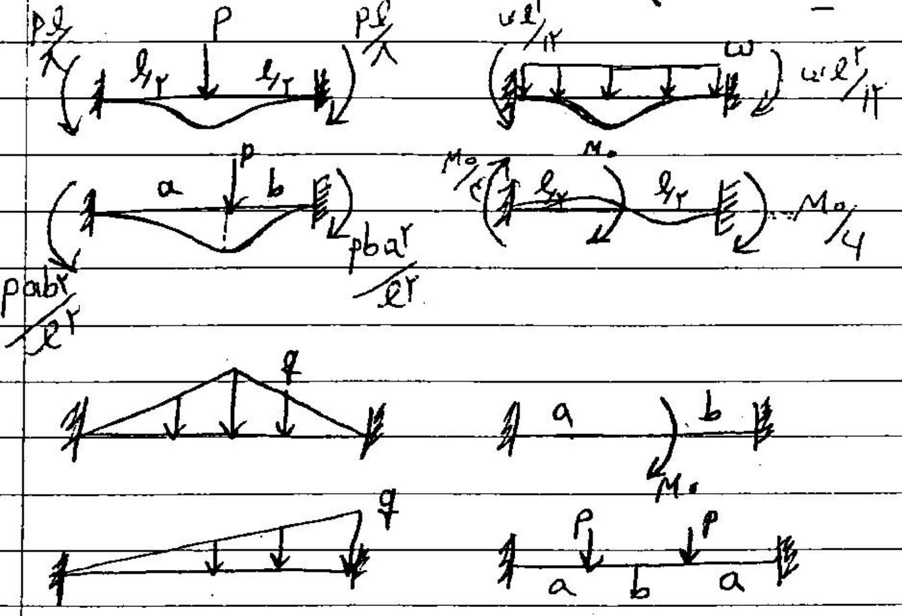
شیب - افت : (از تغییر طول محوری صرف‌نظر می‌شود . EI)

* درجات آزادی : (درجه نامعینی سینماتیکی)

درجه نامعینی (n) ⟨ استاتیکی (n_s) ، سینماتیکی (n_c)

درجه نامعینی سینماتیکی ↙ دورانی (θ) ↘ انتقالی (Δ)

* لنگرهای گیرداری انتهایی (FEM یا $\bar{M}$)

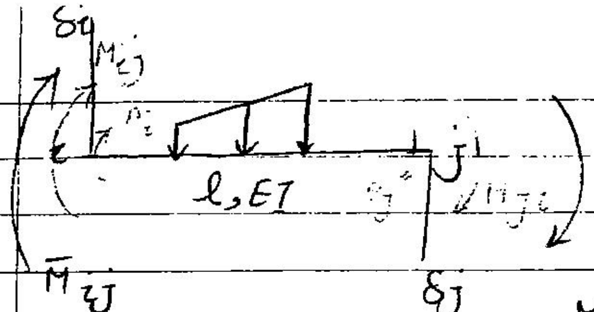


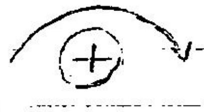
PL/8
P
l/2
l/2
PL/8
wl²/12
w
wl²/12
a
p
b
pab²/l²
pba²/l²
M0/4
M0
l/2
l/2
M0/4
q
a
b
M0
q
P
P
a
b
a

روش‌ها : نیرویی (نرمی) ← با زوائد نامعین و ...

تغییر مکانی (سختی) ← شیب افت و ...

* نوشتن معادله تعادل لنگر در گره با استفاده از رابطه شیب افت .


δ_i
M_{ij}
P_i
i
l, EI
j
$\bar{M}_{ji}$
M_{ji}
$\bar{M}_{ij}$
δ_j

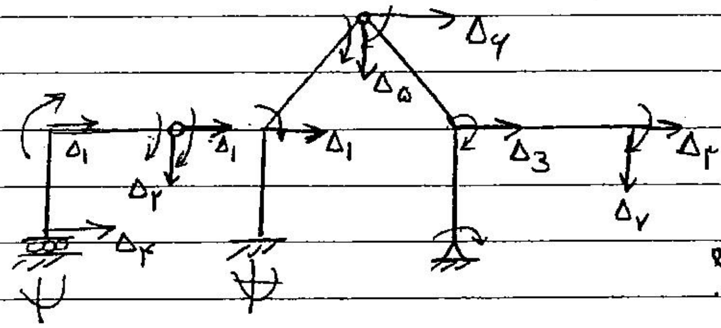


$$M_{ij}=\frac{2EI}{l}\left(2\theta_i+\theta_j-3\frac{\delta_{i,j}}{l}\right)+\bar{M}_{ij}^*$$

$$\delta_{i,j}=\delta_i+\delta_j$$

گام ۴

محاسبه سایر مجهولات مسئله با استفاده از نوشتن معادلات تعادل استاتیکی در گره‌ای یا قسمتی و یا کل سازه.


Δ_1
Δ_1
Δ_1
$\Delta_۲$
$\Delta_۳$
$\Delta_۴$
$\Delta_۵$
$\Delta_۶$
$\Delta_۷$
Δ_3

از تغییر طول محوری اعضا صرف‌نظر شده و بارگذاری سازه دلخواه می‌باشد. تعداد درجات آزادی انتقالی و دورانی کدام است؟

$n_\theta = 9$

$n_\delta = ۷ \Rightarrow ۵$ چون ۵ و ۶ به ۳ و ۷ وابسته‌اند
چون از تغییر طول محوری صرف‌نظر شده

$\} \; n_C = 9+5 = 14$

درجات آزادی انتقالی : $2M+N-P$ مهم

M : تعداد گره‌های غیر تکیه‌گاهی

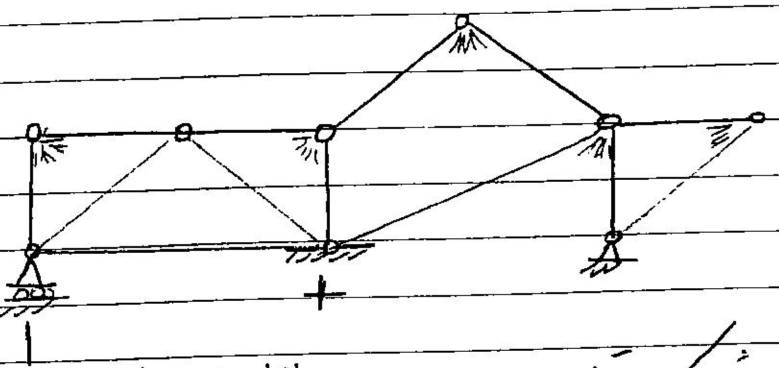
N : تعداد تغییر مکان‌های تکیه‌گاهی

P : تعداد اعضایی که از تغییر طول محوری آن‌ها صرف‌نظر شده باشد.

$2\times 6+1-8=5=n_\delta$ وقتی قید مفصل داشتیم این فرمول جواب نمی‌دهد

نکته

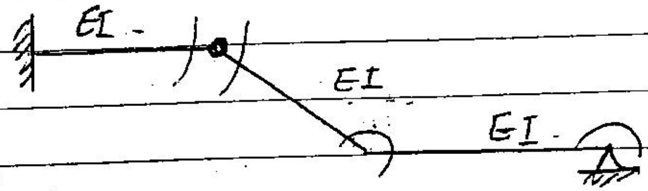
تمام گره‌ها را مفصلی کرده حداقل تعداد میله‌های لازم برای پایداری خرپای حاصل همان تعداد درجات آزادی انتقالی سازه مورد نظر می‌باشد.



* حداقل ۵ میله پایدار می‌شود

* وقتی از این نکته استفاده می‌شود که از تغییر طول محوری صرف‌نظر شده باشد و همچنین سازه عضو صلب نداشته باشد.

مثال)

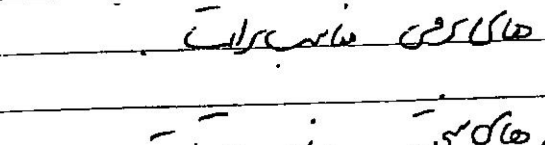


n_s اساسی $= 3\cancel{k+r} - (\cancel{c}+3) = 1$

$n_\theta = 4$

$n_\delta = 7\times2+0-3 = 1$ $\Rightarrow n_c = n_\theta + n_\delta = 4+1 = 5$

n_δ: (انتقالی)



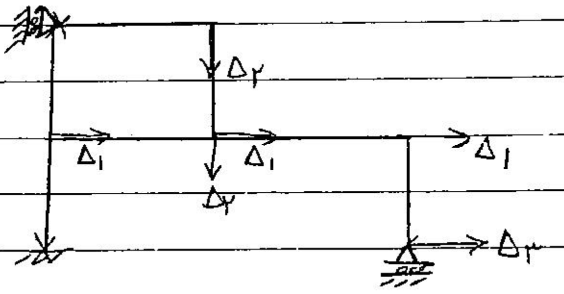
$n > n_s$ پس روش نرمی مناسب است.

نکته)

* اگر $n_s < n_c$ ⟸ روش‌های نرمی مناسب‌تر است

* اگر $n_c < n_s$ ⟸ روش‌های سختی مناسب‌تر است.

: از تغییر طول محوری صرف‌نظر شده است. تعداد درجات آزادی انتقالی مستقل را بیابید


Δ_2
Δ_1
Δ_1
Δ_1
Δ_2
Δ_3

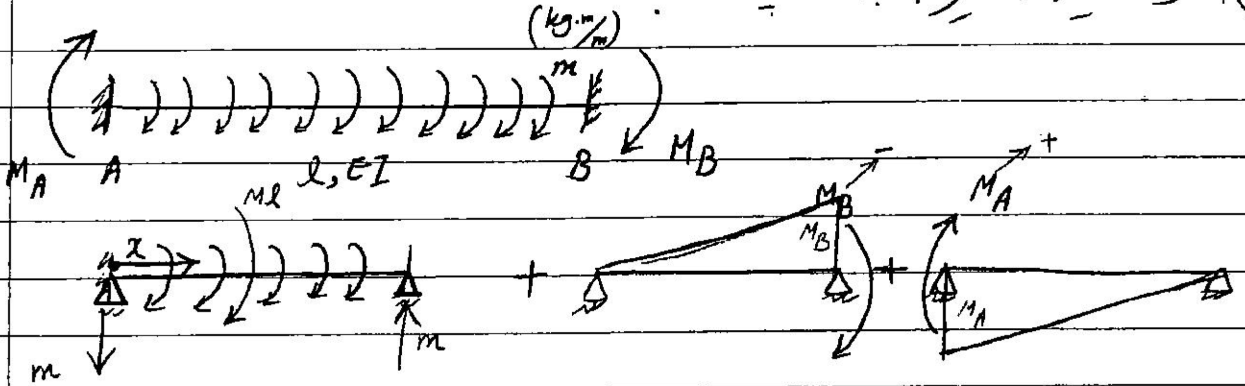
از مفهوم : $n_\delta = 3$ یا

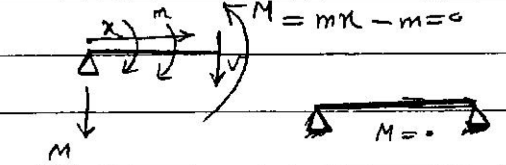
از فرمول

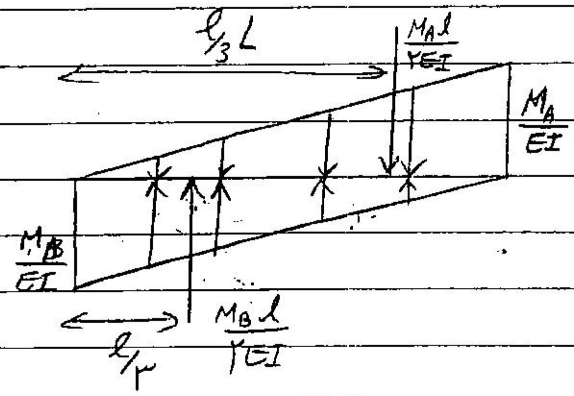
$$\underset{4}{2M} + \underset{2}{N} - \underset{7}{P} = 3$$ یا

نکته) در تیر فرد وج ـ سطح شکل ـ کمش شکل ـ از تغییر طول محوری صرفنظر می‌شود (EI)

مثال) شکل‌های گسترداری تیر با بارگذاری چیست؟


(kg.m/m)
m
M_A
A
l, EI
B
M_B
ml
x
m
m
+
M_B
M_B
+
M_A
M_A
+
-


x
m
$M = mx - m = 0$
v
m
$M = 0$

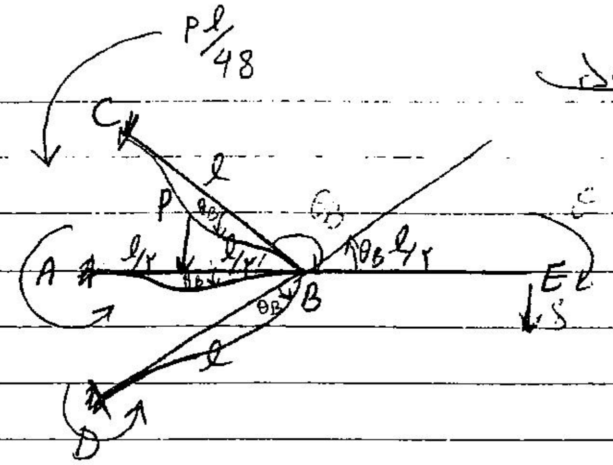

$l/3$ L
$\frac{M_A l}{2EI}$
$\frac{M_A}{EI}$
$\frac{M_B}{EI}$
$l/3$
$\frac{M_B l}{2EI}$

$$M_A = M = 0 \Leftarrow \begin{cases} \Sigma F'_y = 0 \\ \Sigma M'_A = 0 \end{cases}$$

ص ۸

مثال) لنگر گیره گاهی C کدام است؟

(EI)


$Pl/48$
C
l
P
θ_B
A
$l/2$
$l/2$
θ_B
$l/2$
B
E
δ
l
D

3 درجه آزادی $n_\delta + n_\theta = 3$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow M_{BA} + M_{BC} + M_{BD} + \cancel{M_{BE}}^{0} = 0 \quad (*)$$

$$\begin{cases} M_{BD} = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_B + \cancel{\theta_D}^{0} - 0\right) + 0 \\ M_{BC} = \frac{4EI}{l}\left(2\theta_B + \cancel{\theta_C}^{0} - 0\right) + 0 \\ M_{BA} = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_B + 0 - 0\right) + Pl/8 \end{cases}$$

* اگر دو سر آن مفصل صورت 5

→ عکس جدول

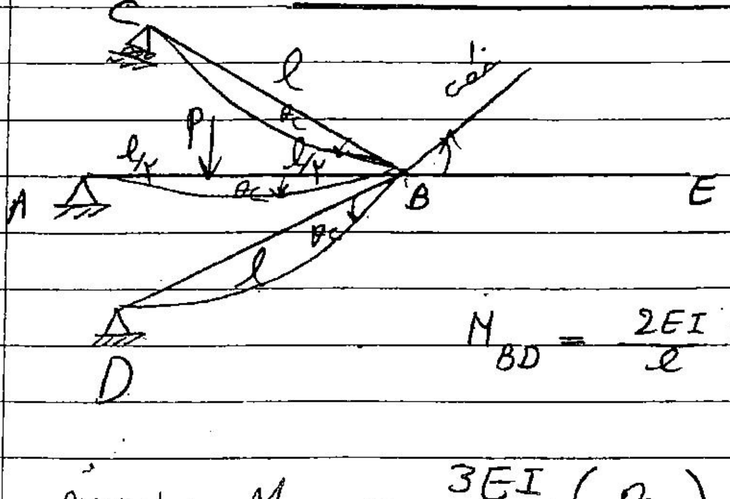
$$(*) \Longrightarrow \theta_B = \frac{-Pl^2}{96EI}$$

علامت عکس بودن

$$M_C = M_{CB} = \frac{2EI}{l}\left(2\cancel{\theta_C}^{0} + \underset{-Pl^2/96EI}{\theta_B} - 0\right) + 0 = -\frac{Pl}{48}$$

علامت عکس

مثال) θ_C را محاسبه کنید. (EI)

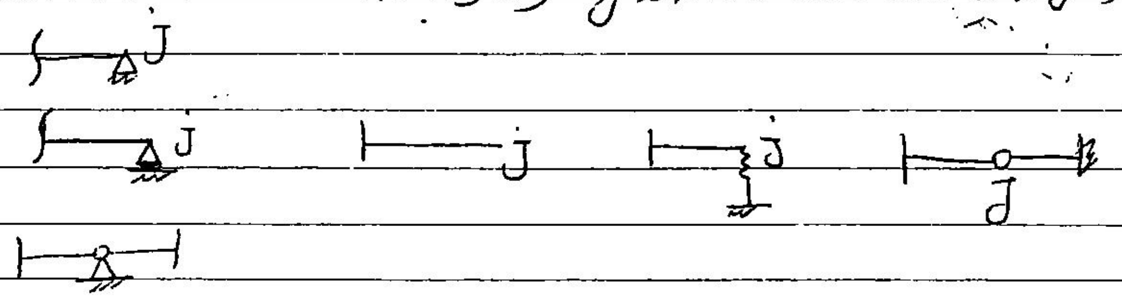

C
l
فرض
P
$l/2$
θ_C
$l/2$
A
θ_C
B
E
θ_C
l
D

$$M_{BD} = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_B + \theta_D - 0\right) + 0$$

اصلاح شده: $M_{BD} = \frac{3EI}{l}\left(\theta_B\right)$

شیب افت اصلاح شده : $M_{ij} = \frac{3EI}{l}\left(\theta_i - \frac{\delta_{ij}}{l}\right) + \bar{M}_{ij} - \frac{1}{2}\bar{M}_{ji}$

* فقط مواقعی از این روش استفاده می شود که در J گشتر صفر باشد.



$$\begin{cases} M_{BC} = \frac{3EI}{l}(\theta_B) \\ M_{BE} = 0 \end{cases}$$

$M_{BA} = \frac{3EI}{l}(\theta_B) + \bar{M}_{BA} - \frac{1}{۲}\underbrace{\bar{M}_{AB}}_{-Pl/۸}$ $\quad +Pl/۸$

$\Rightarrow \theta_B = \frac{-Pl^{۲}}{۴۸EI}$ خلاف ساعت.

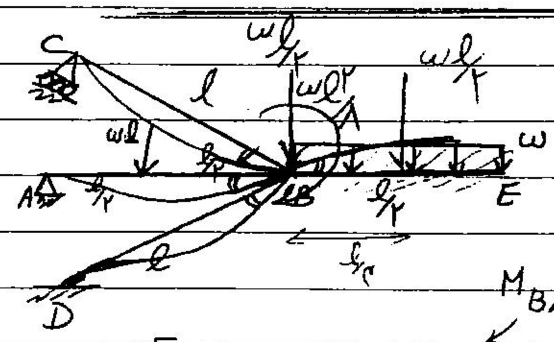
$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow M_{BA} + M_{BD} + M_{BC} + M_{BE} = 0$

$M_C = M_{CB} = 0 \Rightarrow \frac{۲EI}{l}(2\theta_C + \theta_B) = 0$

$\theta_C = \frac{-\theta_B}{2} \Rightarrow \theta_C = \frac{Pl^{۲}}{۹۶EI}$

فرمول ۱۴

مثال) عکس العمل تکیه گاه مفصلی کدام است.



$M_{BA} + M_{BC} + M_{BD} - \frac{wl^{۲}}{8} = 0$

M_{BA}: $\left[\frac{3EI}{l}(\theta_B) + \frac{(wl)l}{۸} - \frac{(wl)l}{۲\times۸}\right]$

M_{BC}: $\frac{3EI}{l}(\theta_B)$

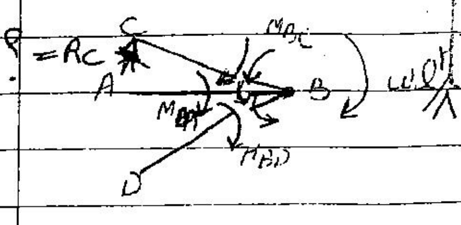
M_{BD}: $\frac{2EI}{l}(2\theta_B)$

$\Rightarrow \theta_B = \frac{-wl^{۳}}{۱۶۰EI}$

ص ۹۵

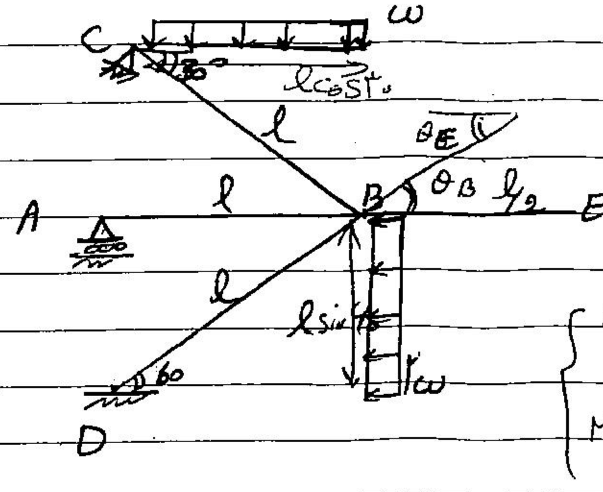
نکته ۲: عضو کنسول: در اعضای کنسول بار گسترده را به صورت یک نیروی متمرکز و یک لنگر منتقل می‌کنیم.

فروشگاه اینترنتی [illegible]
شماره تماس: ۰۹۳۶۲۶۰۲۸۹۵


? = R_C
C
A
B
D
M_BC
M_BA
M_BD
ωℓ²/۸

$$M_{BC}=\frac{3EI}{\ell}\left(\frac{-\omega\ell^3}{166EI}\right)\longrightarrow M_{BC}=\frac{-3}{160}(\omega\ell^2)$$

$$R_C\times\ell=M_{BC}\implies R_C=\frac{3}{160}\omega\ell$$


C
ω
30°
ℓcos30°
ℓ
θ_E
θ_B
ℓ/2
A
B
E
ℓ
ℓsin60
2ω
60
D

هدف) $\theta_E=?$

$$\Sigma M_B=0$$

$$M_{BA}+M_{BC}+M_{BD}+M_{BE}=0$$

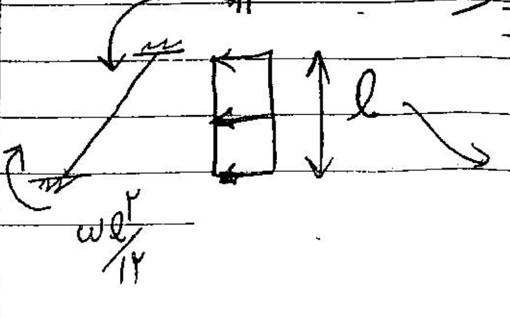
$M_{BE}=0$ چون بار ندارد

$$M_{BA}=\frac{3EI}{\ell}(\theta_B)$$

$$M_{BD}=\frac{2EI}{\ell}(2\theta_B)-\frac{(2\omega)(\ell\sin60)^2}{12}\implies\theta_B=$$

$$M_{BC}=\frac{3EI}{\ell}(\theta_B)+\frac{\omega(\ell\cos30)^2}{12}-\frac{1}{2}\times\frac{-\omega(\ell\cos30)^2}{12}$$

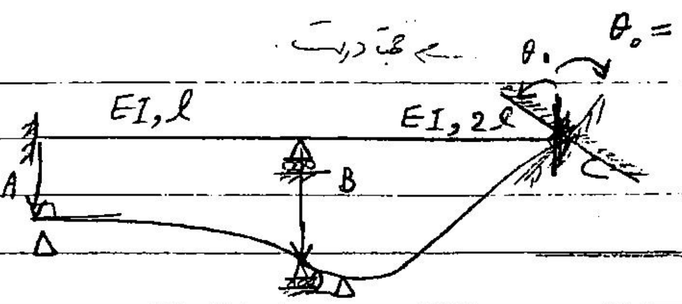
لنگر گیردار (BD) عضو مایل را باید تبدیل و تصویر کرد.


−ωℓ²/۸
ωℓ²/۱۲
ℓ

نظیر ℓ

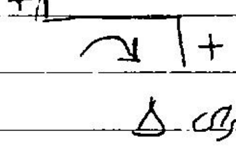
نکته ۳)

جهت درست ←


$\theta_0 = ?$
θ_0
EI, l
$EI, 2l$
A
B
C
Δ
Δ

نشست دورانی تکیه‌گاه C چقدر باشد تا نشست تکیه‌گاه میانی صفر شود؟

* نشست تکیه‌گاهی درست است؟



$$M_B = |M_{BA}| = |M_{BC}| = 0$$

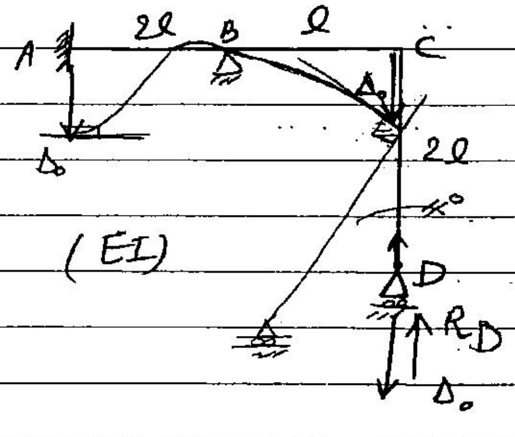
$$M_{BA} = 0 \Rightarrow \frac{2EI}{l}\left(2\theta_B + 0 - \frac{3(+2\Delta-\Delta)}{l}\right) = 0 \Rightarrow \theta_B = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\Delta/l\right)$$

$$M_{BC} = 0 \Rightarrow \frac{2EI}{l}\left(\underset{\frac{3\Delta}{2l}}{2\theta_B} + \theta_0 - \frac{3(-2\Delta)}{2l}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \theta_0 = -\frac{6\Delta}{l}$$

در جهت خلاف ساعت می‌چرخد.

مثال) نشست تکیه‌گاه گیردار؟


A
$2l$
B
l
C
Δ_0
Δ_0
$2l$
$\neq 0$
(EI)
D
R_D
Δ_0

$$\Sigma M_B = 0 \quad \text{اصلاح شد}$$

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$

$$\begin{cases} M_{BA} = \frac{2EI}{2l}\left(2\theta_B\right) + 0 - \frac{3(-\Delta_0)}{2l}\Big) \\ M_{BC} = \frac{3EI}{l}\left(\theta_B - \frac{(+\Delta)}{l}\right) \end{cases}$$

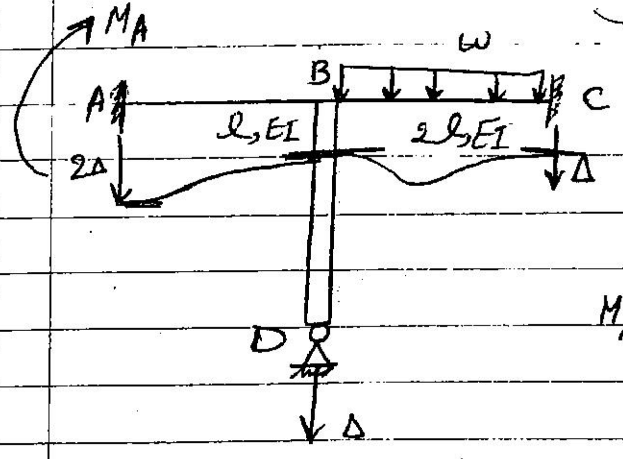
$$\Rightarrow \theta_B = \left(\frac{3}{10}\right)\frac{\Delta}{l}$$

و محوری چون در B

(شرط۱) $M_A = M_{AB} = \frac{2EI}{l}\left(2\overset{0}{\cancel{\theta_A}} + \theta_B - \frac{3(-\Delta_0)}{2l}\right)$

$$\Rightarrow M_A = 1.8\,\frac{EI\Delta_0}{l^2}$$

مثال) لنگر تکیه‌گاه A چقدر است؟


M_A
A
B
ω
C
l, EI
$2l, EI$
2Δ
Δ
D
Δ

$+\Delta$

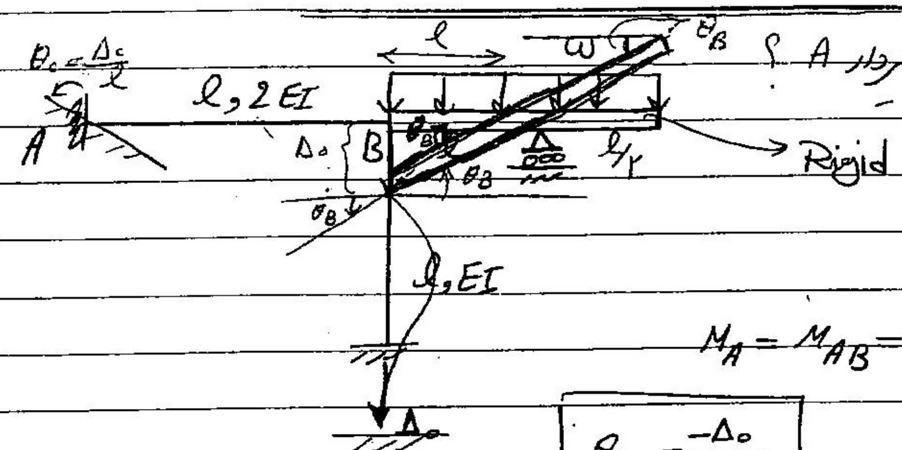
$$M_A = M_{AB} = \frac{2EI}{l}\left(2\cancel{\theta_A} + \cancel{\theta_B} - \frac{3(-2\Delta)}{l}\right)$$

باید صفر باشد چون صلب است

$$M_A = \frac{6EI\Delta_0}{l^2}$$

(عضو صلب) اگر Δ نیست اون

مثال) لنگر تکیه‌گاه گیردار A ؟


$\theta_0 = \frac{\Delta_0}{l}$
A
$l, 2EI$
l
ω
θ_B
Δ_0
B
θ_B
θ_B
θ_B
$l/2$
Rigid
l, EI
Δ_0

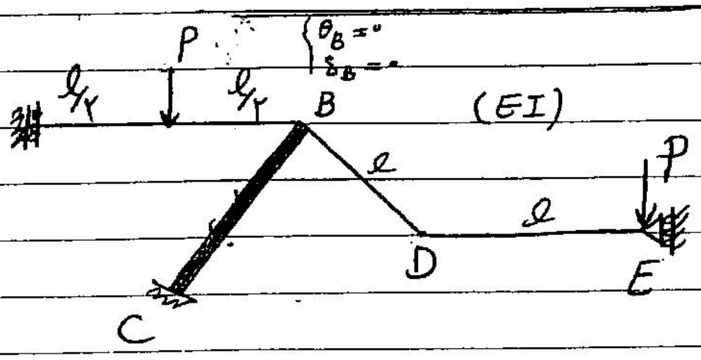
$$M_A = M_{AB} = \frac{2(2EI)}{l}\left(2\theta_A + \theta_B - \frac{3(+\Delta_0)}{l}\right)$$

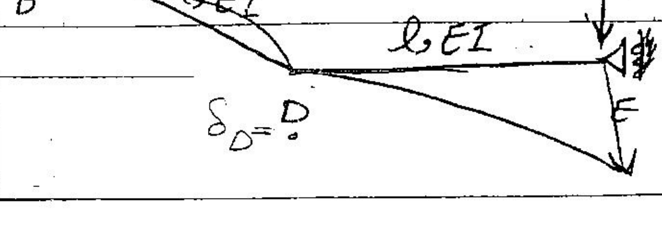
$-\frac{\Delta_0}{l}$ $-\frac{\Delta_0}{l}$

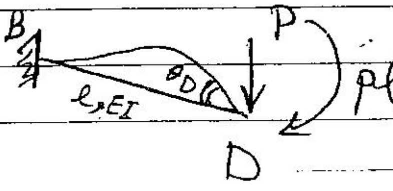
$$\boxed{\theta_B = \frac{-\Delta_0}{l}}$$

$$\Rightarrow M_A = \frac{-24EI\Delta_0}{l^2}$$

مثال) $\delta_E = ?$

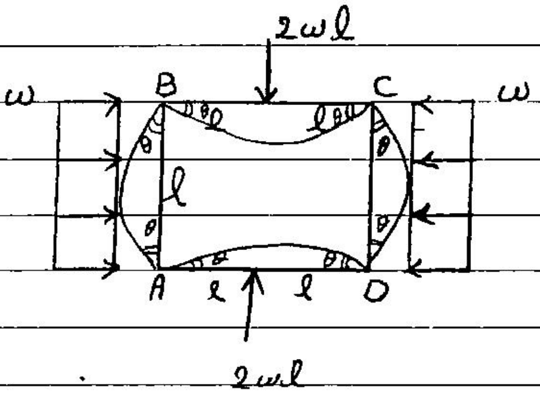

$\theta_B = 0$
$\delta_B = 0$
P
$l/2$
$l/2$
B
(EI)
l
l
P
D
E
C


B
l, EI
P
l, EI
E
$\delta_D = 0$


B
P
θ_D
Pl
l, EI
D

$$M_{DB} = P\ell = \frac{2EI}{\ell}(2\theta_D) \Rightarrow \theta_D = \frac{P\ell^2}{4EI}$$

$$\delta_E = \theta_D \times \ell + \frac{P\ell^3}{3EI} \Rightarrow \delta_E = \frac{7}{12}\frac{P\ell^3}{EI}$$


2wl
w
B
C
w
θ
l
A
l
l
D
2wl

مثال) دوران گره B ؟

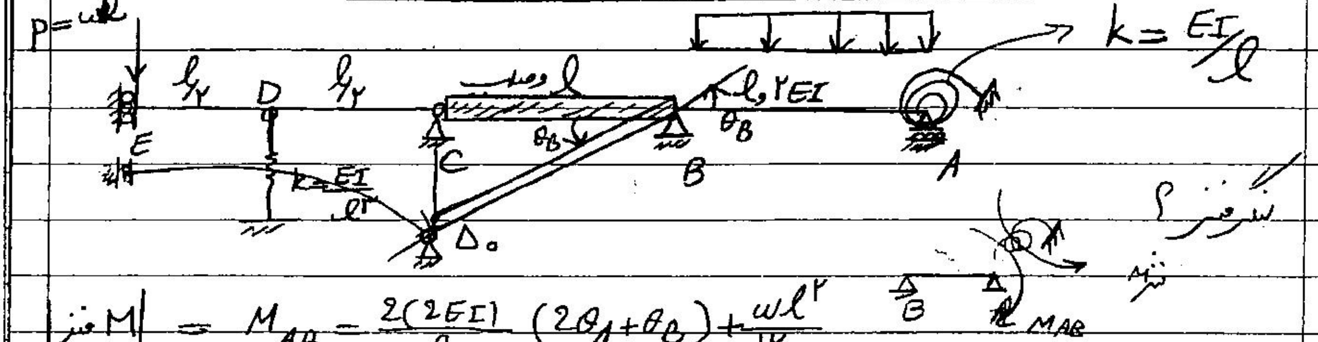
نکته ۴) تقارن درشت افت

$$\theta_B = \theta_C = \theta_A = \theta_D = \theta$$

$$M_{BA} + M_{BC} = 0.0$$

$$\frac{2EI}{\ell}\left(2\theta + (-\theta)\right) + \frac{w\ell^2}{12} \qquad \frac{2EI}{2\ell}\left(2\theta + (-\theta)\right) - \frac{(2w\ell)(\overset{2\ell}{2\ell})}{8}$$

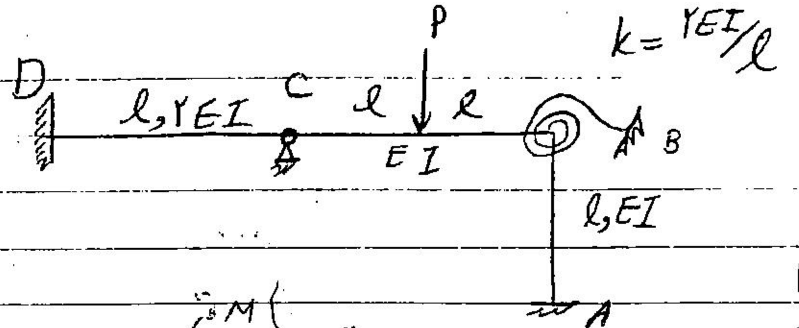
$$\Rightarrow \theta_B = \frac{5w\ell^3}{36EI}$$


P=wl
l/2
D
l/2
E
k=EI/l³
C
وصل l
l, 2EI
θ_B
B
Δ₀
A
k = EI/l
لنگر فنر ؟
فنر
B
M_AB

$$|M_{\text{فنر}}| = M_{AB} = \frac{2(2EI)}{\ell}(2\theta_A + \underset{\downarrow \; \left(-\frac{\Delta_0}{\ell}\right)}{\theta_B}) + \frac{w\ell^2}{12}$$

$$\theta_A = \theta_{\text{فنر}} = \frac{M_{\text{فنر}}}{K} = \frac{-M_{AB}}{K \rightarrow \frac{EI}{\ell}} \;\longrightarrow\; M_{AB} = \frac{w\ell^2}{108} - \frac{4EI\Delta_0}{9\ell^2}$$

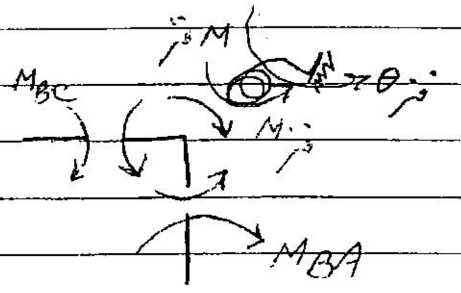
$$= (|M_{\text{فنر}}|)$$


D
l,۲EI
C
l
P
l
EI
B
l,EI
A

$k = ۲EI/l$

لنگر فنر چقدر است؟

$M_{BC} + M_{BA} - M_{\text{فنر}} = 0$


M فنر
θ فنر
M_{BC}
M فنر
M_{BA}

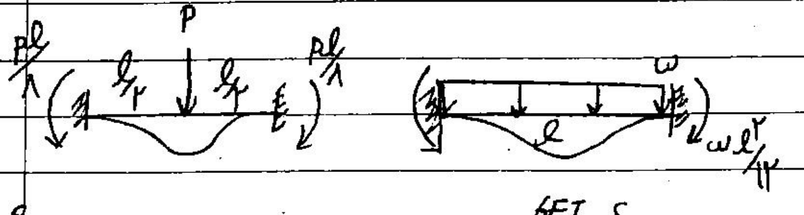
$$\begin{cases} \frac{3EI}{2l}(\theta_B) + \frac{P(2l)}{8} - \frac{1}{2}\times\left(\frac{-P(2l)}{8}\right) \\ M_{BA} = \frac{2EI}{l}(2\theta_B) \end{cases}$$

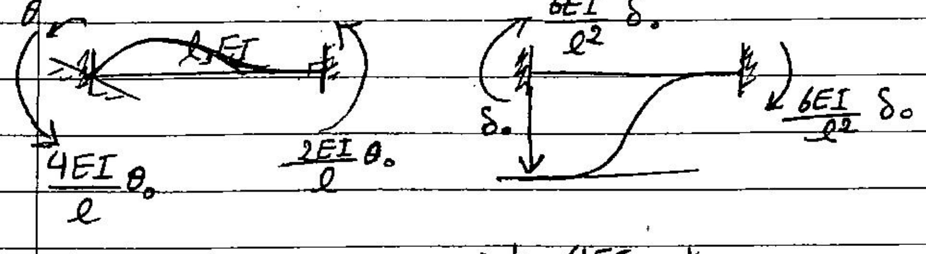
$\theta_B = \theta_{\text{فنر}} = -\frac{M_{\text{فنر}}}{k = \frac{۲EI}{l}}$ $\Rightarrow M_{\text{فنر}} = \frac{3}{22} \cdot Pl$

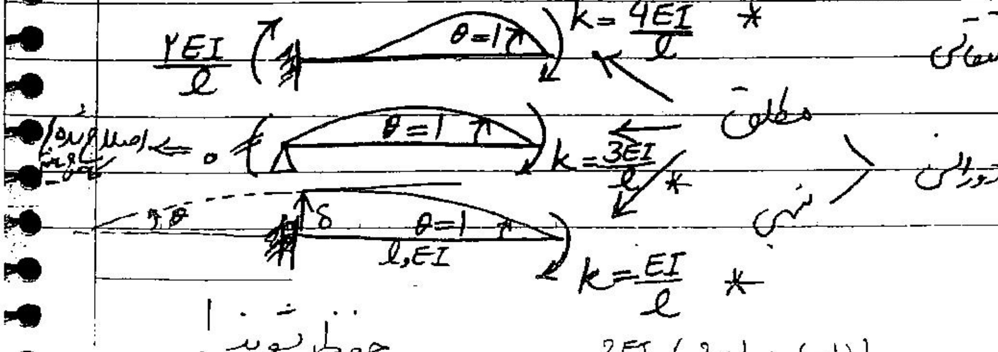
• پیش لنگر،

قرارداد علامت: ↻+

لنگرهای گیرداری: $(\bar{M})$


$Pl/۸$
P
$l/۲$
$l/۲$
$Pl/۸$
ω
l
$\omega l^۲/۱۲$


θ
l,EI
$\frac{4EI}{l}\theta_0$
$\frac{2EI}{l}\theta_0$
$\frac{6EI}{l^2}\delta_0$
δ_0
$\frac{6EI}{l^2}\delta_0$


$\frac{۲EI}{l}$
$\theta=1$
$k=\frac{4EI}{l}$ *
اصلاح شده
0 ⇐
$\theta=1$
$k=\frac{3EI}{l}$ *
θ
δ
$\theta=1$
l,EI
$k=\frac{EI}{l}$ *

سختی خمشی (K)
انتقالی
دورانی
مطلق
نسبی

حفظ شوند!

$\frac{2EI}{l}(2\times1+(-1))$

سختی ← I/l یک انتهای گیردار

$\frac{3}{4} I/l$ یک انتهای مفصل

$\frac{1}{4} \frac{I}{l}$ یک انتهای غلطکی برشی

سختی خمشی معادل سختی در انتهای اصلاح شده / کاهش یافته

---

* ضرایب توزیع لنگر (D):

۱) تکیه گاه
- گیردار ← ۰
- مفصلی ← یک

۲) عضو ←

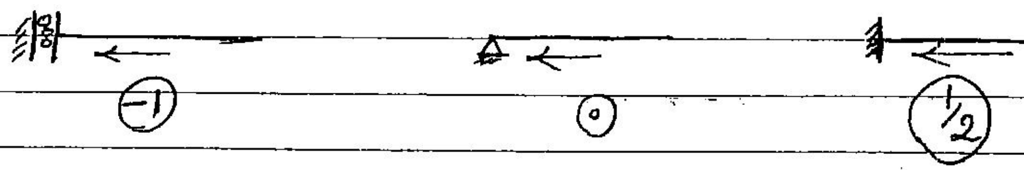
$$D_{ij} = \frac{k_{ij}}{\Sigma k}$$

$$, \quad M_{ij} = \underbrace{\frac{k_{ij}}{\Sigma k}}_{D_{ij}} . M$$

← لنگر متمرکز گره‌ای

---

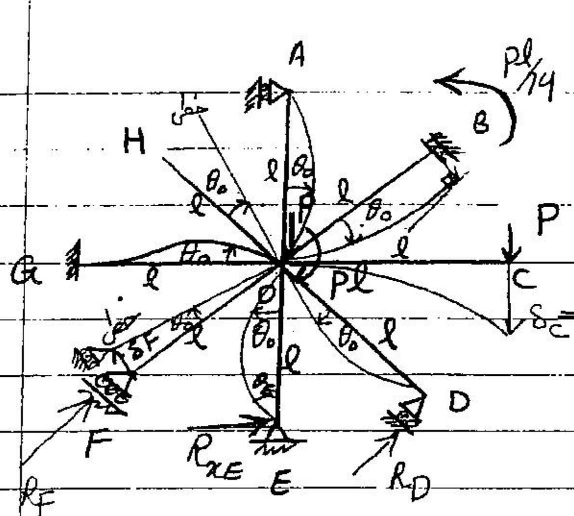
* ضرایب انتقال لنگر (C):



* پخش لنگر: ۱) بدون تغییر مکان گره‌ای ✓ ۲) با تغییر مکان گره‌ای

- لنگر متمرکز گره‌ای ↓ روش سختی
- بارگذاری عضوی

ل) تکیه گاه غلطکی برشی ؟ (EI)


A
H
$Pl/14$
B
P
G
C
Pl
$\delta_C = ?$
θ_o
l
δF
F
D
E
R_{xE}
R_D
R_F

$$M_{OB} = \frac{EI/l}{\underbrace{EI/l + 4EI/l + 3EI/l \times 3}_{\frac{۱۴EI}{l}}} \times Pl = Pl/14$$

$$\theta_o = \frac{Pl}{۱۴EI/l} = \frac{Pl^۲}{۱۴EI}$$

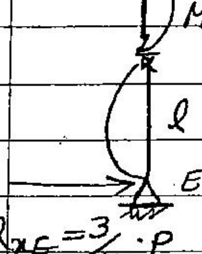
$$\theta_D = \theta_A = \theta_E = \frac{1}{2}\theta_o = \frac{Pl^۲}{۲۸EI}$$

فرمول ۱٤

$$\delta_F = \delta_H = \theta_o \times l = \frac{Pl^۳}{۲۸EI}$$ ط

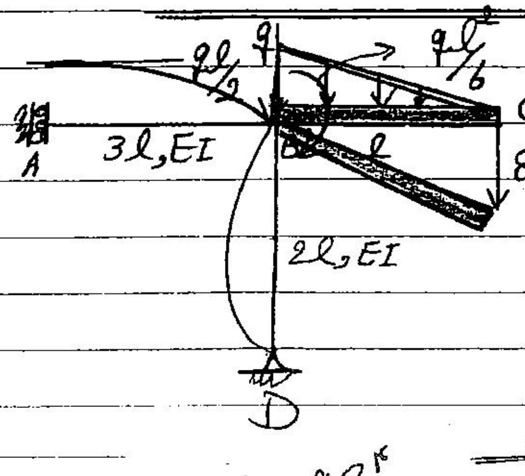
فرمول ۱۲) $\Rightarrow \delta_B = \frac{(Pl/۱٤)\, l^2}{2EI} = \frac{Pl^3}{28EI}$ ط

$$M_{OE} = \frac{3EI/l}{14\,EI/l} \times Pl = 3/14\, Pl$$ ط



$R_{xE} = 3/14 \cdot P$

؟ $= \theta_D$ (ل


$ql/2$
q
$ql^2/6$
C
A
$3l, EI$
B
l
δ_C
$2l, EI$
D

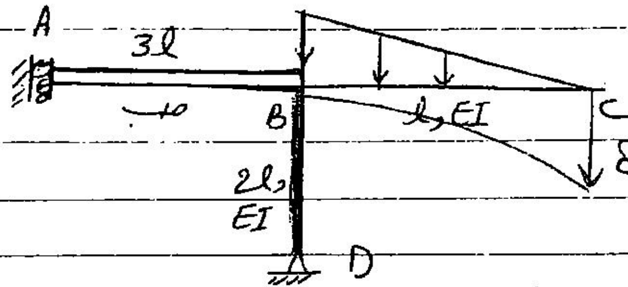
$$\theta_D = \frac{\theta_B}{2}$$

$$\theta_B = \frac{ql^۲/4}{EI/3l + 3EI/2l} = \frac{ql^۳}{11EI}$$

$$\Longrightarrow \theta_D = \frac{ql^۳}{۲۲EI}$$

$$\delta_C = \theta_B \times l = \frac{ql^۴}{11EI}$$

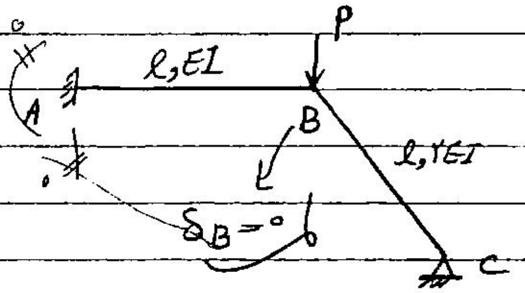
مثال)


A
3l
صـ
B
l, EI
C
2l,
EI
D

$$\delta_C = \delta_{CB} = \frac{A_M}{EI}\cdot\bar{x}$$

$$\theta_B = \frac{ql^2/4}{\infty + \frac{3EI}{2l}} = 0 \Longrightarrow \theta_D = \frac{1}{2}\theta_B = 0$$

مثال) θ_C چقدر است؟


0
A
0
l, EI
P
B
l, 2EI
C
$\delta_B = 0$

$$\underbrace{M_{BA}}_{\frac{2EI}{l}(2\theta_B)} + \underbrace{M_{BC}}_{\frac{3(2EI)}{l}\cdot\theta_B} = 0$$

$$\Longrightarrow \theta_B = 0$$

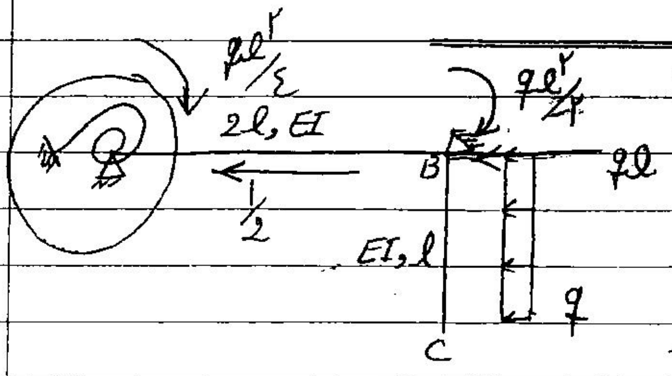
$$\theta_C = \frac{\theta_B}{2} = 0.0$$

نکته! اگر سازه‌ای داشتیم که: ۱) بارگذاری آن سازه بصورت نیروی متمرکز گره‌ای باشد.

۲) عضو ممان گره‌ای نداشته باشد.

آنگاه در آن سازه برش و خمش صفر است و به عبارت دیگر آن سازه عملکرد خرپایی دارد و فقط نیروی محوری دارد.

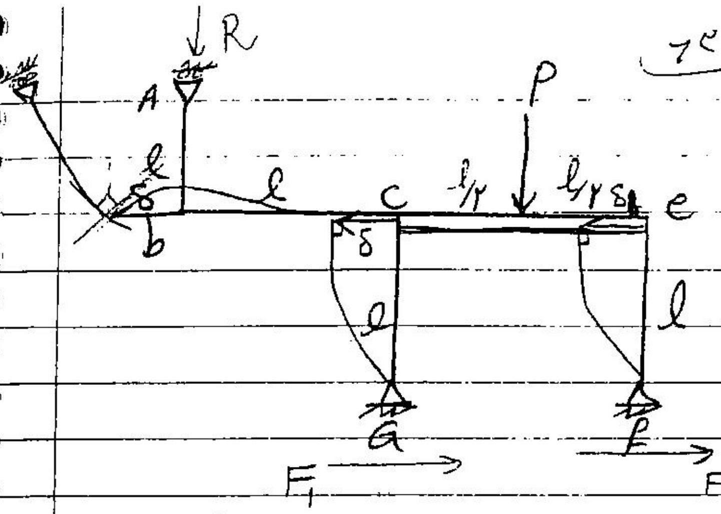
مثال) $\theta_A = ?$


$ql^2/4$
2l, EI
$\frac{1}{2}$
$ql^2/2$
B
ql
EI, l
q
C

$$M_{\text{فنر}} = k\,\theta_{\text{فنر}} =$$

$$\theta_{\text{فنر}} = \theta_A = \frac{ql^2/4}{k_{\text{فنر}} + 3EI/2l}$$

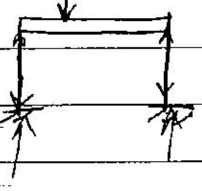
مثال) $\theta_B = ?$ (EI)


R
A
l
δ
b
l
c
l/2
P
l/2
δ
e
δ
l
l
G
F
F1
F2

$\delta = 0$

$F_1 = F_2 = 0$

چون هیچ نیرویی به این دو ستون نمی‌گذرد و تغییر شکل سازه غلط است.

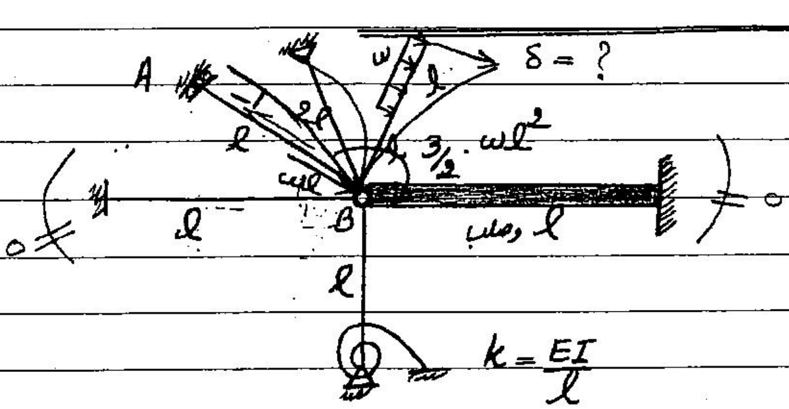


به دلیل کف صلب تبدیل به عملکرد خرپایی می‌شود و فقط نیروی محوری دارد.

و سازه تغییر شکل نمی‌دهد.

مثال) لنگر تکیه‌گاهی؟

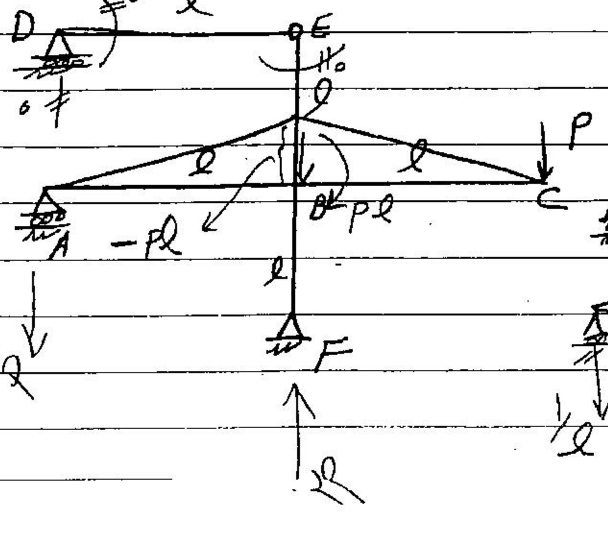
(EI)

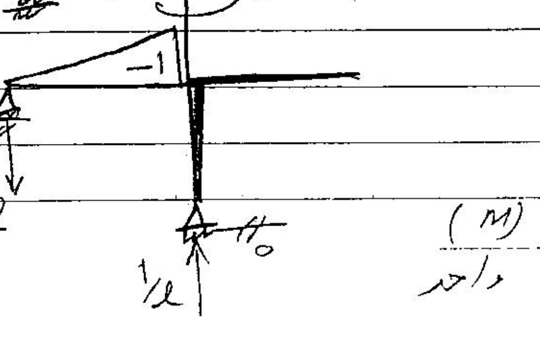

A
δ = ?
w
l
2l
l
wl
3/2 . wl²
≠ 0
l
B
l وصلب
l
k = EI/l
= 0

$$|M_{AB}| = M_{BA} = \frac{EI/l}{EI/l + 3EI/l} \times \left(\frac{3}{2} \cdot wl^2\right) = \frac{3}{5} wl^2$$

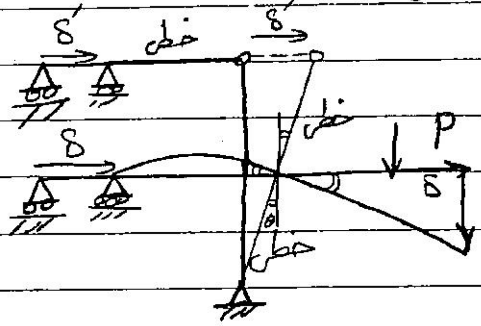
مثال) $\theta_B = ?$

چون A تغییر مکان گره‌ای دارد از روش هاردی کراس استفاده نمی‌شود.

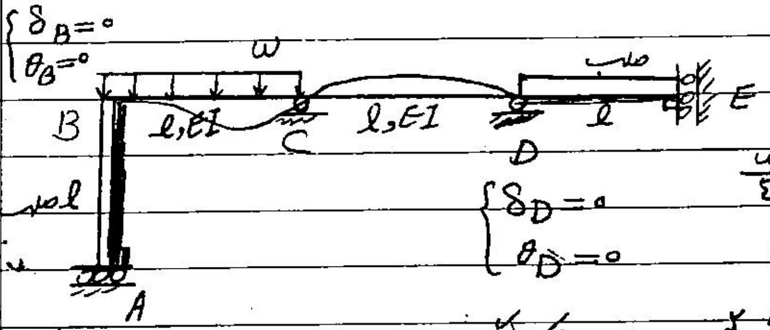

D
≠ 0
l
E
H0
l
l
l
P
A
-Pl
B
Pl
C
l
F
Q
2Q

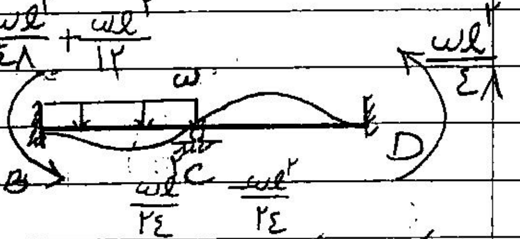

m = 0
m = 0
-1
1/l
H0
1/l
(M)
واحد

$$1\times\theta_B=\frac{\overset{pl\times l/2}{AM}}{EI}\cdot\underset{\hookrightarrow 2/3}{\bar m}\Longrightarrow\theta_B=\frac{pl^2}{3EI}$$


δ'
خط
δ'
خط
P
δ
δ
θ
خط

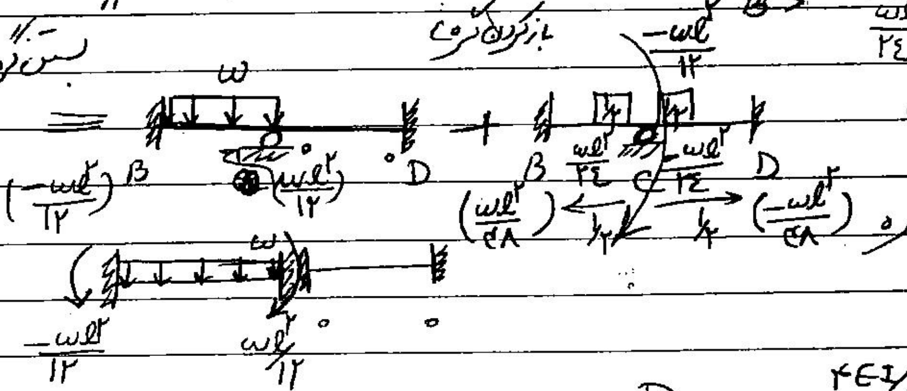
مثال)


$\delta_B=0$
$\theta_B=0$
w
صلب
E
B
l,EI
C
l,EI
D
l
صلب
A
$\delta_D=0$
$\theta_D=0$


$\frac{wl^2}{48}+\frac{wl^2}{12}$
$\frac{wl^2}{48}$
w
B
C
D
$\frac{wl^2}{24}$
$\frac{wl^2}{24}$

بستن گره

بازکردن گره


$-\frac{wl^2}{12}$
w
=
+
$\left(-\frac{wl^2}{12}\right)$ B
$\left(\frac{wl^2}{12}\right)$
0
D
1/2
1/2
B
$\frac{wl^2}{24}$
C
$-\frac{wl^2}{24}$
D
$\left(\frac{wl^2}{48}\right)$
1/2
1/2
$\left(-\frac{wl^2}{48}\right)$
w
$-\frac{wl^2}{12}$
$\frac{wl^2}{12}$
0
0

پخش شده ← بارگذاری عضوی

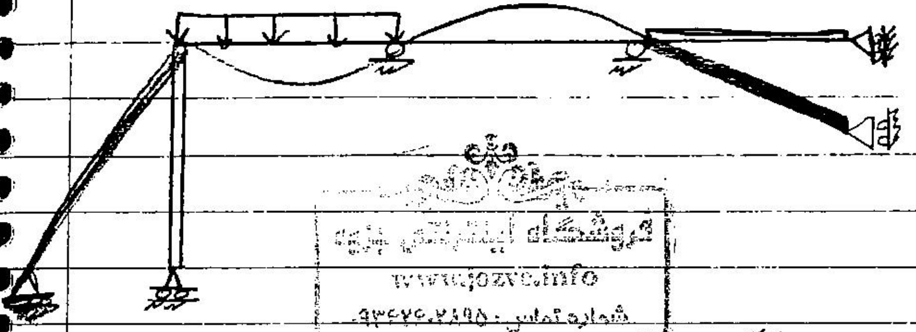
بابستن گره

$$D_{CB}=\frac{4EI/l}{4EI/l+4EI/l}=\frac{1}{2}$$

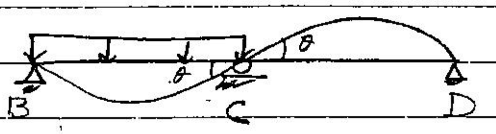
$$|\theta_C|=\frac{wl^2/12}{4EI/l+4EI/l}=\frac{wl^3}{96EI}$$

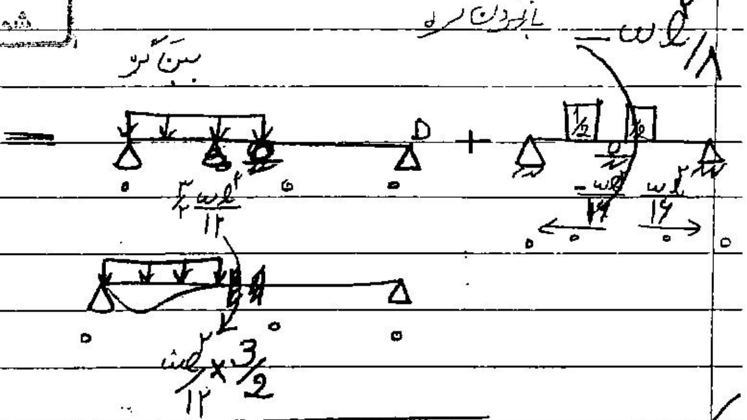
$M_{CB}+M_{CD}=0$

مثال)



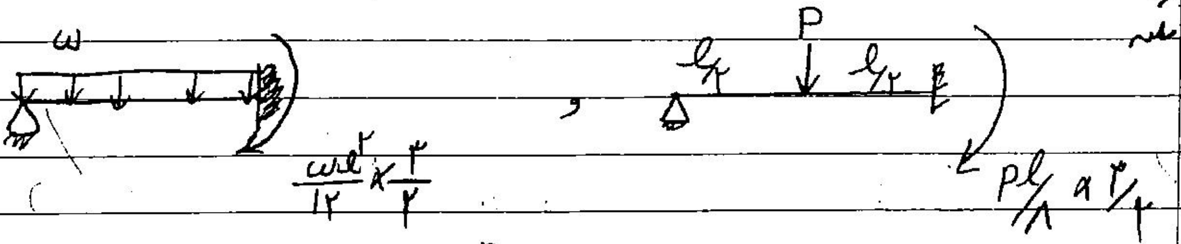
فروشگاه اینترنتی جزوه
www.ujozve.info
شماره تماس: ۰۹۳۶۲۷۶۰۲۱۹۵




بستن گره
باز کردن گره
$\omega l^2/8$
D
$\frac{\omega l^2}{12}$
$\frac{-\omega l^2}{16}$
$\frac{\omega l^2}{16}$
$\frac{\omega l^2}{12} \times \frac{3}{2}$

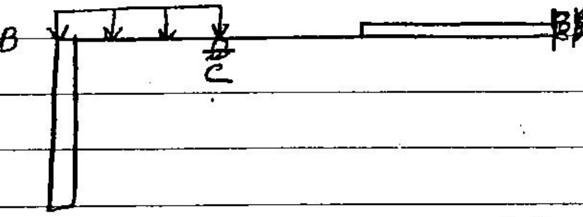
$$\theta_D = \frac{\theta_c}{2}$$

مثال

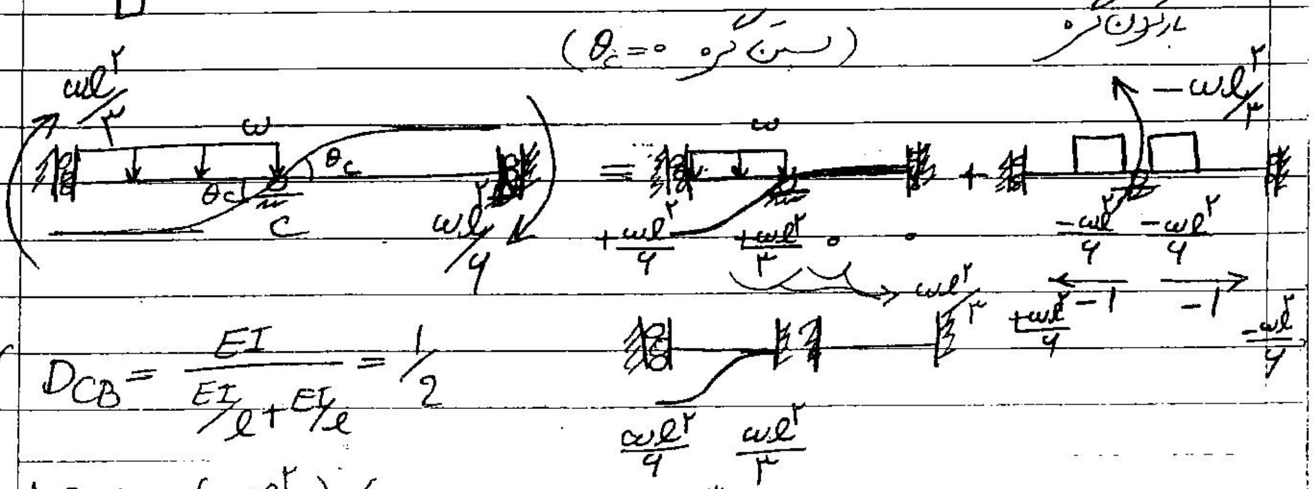

ω
$\frac{\omega l^2}{12} \times \frac{3}{2}$
P
$l/2$
$l/2$
$Pl/8 \times 3/2$

$\delta_B \neq 0$
$\theta_B = 0$

مثال)

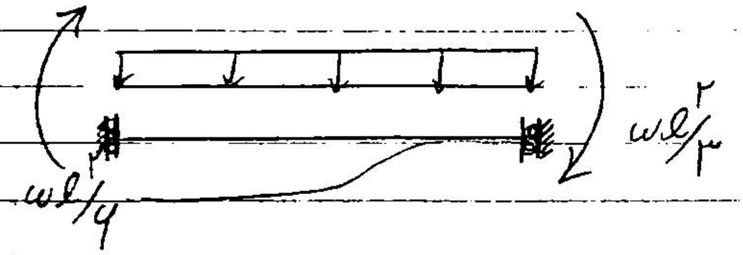


($\theta_c = 0$ بستن گره)


باز کردن گره
$\omega l^2/3$
ω
θ_c
θ_c
C
$\omega l^2/4$
$+\frac{\omega l^2}{4}$
$\frac{\omega l^2}{3}$
$-\omega l^2/3$
$\frac{-\omega l^2}{4}$
$\frac{-\omega l^2}{4}$
$\omega l^2/3$
$\frac{+\omega l^2}{4}$
-1
-1
$\frac{-\omega l^2}{4}$
$\frac{\omega l^2}{4}$
$\frac{\omega l^2}{3}$

$$D_{CB} = \frac{EI}{EI/l + EI/l} = \frac{1}{2}$$

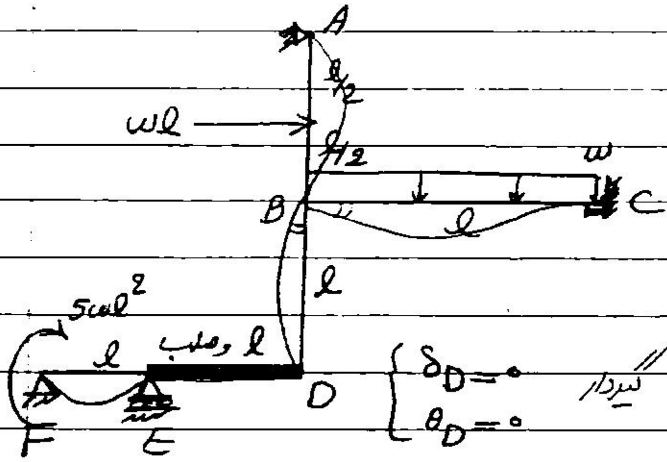
$$|\theta_c| = (\omega l^2/4) / (EI/l + EI/l) = \omega l^3/4EI$$



[illegible]

مثال: لنگر تکیه‌گاه گیردار چقدر است؟

(EI)

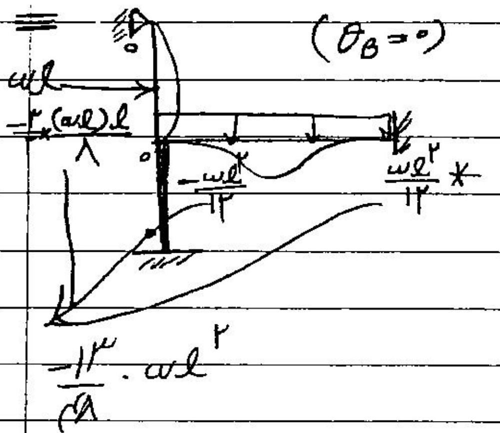

A
$l/2$
wl
$l/2$
w
B
C
l
l
$5wl^2$
l
l و صلب
D
F
E

$\theta_F = ?$ تمرین

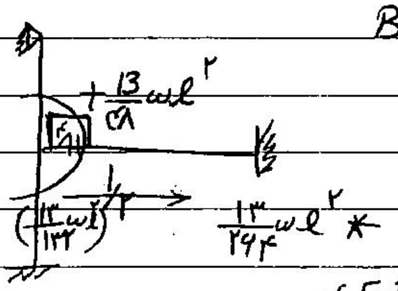
$\begin{cases} \delta_D = ۰ \\ \theta_D = ۰ \end{cases}$ گیردار

آزاد کردن B

$(\theta_B = ۰)$


wl
$-\frac{۳}{۸}(wl)l$
۰
۰
$-\frac{wl^{۲}}{۱۲}$
$\frac{wl^{۲}}{۱۲}$ *
$\frac{-۱۳}{۴۸} \cdot wl^{۲}$

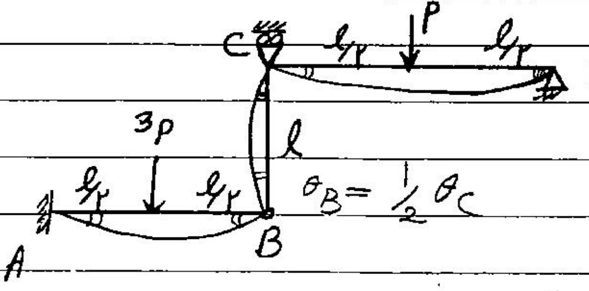
+


$+\frac{13}{۴۸}wl^{۲}$
$۴/۱۱$
$\frac{۱}{۲}$
$\left(\frac{۱۳}{۱۳۲}wl^{۲}\right)$
$\frac{۱۳}{۲۶۴}wl^{۲}$ *

$$D_{CB} = \frac{۴EI/l}{۲\times ۴EI/l + ۳EI/l} = \frac{۴}{۱۱}$$

$$M_C = \overset{*}{+\frac{wl^{۲}}{۱۲}} + \overset{*}{\frac{۱۳}{۲۶۴}} wl^{۲}$$

مثال) θ_B در عضو BC کدام است؟ (EI)

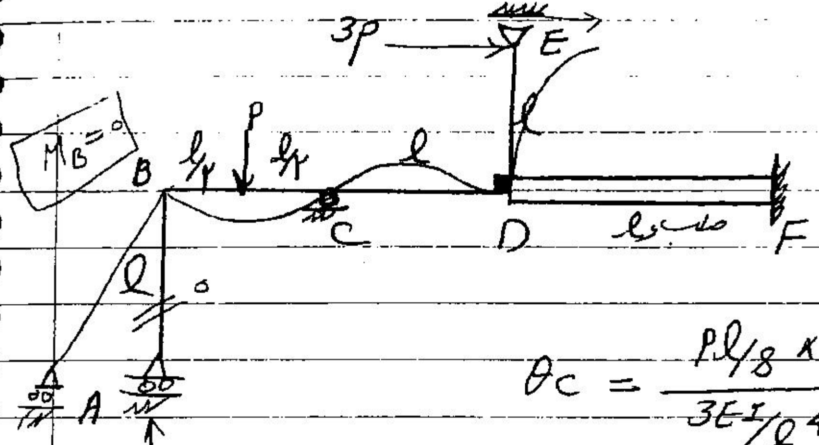

C
$l/2$
P
$l/2$
D
$3p$
l
$l/2$
$l/2$
A
B

$\theta_B = \frac{1}{2}\theta_C$

$$\theta_C = \frac{Pl/۸ \times ۳/۲^{*}}{۳EI/l + ۳EI/l} = \frac{Pl^{۲}}{۳۲EI}$$

$$\theta_B = \frac{Pl^{۲}}{۶۴EI}$$

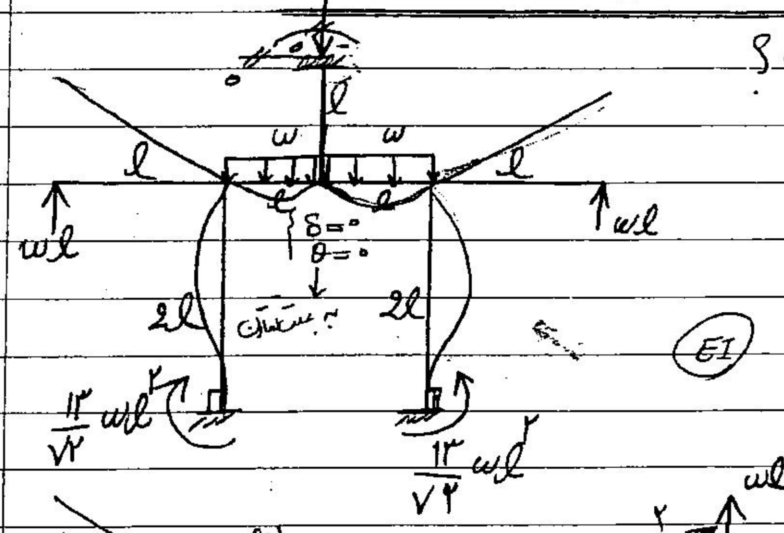
مثال) $\theta_C = ?$ (EI)


3P
E
l
$M_B = 0$
B
l/2
P
l/2
l
C
D
صلب
F
l
A

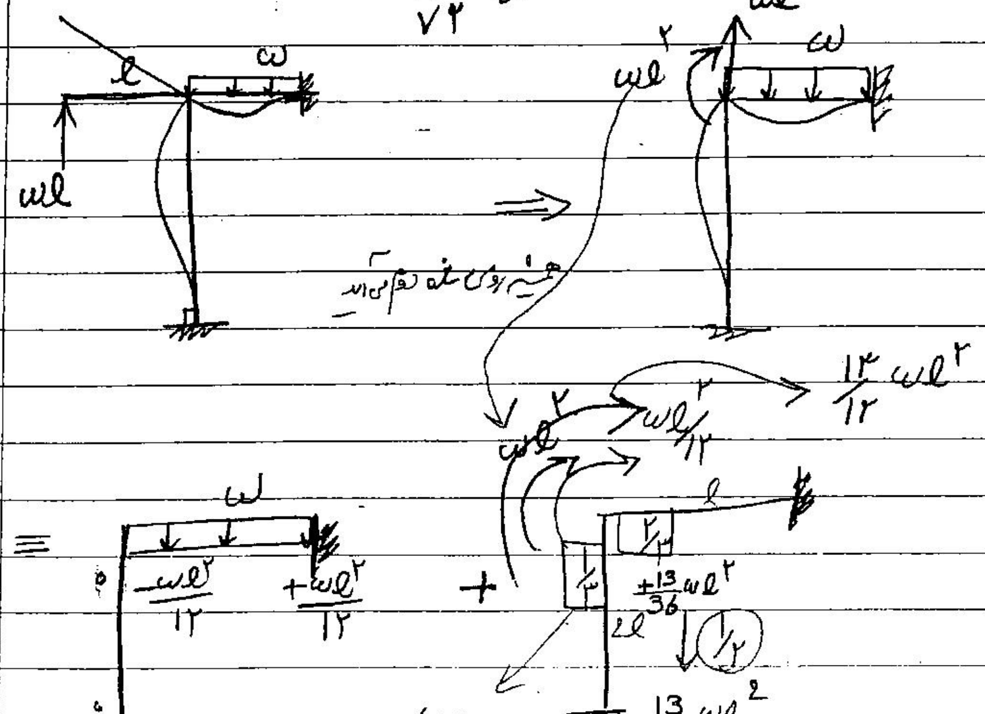
$$\theta_C = \frac{Pl/8 \times 3/2}{3EI/l + 4EI/l} = \frac{3Pl^2}{112EI}$$

$$\delta_E = \frac{Pl^3}{3EI}$$

مثال) لنگرهای تکیه‌گاهها چقدر است؟


l
w
w
l
l
l
l
wl
$\delta = 0$
$\theta = 0$
wl
بسته است
2l
2l
EI
$\frac{13}{72}wl^2$
$\frac{13}{72}wl^2$

فروشگاه اینترنتی جزوه
www.ujzve.info
شماره تماس: ۰۹۳۶۲۶۰۲۸۹۵


l
ω
wl
wl
wl^2
ω
همینطوری منتقل می‌آید
$\frac{13}{12}wl^2$
wl^2
$wl^2/12$
≡
ω
0
$\frac{-wl^2}{12}$
$\frac{+wl^2}{12}$
+
l
$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}$
$\frac{+13}{36}wl^2$
2l
$\frac{1}{2}$
0
$\frac{13}{72}wl^2$

$$\frac{\frac{4EI}{2l}}{\frac{4EI}{2l} + \frac{4EI}{l}} = \frac{1}{3}$$

* آزاد ۸۷ و آزاد ۸۸ ← سوالهای بخش نگر حل شود.