دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست

جزوه درس :

مقاومت مصالح ۱

استاد :

جناب آقای دکتر کبیر

نگارش:

حمید کاظم

(کارشناس عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

(دانشجوی کارشناسی ارشد گرایش سازه دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

تابستان ۱۳۸۹

«بسم الله الرحمن الرحیم»

حمید کاظم

مقاومت مصالح ۱

جناب آقای دکتر کبیر

خلاصه مباحث درس :

فصل اول :

مفاهیم تنش : نرمال ، برشی ، لهیدگی ، مولفه های تنش بر روی سطح شیبدار ، ضریب اطمینان

فصل دوم :

بارگذاری محوری : تنش محوری ، کرنش محوری (معیار اندازه گیری تغییر شکل) ، دیاگرام تنش کرنش (رابطه بین بار و تغییر شکل) ، خزش ، خستگی ، تحلیل سازه های نامعین الاستیکی ، بارگذاری حرارتی ، ضریب پواسون ، تمرکز تنش ، قانون هوک (رابطه بین تنش و کرنش در حالت خطی) برای حالت ۲ بعدی و ۳ بعدی تنش ، تغییر شکل های ماندگار ، تنش های پس ماند .

فصل سوم :

پیچش : مقاطع دوار ، تنش برشی ناشی از پیچش ، تغییر شکل پیچشی (زاویه پیچشی) ، تمرکز تنش ، مسائل نامعین در پیچش ، طراحی محورهای انتقال قدرت ، تغییر شکل های پلاستیک (ماندگار) در پیچش ، مقاطع جدار نازک در پیچش ، مقاطع غیر دوار

فصل چهارم:

خمش (خمش خالص ۲/۳) : کلیات خمش، تعریف تنش ناشی از خمش، خمش در مقاطع مرکب، تمرکز تنش در خمش، تغییر شکل های غیر ارتجاعی، خمش نامتقارن، بارهای محوری خارج از مرکز، ترکیب تنش محوری و خمشی.

فصل پنجم:

برش : کلیات برش، تنش برشی در تیرها، مقاطع جدار نازک، مرکز برش، مقاطع مرکب، ترکیب تنش ها.

* ترکیب تنش ها جمع بندی کل چیزهایی است که خوانده ام.

$\left\{\begin{array}{l}\text{Mechanics of solids} \\ \text{strength of materials}\end{array}\right. \rightarrow$ مقاومت مصالح

حمید کاظم

اهداف درس :

۱) استحکام strength

۲) صلبیت (میزان ایستایی در برابر بار وارده) Rigidity

۳) پایداری الاستیک Elastic Stability

این ۳ هدف را در مکانیک جامدات به صورت زیر خلاصه و تعریف می‌کنیم :
موضوعی از علم مکانیک است که با استفاده از روش‌های تحلیلی به بررسی و تعیین میزان مقاومت (استحکام) و صلبیت (تغییر شکل) و پایداری ارتجاعی اعضای باربر می‌پردازد.

مفاهیم اساسی درس :

۱) جسم صلب (rigid body) : به آن جسمی گویند که در اثر اعمال نیروهای خارجی تغییر شکل نسبی بین اجزاء تشکیل دهنده آن صفر باشد یعنی به عبارتی

Relative Displacement Between Particles = 0

هر جسمی در اثر نیرو تغییر شکل می‌دهد (حرکت جسم صلب)

۲) جسم شکل پذیر (Deformable body): به آن جسمی گویند که در اثر اعمال نیروهای خارجی تغییر شکل نسبی بین اجزاء تشکیل دهنده آن صفر نباشد. Relative Displacement Between particles ≠ 0.

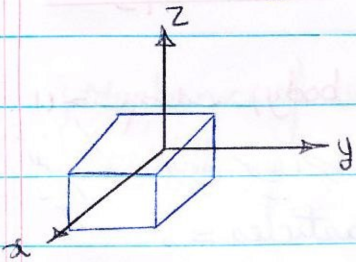
* درست برعکس جسم صلب

۳) جسم همگن (Homogen): به جسمی گویند که چگالی آن (ρ) در تمام نقاط ثابت باشد. مثلاً فولاد (از ترکیب بتن)

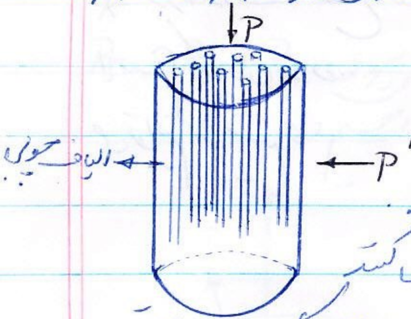
* بتن اگر خوب ویبره شود همگن می گردد. خاک همگن نیست.

۴) ایزوتروپ (Isotrop): به جسمی گوییم که خواص مصالح آن در کلیه راستاها یکنواخت باشد.

مثلاً در مکعب مقابل از هر جهت بارگذاری کنیم یک عکس العمل نشان می دهد



ه) انیستروپ (Anistrop): به جسمی گویند که رفتارش در ۳ جهت x و y و z یکسان نیست.



بهترین مثال برای این حالت چوب است.
چوب نیروی وارده P را بهتر از P' تحمل می کند.
چون در حالت موازی (P) بار را الیاف تحمل می کنند
ولی در جهت عمودی (P') مواد چسباننده الیاف به همدیگر، بار را تحمل
کرده و لذا بهتر است بار به صورت موازی با الیاف اعمال شود.

۶) ارتوتروپ (Orthotrop): اجسامی که در سه راستای متعامد خواص متفاوتی داشته باشند.

تعادل اجسام: اجسام در حال تعادل از روابط زیر پیروی می کنند:

$$\sum F = 0 \quad , \quad \sum M = 0$$

برای پیدا کردن فرمول های تعادل، ۳ جهت x و y و z را در نظر می گیریم و داریم:

$$\sum F = 0 \rightarrow \sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0$$

$$\sum M = 0 \rightarrow \sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0$$

* در مقاومت مصالح روابط تعادل اجسام به منظور تعیین و کشف نیروهای داخلی اجسام بکار می رود.

می توانیم بنویسیم:

$$\hat{P} = P_x\hat{i} + P_y\hat{j} + P_z\hat{k}$$ بردار کل نیرو

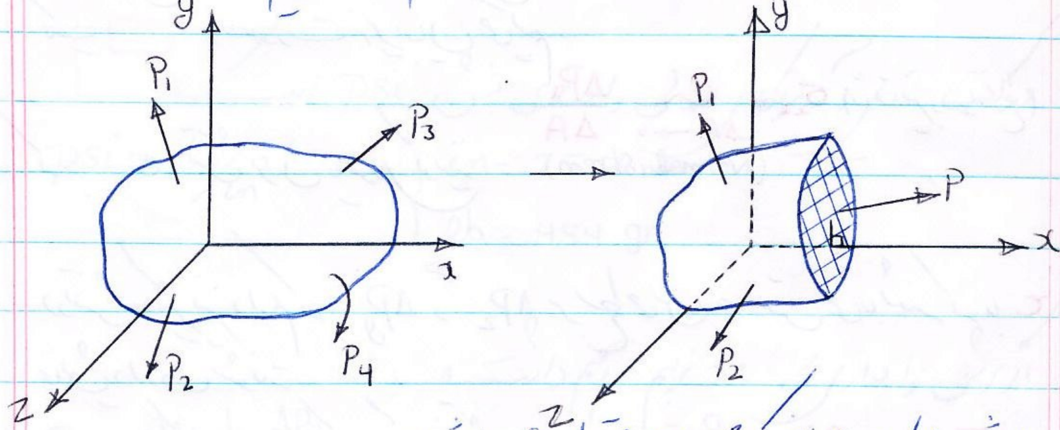
$$\hat{M} = M_x\hat{i} + M_y\hat{j} + M_z\hat{k}$$ بردار کل لنگر

حمید کاظم

فصل اول

مفهوم تنش : (Concept of stress)

از جسمی در فضای xyz در حال تعادل تحت تأثیر نیروی P_1 ، P_2 ، P_3 ، P_4 قرار گرفته باشد ؛ وقتی شکل را برش می زنیم خواهیم داشت :



برش را طوری می زنیم که محور x بر مقطع عمود باشد

P برآیند نیروهای داخلی در سطح مقطع می باشد که با P_1 ، P_2 دارای برآیند صفر است

برای بیان مفهوم تنش روی سطح مقطع تقسیم بندی هایی انجام می دهیم. فرض کنیم مساحت سطح مقطع A و قسمت های خیلی خورده ΔA باشد ؛ در اینصورت می توان گفت به آن ΔP نیرو وارد می شود که اگر آن را بصورت برداری بنویسیم

خواهیم داشت: $\vec{\Delta P} = \vec{\Delta P_x}\,\hat{i} + \vec{\Delta P_y}\,\hat{j} + \vec{\Delta P_z}\,\hat{k}$

غلط (همین $\vec{P}$ بر سطح عمود است پس ΔP نیز بر مقطع برش عمود می‌باشد). بنابراین
ΔP_x بر سطح عمود و ΔP_y و ΔP_z بر سطح مماس هستند. از التعریف تنش در
تک $\boxed{}$ را بصورت زیر بیان می‌کنیم.

$$\sigma_{xx} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_x}{\Delta A}$$ (اندیس نیرو و دو واحد سطح)

که به σ_x تنش نرمال یا عمودی گویند (Normal stress)

دو تنش دیگر نیز داریم که ΔP_y و ΔP_z بر سطح مماس عامل می‌باشند که با τ
نمایش داده می‌شوند

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_y}{\Delta A}$$

xy بیانگر سطحی است که در آن تنش وارد می‌شود
یعنی سطحی که نیرو بر آن عمود است

x در xy بیانگر سطح مورد تنش است و y در xy بیانگر جهت نیرو است.

$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_z}{\Delta A}$$

بهتر است از لحاظ طراحی بارگذاری و تنش در یک راستا باشند.

* اولین اندیس τ، تنش را به صفحه‌ای که روی آن عمل می‌کند مربوط می‌سازد و زیرنویس دوم
نشاندهنده جهت آن می‌باشد.

در سیستم احاد (SI) نیرو را با N یا kN و سطح را با mm^2 نمایش می دهند.
پس واحد تنش $\frac{kN}{mm^2}$ یا MPa است.

$1\,pa = N/m^2$ $\qquad$ $1\,MPa = 10\,kg/cm^2$

در کتب قدیمی و امریکایی شمالی واحدهای تنش psi است که

$$psi = lb/in^2 \longrightarrow \begin{cases} in = 25.4\,mm \\ lb = 454\,gr \end{cases}$$

اگر برش را موازی محور xz بزنیم خواهیم داشت:

$$\sigma_{yy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_y}{\Delta A}$$

$$\tau_{yz} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_z}{\Delta A}$$

محور y عمود است $\tau_{yx} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_x}{\Delta A}$

* تنش کمیتی تانسوری (Tansor) است. یعنی برداری است که سطح داشته باشد. در این یعنی که علاوه بر مقدار و راستا، سطحی که بر آن اعمال می شود نیز معلوم باشد.

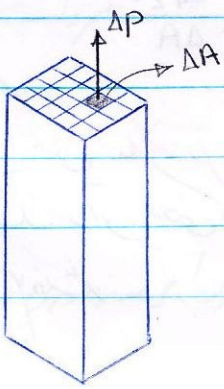
Tonsor از لحاظ شکل کمیتی بزرگتر از بردار است.

ماتریس تانسور را در فضا به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\text{تانسور تنش:}\quad \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \longrightarrow \text{دارای ۹ مولفه است}$$

اگر تابع بار تابعی پیوسته باشد سیگما تبدیل به دیفرانسیل می‌شود (زیاد وارد این بحث نخواهیم شد!!)

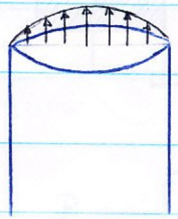
تعریف مهندسی تنش (Exact Define):

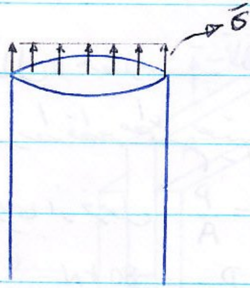


$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta A}$$

$$\bar{\sigma}_{\text{متوسط}} = \frac{P}{A}$$

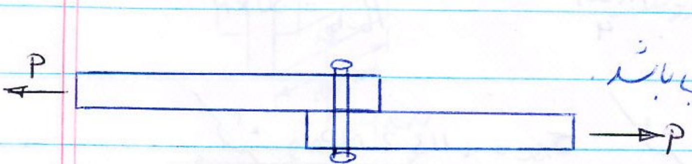
در واقع وقتی P به سطح اعمال می شود، نیروها به صورت مقابل می گردند
اگر بار وارده به صورت تابعی از مختصات سطح بیان شود می توان
شدت تنش را به صورت مقابل نشان داد.

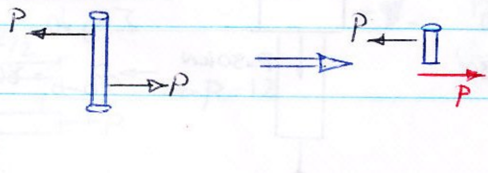




ولی در تنش متوسط نیروها به صورت مقابل فرض می شوند.
(همگی هم اندازه اند)

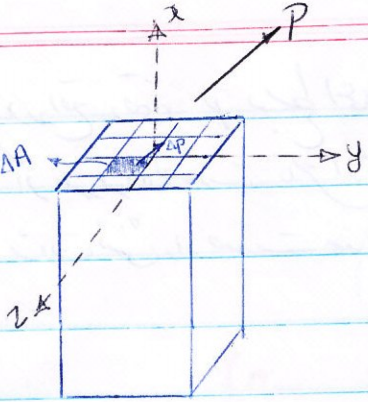
فرض کنیم عضوی به صورت مقابل باشد.





$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{P}{A}$$

* اگر به اندازه ضخامت عضو از محل اعمال بار دور شویم تنش یکنواخت می شود.

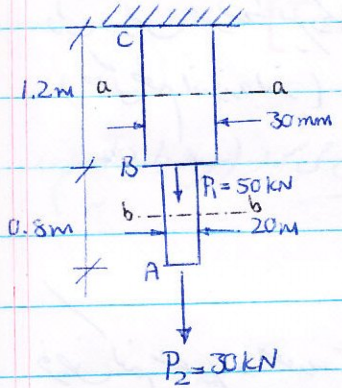


$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_x}{\Delta A}$$

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_y}{\Delta A}$$

$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_z}{\Delta A}$$

مثال: مطلوبست تنش در وسط هر قطعه.



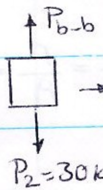
حل: در وسط قطعه مطمئن هستیم توزیع تنش یکنواخت است.

در اینجا از فرمول $\bar{\sigma} = \frac{P}{A}$ استفاده می کنیم.

$$A_{a-a} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (30)^2}{4} \qquad P_{a-a} = 80 \text{ kN}$$

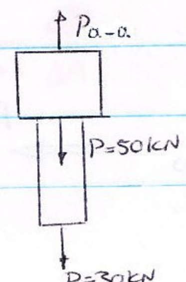
$$A_{b-b} = \frac{\pi (20)^2}{4} \qquad P_{b-b} = 30 \text{ kN}$$

$\Longrightarrow$ $\sigma_{AB} = +95.5$ MPa کشش $\qquad \sigma_{BC} = +113.2$ MPa کشش



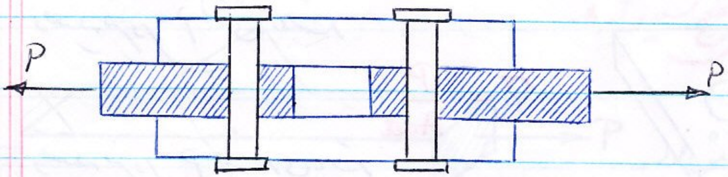
$\Sigma F_y = 0$

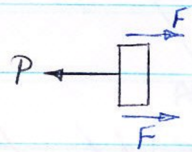
$\rightarrow P_{b-b} = 30$



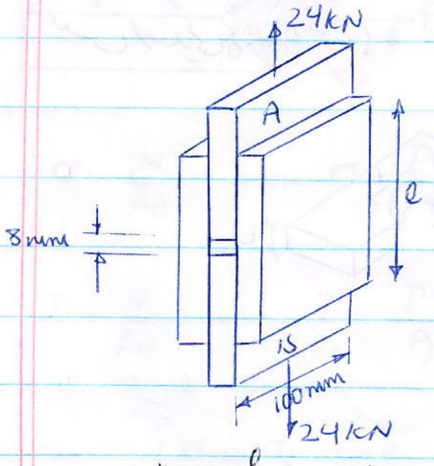
$\Sigma F_y = 0$

$\rightarrow P_{a-a} = 80$ kN

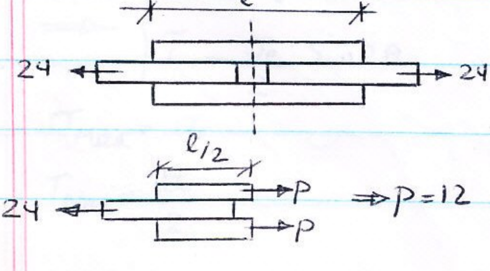




$$2F = P \Rightarrow F = P/2 \Rightarrow \tau = \frac{P}{2A}$$



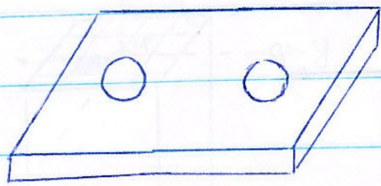
مثال : اگر بدانیم که تنش برشی متوسط مجاز حداکثر 800 kpa باشد و فاصله دو قطعه A , B 8mm باشد، طول l چقدر باشد که در برابر 24k تنش برشی از 800 kpa تجاوز نکند.

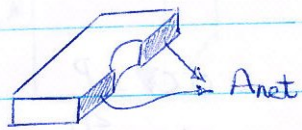


$\Rightarrow P = 12$

$$\tau = \frac{12 \times 10^3}{(l/2 - 4)\,100} = 800 \times 10^{-3}$$

$$\Rightarrow l = 308 \text{ mm}$$





وقتیکه نیروی P کششی باشد

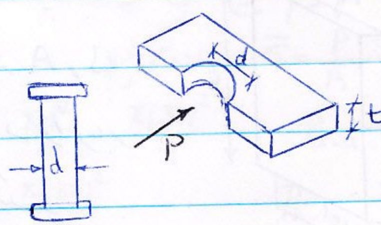
$$\sigma = \frac{P}{A_{net}}$$

وقتیکه نیروی P فشاری باشد

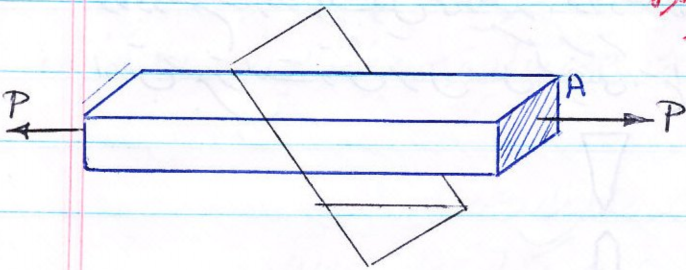
$$\sigma = \frac{P}{A_{\text{کل}}}$$

تنش لهیدگی (تکیه گاهی):

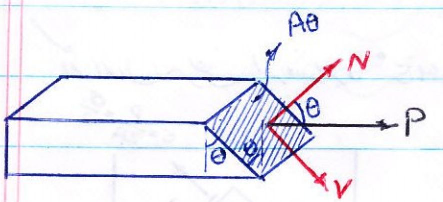
$$\sigma_b = \frac{P}{dt}$$



مولفه های تنش بر روی سطح شیبدار



تنش اولیه $\sigma_0 = \frac{P}{A}$



$$\begin{cases} N = P\cos\theta \\ V = P\sin\theta \end{cases} \qquad A = A_\theta \cos\theta$$

$A =$

$$\sigma = \frac{N}{A_\theta} \Rightarrow \sigma = \frac{P\cos\theta}{A/\cos\theta} \Rightarrow \sigma = \frac{P}{A}\cos^2\theta$$

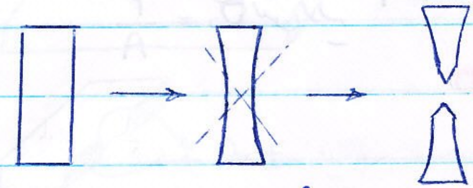
$$\tau = \frac{V}{A_\theta} \Rightarrow \tau = \frac{P\sin\theta}{A/\cos\theta} \Rightarrow \tau = \frac{P}{A}\sin\theta\cos\theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma = \sigma_0 \cdot \cos^2\theta \\ \tau = \frac{\sigma_0}{2}\sin 2\theta \end{cases}$$

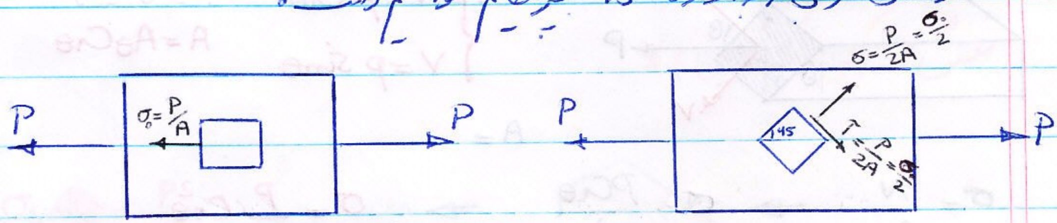
$\sigma_{Max} = \sigma_0$ * اگر $\theta=0$ باشد σ ، ماکزیمم می شود.

$\tau_{Max} = \frac{\sigma_0}{2}$ * اگر $\theta=45$ باشد τ ، ماکزیمم می شود.

فولاد و بتن سازه‌ها را تشکیل می‌دهند. فولاد معمولاً گسیختگی‌اش به صورت برشی است.
اما بتن چنین نیست و تنش نرمال عامل گسیختگی آن است.



اگر المان مربعی را به اندازه $45°$ بچرخانیم خواهیم داشت:



بار نهایی: حداکثر باری که یک جسم می‌تواند تحمل کند تا گسیخته شود. به عبارت دیگر بار آستانهٔ گسیختگی را بار نهایی گوییم.

تنش نهایی: حداکثر تنشی که یک جسم می‌تواند تحمل کند تا گسیخته شود.

بار مجاز (بار طراحی): Manufacturing: کار برده شدن فولادهای مقاطع بعضی جاها حرارت بیشتر می‌شود و در جای دیگر سرد می‌شود بعضی جاها دیرتر سرد می‌شود. پس داخل فولاد تنش‌های داخلی ایجاد می‌شود

Transportation: به عیب‌هایی که در حین حمل فولاد به وجود می‌آید

Instatation: نصب: وقتی اتصال می‌خورد و جوشکاری ناخواسته ایجاد می‌شود

Loading: بارهایی که در نظر گرفته می‌شود ممکن است بیشتر از مقدار بار واقعی اعمال شود

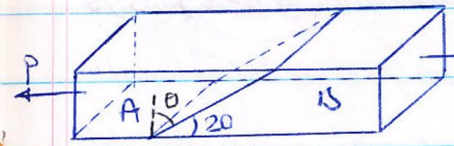
بار زنده مردم

Environment, Material:

تمام این عوامل نشان می‌دهد ما باید بار نهایی را اعمال کنیم. نسبت به تنش مجاز را اعمال می‌کنیم

$$\text{ضریب اطمینان} = \frac{\text{بار نهایی}}{\text{بار مجاز}}$$

بار مجاز را بسته به تجربه و دانش را مبنای طراحی در نظر می‌گیریم. ضریب اطمینان مشخص است که در آیین‌نامه‌ها وجود دارد.

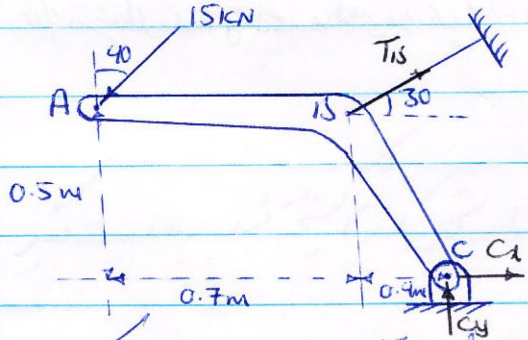


مثال: دو جسم چوبی A , B دارای سطح مقطع یکنواخت $70 \times 110\ mm^2$ توسط چسب به هم متصل شده اند. اگر بدانیم تنش مجاز برشی برای چسب 500 kpa فرض شود تعیین کنید حداکثر نیروی P که می توان به این عضو وارد نمود چسب؟

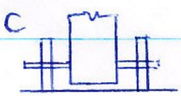
$\theta = 90 - 20 = 70$

$\tau = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\theta = 500 \times 10^{-3}\ (P\ MPa)$

$\Rightarrow \sigma_0 = \frac{P}{A} \Rightarrow P = \frac{500 \times 10^{-3} \times 2 \times (70 \times 110)}{\sin(2 \times 70)} = 11979\ N = 12\ kN$



مثال: اگر جسم نشان داده شده از فولاد باشد و فولاد دارای تنش برشی نهایی $\tau = 350\ MPa$ می باشد. این عدد برای پین فولادی نقطه C نیز مورد استفاده قرار می گیرد. اگر ضریب اطمینان مورد نظر در این مسئله 3.5 در نظر گرفته شود، قطر پین فولادی C را محاسبه کنید.

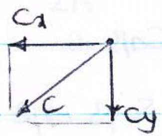


$\tau_{allowable} = \frac{350}{3.5} = 100\ MPa$

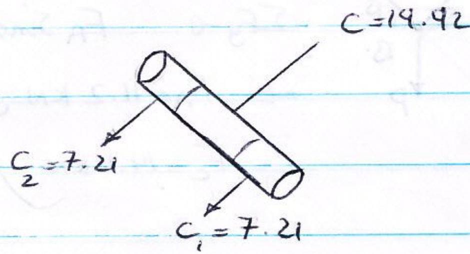
$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow T_{15}(0.4 \sin 30 + 0.5 \cos 30) - 15(1.1 \times \cos 40)$$
$$-15(0.5 \sin 40) = 0 \Rightarrow T_{15} = 27.58\ kN$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -15 \sin 40 + 27.58 \cos 30 + C_x = 0$$
$$\Rightarrow C_x = -14.24$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -15 \cos 40 + T_{15} \sin 30 + C_y = 0$$
$$\Rightarrow C_y = -2.3\ kN$$

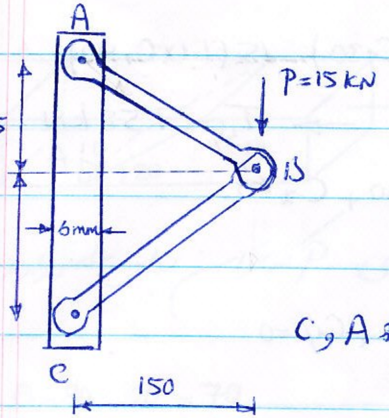


$C = 14.42\ kN$

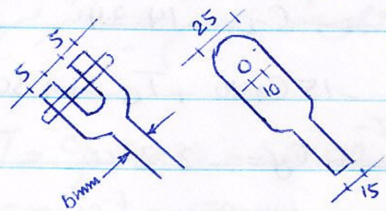


$$\tau_{allowable} = \frac{C/2}{A} = \frac{14.42 \times 10^3}{2 \times \pi (d^2)/4} = 100 \Rightarrow d = 9.58\ mm$$

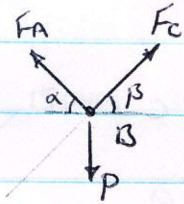
مثال: مطلوبست تعیین تنش های ماکزیمم در اعضای میله ای AB و BC و همچنین تنش لهیدگی برای پین در C. (قطر تمام پین های به کار رفته در این سازه 10mm فرض کنید)



A و C :



$$\begin{cases} \alpha = 25.56 \\ \beta = 45 \end{cases}$$



$\overset{+}{\rightarrow}$ $\Sigma F_x = 0 \quad -F_A \cos\alpha + F_C \cos\beta = 0$

$\Sigma F_y = 0 \quad F_A \sin\alpha + F_C \sin\beta = P$

$\Rightarrow F_A = 11.2\ kN$ کششی

$F_C = 14.1\ kN$ فشاری

محاسبه تنش های ماکزیمم:

$$\sigma_{AB}\ \text{میله} = \frac{F_A}{A_A} = \frac{11.2 \times 10^3}{6 \times 15} = 124\ Mpa \quad \text{کششی}$$

$$\sigma_{AB}\ \text{در محل پین} = \frac{F_A}{A_{net}} = \frac{11.2 \times 10^3}{2(25-10)5} = 74.7\ Mpa \quad \text{کششی}$$

$$\sigma_{BC}\ \text{میله} = \frac{F_C}{A} = \frac{14.1 \times 10^3}{6 \times 15} = 156.67\ Mpa \quad \text{فشاری}$$

* چون فشاری است A_{net} نمی‌خواهد   فشاری $\sigma_{bc} = \dfrac{F_c}{A} = \dfrac{14.1\times10^3}{2\times25\times5} = 56.4\ Mpa$ در کل پیچ

می‌شه تنش لهیدگی بین پین و تسمه

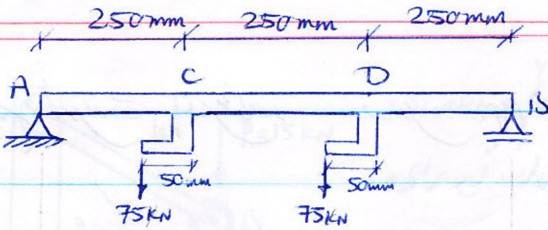
$$\sigma_b = \frac{F_c}{A} = \frac{14.1\times10^3}{2\times10\times5} = 141\ Mpa$$

می‌شه تنش لهیدگی بین پین و قطعه اصلی

$$\sigma_b = \frac{F_c}{A_{\text{قطر}}} = \frac{14.1\times10^3}{10\times6} = 235\ Mpa$$

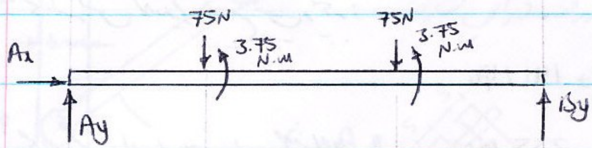
$$\tau = \frac{P}{2A} = \frac{14.1\times10^3}{2\times\pi(10)^2/4} = 89.8\ Mpa$$

مثال: مطلوبست رسم دیاگرام نیروی برشی و گشتاور خمشی

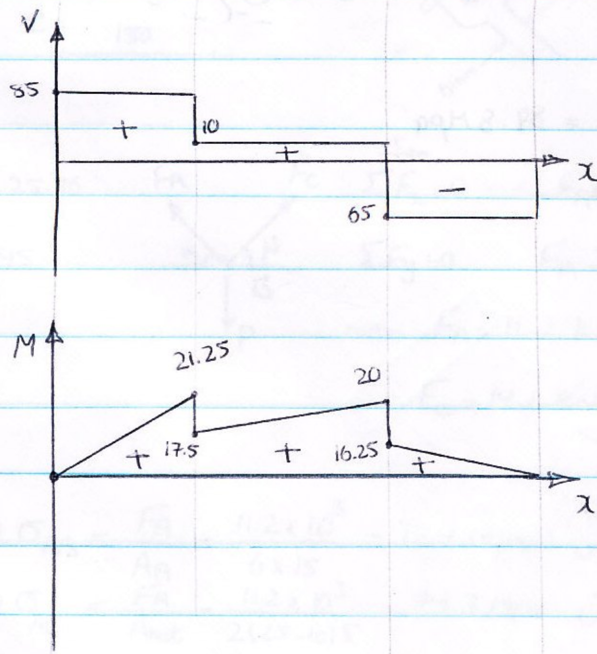


$$\Sigma M_A = 0 \quad , \quad \Sigma F_y = 0$$

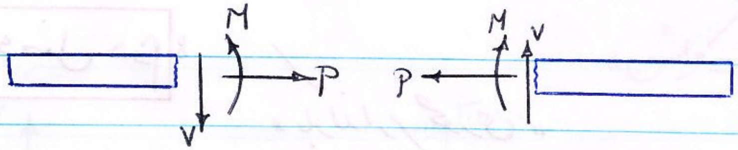
$$B_y = 65N \qquad A_y = 85N$$



$$\begin{cases} V_2 - V_1 = \int q\,dx \\ M_2 - M_1 = \int V\,dx \end{cases}$$



قرارداد 8



سوالات پیشنهادی Beer-Johnston :

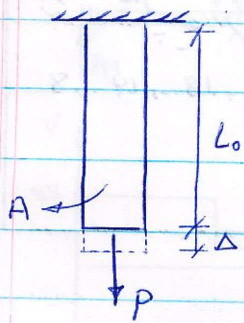
فصل 1 : 8, 14, 18, 20, 24, 26, 36, 41, 49, 55

فصل 7 : 19, 20, 30, 66

حمید کاظم

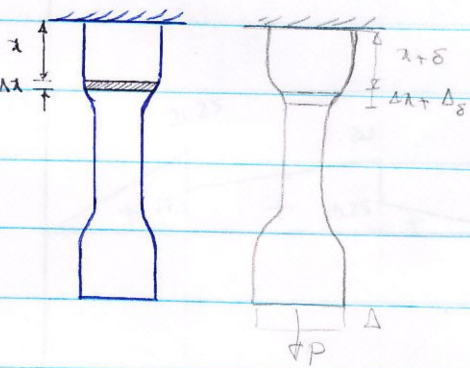
فصل دوم:

«بارگذاری محوری»



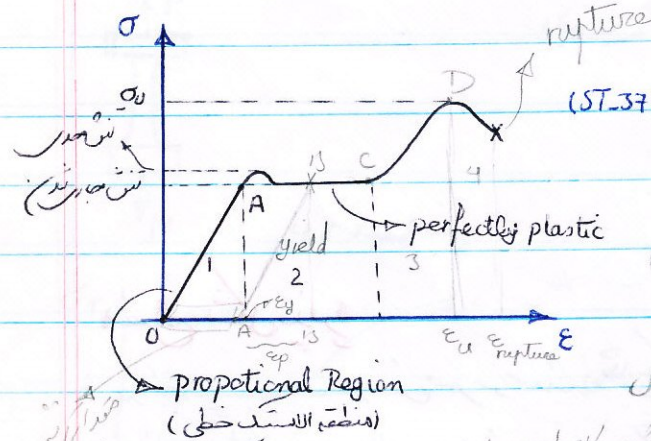
$$\bar{\sigma} = \frac{P}{A} \qquad \bar{\varepsilon} = \frac{\Delta}{L_0} = \frac{L - L_0}{L_0}$$

ε کرنش (strain) است و بدون واحد است.



$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx}$$

رسم دیاگرام تنش - کرنش :



مصالح شکل پذیر : فولاد ساختمانی (ST-37)

کرنش جاری شدن تیلای در هم وارد می‌شود

که بعد از تنش جاری شدن کرنش افزایش پیدا کرده ایم

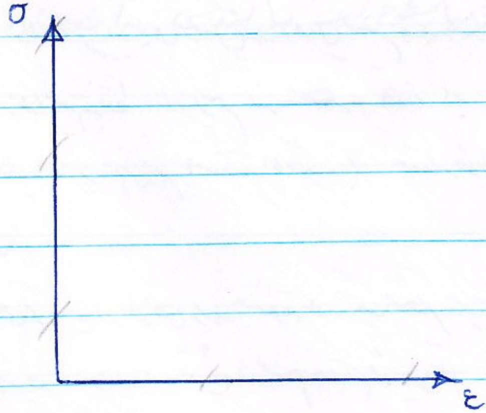
تا رجال

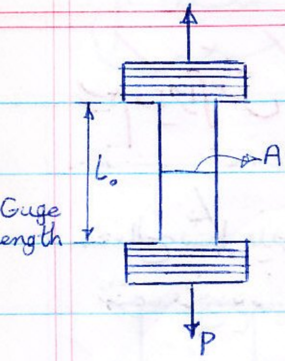
در OA اگر بار برداریم تغییر شکل به حالت اول

برمی‌گردد و اگر تنش اعمال شده حذف می‌شود. طراحی سازه مصالح در

منطقه OA انجام می‌شود.

مصالح ترد :





مصالح شکل پذیر مصالحی هستند که ظرفیت تغییر شکل آن زیاد است

مصالح شکل پذیر

* در منطقه ۱ با شیب ثابت تنش صعود می‌کند و تغییر شکل خطی می‌شود 1 : Linear Elastic
* در منطقه yield مصالح شل می‌شود و جاری می‌شود و هیچ مقاومتی از خود نشان نمی‌دهد
تغییر شکل کاملاً غیر خطی (پلاستیک) است 2 : yield

فولادهای ساختمانی و مس بر خلاف بقیه این قسمت را از خود نشان می‌دهند

اگر کار را قبل از نقطه B رها کنیم از نقطه A تا C که ε_p است. از نقطه C خطی را موازی خط OA رسم می‌کنیم (منطقه الاستیک) مقدار طول از صفر تا C بدست می‌آید مقدار کرنش پسماند گویند.

یعنی می‌بینیم در طول وارد منطقه پلاستیک شویم چون در جسم اثر پسماند باقی می‌ماند

* در CD تنش دوباره بالا می‌رود 3 : strain hardening

منطقه کرنش‌های سخت شونده. در هیچ کششی در داخل وارد این منطقه نمی‌شوند.

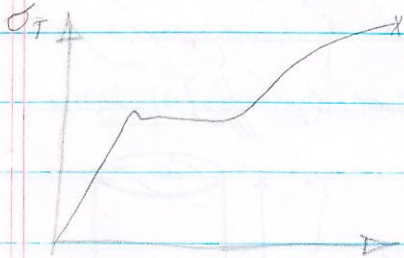
شیب منطقه ۳ از منطقه ۱ کمتر است. نقطه D حداکثر بار را در جسم تحمل می‌کند

Ultimate stress نام دارد ـ تنش حد نهایی

در نقطه D

نمونه بدون افزایش بار کشیده می‌شود.

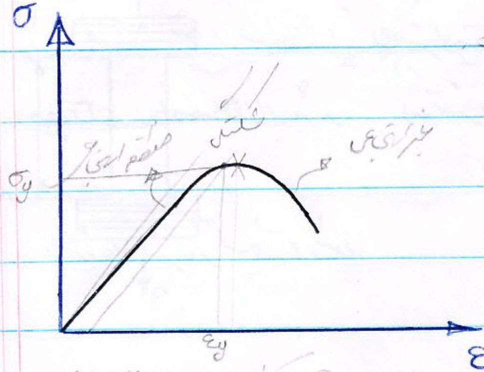
4 و necking



تنش واقعی = تنش حاصل از تقسیم نیرو بر سطح مقطع واقعی

True stress $\sigma = \frac{P}{A_T}$

تغییر شکل پلاستیک در این مرحله را با توجه به سطح ... است، تنش T_{max} وجود دارد.

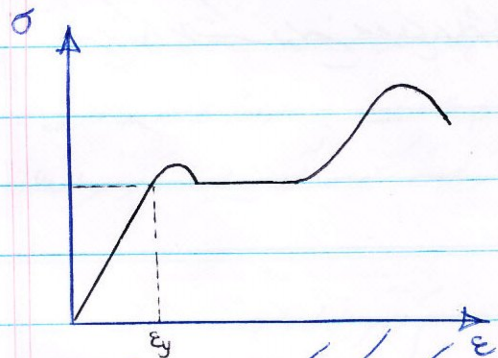


مصالح ترد: مصالحی هستند که درصد تغییرات آنها محدود است مثل بتن.

$\varepsilon_{\text{بتن}} = 0.003$

علت اینکه در بتن مانند فولاد نمی‌توانیم این است که شکل‌پذیری را نداریم. یعنی نقطه‌ای به نام yield نداریم یعنی نقطه‌ی تسلیم مشخص نداریم.

برای پیدا کردن منطقه‌ی ارتجاعی، غیر ارتجاعی از نقطه اولیه مماسی بر منحنی رسم می‌کنیم. به اندازه ٪0.2 جابجا می‌کنیم (آفست می‌کنیم) و بعد موازی شیب منحنی را رسم می‌کنیم. از نقطه اولیه تا نقطه مشخص منطقه ارتجاعی داریم.



$\sigma = E\varepsilon$

این فرمول مربوط است به منطقه الاستیک خطی. E برمی‌گردد به جنس مصالح.

تعریف E: مقدار تنشی که کرنش واحد را بوجود آورد. به E مدول ارتجاعی یا مدول یانگ گویند. ← مدول کشسانی هم

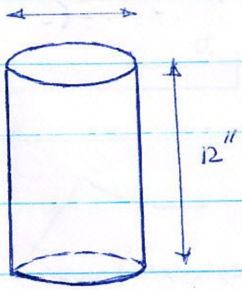
فولاد $E = 200\ Gpa = 2\times10^{6}\ kg/cm^{2}$

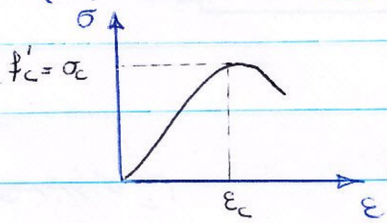
بتن $E \cong 2\times10^{5}\ kg/cm^{2}$

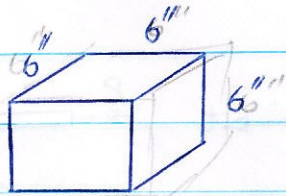
عمده مصالح ترد مقاومت کششی و فشاری یکسانی ندارد. بتن مقاومت کششی اش به مراتب کمتر از فشاری است.

شیشه و سنگ گچ مقاومت کششی کمی دارند.

استاندارد ACI برای محاسبه مقاومت فشاری بتن





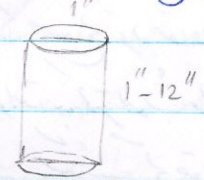


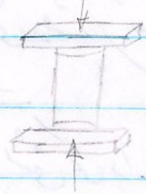
استاندارد انگلیس ۶ (در این حالت چون مقاومت فشاری بتن زیاد بدست می‌آید آن را تقسیم بر 1.2 می‌کنند.

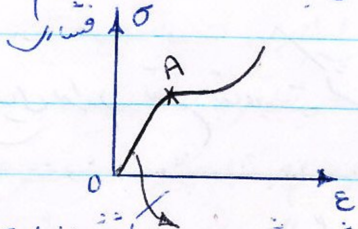
تست فشار فولادها

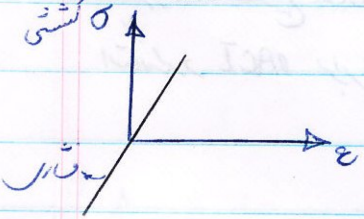
مقاومت فشاری و کششی اگر مصالح شکل پذیر مانند فولاد در محدوده‌ی الاستیک خطی کنیم بوده و شیب منحنی ارتجاعی نیز با هم برابر است.

$E_{\text{کشش}} = E_{\text{فشار}}$

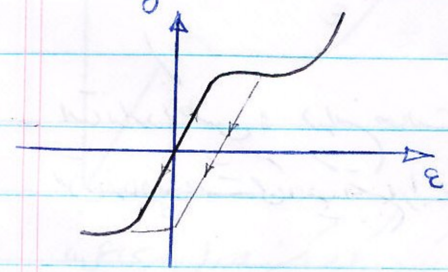


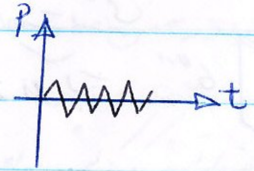




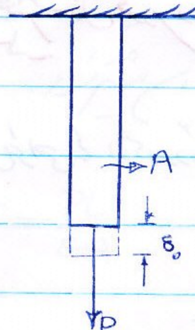


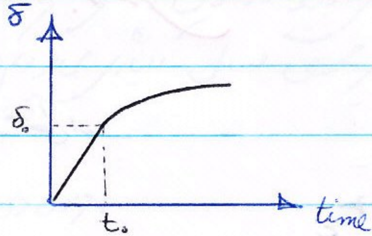
اگر بارگذاری فشاری کنیم و بعد بار را برداریم



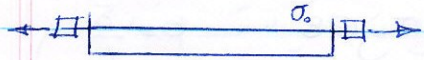


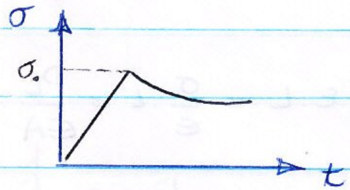
خزش :





بعضی مصالح وقتی تحت بار ثابت قرار می‌گیرند طی گذشت زمان تغییر شکل‌های بزرگتری پیدا می‌کنند.

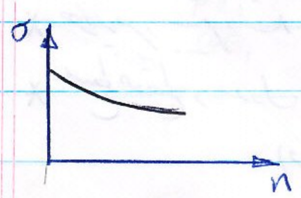




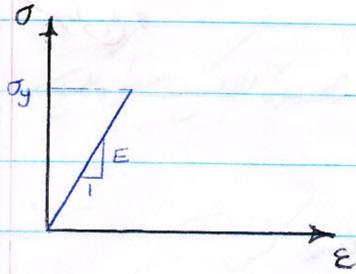
خستگی :

قطعاتی که تحت بارهای رفت و برگشتی باشند تحت زمان خسته می‌شوند

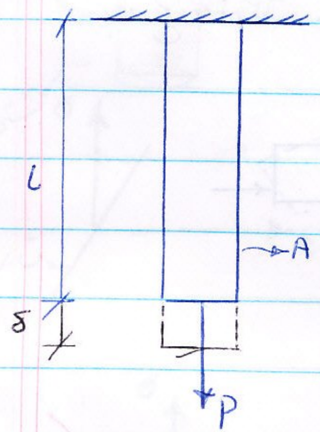
باید تنش را کاهش دهیم



تغییر شکل محوری در اعضا تحت بار محوری:



کل طراحی ها در محدوده الاستیک خطی است.



عضو مقابل عضو با مقطع منشوری است.

$$\sigma = \frac{P}{A} \qquad \sigma = E\varepsilon \qquad \varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \Rightarrow \delta = \varepsilon . L = \frac{\sigma}{E} . L = \frac{PL}{EA}$$

$$\delta = \frac{PL}{EA}$$

* هرچه نیرو بیشتر باشد δ بیشتر است. هرچه طول عضو بیشتر شود δ بیشتر می‌شود
* سطح مقطع و مدول الاستیک با δ رابطه عکس دارد.

1) $\delta = \dfrac{PL}{EA} \Rightarrow P = \dfrac{EA}{L}\delta$ (فرمول سختی)

$\frac{EA}{L} \rightarrow$ (stiffness) ثابت سختی محوری در واحد طول

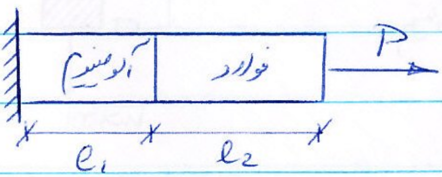
برای پایین آمدن تغییر محوری دنبال افزایش می‌گردیم در $\frac{EA}{L}$ آن بیشتر شود.

2) $\delta = \frac{PL}{EA}$ (اصول دی)

$\frac{L}{EA} \rightarrow$ (Complience) ثابت نرمی محوری در واحد طول

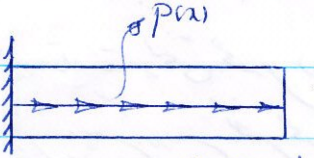
نکته: در بازه‌ها با نیروی P و سطح مقطع A جنس مصالح باید ثابت باشد تا بتوانیم از فرمول $\delta = \frac{PL}{EA}$ استفاده کنیم.

مثال: تغییر طول محوری عضو مقابل را حساب کنید.



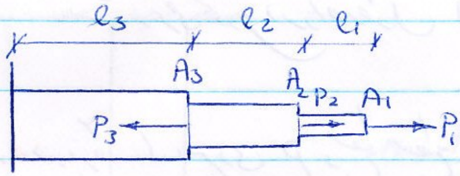
$$\delta = \frac{Pl_1}{AE_1} + \frac{Pl_2}{AE_2}$$

مثال: تغییر مکان عضو مقابل را بدست آورید.



$$\delta = \int_0^l \frac{P(x)\,dx}{AE}$$

مثال: تغییر مکان انتهای عضو را حساب کنید.



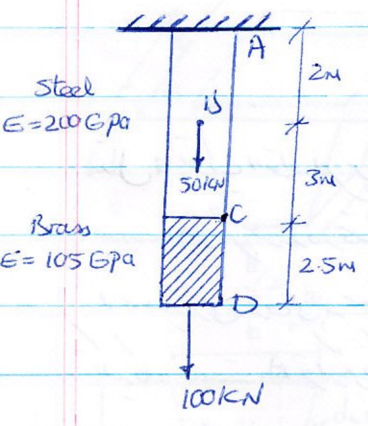
$$\delta = \sum_{i=1}^{3} \frac{P_i L_i}{E_i \; i}$$

← هرگاه در مقاطع خاصی به طور ناگهانی تغییراتی در سطح مقطع یا نیروی محوری یا جنس مصالح داشته باشیم آنگاه ...

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i L_i}{E_i A_i}$$

هرگاه در مقطع خاصی در طول عضو نیروی محوری یا سطح مقطع و یا مدول ارتجاعی به صورت توابعی پیوسته بیان شوند به طوری که این توابع ناپیوسته نبوده یا این تغییرات بارگذاری ذکر شده در طول عضو باشد آنگاه فرمول تغییر شکل محوری از رابطه زیر بیان خواهد شد.

$$\delta = \int_0^{l} \frac{P(x)\,dx}{E(x)\,A(x)}$$



مثال: قطر عضو برای کل میله ثابت و 36 mm است. اگر وزن میله صرف نظر شود مطلوبست میزان تغییر شکل محوری در نقاط C و D.

* هرگاه تغییرات بطور پیوسته صورت گیرد از انتگرال استفاده می کنیم اما اگر به طور ناگهانی صورت پذیرد از Σ استفاده می کنیم.

$\delta_{D/A}$: تغییر شکل محوری D نسبت به A.

$$\delta_{D/A} = \delta_D - \delta_A^{\,0} = \delta_{D/C} + \delta_{C/B} + \delta_{B/A}$$

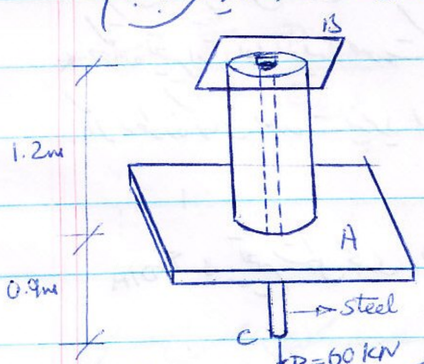
$$\delta_{C/A} = \delta_{C/B} + \delta_{B/A}$$

$$\delta_{C/A} = \frac{100 \times 10^3 \times 3}{200 \times 10^9 \times \frac{\pi}{4}(0.036)^2} + \frac{150 \times 10^3 \times 2}{200 \times 10^9 \times \frac{\pi}{4}(0.036)^2} = 2.95\,mm$$

$$\delta_D = \delta_{D/C} + \delta_{C/A} = \delta_{D/C} + 2.95\,mm$$

$$= \frac{100 \times 10^3 \times 2.5}{105 \times 10^9 \times \frac{\pi}{4}(36)^2 \times 10^{-6}} + 2.95\,mm = 2.34 + 2.95 = 5.29\,mm$$

مثال: تیوب استوانه‌ای بر روی تکیه‌گاهی قرار دارد. تیوب خالی است. میله‌ای به جسم
صلب جوش خورده و تحت نیروی P قرار می‌گیرد.
استوانه‌ی توخالی به سطح مقطع $1100\ mm^2$ بر روی
تکیه‌گاه ثابت A قرار گرفته است. میله‌ی فولادی
BC به قطر 15mm مطابق شکل از یک صفحه‌ی
صلب که در بالای استوانه قرار گرفته است



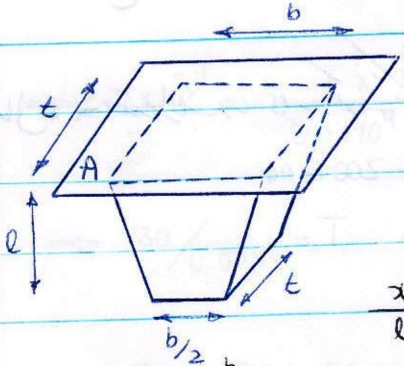
آویخته شده. اگر بدانیم مدول الاستیسیته فولاد 200GPa و آلومینیوم 70GPa باشد،
مطلوب است تغییر شکل نقطه‌ی C اگر بار 60 kN P وارد شود.

$$\delta_C = \overset{\text{میلی}}{\delta_{C/B}} + \overset{\text{تیوپ}}{|\delta_{B/A}|}$$

$$= \frac{60\times10^3 \times 2.1}{200\times10^9 \times \frac{\pi}{4}(15)^2\times10^{-6}} + \frac{60\times10^3\times1.2}{70\times10^9\times1100\times10^{-6}} =$$

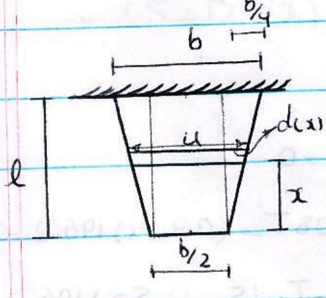
$$= 3.56\,mm + 0.935\,mm = 4.495\,mm$$

مثال: صفحه ذوزنقه ای شکل با ضخامت ثابت t از مرکز A معلق می باشد اگر ρ را غلظت $(\frac{\text{جرم}}{\text{حجم}})$ فرض کنیم، مطلوبست تغییر شکل صفحه توسط وزن آن.



$$\frac{x}{l} = \frac{d(x)}{b/4} \Rightarrow d(x) = \frac{bx}{4l}$$

$$\rightarrow u(x) = \frac{b}{2} + 2d(x) = \frac{b}{2}(1 + x/l)$$



$$A(x) = u(x)\,t = \frac{bt}{2}(1 + x/l)$$

$$p(x) = m(x)g = \rho V(x) g = \rho g t \left(\frac{b/2 + u(x)}{2}\right)x$$

$$= \rho g t x \left(\frac{b/2(2 + x/l)}{2}\right)$$

$$\delta = \int_0^l \frac{p(x)\,dx}{E A(x)} = \int_0^l \rho g t x \left(\frac{b(2 + x/l)}{4}\right)\frac{dx}{E\frac{bt}{2}(1 + \frac{x}{l})} = \int_0^l$$

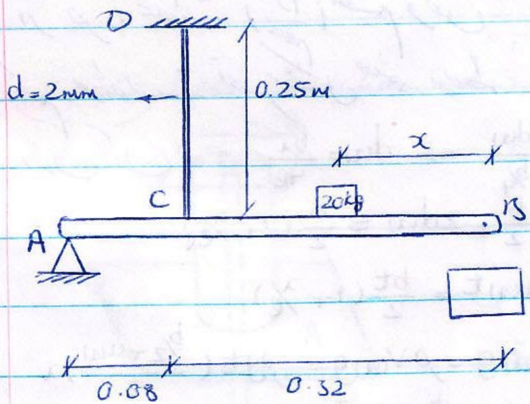
$$= \frac{\rho g}{2E}\int_0^{\ell} x\left(\frac{2+x/\ell}{1+x/\ell}\right)dx \qquad 1+x/\ell = v \Rightarrow dx = \ell\,dv$$

$$= \frac{\rho g}{2E}\int_1^{2} \ell(v-1)\,\frac{v+1}{v}\,\ell\,dv = \frac{\rho g}{2E}\ell^2\int_1^2 \frac{v^2-1}{v}\,dv = \frac{\rho g}{2E}\ell^2\int_1^2 \left(v-\frac{1}{v}\right)dv$$

$$= \frac{\rho g \ell^2}{2E}\left(\tfrac{1}{2}v^2 - \ln v\right)\Big]_1^2 = \frac{\rho g \ell^2}{2E}\left(3/2 - \ln 2\right) = 0.403\,\frac{\rho g \ell^2}{E}$$

مثال: x چقدر باشد تا B با تکیه‌گاه تماس پیدا کند

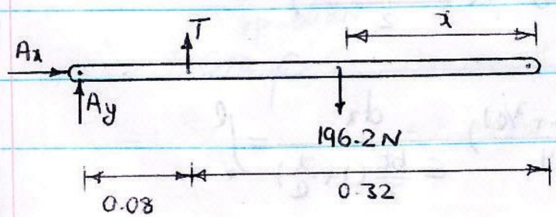
$E_{\text{میله}} = 200\,\text{Gpa}$



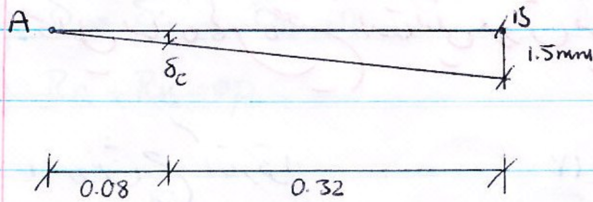
$\Sigma M_A = 0$

$\Rightarrow 0.08T - (0.4 - x)\,196.2 = 0$

$\Rightarrow T = (5 - 12.5x)\,196.2$



۳۸



$$\frac{1.5\times10^{-3}}{0.4}=\frac{\delta_c}{0.08} \Rightarrow \delta_c = 0.3\times10^{-3}$$

$$\Rightarrow 3\times10^{-4} = \frac{T\times 25\times10^{-2}}{200\times10^{9}\times\frac{\pi}{4}(4)\times10^{-6}} \Rightarrow 3\times10^{-4} = T(0.0398)\times10^{-5}$$

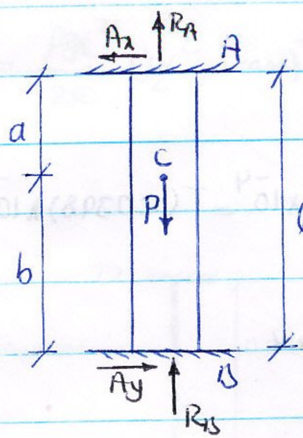
$$\Rightarrow 30/_{0.0398} = T \Rightarrow T = 753.77\ N$$

$$\rightarrow (5-12.5x)\,196.2 = 753.77 \Rightarrow x = 0.092m$$

تحلیل سازه‌های نامعین استاتیکی بروش نیرو

۱) روش جمع آثار قوا (روش)   ۲) روش سازگاری تغییر شکل‌ها

عکس العمل‌های تکیه‌گاهی در A , B را بدست آورید

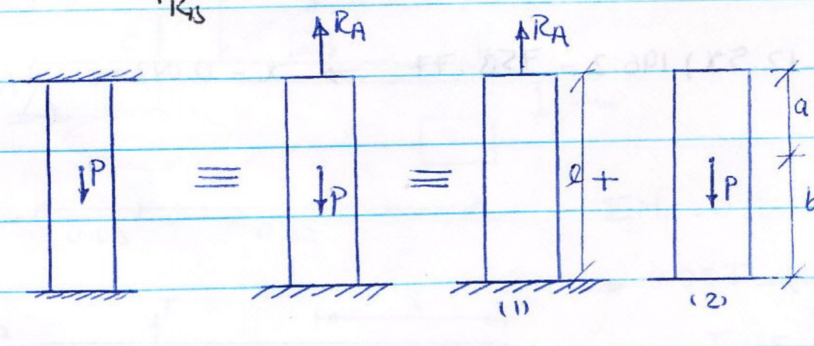


$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow A_x a + A_y b = 0$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = A_y$$

$$\Rightarrow A_x(a+b) = 0 \Rightarrow A_x = A_y = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B = P$$



$$\underset{(1)}{\delta_A = \delta_A^{R_A}} + \underset{(2)}{\delta_A^{P}} = 0$$ ⟶ رابطه سازگاری تغییر شکل

$$\begin{cases} \delta = \delta_A^{R_A} + \delta_A^{P} = 0 \\ R_A + R_B = \cancel{0}P \end{cases}$$

$$\delta = \delta_A^{R_A} + \delta_A^{P} = 0 \Longrightarrow \frac{R_A L}{E \cdot A} - \frac{P \cdot b}{EA} = 0$$

$$\Longrightarrow R_A = \frac{P \cdot b}{L}$$

$$R_A + R_B = P \Longrightarrow \frac{P \cdot b}{L} + R_B = P \Longrightarrow R_B = P - \frac{P \cdot b}{L} = \frac{P \cdot a}{L}$$

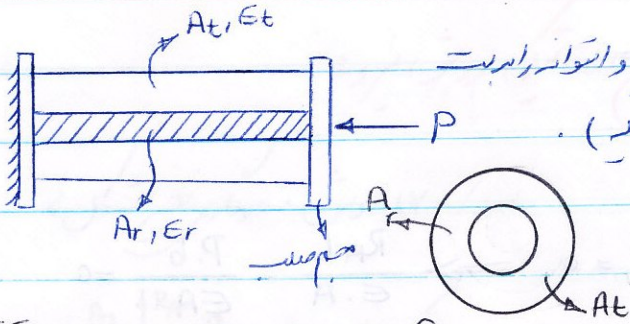
$$\Longrightarrow R_A = \frac{P \cdot b}{L} \qquad R_B = \frac{P \cdot a}{L}$$

پس برای حل باید از روش جمع آثار قوا و روش سازگاری تغییر شکل استفاده کنیم.

اصل سوپر پوزیسیون (Super-position principal) :

اصل سوپر پوزیسیون (اصل جمع قوا جمع آثار) می گوید : تنش ها و تغییر شکل های ناشی از یک مجموعه نیرو بر روی یک سیستم برابر است با جمع جبری تنش ها و تغییر شکل ها.

مثال: تنش های موجود در میله و استوانه را بدست آورید (تنش های پوسته و میله).
یک درجه نامعینی وجود دارد.



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_t + P_r = P \quad (1)$$

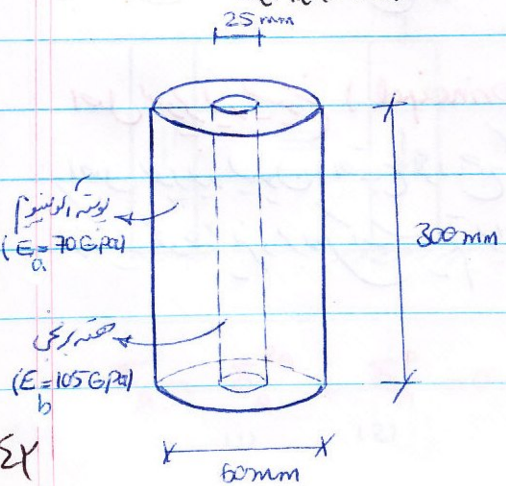
معادله سازگاری تغییر شکل ها به صورت مقابل است.

$$\delta_t = \delta_r$$

$$\Rightarrow \frac{P_t \cdot \cancel{L}}{E_t \cdot A_t} = \frac{P_r \cdot \cancel{L}}{E_r \cdot A_r} \Rightarrow P_t = \frac{E_t \cdot A_t}{E_r \cdot A_r} P_r$$

$$\Rightarrow P_t = \frac{E_t \cdot A_t}{E_t A_t + A_r E_r} P \quad , \quad P_r = \frac{E_r A_r}{E_t A_t + A_r E_r} P$$

مثال: اگر طول کل مجموعه به اندازه 0.4mm کوتاه گردد. این کوتاه شدگی توسط نیروی محوری بوجود آمده. مطلوبست: میزان نیروی وارده به این مجموعه و تنش بوجود آمده در هسته برنجی.



$P = P_a + P_b$

$\delta_a = \delta_b = -0.4\ mm = \delta$

$P = \left(\frac{E_a A_a + E_b A_b}{L}\right)\delta$

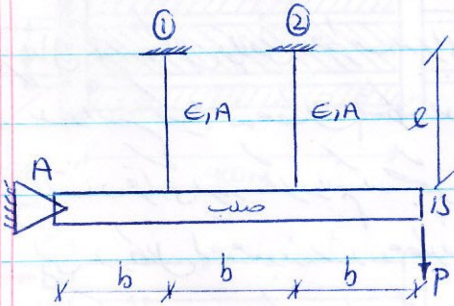
$A_a = \frac{\pi}{4}(60^2 - 25^2) = 2336.6\ mm^2$

$L = 300\ mm$

$A_b = \frac{\pi}{4}(25)^2 = 490.9\ mm^2$

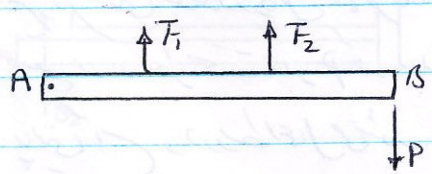
$\Rightarrow P = -287\ kN$

$$\sigma_b = \frac{P_b}{A_b} = \frac{\frac{E_b \cdot \cancel{A_b} \cdot \delta}{L}}{\cancel{A_b}} = \frac{105 \times 10^3 \times (-0.04)}{300} = 0.14\ Gpa$$



مثال : اگر عضو افقی AB را صلب فرض کنیم تنش های بوجود آمده در کابل های ① , ② چقدر است

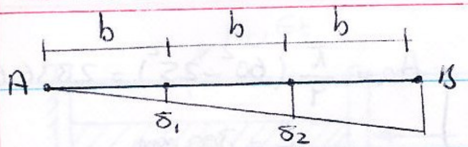
چون عضو صلب است پس تغییر شکل ندارد.



$\sum M_A = 0 \rightarrow$

$F_1 \times b + F_2(2b) - P(3b) = 0$

$\rightarrow F_1 + 2F_2 = 3P \quad (I)$



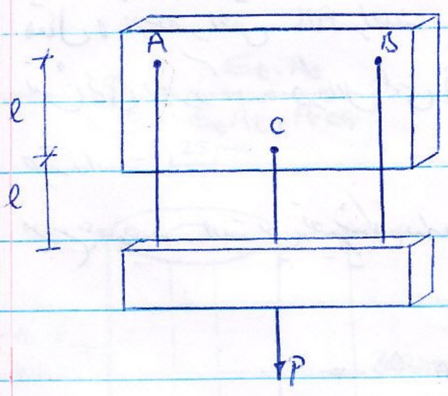
$$\delta_1 = \frac{1}{2}\delta_2$$

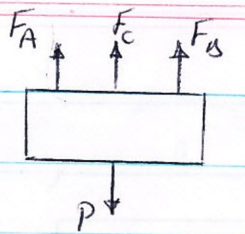
$$\Rightarrow \frac{F_1 L}{EA} = \frac{F_2 L}{2EA} \rightarrow F_2 = 2F_1 \quad \text{(II)}$$

$$\text{I},\ \text{II} \Rightarrow 5F_1 = 3P \Rightarrow F_1 = \frac{3}{5}P \quad , \quad F_2 = \frac{6P}{5}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \frac{3P}{5A} \qquad \sigma_2 = \frac{6P}{5A}$$

مثال 8 سه کابل فولادی با مقطع برابر برای نگه داشتن یک صفحه مطابق شکل مورد استفاده قرار می‌گیرند. اگر بدانیم که هیچگونه لقی در کابل‌ها موجود نباشد، مطلوبست نیروهای کششی موجود در کابل‌ها هنگامی که صفحه مورد نظر تحت بار P که به لبه پایینی آن و در وسط اعمال می‌شود.



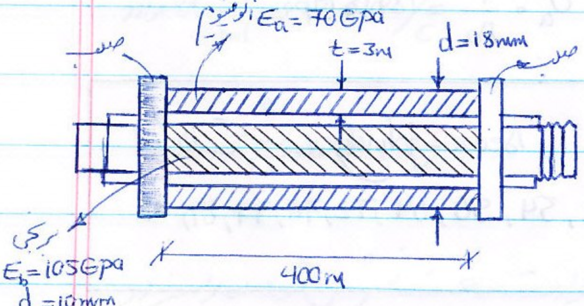


$$F_A + F_B + F_C = P \qquad (\Sigma F_y = 0)$$

$$F_A = F_B \qquad (\Sigma M = 0)$$

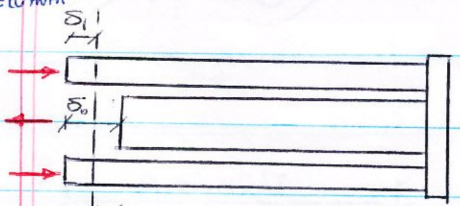
$$\delta_A = \delta_B = \delta_C \Rightarrow \frac{F_A(2L)}{EA} = \frac{F_C \cdot L}{EA} \Rightarrow F_C = 2F_A = 2F_B$$

$$F_A + F_A + 2F_A = P \Rightarrow F_A = P/4 \;,\; F_B = P/4 \;,\; F_C = P/2$$



مثال 6 اگر طول حرکت رزوه 2mm باشد و مهره اندازه 1/4 دور پیچ را بچرخانیم مطلوبست تنش نرمال ایجاد شده در Bolt برنجی و تیوب آلومینیومی.

فرض کنیم صفحه صلب چپ باشد



$$\delta_0 = \frac{1}{4}(2mm) = 0.5mm$$

δ_1 ← فشرده شدن آلومینیوم (لوله)

δ_2 ← کشیده شدن Bolt برنجی

$$\delta_1 + \delta_2 = \delta_0 = 0.5mm$$

رابطه سازگاری تغییر شکل

$$P_a = P_b = P$$

آلومینیوم (تیوب) $\delta_1 = \dfrac{P_a \cdot L}{A_a E_a} = \dfrac{P_a \cdot L}{70\times10^3 \times \frac{\pi}{4}(18^2-12^2)}$

$\delta_2 = \dfrac{P_b L}{A_b E_b} = \dfrac{P_b \cdot L}{105\times10^3 \times \frac{\pi}{4}(10)^2}$

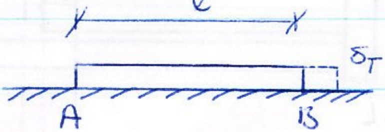
$\Longrightarrow P_a = P_b = 5.62\,kN$

$\sigma_b = \dfrac{P}{A_b} = 71.6\,Mpa$ $\qquad$ $\sigma_a = \dfrac{P}{A_a} = 39.8\,Mpa$

سؤالات پیشنهادی Beer-Johnston

فصل ۲ : 13, 14, 26, 30, 43, 52, 54, 56, 64, 72, 76, 77, 84, 88
96, 102, 112, 118

مسائل مربوط به بارگذاری حرارتی (انبساط) :



α : ضریب انبساط طولی

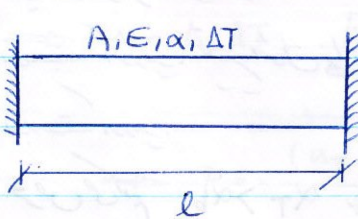
ΔT : اختلاف دما

$$\delta_T = \alpha . L . \Delta T \longrightarrow \delta_T = \int_0^L \alpha . T_{(x)} . dx$$

فولاد $\alpha_{steel} = 12 \times 10^{-6} \ {}^1/_{C}$

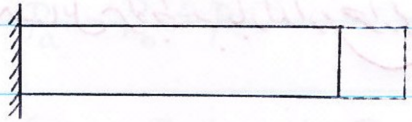
$$\varepsilon_T = \frac{\delta_T}{L} = \alpha . \Delta T$$

* در مسائل معین استاتیکی افزایش یا کاهش حرارت باعث تنش نمی‌شود بنابراین در مقاومت مصالح بررسی نمی‌شود.

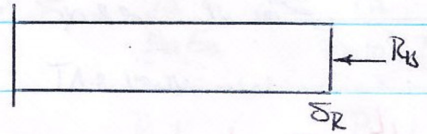


مثال: عضو مقابل دارای مشخصات مشخص می‌باشد. تعیین کنید تنش نرمال ایجاد شده در تیر بر اثر افزایش ΔT دما.

سازه یک درجه نامعین است.



$$\delta_T = \alpha . L . \Delta T$$



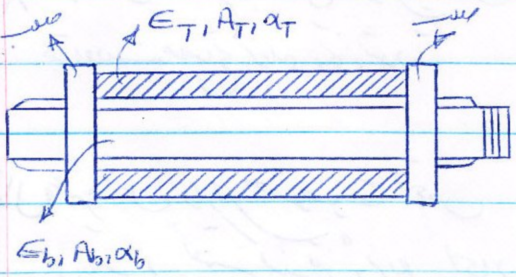
$$\delta_R = \frac{R_B . L}{EA}$$

رابطه سازگاری تغییر شکل: $\delta_T = \delta_R \Rightarrow \alpha . \cancel{L} . \Delta T = \frac{R_B . \cancel{L}}{AE} \Rightarrow R_B = \alpha \Delta T AE$

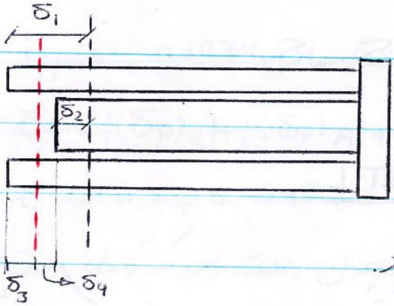
$$\Rightarrow \sigma_B = E \alpha \Delta T$$

راه دوم: رابطه هوک ← $\sigma = E . \varepsilon_T = E \alpha . \Delta T$

مثال: تنش های ایجاد شده در Bolt و بوسته بر اثر اعمال حرارت ΔT را بدست آورید. تغییر طول را نیز بدست آورید.



فرض می‌کنیم $\alpha_T > \alpha_b$. * اگر $\alpha_T = \alpha_b$ باشد تنشی ایجاد نمی‌شود.



هم صفحه سمت چپ را برابر داریم.
موقعیت نهایی صفحه صلب در راستای
خط چین قرار است.
در این حالت لوله فشرده می‌شود و Bolt کشیده می‌شود.

از لحاظ سازگاری تغییر شکل

$$\underbrace{\delta_1 - \delta_3}_{\text{لوله}} = \underbrace{\delta_2 + \delta_4}_{\text{(Bolt) بولت}} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \delta_1 = \alpha_T \cdot L \cdot \Delta T \\ \delta_2 = \alpha_b \cdot L \, \Delta T \end{cases}$$

(2) $P_b = P_t = P$

برای δ_3 و δ_4 : تغییر طول را به علت کوچک بودن در نظر نمی‌گیریم و طول را همان l در
نظر می‌گیریم. (به جای $l + \delta_2$)

$$\delta_3 = \frac{P.L}{E_T . A_T} \qquad \delta_4 = \frac{P.L}{E_b \cdot A_b}$$

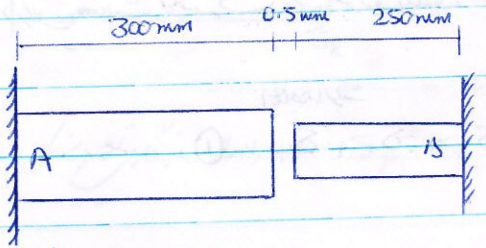
$$(1),(2) \Longrightarrow \alpha_T \cdot L \cdot \Delta T - \frac{P.L}{E_T A_T} = \alpha_b L \, \Delta T + \frac{PL}{E_b A_b}$$

$$\Longrightarrow P = \frac{(\alpha_T - \alpha_b) \cdot \Delta T}{\frac{1}{E_T A_T} + \frac{1}{E_b A_b}}$$

تغییر شکل نهایی $\delta = \delta_1 - \delta_2 = \delta_3 + \delta_4$

$$\Rightarrow \delta = \frac{(\alpha_T E_T A_T + \alpha_b E_b A_b)\,\Delta T . L}{E_T A_T + E_b A_b}$$

مثال : اگر بدانیم در ابتدا دمای اولیه برابر $20^\circ C$ باشد، محاسبه کنید در چه دمایی تنش نرمال در عضو فولادی به مقدار $\sigma = -150\,Mpa$ خواهد رسید؟ در این دما طول دقیق عضو فولادی را حساب کنید.

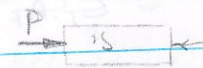


A: آلومینیوم : $A = 2000\,mm^2$
$E = 70\,Gpa$
$\alpha = 23\times10^{-6}/^\circ C$

B: فولاد : $A = 800\,mm^2$
$E = 190\,Gpa$
$\alpha = 18\times10^{-6}/^\circ C$

نیرو $P = \sigma A_B = -150(800) = -120\,KN$

$$(\delta_P)_B = \frac{P.L}{E.A} = \frac{-120\times10^3\times250}{190\times10^3\times800} = -0.1974\,mm$$



$$(\delta_P)_A = \frac{P.L}{E.A} = \frac{-120\times10^3\times300}{70\times10^3\times2000} = -0.2571\,mm$$

$$\delta_P = -0.1974 + (-0.2571) = -0.4545 \text{ mm}$$

$$\delta_T = |(\delta_P)_{s}| + |(\delta_P)_A| + 0.5\text{mm} = |\delta_P| + 0.5\text{mm}$$

$$\delta_T = 0.5 + 0.4545 = 0.9545 \text{ mm}$$

تا 0.5mm کاملاً تغییر طول دیده می شود. از این جا به بعد تغییر طول به علت وجود تکیه گاه های راست و چپ خودش را به شکل تنش و تولید نیرو نشان می دهد.

$$\delta_T = \sum \alpha_T . L . \Delta T = 18\times10^{-6} \times 250 \times \Delta T + 23\times10^{-6} \times 300 \times \Delta T = 0.9545$$

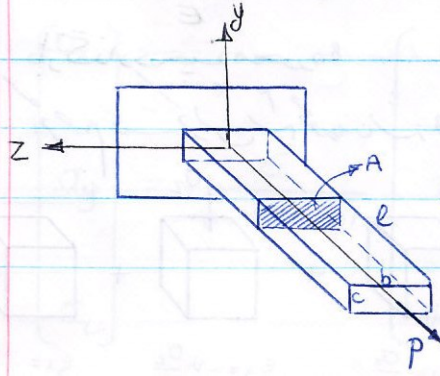
$$\Rightarrow \Delta T = 83.7^{\circ}$$

$$\rightarrow T = 20 + 83.7 = 103.7^{\circ}$$

مقدار طول واقعی فولاد $= 250 + 18\times10^{-6}(250\times83.7) - 0.1974 = 250.179$ m

---

ضریب پواسون 8



$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{P}{A} \\ \sigma_y = 0 \\ \sigma_z = 0 \end{cases}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{P}{EA}$$

اگر عضوی تحت کشش قرار گیرد ابعاد جانبی اش کوچک می شوند (c, b)

ثابت می شود برای اجسام ایزوتروپ $\varepsilon_y = \varepsilon_z$ است

وقتی تنش (اعمال نیرو) در راستای محور x باشد:

$$\nu = \left|\frac{\text{کرنش جانبی}}{\text{کرنش طولی}}\right| = \left|\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}\right| = \left|\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}\right|$$

$$\Rightarrow \varepsilon_z = -\nu \cdot \varepsilon_x$$

ε_z ، ε_y با ε_x مختلف العلامه هستند.

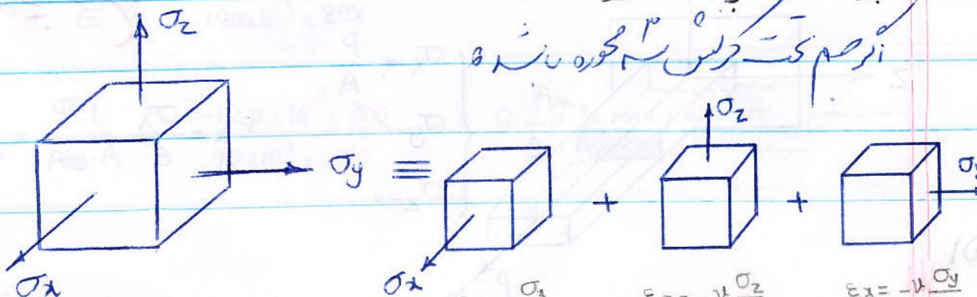
فولاد $\nu = 0.29 - 0.31$ بتن $\nu = 0.2 - 0.25$

$$\varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E} = \varepsilon_z$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

بارگذاری چند محوره:

اگر جسم تحت کرنش سه محوره باشد:



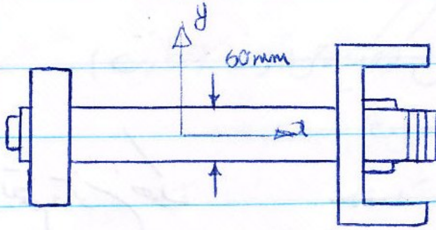
$\varepsilon_{1x} = \frac{\sigma_x}{E}$ $\quad \varepsilon_{2x} = -\nu \frac{\sigma_z}{E}$ $\quad \varepsilon_{3x} = -\nu \frac{\sigma_y}{E}$

$$
\begin{cases}
\varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} - \nu \cdot \dfrac{\sigma_y}{E} - \nu \cdot \dfrac{\sigma_z}{E} \\[2ex]
\varepsilon_y = \dfrac{\sigma_y}{E} - \nu \dfrac{\sigma_x}{E} - \nu \dfrac{\sigma_z}{E} \\[2ex]
\varepsilon_z = \dfrac{\sigma_z}{E} - \nu \dfrac{\sigma_x}{E} - \nu \dfrac{\sigma_y}{E}
\end{cases}
\longrightarrow
$$

تعمیم قانون هوک

$$
\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
\dfrac{1}{E} & -\dfrac{\nu}{E} & -\dfrac{\nu}{E} \\[2ex]
-\dfrac{\nu}{E} & \dfrac{1}{E} & -\dfrac{\nu}{E} \\[2ex]
-\dfrac{\nu}{E} & -\dfrac{\nu}{E} & \dfrac{1}{E}
\end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)}
\begin{bmatrix}
1-\nu & \nu & \nu \\
\nu & 1-\nu & \nu \\
\nu & \nu & 1-\nu
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}
$$



مثال: از در اثر محکم کردن مهرهٔ انتهایی قطر این Bolt به اندازهٔ 60.13 µm عوض شد و نیروی کششی ایجاد شده در Bolt را تعیین کنید.

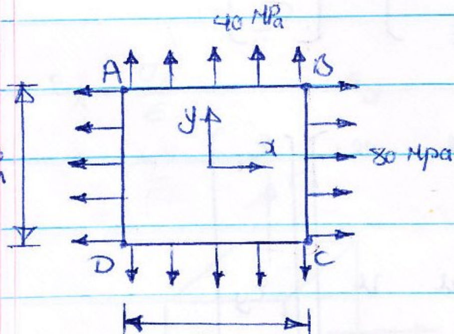
$E = 200\,\text{Gpa}\;,\quad \nu = 0.29$

$$\varepsilon_y = \frac{-0.13\times 10^{-3}}{60} = -2.167\times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_y = -\nu\cdot\varepsilon_x \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{216.7\times 10^{-8}}{0.29} = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{P}{A\cdot E}$$

$$\Rightarrow P = 74.724\times 10^{-8}\times 200\times 10^{9}\times 2.826\times 10^{-3}$$

$$\Rightarrow P = 4.22\,\text{KN}$$



مثال: صفحه مقابل تحت تنش دو محوره قرار دارد. مطلوبست تغییر در اندازهٔ ضلع AB ، BC و قطر AC.

$E = 200\,\text{GPa}$

$\nu = 0.3$

$$\delta_x = \varepsilon_x \cdot \overline{AB} \qquad\qquad \delta_y = \varepsilon_y \cdot \overline{BC}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_y}{E} = \frac{1}{200 \times 10^3}(80 - 0.3 \times 40) = 340 \times 10^{-6}$$

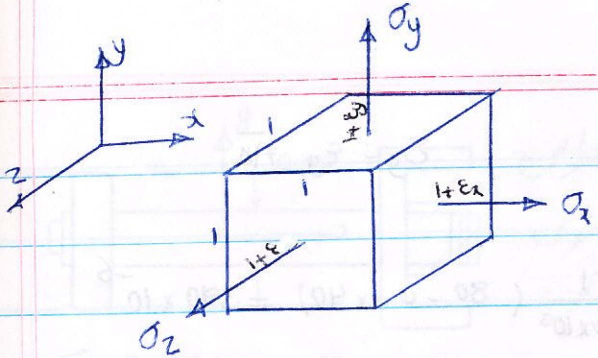
$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} = \frac{1}{200 \times 10^3}(40 - 0.3 \times 80) = 80 \times 10^{-6}$$

$$\begin{cases} \delta_{AB} = \varepsilon_x \cdot \overline{AB} = 340 \times 10^{-6} \times 30 = +10.2\ \mu m \\ \delta_{BC} = \varepsilon_y \cdot \overline{BC} = 80 \times 10^{-6} \times 30 = 2.4\ \mu m \end{cases}$$

جدید $AC^2 = (\overline{AB} + \delta_{AB})^2 + (\overline{BC} + \delta_{BC})^2$

$$\Longrightarrow \delta_{AC} = 8.91\ \mu m$$

	σ_x ↙	↑ σ_z	→ σ_y
ε_x	$\frac{\sigma_x}{E}$	$-\nu\frac{\sigma_z}{E}$	$-\nu\frac{\sigma_y}{E}$
ε_y	$-\nu\frac{\sigma_x}{E}$	$-\nu\frac{\sigma_z}{E}$	$\frac{\sigma_y}{E}$
ε_z	$-\nu\frac{\sigma_x}{E}$	$\frac{\sigma_z}{E}$	$-\nu\frac{\sigma_y}{E}$



کرنش حجمی

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \xrightarrow{L=1} \varepsilon = \delta$$

$$V_0 = 1 \times 1 \times 1$$

$$V = (1+\varepsilon_x)\cdot(1+\varepsilon_y)\cdot(1+\varepsilon_z) =$$

$$\Rightarrow V = 1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z$$

$$\Rightarrow V \simeq 1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$\boxed{\begin{gathered} V_0 = abc \rightarrow \frac{V_0}{abc} = 1\times1\times1 \\ V = (a+\delta_a)(b+\delta_b)(c+\delta_c) = abc\,(1+\varepsilon_a)(1+\varepsilon_b)(1+\varepsilon_c) \\ e = \frac{V - V_0}{V_0} = \varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c \end{gathered}}$$

کرنش حجمی $e = \dfrac{V - V_0}{V_0}$

یعنی $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$. کرنش حجمی در رابطه‌های حجمی بسیار مهم است

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z)$$: می‌توان کرنش حجمی را بر حسب تنش نوشت

$$e = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{E} - \frac{2\nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{E}$$

$$\Rightarrow \quad e = \frac{(1-2\nu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{E}$$

حالت خاص: هرگاه جسم تحت فشار هیدروستاتیک (آب) قرار گیرد:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -P$$

$$\Rightarrow \quad e = \frac{-3(1-2\nu)P}{E}$$

ضریب P را با K نشان می‌دهند که به K مدول بالک گویند.

مدول بالک ضریبی است که در استحکام حجمی جسم در مقابل فشارهای هیدرواستاتیک مقدار زیادی قرار می‌گیرد. این فرمول در علم مکانیک خاک مورد استفاده فراوان دارد.

$$e = \frac{-P}{K} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

با توجه به اینکه در انقباض کرنش حجمی کاهش پیدا می‌کند، چون مدول حجمی نمی‌تواند منفی باشد داریم:

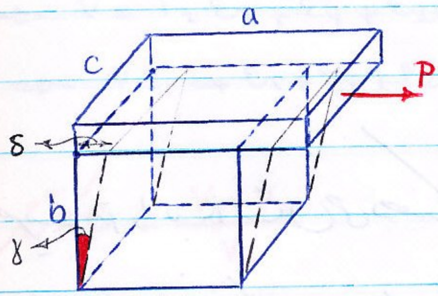
$$e < 0 \longrightarrow K > 0 \Rightarrow 1-2\nu > 0$$

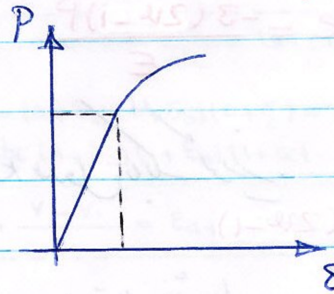
$$\Rightarrow 0 < \nu < 1/2 \longrightarrow \nu_{Max} = 1/2$$

* ν طبق تعریف مثبت است.

$0 < \nu < 1/2$

کرنش برشی:





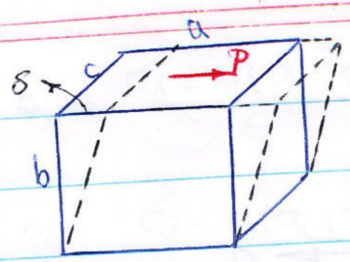
$$\gamma = tg^{-1}\left(\frac{\delta}{b}\right)$$

چون δ بسیار کوچک است پس:

$$\gamma = \frac{\delta}{b}$$

γ را کرنش برشی گویند و واحد ندارد. تنها کرنشی است که از جنس زاویه است.

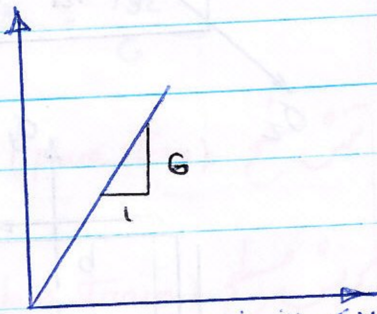
* $\tau = G\gamma$ را رابطه هوک برای تنش و کرنش برشی می‌نامند. ثابت G را مدول صلبیت یا مدول برشی ساده گویند.
$\frac{1}{3}E < G < \frac{1}{2}E$



جسم زیر برش :

γ را تغییر شکل برشی یا جمعی گویند.

تنش برشی $\tau = \frac{P}{a.c}$



G : مدول ارتجاعی برشی

$\tau = G\gamma$ ← رابطه بین تنش برشی و کرنش برشی

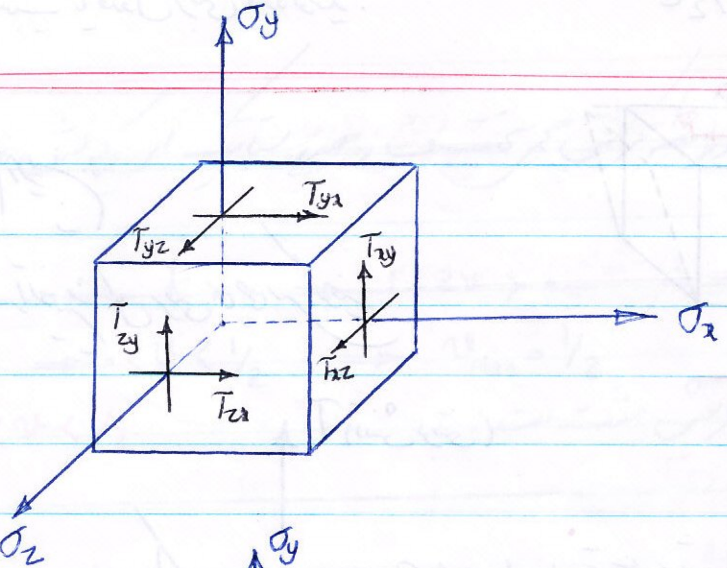
$G = \frac{\tau}{\gamma}$ $(\tau = G\gamma)$

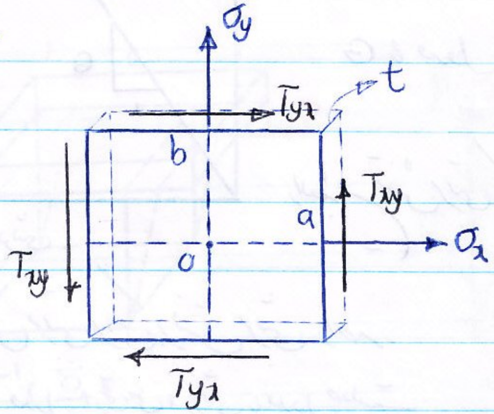
G : تنش برشی برای کرنش برشی واحد.
← مدول ارتجاعی در برشی یا مدول صلبیت

$G = \frac{E}{2(1+\upsilon)}$

نکته: از نظر شماتیک منحنی $\tau-\gamma$ (1) هر یک از مصالح بسیار شبیه منحنی $\sigma-\varepsilon$ (2) است ولی مقادیر منحنی (1) از منحنی (2) کمتر است.

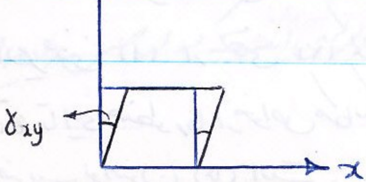
نکته: تا اینجا منظور ما از خواص مکانیکی مصالح، مدول الاستیسیته (E)، مدول ارتجاعی (G) و ضریب پواسون (υ) است.

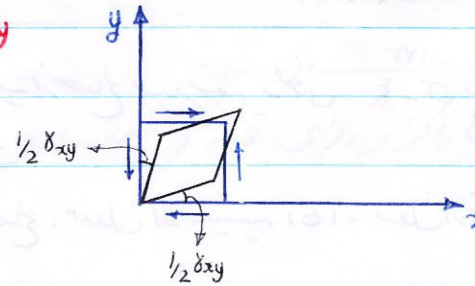




$$\Sigma M_O = 0 \implies \tau_{yx}(b.t)\,a = \tau_{xy}(a.t)\,b$$

$$\implies \tau_{yx} = \tau_{xy}$$





معادله‌های تعمیم قانون هوک:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)}{E} \\[2ex] \varepsilon_y = \dfrac{\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)}{E} \\[2ex] \varepsilon_z = \dfrac{\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)}{E} \end{cases}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \qquad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

تنش صفحه (plane stress):

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

کرنش صفحه (plane strain):

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

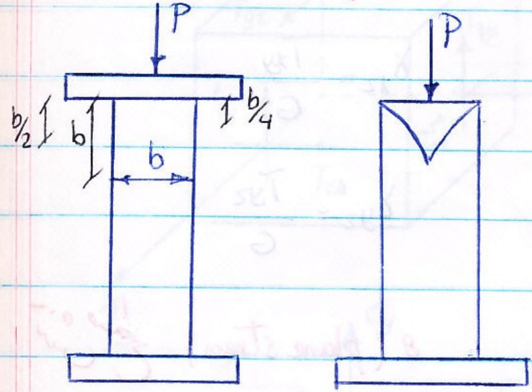
هر کرنش صفحه، تنش صفحه نیست و برعکس.

نکته: بررسی معادله‌های بالا ما را به این باور هدایت می‌کند که اگر می‌خواهیم تغییرات به وجود آمده توسط ترکیبی دلخواه از تنش‌ها را در یک مادهٔ معین پیش‌بینی کنیم، نخست باید سه ثابت متمایز E، ν و G را به طور تجربی با آزمایش تعیین کنیم. در عمل فقط تعیین دو تا از سه ثابت برای هر مادهٔ معین لازم است، زیرا:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

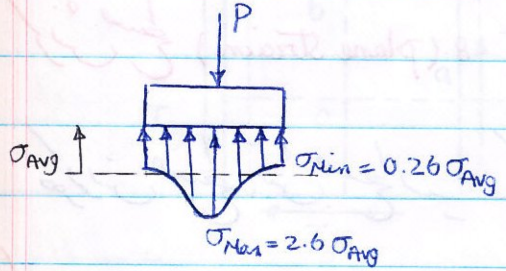
تمرکز تنش:

الف) اثر موضعی سن - ونان در محل تماس بار با جسم:

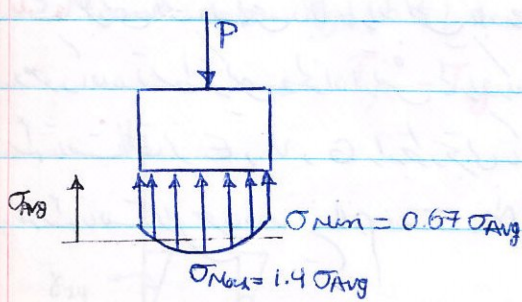


در b ، b/2 ، b/4 برش زده.

$$\sigma_{Avg} = \frac{P}{A}$$

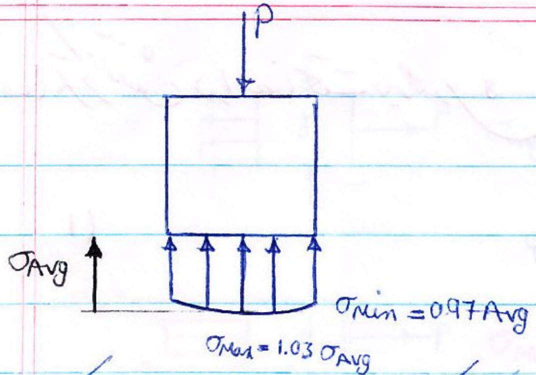


: b/4



: b/2

8 b



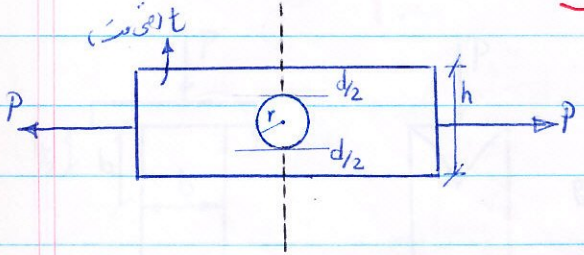
* بنابراین بهتر است از اعمال نیروی واحد متمرکز جلوگیری کنیم و در یک واسط نیرو را اعمال کنیم. تا تنش Avg برای کل سطح ایجاد شود.

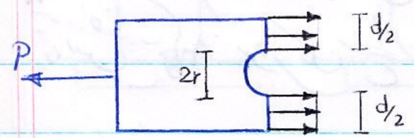
* در زندگی نکته بامزه‌ای است. اگر چیزهای متوسط را بپذیرید، اغلب اوقات بهترین‌ها نصیب شما می‌شود (سامرسِت موام)

این اصل (اصل سن ونان) می‌گوید که دو توزیع مؤثر نیروی بر یک جسم در صورتیکه از نظر استاتیکی کاملاً یکسان باشند (اگر اندازه این دو مجموعه نیرو یکسان باشند) در بخش‌هایی از جسم که به اندازه کافی از نقطه اثر نیروها دور هستند (تقریباً به اندازه عرض مقطع) دارای تاثیر یکسان هستند.

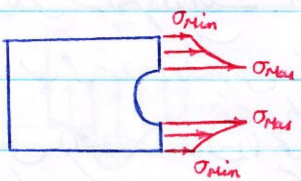
ب) تمرکز تنش در اعضا تحت بار محوری :

1)





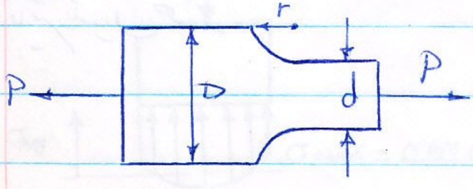
$$\sigma_{avg} = \frac{P}{d.t}$$

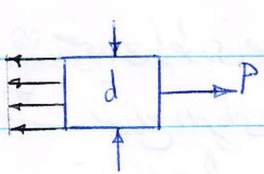


$$\sigma_{Max} = K\,\sigma_{avg}$$

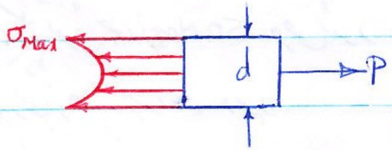
$K \rightarrow$ ضریب تمرکز تنش) ضریب تمرکزهای تنش

2)





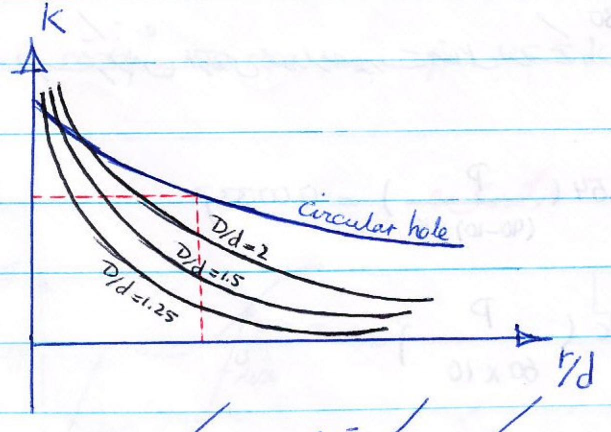
$$\sigma_{avg} = \frac{P}{dt}$$



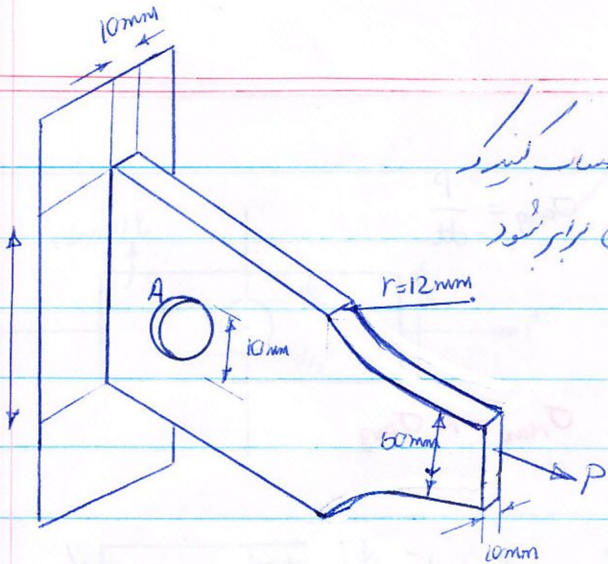
$$\sigma_{Max} = K\,\sigma_{Avg}$$

$$K = \frac{\sigma_{Max}}{\sigma_{Avg}}$$

* در طراحی $\sigma_{Max} = \sigma_{\text{مجاز}}$ قرار می‌دهیم.



* طراحان برای راحت‌تر بودن، سعی می‌کنند از تمرکز تنش اجتناب کنند و در صورت وجود آن نیز، می‌کوشند تدریجی اتفاق بیفتد.



الف) مشخص قسمت ماهیچه‌ای را طوری حساب کنید که
تنش Max در قسمت سوراخ دایره‌ای برابر شود
با تنش Max در قسمت fillet.
ب) اگر تنش مجاز 150 Mpa فرض شود
بار مجاز چقدر خواهد بود.

الف) $d = 90 - 10 = 80$ $\quad r = 5mm$ و قسمت سوراخ دایره‌ای A

$$\rightarrow \frac{r}{d} = \frac{5}{80} = 0.0625$$

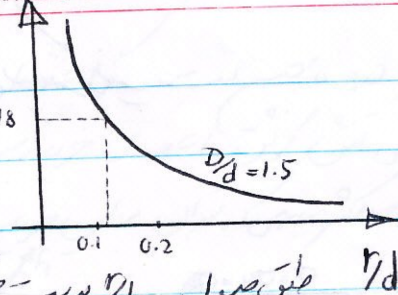
ضریب تمرکز تنش از روی نمودار بصورت مقابل بدست آمده است. $K = 2.64$

$$\sigma_{Max}^{hole} = K \cdot \sigma_{Avg} = 2.64 \left(\frac{P}{(90-10) \times 10} \right) = 0.0033P$$

$$\sigma_{Max}^{fillet} = K \cdot \sigma_{Avg} = K \left(\frac{P}{60 \times 10} \right)$$

$$\sigma_{Max}^{f} = \sigma_{Max}^{h} \Rightarrow K \left(\frac{P}{600} \right) = 2.64 \left(\frac{P}{800} \right) \Rightarrow K = 1.98$$

$$\frac{D}{d} = \frac{90}{60} = 1.5$$



$$\frac{r}{d} = 0.12$$ طبق جدول r/d بدست می آید:

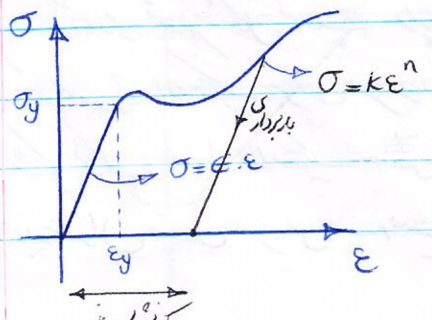
$$\frac{r}{d} = 0.12 \Rightarrow \frac{r}{60\,mm} = 0.12 \Rightarrow r = 7.2\,mm$$

ب)

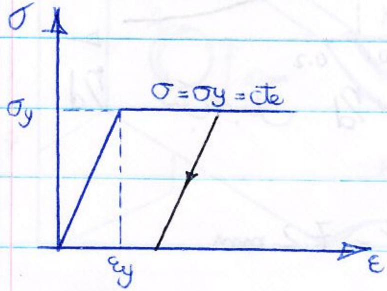
$$\sigma_{مجاز} = \sigma_{Max} = 150\ Mpa$$

$$\Rightarrow 0.0033P = 150\ Mpa \Rightarrow P = 45.5\ KN$$

تحلیل غیر ارتجاعی اعضا تحت بار محوری:



کرنش پسماند معادل تنشی است که تنش پسماند گویند

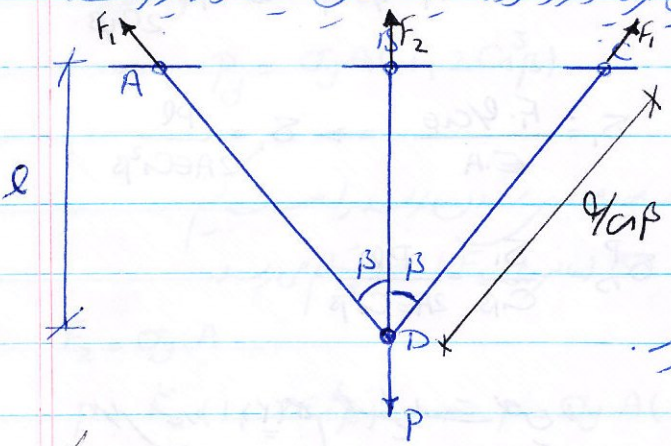


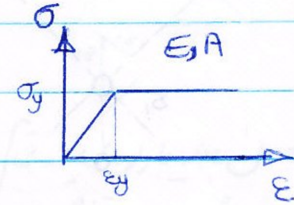
مدل مقابل اصلاح شده مدل قبلی است.
این مدل elastic perfectly plactic
نام دارد.

نکته: از نظر تحلیل غیرارتجاعی در سازه‌های معین، استاتیکی بسیار ساده است، به این علت که در سازه‌های معین استاتیکی نیروهای داخلی معلوم فلذا تنش‌ها به راحتی محاسبه می‌شوند. بنابراین با داشتن تنش‌ها می‌توان کنترل کرد که آیا وارد منطقه غیرارتجاعی شده‌ایم یا خیر. اما وقتی مسئله بصورت نامعین استاتیکی مطرح می‌شود، در این نوع سازه‌ها نیاز به نوشتن معادلات اضافی که معمولاً از روش نیرو این معادلات اضافی همان روابط سازگاری تغییر شکل‌ها هست داریم. در اینجا باید کنترل شود که کرنش‌ها و تنش‌ها در محدوده الاستیک برای هر مرحله باشند. در اینصورت می‌توان به جای تغییر شکل‌ها از روابط الاستیک خطی نیروی متناظر را قرار داد و مسئله را حل نمود.

به عنوان مثال: خرپای سه میله‌ای زیر را در نظر می‌گیریم. این خرپا از نظر استاتیکی

یک خرپا نامعین است. اگر اعضای خرپا از یک جنس دارای E, A ثابت باشند و منحنی تنش کرنش اعضای خرپا به صورت Elasto plastic باشد، محاسبه کنید حداکثر باری که می‌توان به این خرپا وارد نمود تا کلیه اعضای آن گسیخته شوند چقدر است.





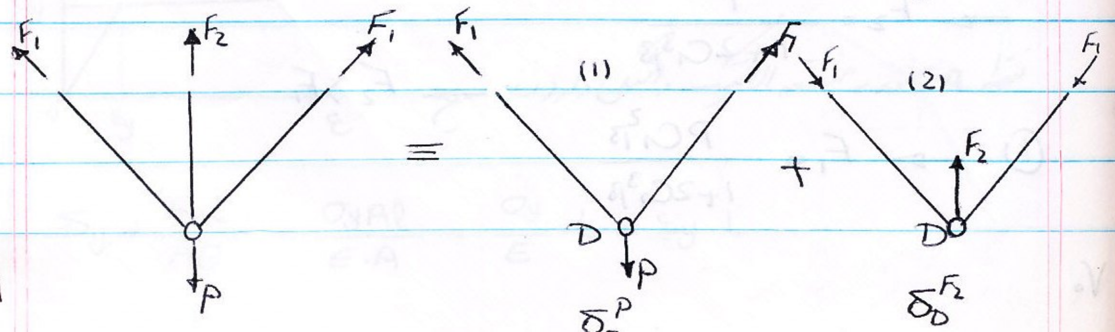
منحنی بار تغییر مکان را نیز رسم کنید.

گره D

$$\Sigma F_x = 0 \Longrightarrow F_A = F_C = F_1$$

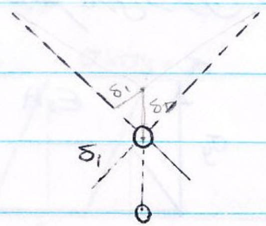
$$\Sigma F_y = 0 \Longrightarrow 2F_1 \cos\beta + F_2 = P \quad (1)$$

$F_2 = 2F_1 \cos\beta$



$$\delta_D^{P} - \delta_D^{F_2} = \frac{F_2 \cdot l}{EA} \qquad \delta_D = \frac{\delta_1}{\cos\beta}$$

(1)



$$2F_1\cos\beta = P \Rightarrow F_1 = \frac{P}{2\cos\beta}$$

$$\delta_1 = \frac{F_1 \cdot l/\cos\beta}{E \cdot A} \Rightarrow \delta_1 = \frac{Pl}{2AE\cos^2\beta}$$

$$\delta_D^{P} = \frac{\delta_1}{\cos\beta} = \frac{Pl}{2AE\cos^3\beta}$$

$$\delta_D^{F_2} = \frac{F_2 l}{2AE\cos^3\beta}$$

برای شماره (۲) هم همینطور است یعنی :

$$\Rightarrow \frac{P.L}{2AE\cos^3\beta} - \frac{F_2\, l}{2AE\cos^3\beta} = \frac{F_2\, l}{A \cdot E}$$

$$\Rightarrow F_2 = \frac{P}{1+2\cos^3\beta} \qquad \Rightarrow F_2 > F_1$$

$$① \Rightarrow F_1 = \frac{P\cos^2\beta}{1+2\cos^3\beta}$$

بنابراین اولین میله‌ای که به حد جاری شدن می‌رسد میله B است.

اولین جاری شدن:

$F_2 = \sigma_y A$

$\Longrightarrow P_y = \sigma_y A(1+2C_1^3\beta)$

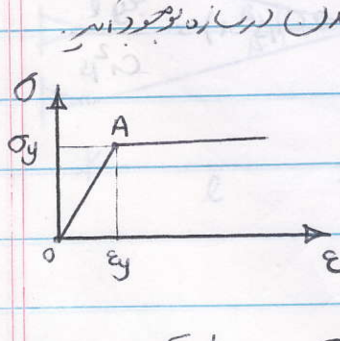
حال باید باری را که به تمام اعضا به حد جاری شدن برسد را حساب کنیم.
با افزایش بار P تنش انبساط در میله BD (یا نیروی F_2) به حد تسلیم می‌رسد.

$F_2 = \sigma_y . A$

$P = F_2(1+2C_1^3\beta) \Longrightarrow P = \sigma_y . A(1+2C_1^3\beta)$

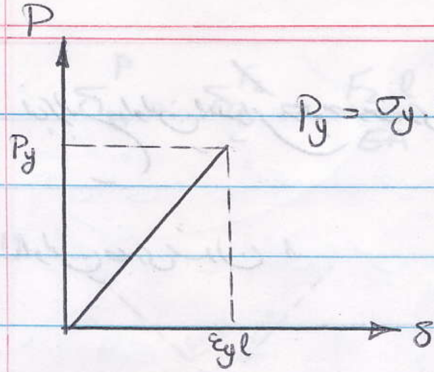
$\Longrightarrow P_y = \sigma_y . A(1+2C_1^3\beta)$

P_y معادل نیرویی است که در سازه وارد شود تا اولین جاری شدن در سازه به وجود آید.
تغییر طولی که به وجود می‌آید را δ_y می‌نامیم.



نقطه A هنوز در منطقه الاستیک واقع است بنابراین:

$$\delta_y = \frac{F_2 L}{AE} = \frac{\sigma_y A l}{E . A} = \frac{\sigma_y}{E} . L = \varepsilon_y . L$$



$$P_y = \sigma_y . A(1 + 2C_1^3\beta)$$

حداکثر بار P هنگامی حاصل می‌شود که میله‌های AD و CD نیز جاری شوند. یعنی

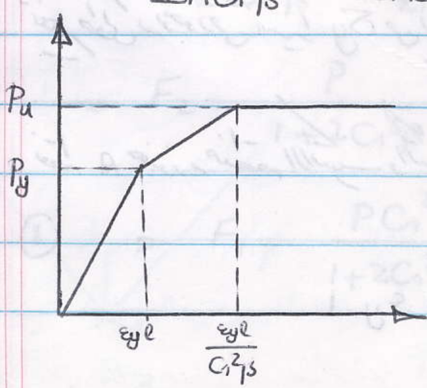
$$F_1 = F_2 = \sigma_y . A$$

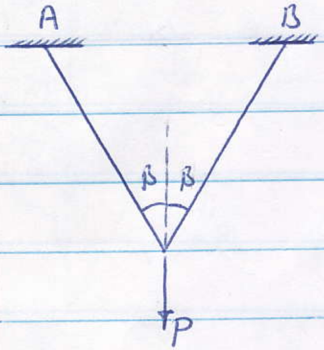
از رابطه ① داشتیم:

$$2F_1 C_1\beta + F_2 = P$$

$$\Rightarrow P_u = 2\sigma_y A C_1\beta + \sigma_y . A = \sigma_y . A(2C_1\beta + 1)$$

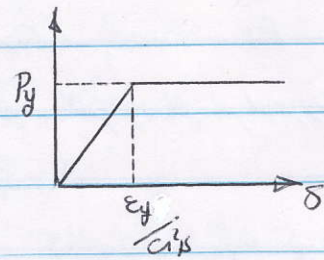
$$\delta_u = \frac{P_u . l}{2EAC_1^3\beta} - \frac{\sigma_y A l}{2EAC_1^3\beta} = \frac{\sigma_y . l}{2EC_1^3\beta}(1 + 2C_1\beta - 1) = \frac{\varepsilon_y l}{C_1^2\beta}$$

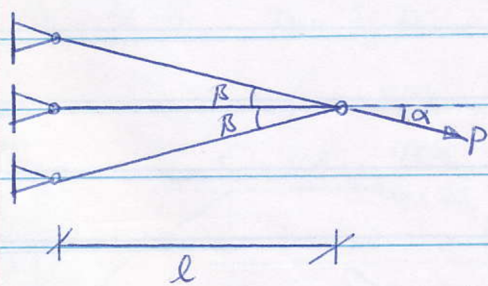




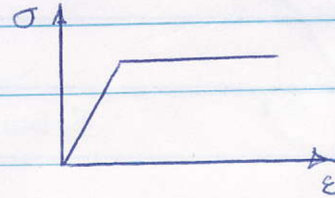
$$\sum F_y = 0$$

$$\Rightarrow 2F_1 \cos\beta = P \Rightarrow P_y = 2\sigma_y A \cos\beta$$

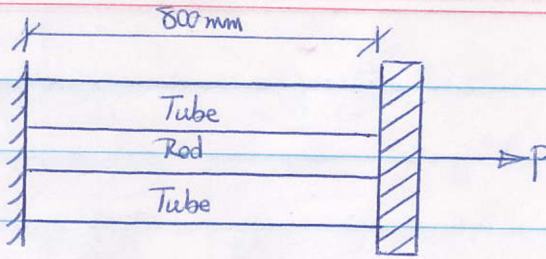




مثال ۵: با فرض اینکه منحنی تنش کرنش به صورت زیر باشد مطلوبست منحنی بار تغییر مکان، P_u ، P_y.
(هر سه میله A ، E)



مثال ۵ الف) مطلوبست رسم دیاگرام نیرو تغییر مکان و حداکثر باری که می‌توان به مجموعه اعمال کرد.



ب) اگر بار P تا 19.5 (KN) افزایش و سپس برداشته شود. مطلوبست حداکثر تغییر شکل مجموعه. تغییر شکل دائمی پس از باربرداری و تنش های باقیمانده.

$E_T = 100\,Gpa \qquad A_T = 60\,mm^2 \qquad (\sigma_T)_y = 250\,Mpa$

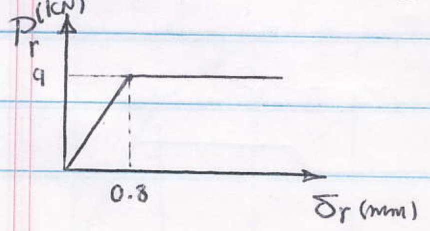
$E_R = 200\,Gpa \qquad A_R = 45\,mm^2 \qquad (\sigma_R)_y = 200\,Mpa$

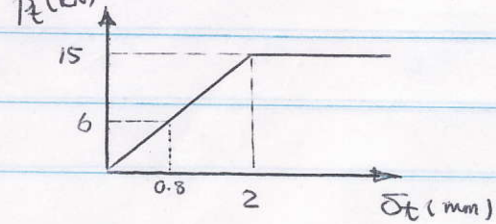
الف) روش اول ؛

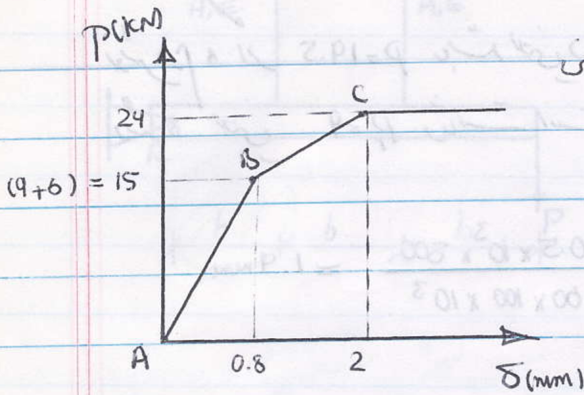
$$P = P_r + P_t$$

$$\begin{cases} (P_r)_y = (\sigma_r)_y \cdot A_r = 200 \times 45 = 9\,kN \\ (\delta_r)_y = \varepsilon_{r_y} \cdot L = \dfrac{(\sigma_r)_y}{E} \cdot L = \dfrac{200}{200 \times 10^3} \times 800 = 0.8\,mm \end{cases}$$

$$\begin{cases} (P_t)_y = (\sigma_t)_y \cdot A_t = 250 \times 60 = 15\,kN \\ (\delta_t)_y = (\varepsilon_t)_y \cdot l = \dfrac{(\sigma_t)_y}{E} \cdot L = \dfrac{250}{100 \times 10^3} \times 800 = 2\,mm \end{cases}$$







چون سختی در BC کم می‌شود لذا این شیب سختی کمتر است.

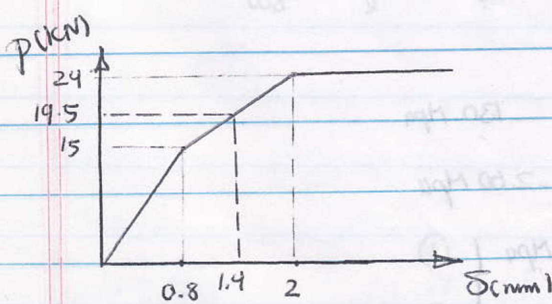
روش دوم:

$$\delta_r = \delta_t \quad , \quad P_r + P_t = P$$

$$\Longrightarrow \frac{P_r l}{A_r E_r} = \frac{P_t l}{A_t E_t} \Longrightarrow P_r = \frac{E_r \cdot A_r}{E_t \cdot A_t} P_t$$

$$P_t = \frac{2}{5}P \qquad P_r = \frac{3}{5}P$$

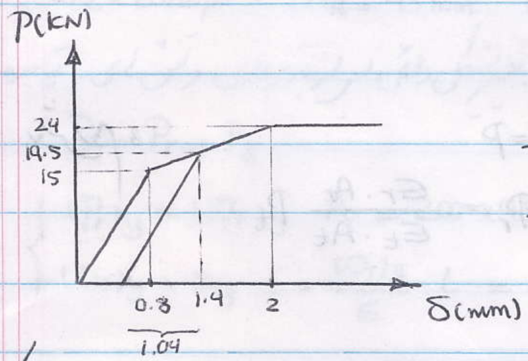
ب) روش اول:



روش دوم: اگر $P=19.5$ باشد یعنی در مرحله‌ای هستیم که میله جاری شده. یعنی $P_r=9$ و ثابت است. بنابراین:

$P_t = 10.5$

$$\Longrightarrow \delta_t = \frac{P_t}{A}\cdot\frac{L}{E_t} = \frac{10.5\times10^3\times800}{60\times100\times10^3} = 1.4\,mm$$



$$\frac{15}{0.8} = 18.75$$

$$\frac{19.5}{18.75} = 1.04$$

$$\Longrightarrow 1.4 - 1.04 = 0.36$$ تغییر شکل دائمی

$$\varepsilon' \text{ برگشت} = \frac{-1.04}{800} = -1.3\times10^{-3}$$

$$\varepsilon \text{ پسماند} = \frac{\delta}{l} = \frac{0.36}{800} = 0.45\times10^{-3}$$

تنش برگشت تیوب $\sigma_t' = -1.3\times10^{-3}\times100\times10^3 = -130\ Mpa$

تنش برگشت تیوب $\sigma_r' = -1.3\times10^{-3}\times200\times10^3 = -260\ Mpa$

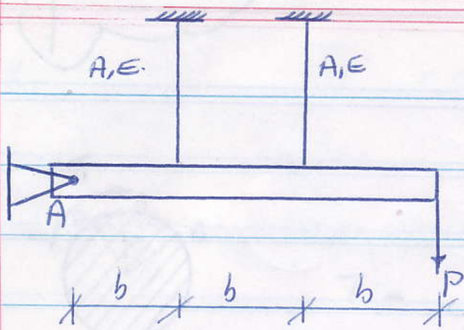
تنش باقی‌مانده میله $\sigma_r^R = \dfrac{9\times10^3}{45} - 260 = -60\ Mpa$ (1)

تنش باقی‌مانده تیوب $\sigma_t^R = \dfrac{10.5\times10^3}{60} - 130 = 45\ Mpa$ (2)

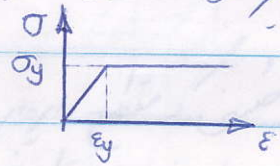
۷۸ در شماره (2) σ_t^R را می‌توان از رابطه $\sigma = E\varepsilon$ پسماند حساب کرد چون تیوب هنوز جاری نشده

اما در شماره (1) چون میله جاری شده پس دیگر قانون هوک صادق نیست و باید از تنش برگشت استفاده نمود.

مثال: مطلوبست رسم منحنی P - δ.



درصورتیکه بلافاصله پس از P = Pu باربرداری شود تنش های پس ماند در میله ها و تغییرشکل ماندگار را بدست آورید.

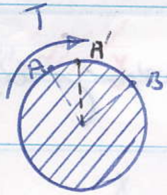


حمید کاظم

فصل سوم:

«پیچش»

مقاطع دوار:

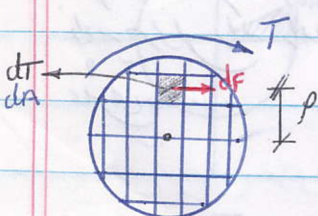


بردار پیچش بر سطحی که عمل می‌کند عمود است

$T =$ گشتاور پیچشی $(N.mm)$

خصوصیتی که مقطع دایره‌ای دارد این است که تحت پیچش مقطعش همان دایره می‌ماند ولی فاصله نقطه تغییر یافته از مرکز تغییر نمی‌کند

اما مقطع مربعی (یا کلاً) تحت پیچش مختلی تغییر شکل می‌دهد



المان مقطع سهمی از T به dT می‌باشد را می‌برد.

$$dT = \rho . dF$$

نیروهایی که در مقطع بوجود می‌آید مماس بر مقطع است.

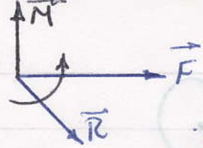
$$dF = \tau dA$$

* گشتاور پیچشی تولید تنش برشی می‌کند.

تعادل مقطع: $T = \int dT = \int \rho . dF = \int \rho \tau dA$

$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}$

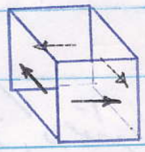
M : انگشت شست دست راست ،



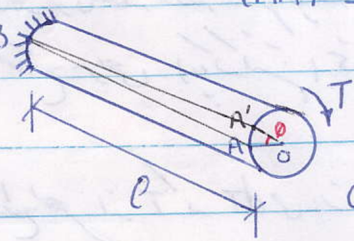
* از R به F جاروب می‌کنیم.

کوپل پیچشی $T = \int_A \rho \tau \, dA$

اگر المان مستطیلی را رسم کنیم برش خواهیم داشت.

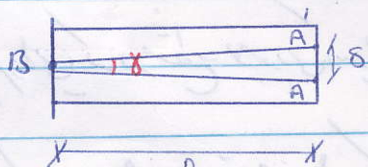


* بیشترین تغییر شکل در پیچش روی محیط دایره است ($\overset{\frown}{AA'}$)



زاویه مرکزی را که زاویه پیچش است با ϕ نمایش می‌دهند.

$OA = C$ شعاع



$$\delta / l = \frac{AA'}{l} \rightarrow \delta / l = \gamma$$

چون بیشترین تغییر شکل در محیط است بنابراین γ در این حالت γ_{Max} خواهد بود که همان کرنش برشی ماکزیمم می‌باشد.

τ ← تنش برشی

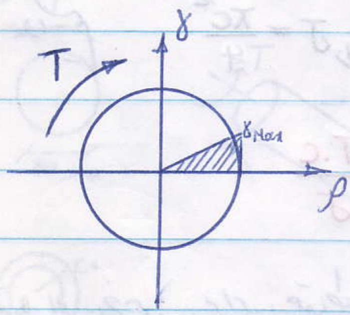
$$\gamma_{Max} = \frac{\overline{AA'}}{L} \qquad \overline{AA'} = c\varphi \implies \boxed{\gamma_{Max} = \frac{c\varphi}{l}}$$

(کلی) کرنش برشی ⟵ $\gamma = \dfrac{\rho\phi}{l}$ (ϕ ⟵ زاویه پیچش بر رد) $\quad 0 \leq \rho \leq c$

ρ : فاصله هر المان از مرکز

$$\implies \frac{\gamma}{\gamma_{Max}} = \frac{\rho}{c}$$

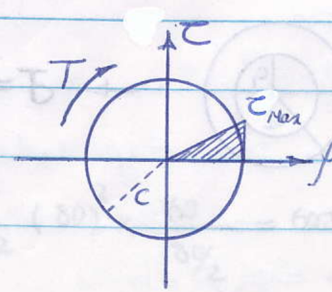
* بنابراین می فهمیم توزیع کرنش در مقطع خطی است.



در حالت ارتجاعی داشتیم :

$$\tau = G\gamma \longrightarrow \tau = G\frac{\rho\phi}{l}$$

$$\implies \tau = \frac{\rho}{c}\tau_{Max}$$



$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

حال می‌خواهیم ببینیم چه ارتباطی بین τ و T در مقطع دایره‌ای وجود دارد.

$$T=\int_A \rho\tau\, dA \longrightarrow T=\int_A \rho\cdot\frac{\rho}{c}\tau_{Max}\, dA$$

$$\Longrightarrow T=\frac{\tau_{Max}}{c}\int_A \rho^2 dA$$

دایره $I_x=I_y=\frac{\pi c^4}{4}$

داشتیم

$$J=\int_A \rho^2 dA \qquad (J=I_x+I_y) \xrightarrow{\text{دایره}} J=\frac{\pi c^4}{2}$$

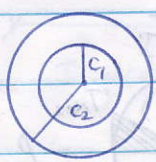
$$\Longrightarrow T=\frac{\tau_{Max}}{c}J \Longrightarrow \tau_{Max}=\frac{T.c}{J}$$

گشتاور پیچشی

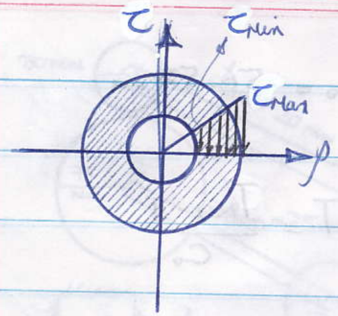
تنش برشی $\boxed{\tau=\frac{T.\rho}{J}}$

نکته: این فرمول برای مقاطع توپر است.

اگر مقطع توپر نباشد:

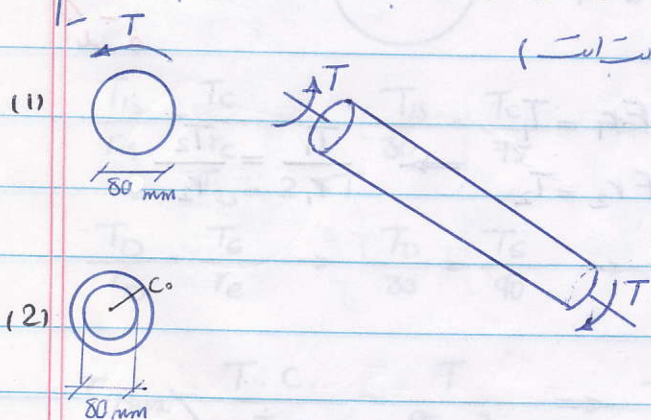


$$\longrightarrow J=\frac{\pi}{2}\left(c_2^4-c_1^4\right)$$



$$\tau_{Min} = \frac{c_1}{c_2}\,\tau_{Max}$$

مثال ۸: حداکثر گشتاوری را در دو حالت می‌توان وارد کرد به شرطی که تنش برشی ماکزیمم از 60 Mpa بیشتر نشود. (مصالح ثابت است)



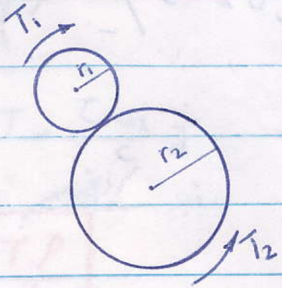
$$1)\quad J = \frac{\pi}{2} c^4 = \frac{\pi}{34} d^4 = \frac{\pi}{32}(80)^4$$

$$\tau_{Max} = \frac{T.c}{J} \Rightarrow T = J\,\frac{\tau_{Max}}{c} = \frac{\pi}{32}(80)^2 \times \frac{60}{80/2} = 6030\ N.m$$

2) $\dfrac{\pi(80)^2}{4} = \dfrac{\pi}{4}(d_o^2 - 80^2) \Rightarrow C_o = 56.57\ \text{mm}$

$\rightarrow J = \frac{\pi}{2}\left[(56.57) - (40)^4\right] \Rightarrow T = \dfrac{\tau_{max} \cdot J}{C_o}$

$= \dfrac{60 \times 12.065 \times 10^6}{56.57} = 12800\ \text{kN.mm}$



$\begin{cases} F r_1 = T_1 \\ F r_2 = T_2 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{T_1}{r_1} = \dfrac{T_2}{r_2}$

$50^4 = x$ — ۱۱) برای محاسبه در 50^4 در ماشین حساب

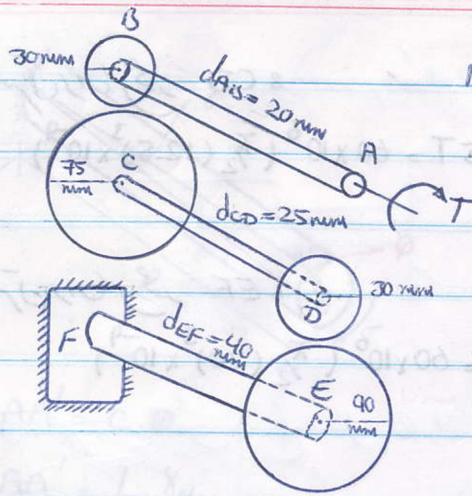
$\rightarrow \ln 50^4 = \ln x \Rightarrow 4\ln 50 = \ln x \Rightarrow x = e^{4\ln 50}$

$\rightarrow x = Exp(4 * Ln50)$

$C^3 = x \Rightarrow 3\ln C = \ln x \Rightarrow \ln C = \frac{1}{3}\ln x \Rightarrow C = e^{\frac{1}{3}\ln x}$ ۱۲

۸۴ $C = Exp(\frac{1}{3} * Lnx)$

مثال، حداکثر گشتاور T را بیابید تا تنش Max ایجاد شده در محورها از 60 Mpa بیشتر نشود



$$T=T_{AB}$$

$$\begin{cases} T=T_{AB}=T_B \\ T_C=T_{CD}=T_D \\ T_E=T_{EF} \end{cases}$$

$$\frac{T_B}{r_B}=\frac{T_C}{r_C} \Rightarrow \frac{T_B}{30}=\frac{T_C}{75} \Rightarrow T_C=2.5\,T_B=2.5T$$

$$\Rightarrow T_D=2.5T$$

$$\frac{T_D}{r_D}=\frac{T_E}{r_E} \Rightarrow \frac{T_D}{30}=\frac{T_E}{90} \Rightarrow T_E=3T_D \Rightarrow T_E=7.5T$$

$$\tau_{Max}=\frac{T.C}{J}=\frac{T}{\frac{\pi}{2}C^3} \Rightarrow T=\tau_{Max}\left(\frac{\pi}{2}C^3\right)$$

کنترل براساس محور AB :

$$T=60\times10^6\left(\frac{\pi}{2}(10)^3\times10^{-9}\right)=94.2\,N.m$$

کنترل راس محور CD:

$$T_{CD} = \tau_{Max} \left(\frac{\pi}{2} (c)^3 \right) \Rightarrow 2.5T = 60\times10^6 \left(\frac{\pi}{2} (12.5)^3 \times 10^{-9} \right)$$

$$\Rightarrow T = 73.593 \text{ N.m}$$

کنترل راس محور EF:

$$T_{EF} = \tau_{Max} \left(\frac{\pi}{2} c^3 \right) \Rightarrow 7.5T = 60\times10^6 \left(\frac{\pi}{2} (20)^3 \times 10^{-9} \right)$$

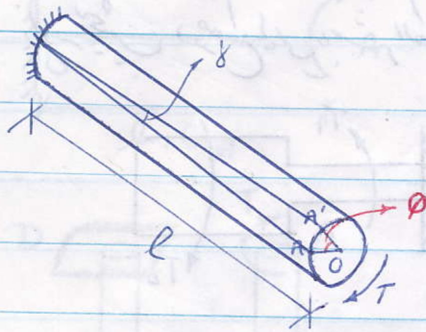
$$\Rightarrow T = 100.48 \text{ N.m}$$

$$\Rightarrow T_{Max} = Min(94.2, 73.593, 100.48) = 73.593 \text{ N.m}$$

کرنش برشی (رادیان) 1) $\gamma = \frac{\rho\phi}{l}$ زاویه پیچشی

تنش برشی 2) $\tau = \frac{T\rho}{J}$ کوپل پیچشی

زاویه پیچش :



اگر محوری به طول l با جنس مصالح ثابت با مدول برشی G و سطح مقطع ثابت با ممان اینرسی قطبی J تحت کوپل ثابت T قرار گیرد میزان چرخش دو انتهای آن نسبت به یکدیگر با ϕ نمایش داده می‌شود و به صورت زیر است.

$$\begin{cases} AA' = C.\phi \\ AA' = L.\gamma_{Max} \end{cases}$$

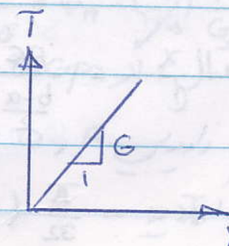
$$\Rightarrow \gamma_{Max} = \frac{C.\phi}{L}$$

$$\tau_{Max} = G\,\gamma_{Max}$$

$$\tau_{Max} = \frac{T.C}{J}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \tau_{Max} = \dfrac{T.C}{J} \\ \gamma_{Max} = \dfrac{\tau_{Max}}{G} = \dfrac{T.C}{G.J} \\ \gamma_{Max} = \dfrac{C.\phi}{L} \end{cases}$$

$$\phi = \frac{T.L}{GJ}$$

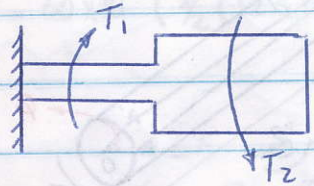


در فصل قبل داشتیم $\delta = \dfrac{PL}{EA}$.

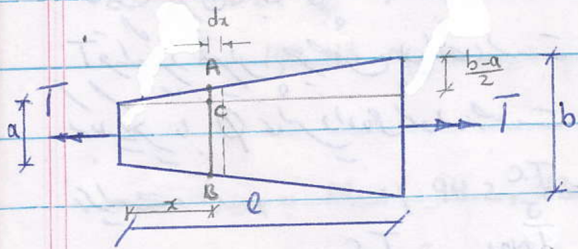
$\dfrac{GJ}{L}$ سختی پیچشی در طول است . $\dfrac{L}{GJ}$ نرمی پیچشی است .

زاویه پیچش در مقاطعی که با شرایط متفاوت به صورت زیر بدست می آید.

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i L_i}{G_i J_i}$$



مثال: برای زاویه پیچش مقطع مقابل ϕ را بدست آورید.

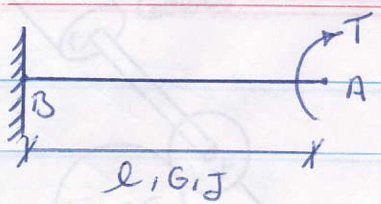


$$\phi = \int_0^{\ell} \frac{T\,dx}{G\,J(x)}$$

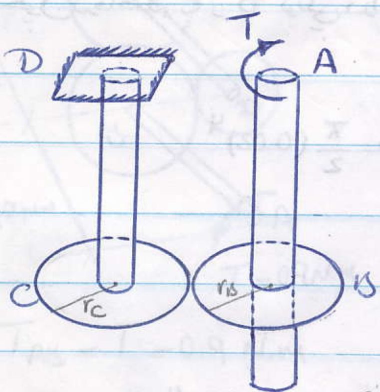
$$\frac{x}{\ell} = \frac{AC}{\frac{b-a}{2}} \Rightarrow AC = \frac{x(b-a)}{2\ell} \Rightarrow AB = a + \frac{x(b-a)}{\ell}$$

$$J(x) = \frac{\pi}{32}\left(AB^4 - a^4\right) = \frac{\pi}{32}\left(\left(a + \frac{x}{\ell}(b-a)\right)^4 - a^4\right)$$

$$\Rightarrow \phi = \int_0^{\ell} \frac{T\,dx}{G} \times \frac{32}{\pi\left[\left(a + \frac{x}{\ell}(b-a)\right)^4 - a^4\right]}$$



$$\varphi = \varphi_{A/B} = \varphi_A - \cancel{\varphi_B}^{\,0}$$



مثال: با نشان دادن T ← $\varphi_A = ?$

$$\frac{T}{r_B} = \frac{T_C}{r_C} \rightarrow T_C = \frac{r_C T}{r_B}$$

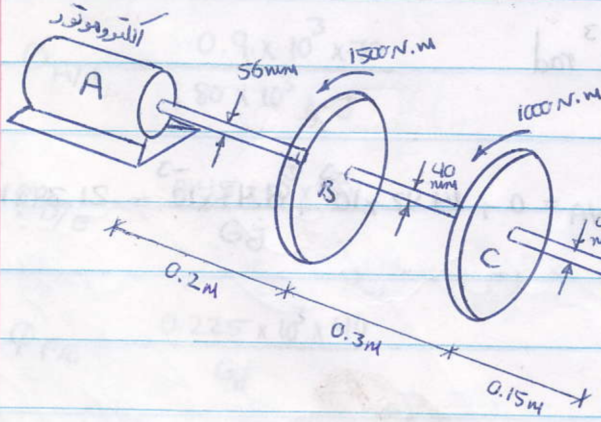
$$\varphi_C = \varphi_{C/D} + \cancel{\varphi_D}^{\,0}$$

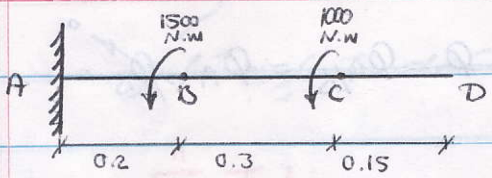
$$\varphi_A = \varphi_{A/B} + \varphi_B \qquad \varphi_C = \frac{T_C l}{GJ}$$

$$\varphi_B r_B = \varphi_C r_C \qquad r_C \varphi_C = r_B \varphi_B$$

$$\rightarrow \varphi_B = \frac{r_C}{r_B}\,\frac{T_C l}{GJ} = \left(\frac{r_C}{r_B}\right)^2 \frac{Tl}{GJ} \qquad \varphi_{A/B} = \frac{Tl}{GJ} \rightarrow \frac{Tl}{GJ} = \varphi_A - \left(\frac{r_C}{r_B}\right)^2 \frac{Tl}{GJ}$$

مثال: اگر G=80Gpa باشد زاویه پیچش A , D را بدست آورید.





چون در فاصله C و D گشتاوری نداریم $\varphi_{D/C}=0$

$$\varphi_{C/B}=\frac{1000\times 0.3}{80\times10^{9}\times J} \qquad J=\frac{\pi}{2}c^{4}=\frac{\pi}{2}(0.02)^{4}$$

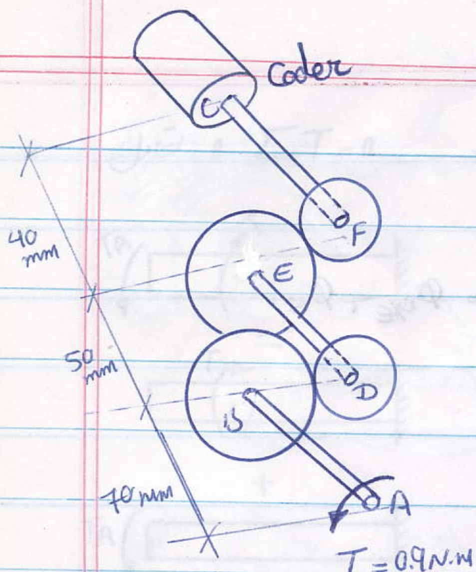
$$\Rightarrow \varphi_{C/B}=14.92\times10^{-3}\ \text{rad}$$

$$\varphi_{B/A}=\frac{(1500+1000)\times 0.2}{80\times10^{9}\times J} \qquad J=\frac{\pi}{2}c^{4}=\frac{\pi}{2}(0.028)^{4}$$

$$\Rightarrow \varphi_{B/A}=6.47\times10^{-3}\ \text{rad}$$

$$\varphi_{D/A}=\varphi_{D/C}+\varphi_{C/B}+\varphi_{B/A}=0+14.92\times10^{-3}+6.47\times10^{-3}=21.39\times10^{-3}\ \text{ra}$$

$$\varphi_{D/A}=1.226^{\circ}$$



مثال: اگر از چرخش نقطه C جلوگیری شود زاویه چرخش A را نسبت به C تحت کوپل $T = 0.9\ N.m$ محاسبه کنید. (شعاع دنده‌های کوچک r و دنده‌های بزرگ ۲r است)

$G = 80\ Gpa$

قطر تمام محورها 14mm است.

$$J = \frac{\pi}{2}(2)^{2\times 2} = 8\pi$$

$$T_{AB} = T = 0.9\ N.m \qquad T_{DE} = \tfrac{1}{2} T_{AB} = 0.45\ N.m$$

$$T_{FC} = \tfrac{1}{2} T_{DE} = \tfrac{1}{4} T = 0.225\ N.m$$

$$\varphi_{A/B} = \frac{0.9 \times 10^3 \times 70}{80 \times 10^3 \times J}$$

$$\varphi_{D/E} = \frac{0.45 \times 10^3 \times 50}{GJ}$$

$$\varphi_{F/C} = \frac{0.225 \times 10^3 \times 40}{GJ}$$

$$r_1\varphi_1 = r_2\varphi_2$$

$$\varphi_F = \varphi_{F/C} + \cancel{\varphi_C}^{\,0} = \frac{0.9\ N.mm}{GJ} \times 10^4$$

$$\varphi_E = \tfrac{1}{2}\varphi_F = 0.45/_{GJ} \times 10^4 \rightarrow \varphi_D = \varphi_{D/E} + \varphi_E$$

$$\varphi_D = \frac{(2.25+0.45)\times 10^4}{GJ}$$

$$\varphi_B = \frac{r_D}{r_B}\varphi_D = \frac{1}{2}\varphi_D = \frac{1.35\times10^4}{GJ}$$

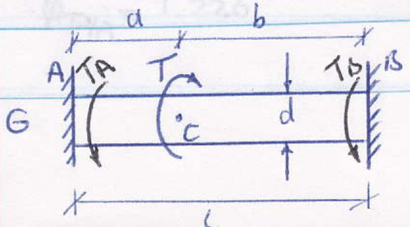
$$\varphi_A = \varphi_{A/B} + \varphi_B = \frac{6.3\times10^4}{GJ} + \frac{1.35\times10^4}{GJ} = \frac{7.65\times10^4}{GJ} = 38.05\times10^{-3}\ rad$$

$$= 2.18^{\circ}$$

پیچش در اعضای نامعین :

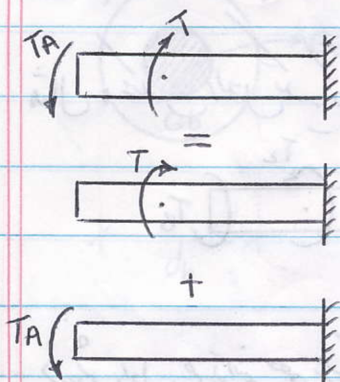
از روش سازگاری تغییر شکل که برای حل پیچش استفاده می‌شود. روش دیگر ، روش جمع آثار قوا است.

مثال : عکس العمل تکیه‌گاهی T_A ، T_B مجهول است.



تعادل : $\sum T = 0 \longrightarrow T_A + T_B = T$

روش اول : (جمع آثار قوا)



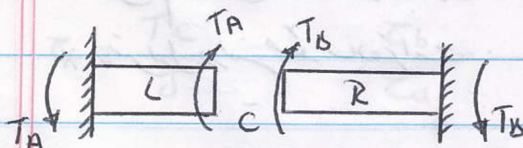
$$\varphi_A^{T} = \frac{Tb}{GJ}$$

$$\varphi_A^{T_A} = \frac{T_A \cdot L}{GJ}$$

چون نقطه A حرکتی چرخشی ندارد :

$$\varphi_A^{T} = \varphi_A^{T_A} \Longrightarrow \frac{Tb}{GJ} = \frac{T_A L}{GJ} \Longrightarrow T_A = \frac{b}{L}T \qquad T_B = \frac{a}{L}T$$

روش دوم : (سازگاری تغییر شکل)



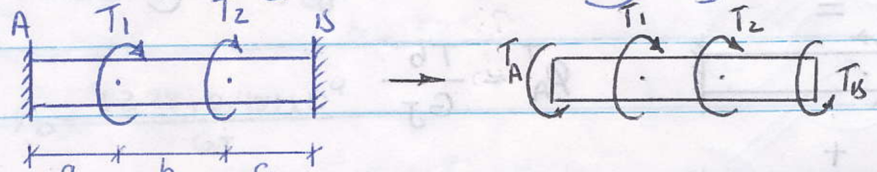
$$\varphi_C^{L} = \frac{T_A \cdot a}{GJ} \qquad \varphi_C^{R} = \frac{T_B \cdot b}{GJ}$$

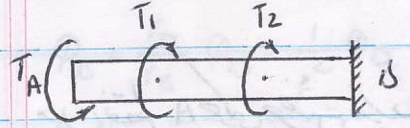
چون چرخش در دو طرف برابر است :

$$\varphi_C^{L} = \varphi_C^{R} \Longrightarrow T_A \cdot a = T_B \cdot b \longrightarrow T_A = \frac{b}{a} T_B$$

$$T_A + T_B = T \Rightarrow \left(\frac{b}{a}+1\right)T_B = T \Rightarrow T_B = \frac{a}{L}T \,,\; T_A = \frac{b}{L}T$$

مثال: عکس العمل تکیه گاهی T_A و T_B را بدست آورید.





در روش اول می توانیم هم به شکل ۹۳ تبدیل کنیم و جدا حساب کنیم. یا می توانیم بر روی همین شکل از طریق $\sum$ جمع φ_i ها را برابر صفر بگذاریم.

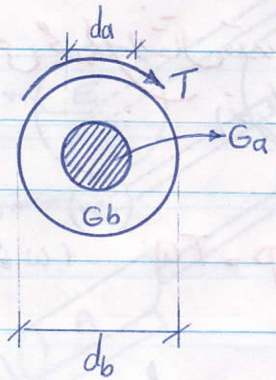
از روش دوم می توان استفاده کرد که شرطی که یک نقطه را ثابت کرده φ ها را مساوی می گذاریم.

* روش اول در این مثال ساده تر است.

* بسیار مهم است که بدانیم در این شکل زاویه پیچش ها باهم برابرند.

مثال: تنش های برشی Max را در پوسته و هسته بیابید.

هسته فولاد و پوسته مس است.



$$T = T_a + T_b \qquad \varphi_a = \varphi_b$$

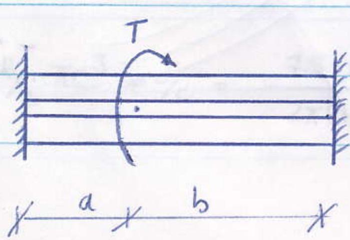
$$\longrightarrow \frac{T_a \cdot L}{G_a \cdot J_a} = \frac{T_b \cdot L}{G_b \cdot J_b}$$

$$\Rightarrow T_a = \frac{G_a \cdot J_a}{G_b \cdot J_b} T_b$$

$$T = \left(\frac{G_a \cdot J_a}{G_b \cdot J_b} + 1 \right) T_b \Rightarrow \begin{cases} T_b = \dfrac{G_b J_b}{G_a J_a + G_b J_b} \\ T_a = \dfrac{G_a J_a}{G_a J_a + G_b J_b} \end{cases}$$

$$\tau = \frac{T.c}{J} \qquad \frac{\tau_b}{\tau_a} = \frac{\dfrac{T_b \cdot d_b/2}{J_b}}{\dfrac{T_a \cdot d_a/2}{J_a}} = \frac{T_b}{T_a} \cdot \frac{J_a \cdot d_b}{J_b \cdot d_a}$$

$$\frac{\tau_b}{\tau_a} = \frac{G_b \cdot J_b}{G_a \cdot J_a} \cdot \frac{J_a \cdot d_b}{J_b \cdot d_a} = \frac{G_b \cdot d_b}{G_a \cdot d_a}$$



مثال: اگر τ_b معلوم باشد τ_a را بیابید.

ادامه: این مسئله ترکیب دو مثال قبل است.

طراحی محورهای انتقال قدرت :

$W = T \cdot \varphi$ (تغییر شکل φ ، کوپل T ، کار W ؛

$P = \dfrac{dW}{dt} \Rightarrow P = T\dfrac{d\varphi}{dt} \rightarrow P = T\omega$ (انگاه ω ؛

$\omega = 2\pi f \rightarrow P = 2\pi f T$ $\quad f \rightarrow$ فرکانس $(1/s)$
→ تعداد دورها در ثانیه

$\Rightarrow T = \dfrac{P}{2\pi f}$ کوپل پیچش

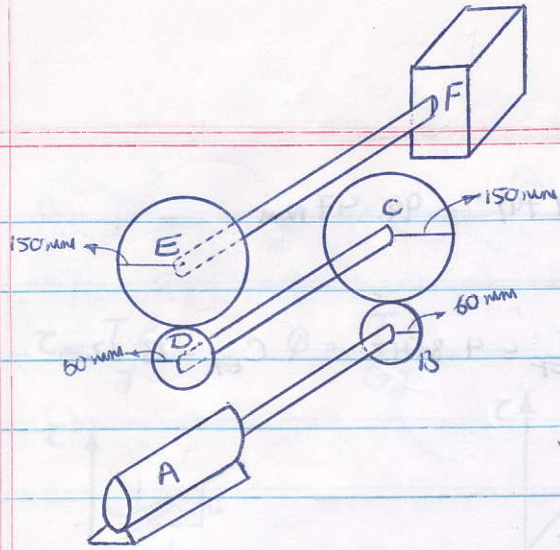
* در محاسبات توان را ثابت فرض می‌کنیم .

$\tau = \dfrac{T \cdot c}{J} \Rightarrow T = \dfrac{\tau \cdot J}{c} \Rightarrow J/_{c}\, \tau = \dfrac{P}{2\pi f}$

$\Rightarrow$ مجاز $\tau = \dfrac{Pc}{2\pi f J}$ تنش برشی

نکته /

$P = 2\pi f T \rightarrow$ وات $(W) = \dfrac{N \cdot m}{s}$



مثال: سه محور و چهار چرخ دنده به منظور انتقال توانی معادل $P = 7.5\,kW$ از موتور A تا ماشین ابزاری در نقطه F مورد استفاده قرار می‌گیرند. اگر فرکانس موتور 30 Hz باشد و تنش مجاز 60 MPa باشد، قطر محورها را تعیین کنید.

$$T_{AB} = \frac{P}{2\pi f} = \frac{7.5 \times 10^3}{2\pi \times 30} = 39.79\ N.m$$

$$\frac{J}{c} = \frac{1}{2}\pi c^3 = \frac{T}{\tau} = \frac{39.79 \times 10^3}{60} \Rightarrow c = 7.5\,mm$$

$$\Rightarrow d_{AB} = 15\,mm$$

$$r_1 \varphi_1 = r_2 \varphi_2 \Rightarrow r_1 \frac{d\varphi_1}{dt} = r_2 \frac{d\varphi_2}{dt} \Rightarrow r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2$$

$$\Rightarrow r_1 f_1 = r_2 f_2$$

$$f_{CD} = \frac{30 \times 60}{150} = 12\,Hz$$

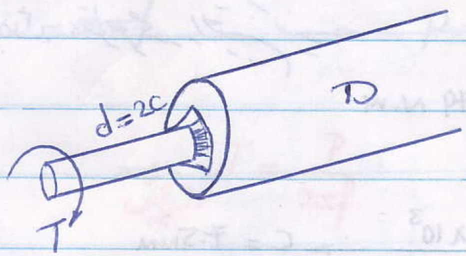
$$\frac{1}{2}\pi c^3 = J/c = \frac{7.5 \times 10^3 \times 10^3}{2\pi (12) \times 60} \Rightarrow c = 20.4\,mm$$

$$\Rightarrow d_{CD} = 40.8\,mm$$

$T_{CD} = \frac{r_C}{r_B} T_B = \frac{150}{60}(39.79) = 99.47 \text{ N.m}$

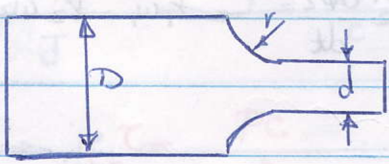
$T_{EF} = 248.7 \text{ N.m} \qquad f_{EF} = 4.8 \text{ Hz} \qquad C_{EF} = 13.82$

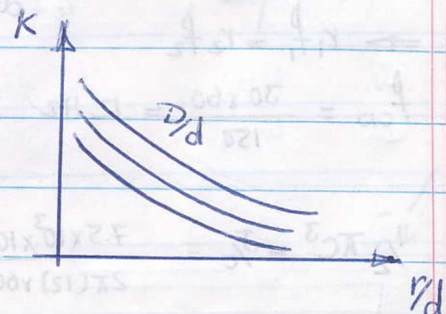
$d_{EF} = 27.64 \text{ mm}$



$\tau_{Max} = K \frac{T.c}{J}$

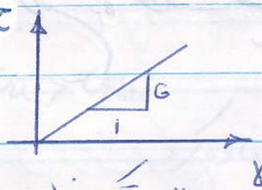
$\tau_{avg} = \frac{T.c}{J}$



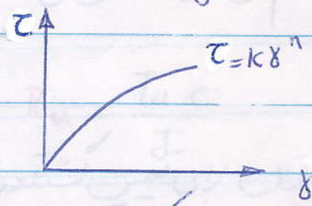


تغییر شکل غیر ارتجاعی در پیچش :

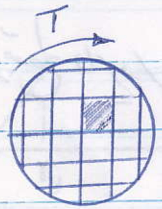
$$\tau = \frac{T.\rho}{J} \quad , \quad \varphi = \frac{T.L}{GJ} \quad , \quad \tau_{Max} = \frac{T.C}{J}$$



الاستیک خطی



الاستیک غیرخطی



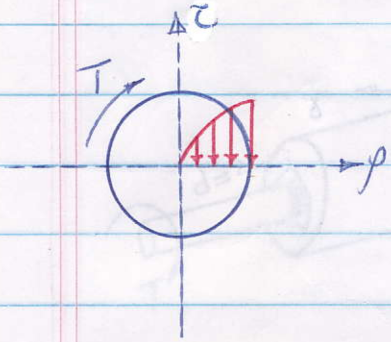
$$T = \int_A \rho . \tau dA$$

$$\begin{cases} \gamma = \dfrac{\rho}{L}\varphi \\ \\ \gamma_{Max} = \dfrac{c}{L}\varphi \end{cases} \longrightarrow \gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{Max}$$

وقتی صحبت از غیر ارتجاعی بودن تغییر شکل می کنیم یعنی $\tau = f(\gamma)$

از طرفی $\gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{Max}$ که c ، γ_{Max} ثابت هستند بنابراین $\gamma = g(\rho)$

بنابراین τ حالت غیر ارتجاعی $\longleftarrow$ $\tau = h(\rho)$



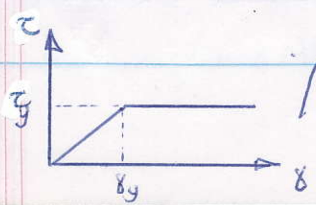
در مقطع دایره ای داریم:

$0 \leq \rho \leq c \qquad dA = 2\pi\rho\, d\rho$

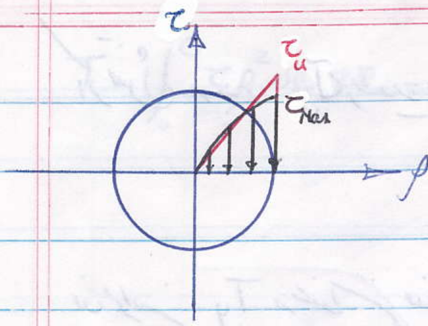
$$T = \int_0^c \rho \cdot \tau \, 2\pi\rho\, d\rho = 2\pi \int_0^c \tau \rho^2 d\rho$$

τ برحسب ρ می باشد پس باید تابع τ برحسب ρ را پیدا کرد.

در اینجا مدل Elasto plastic را بررسی می کنیم



مدول گسیختگی در پیچش :

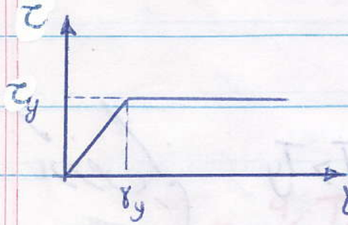


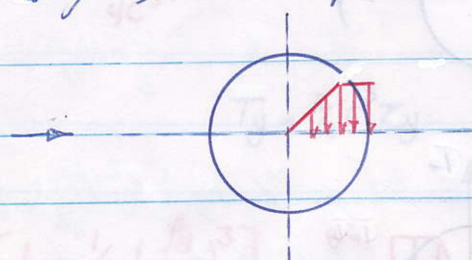
T_u را در نحوی رسم می کنیم سطح زیر نمودارش با سطح زیر نمودار T_{Max} برابر باشد .

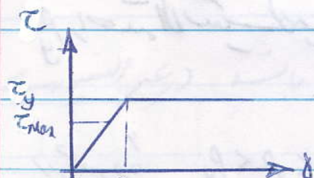
$$\tau_u > \tau_{Max} \longrightarrow \tau_u = R_u = \frac{T_u \cdot c}{J}$$

از R_u یا R_T می توان برای تعیین گشتاور پیچشی T_u استفاده کرد .

برای مدل Elastoplastic نمودار $\rho - \tau$ به شکل زیر است .



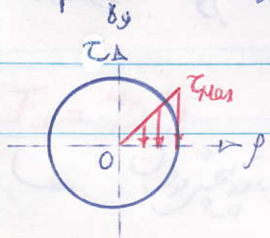




فرض می کنیم $\tau_{Max} < \tau_y$:

در این حالت توزیع تنش خطی است

پس رابطه $\tau_{Max} = \frac{T.c}{J}$

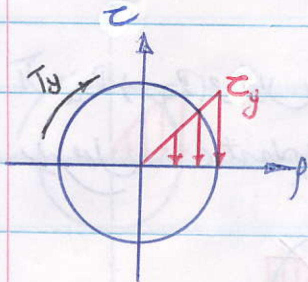


اگر تنش به حد τ_y برسد داریم:

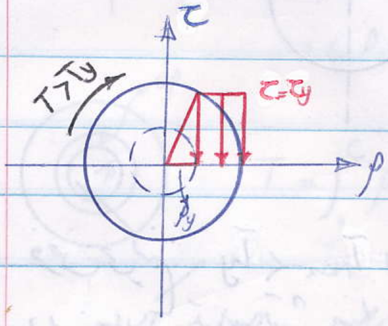
$$T_y = \frac{J}{c}\tau_y \qquad J = \frac{\pi}{2}c^4$$

$$\Longrightarrow \quad T_y = \frac{\pi}{2}c^3\tau_y$$

بنابراین T_y به عنوان [illegible] می‌باشد.



حال فرض می‌کنیم $T=T_y$:



اگر فرض کنیم $T>T_y$

ρ_y را هسته الاستیک گویند.

در محدوده‌ی $0<\rho<\rho_y$ داریم:

$$\frac{\tau}{\tau_y} = \frac{\rho}{\rho_y}$$

$$\begin{cases} T<T_y \longrightarrow T=\frac{\pi}{2}c^3\tau \\ T=T_y \longrightarrow T=T_y=\frac{\pi}{2}c^3\tau_y \\ T>T_y \longrightarrow T=\frac{4}{3}T_y\left(1-\frac{1}{4}\left(\frac{\rho_y}{c}\right)^3\right) \end{cases}$$

$$T=\left(\int_0^c \tau\rho^2 d\rho\right)2\pi = 2\pi\left(\int_0^{\rho_y}\rho^2\left(\frac{\rho}{\rho_y}\tau_y\right)d\rho+\int_{\rho_y}^{c}\rho^2\tau_y\, d\rho\right)$$

ρ_y شعاع هسته الاستیک است که ثابت نمی باشد.

$$\Rightarrow T=\frac{\pi}{2}\rho_y^3\tau_y+\frac{2}{3}\pi c^3\tau_y-\frac{2}{3}\pi\rho_y^3\tau_y$$

$$\Rightarrow T=\frac{2}{3}\pi c^3\tau_y\left(1-\frac{\rho_y^3}{4c^3}\right)$$

داریم: $T_y=\frac{\pi}{2}c^3\tau_y$

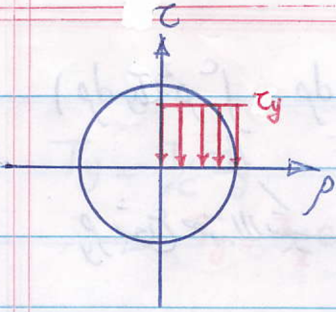
$$\Rightarrow T=\frac{4}{3}T_y\left[1-\frac{1}{4}\left(\frac{\rho_y}{c}\right)^3\right]$$

این فرمول تنها وقتی قابل استفاده است که $T>T_y$ باشد. در غیر اینصورت به تناقض می رسیم.

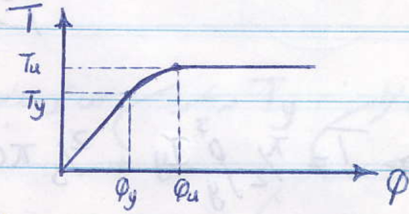
اگر $\rho_y \to 0$ آنگاه $T=T_u$ می‌نامیم:

$T_u=\frac{4}{3}T_y$ ↳ گشتاور نهایی پیچشی

$$T=\begin{cases}\dfrac{GJ}{l}\varphi & \varphi\leqslant\varphi_y\\[2mm] \dfrac{4}{3}T_y\left(1-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\varphi_y}{\varphi}\right)^3\right) & \varphi\geqslant\varphi_y\end{cases}$$



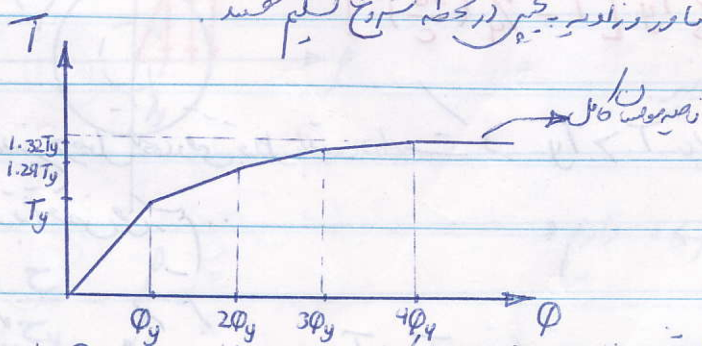
* هنگامی که $\rho_y = c$ باید $\varphi=\varphi_y$ می باشد



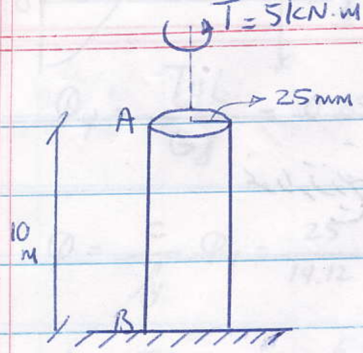
$$\begin{cases}\gamma=\dfrac{\rho}{L}\varphi \longrightarrow \gamma_y=\dfrac{\rho_y}{L}\varphi\\[2mm] \rho_y=c \xrightarrow{T=T_y} \gamma_y=\dfrac{c}{L}\varphi_y\end{cases} \Longrightarrow \boxed{\dfrac{\rho_y}{c}=\dfrac{\varphi_y}{\varphi}}$$

$$\Longrightarrow T=\tfrac{4}{3}T_y\left[1-\tfrac{1}{4}\left(\frac{\varphi_y}{\varphi}\right)^3\right] \quad , \quad \varphi_y<\varphi$$

* T_y و φ_y به ترتیب گشتاور و زاویه پیچش در لحظه شروع تسلیم هستند.



نکته: توجه شود رابطه بالا تنها به ازای $\varphi>\varphi_y$ به کار می رود. به ازای $\varphi<\varphi_y$ رابطه بین T و φ خطی و به صورت $\varphi=\frac{TL}{GJ}$ می باشد.



مثال: کوپلی به اندازه 5 KN.m در نقطه A وارد می شود و سپس برداشته می شود. مطلوبست حداکثر میزان تنش باقی مانده در مقطع و مقدار تغییر شکل ماندگار میله (مصالح از جنس Elasto plastic فرض است)

$\tau_y = 160\ Mpa$

$G = 75\ Gpa$

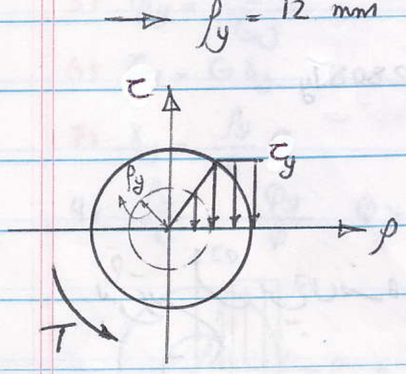
$$T_y = \frac{\pi}{2} c^3 \tau_y = \frac{\pi}{2} (25)^3 \times 160 \times 10^{-6} = 3.297\ kN.m$$

$T_y < T \implies$ مقطع وارد پلاستیک شده است.

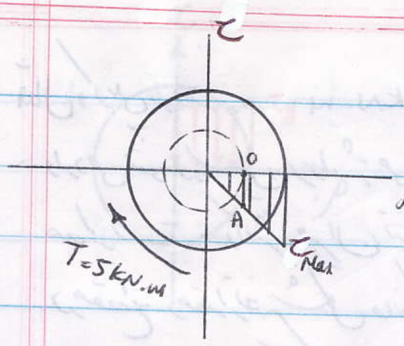
تعیین شعاع هسته الاستیک

$$5 = \frac{4}{3}(3.207)\left(1 - \frac{1}{4}\left(\frac{\rho_y}{25}\right)^3\right)$$

$$\longrightarrow \rho_y = 12\ mm$$



$\longrightarrow$ نمودار توزیع تنش در بارگذاری

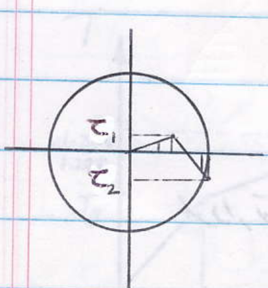


نمودار توزیع تنش در باربرداری ؟

$$\tau_{Max} = \frac{T}{T_y}\tau_y = \frac{5}{3.297}(\tau_y) = 1.2732\tau_y$$

حاصل باید دو نمودار را جمع کرد تا تنش پسماند بدست آید.

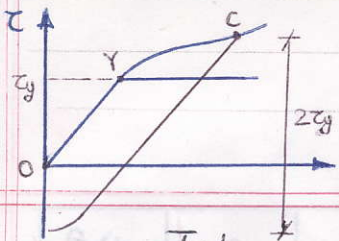
$$OA = \frac{\rho_y}{c}\tau = \frac{14.12}{25} \times 1.2732\tau_y = 0.7192\tau_y$$



$$\tau_1 = (1 - 0.7192\tau_y) = 0.2808\tau_y$$

$$\tau_2 = 0.2732\tau_y$$

بیشترین تنش پس ماند ؟ $0.2808\tau_y$



نکته مهم ۵: می‌توان تحقیق کرد که حتی اگر تنش‌های معکوس از استحکام تسلیم τ_y تجاوز کنند، فرض توزیع خطی این تنش‌ها درست است، زیرا آن‌ها از $2\tau_y$ تجاوز نمی‌کنند.

$$\varphi_y = \frac{T_y L}{GJ} = 0.85 \text{ rad}$$

$$\varphi = \frac{c}{\rho_y}\varphi_y = \frac{25}{14.12}(0.85) = 1.5 \text{ rad}$$

$$\varphi' = \frac{T.L}{GJ} = \frac{5\times10^6 \times 10\times10^3}{GJ} = 1.086 \text{ rad}$$

پسماند $\varphi^R = \varphi - \varphi' = 1.5 - 1.086 = 0.41 \text{ rad}$

---

1) $T_y = \frac{1}{2}\pi c^3 \tau_y$

2) $T = \frac{4}{3}T_y\left(1 - \frac{1}{4}\left(\frac{\rho_y}{c}\right)^3\right) \quad T > T_y$

3) $T_u = \frac{4}{3}T_y$

4) $T = \begin{cases} \frac{GJ}{l}\varphi & \varphi \le \varphi_y \\ \frac{4}{3}T_y\left(1 - \frac{1}{4}\left(\frac{\varphi_y}{\varphi}\right)^3\right) & \varphi \geq \varphi_y \end{cases}$

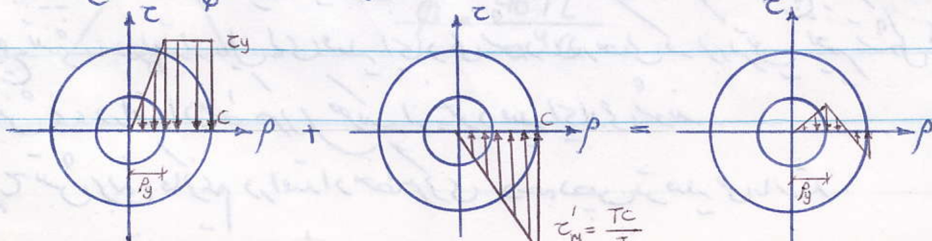
5) $\varphi_y = \frac{T_y l}{GJ}$

6) $\tau_y = G\gamma_y$

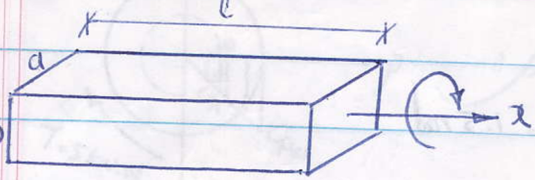
7) $\gamma_y = \frac{\rho_y}{l}\varphi$

8) $\gamma_y = \frac{c}{l}\varphi_y$

9) $\frac{\rho_y}{c} = \frac{\varphi_y}{\varphi} \quad \varphi > \varphi_y$

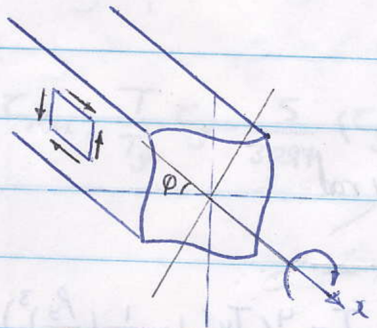


پیچش مقاطع غیر دوار



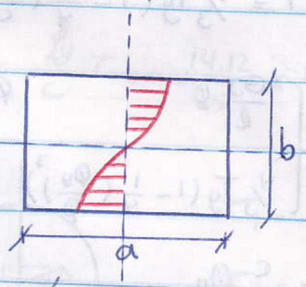
Twist + Warping

چرخش + تابیدگی



کرنش در کنج ها Max است.

اما تنش های برشی در گوشه های مقطع صفر است.



$$\tau_{Max} = \frac{T}{C_1 a b^2} \qquad \left(\tau = \frac{T\rho}{J}\right)$$

$$\varphi = \frac{T.L}{C_2 a b^3 G} \qquad \left(\varphi = \frac{TL}{GJ}\right)$$

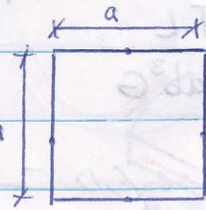
* با ساختن مدل لاستیکی میله برشی، می توان ثابت کرد که هیچ تغییر شکلی، و بنابراین هیچ تنشی، در امتداد یال های میله ایجاد نمی شود، در حالی که بزرگترین تغییر شکل ها و بزرگترین تنش ها، در امتداد خط مرکزی هر یک از وجوه میله ایجاد می شوند.

τ_{Max} تنش برشی ماکزیمم در امتداد خط مرکزی وجه پهن تر میله می باشد.

a/b	C_1	C_2
1	0.208	0.1406
1.2	0.219	0.1661
1.5	0.231	0.1958
2	0.246	0.229
2.5	0.258	0.249
3	0.267	0.263
4	0.282	0.281
5	0.291	0.291
10	0.312	0.312
∞	0.333	0.333

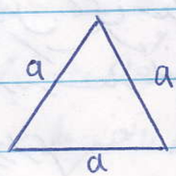
* C_1 و C_2 به نسبت a/b بستگی دارند:

$$a/b \geq 5 \rightarrow C_1 = C_2 = \frac{1}{3}\left(1-0.63\,\frac{b}{a}\right)$$



$$\left\{\begin{array}{l} \tau_{Max} = \dfrac{4.81T}{a^3} \\[2ex] \phi = \dfrac{7.1\,T.L}{Ga^4} \end{array}\right.$$

* دو فرمول τ_{Max} و ϕ تنها در محدوده کشسان معتبرند و فقط مخصوص میله‌های راست با سطح مقطع مستطیلی یکنواخت می‌باشند.



$$\tau_{Max} = \frac{20T}{a^3}$$

$$\phi = \frac{46TL}{a^4G}$$

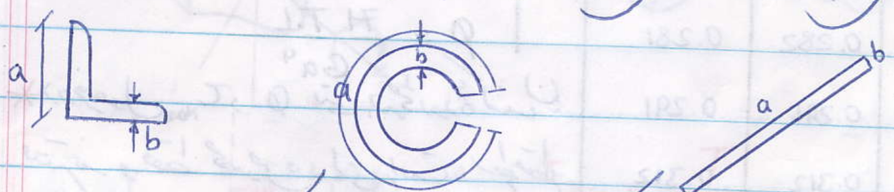
* روابط مقاطع جدار نازک باز و مستطیلی:

$$\begin{cases} \tau_{Max} = \dfrac{T}{\frac{1}{3}ab^2} \\ \phi = \dfrac{T.L}{\frac{1}{3}ab^3G} \end{cases} \qquad a/b > 10$$

در پروفیل که چون نسبت a/b بزرگتر از 10 است داریم:

$C_1 = C_2 \simeq 1/3$

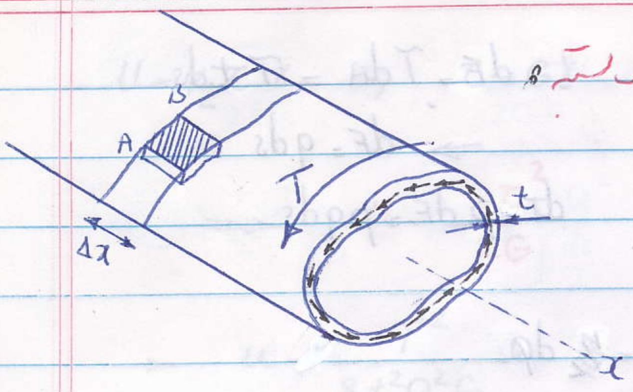
پروفیل های جدار نازک دارای نسبت a/b بزرگتر از 10 است.

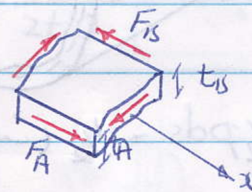


بنابراین برای پروفیل های جدار نازک $C_1 = C_2 = 1/3$ می گیریم.

پروفیل های جدار نازک به دو دسته باز و بسته تقسیم می شوند. روابط پروفیل جدار نازک باز گفته شد. حال به بیان روابط موجود در پروفیل های بسته می پردازیم.

پیچش در محورهای توخالی جدار نازک بسته :





t متغیر است .

$$\begin{cases} F_{A_x} = \tau_A \, t_A \, \Delta x \\ F_{B_x} = \tau_B \, t_B \, \Delta x \end{cases}$$

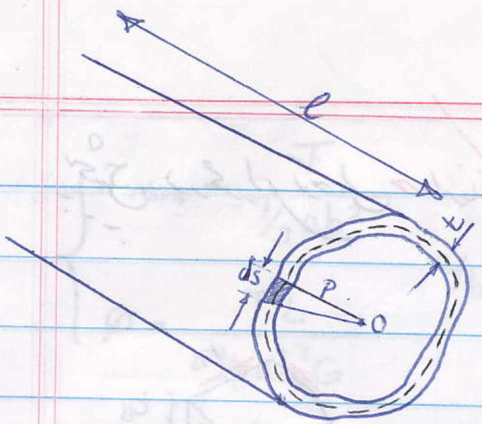
$$\sum F_x = 0 \Longrightarrow F_A - F_B = 0 \Longrightarrow \tau_A . t_A = \tau_B . t_B$$

$$\tau . t = q = cte$$

q را جریان برشی نامند (shear flow)

این q در مکانیک سیالات نیز وجود دارد که نشان دهنده‌ی دبی است می‌باشد

$q = vb$ (v سرعت ، b عرض) . q ثابت باشد با تغییر b سرعت تغییر می‌کند .



$$dF = \tau\, dA = \tau\, t\, ds$$

$$\Rightarrow dF = q\, ds$$

$$dT = p \cdot dF = p\, q\, ds$$

$\frac{1}{2} p\, ds =$ (مساحت مثلث) $= dQ$

$$\Rightarrow dT = 2q \cdot dQ \Rightarrow \oint dT = 2\oint q \cdot dQ$$

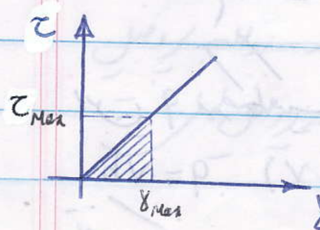
$$\Rightarrow T = 2q \oint dQ$$

$$\longrightarrow T = 2qQ \qquad \tau = \frac{T}{2tQ}$$

$$T = 2qQ \longrightarrow T = \tau t (2Q)$$

Q مساحت شکل خط چین است . τ مقدار میانگین تنش برشی در کل جداره است .

محاسبه زاویه پیچش



U انرژی برشی $= \frac{1}{2} \tau \cdot \gamma$

$$U = \int \tau\, d\gamma$$

$$U = \tfrac{1}{2}\tau.\gamma \quad , \quad \tau = G\gamma$$

$$\Longrightarrow u = \frac{\tau^2}{2G} \quad , \quad \tau = \frac{T}{2tQ}$$

$$\longrightarrow u = \frac{T^2}{8t^2Q^2G}$$

$$\longrightarrow U = \int_V u.dv \qquad dv = t.\ell.ds$$

$$\Longrightarrow U = \oint_S \frac{T^2}{8t^2Q^2G}\, t.\ell ds = \frac{T^2\ell}{8Q^2G}\oint_S \frac{ds}{t}$$

کار نیروی خارجی $W = \tfrac{1}{2}T\phi$

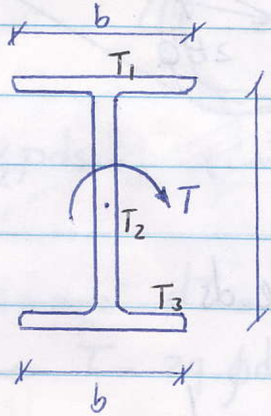
برای یک سیستم بسته (Conservative) :

$$W = U \longrightarrow \tfrac{1}{2}T.\phi = \frac{T^2L}{8GQ^2}\oint\frac{ds}{t}$$

$$\Longrightarrow \phi = \frac{T.L}{G\dfrac{4Q^2}{\oint ds/t}}$$

$$\phi = \frac{TL}{GJ} \qquad J = \frac{4a^2}{\oint \frac{ds}{t}}$$

بحث درمورد مقطع I شکل :



$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

$$\Rightarrow T = 2T_1 + T_2$$

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

$$\frac{T_1 L}{GJ_1} = \frac{T_2 L}{GJ_2} \qquad J_i = \tfrac{1}{3} b_i t_i^{\,3}$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{J_1}{J_2}$$

مقاطع بسته:

1) $\tau = \dfrac{T}{2tQ}$ 2) $q = \dfrac{T}{2Q}$ 3) $q = \tau t$

4) $\varphi = \dfrac{TL}{GJ}$ 5) $J = \dfrac{4Q^2}{\oint \frac{ds}{t}}$

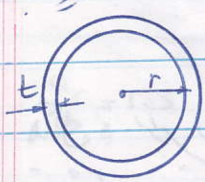
مقاطع باز:

1) $\tau = \dfrac{T}{c_1 a b^2}$

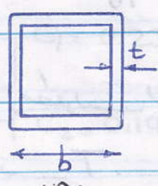
2) $\varphi = \dfrac{T.L}{c_2 a b^3 G}$

مثال: دو مقطع جدار نازک شبه مربع و دایره را تحت پیچش با ضخامت ثابت t مقایسه کنید. در صورتیکه طول دو عضو یکسان باشد نسبت تنش برشی دایره به مربع چقدر است. زاویه پیچش در دایره و مربع چیست؟

(سطح مقطع (حجم مصالح) مربع و دایره را یکسان فرض کنید $(A_1 = A_2)$



(1)



(2)

$Q_1 = \pi r^2$ $Q_2 = b^2$ $T_1 = T_2 = T$

$$\begin{cases} \tau_1 = \dfrac{T}{2tQ} = \dfrac{T}{2t\pi r^2} \\[2ex] \tau_2 = \dfrac{T}{2tQ_2} = \dfrac{T}{2tb^2} \end{cases}$$

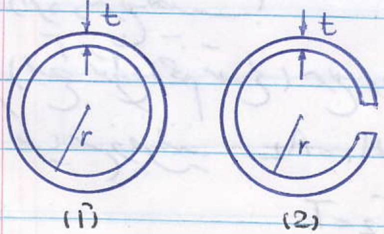
$$A_1 = A_2 \Rightarrow 2\pi r t = 4bt$$

$$\Rightarrow r = \frac{2b}{\pi} \quad \text{و} \quad b = \frac{\pi r}{2}$$

$$\begin{cases} J_1 = \dfrac{4Q_1^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \dfrac{4\pi^2 r^4}{\frac{2\pi r}{t}} = 2\pi r^3 t \\[3ex] J_2 = \dfrac{4Q_2^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \dfrac{4b^4}{4b/t} = b^3 t = \dfrac{\pi^3 r^3}{8} t \end{cases}$$

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{b^2}{\pi r^2} = \frac{\frac{\pi^2 r^2}{4}}{\pi r^2} = \frac{\pi}{4} = 0.785$$

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{J_2}{J_1} = \frac{\frac{\pi^3 r^3 t}{8}}{2\pi r^3 t} = \frac{\pi^2}{16} = 0.617$$

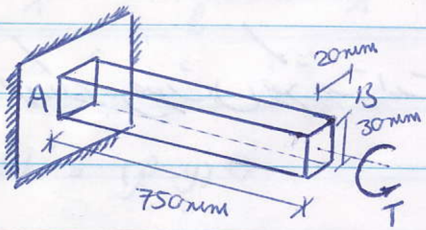


(1) (2)

مثال ۶: برای دو مقطع مقابل مطلوبست نسبت
تنش های برشی برای تورک ثابت T.

$$\tau_1 = \frac{T}{2tQ} = \frac{T}{2t\pi r^2} \qquad \tau_2 = \frac{T}{c_1 ab^2} = \frac{T}{\frac{1}{3}\, 2\pi r t^2}$$

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{\dfrac{T}{2\pi t r^2}}{\dfrac{3T}{2\pi r t^2}} = \frac{t}{3r}$$



مثال: کوپل T باعث چرخش $\varphi_B = 2^\circ$ در AB می‌شود. اگر $G = 80\,GPa$ فرض شود حداکثر تنش برشی در میله را حساب کنید.

$$\tau = \frac{T}{c_1 ab^2} \qquad \varphi = \frac{T.L}{c_2\, ab^3 G}$$

$a = 30\,mm \qquad b = 20\,mm \qquad \varphi_B = 2^\circ = 2 \times \frac{\pi}{180} = 34.9 \times 10^{-3}\,rad$

$$a/b = 1.5 \xrightarrow{\text{از جدول}} \begin{cases} c_1 = 0.231 \\ c_2 = 0.1958 \end{cases}$$

$$\frac{\tau}{\varphi} = \frac{\dfrac{T}{c_1 ab^2}}{\dfrac{T.L}{c_2 ab^3 G}} = \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{Gb}{L} = \frac{0.1958}{0.231} \times \frac{80 \times 10^3 \times 20}{750}$$

$$\Rightarrow \tau_{Max} = 63.1\,Mpa$$

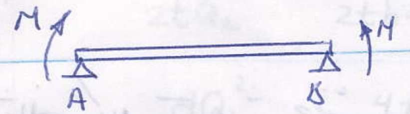
حمید کاظم

فصل چهارم:

«خمش»

خمش خالص: در طول عضو مقدار لنگر ثابت می‌شود.

در خمش خالص برش صفر است.



هرجا در برش صفر شد، لنگر ثابت است.

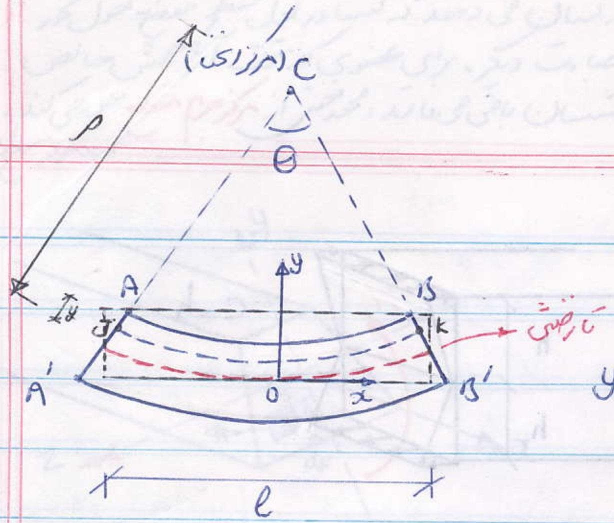
$A_y = B_y = 0$

$M = \int V dx = 0 + C = C$

خمش انحنا تولید می‌کند.

انحنای مثبت: تارهای فوقانی فشرده شده و تارهای تحتانی کشیده می‌شود ← خمش مثبت

انحنای منفی: تارهای فوقانی کشیده شده و تارهای تحتانی فشرده می‌شود ← خمش منفی



تار خنثی: تاری که طولش در اثر خمش ثابت می‌ماند.

فاصله تار JK را از تار خنثی y فرض می‌کنیم.

y: فاصله از تار خنثی

ρ: شعاع انحنای تار خنثی

$L' = (\rho - y)\theta$ طول تار JK

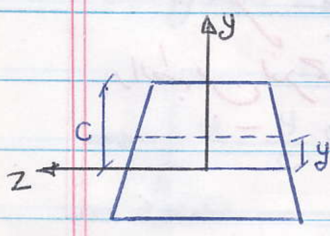
$$\delta = L - L' = (\rho - y)\theta - \rho\theta = -y\theta$$

برای y های مثبت (بالای تار خنثی) δ و ε فشاری است.

$$\varepsilon_x = \frac{\delta}{L} = \frac{-y\theta}{\rho\theta} = \frac{-y}{\rho} = \frac{-1}{\rho}y$$

ε_x (توزیع کرنش در مقطع)

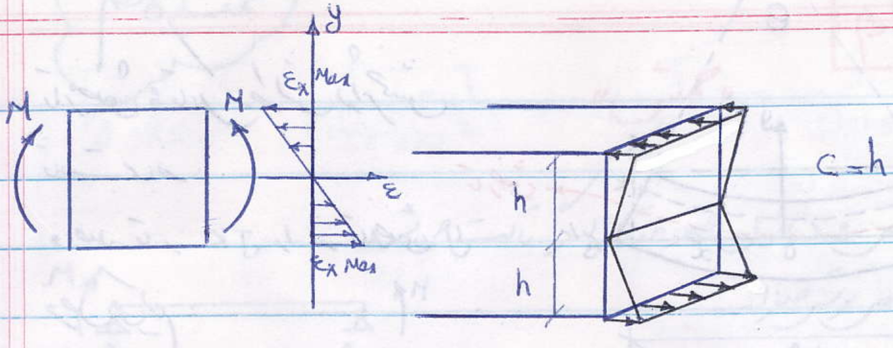
$$\varepsilon_x = \frac{-y}{\rho}$$



مقطع عرضی

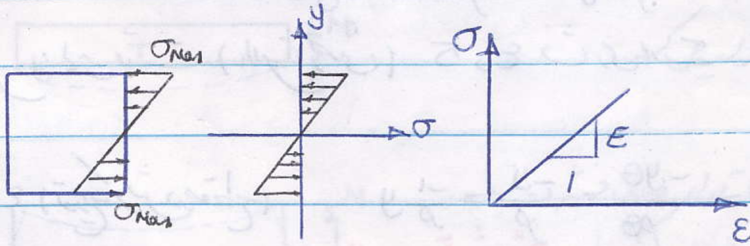
$$\varepsilon_x^{Max} = \frac{-c}{\rho}$$

بنابراین توزیع کرنش در مقطع خطی است.



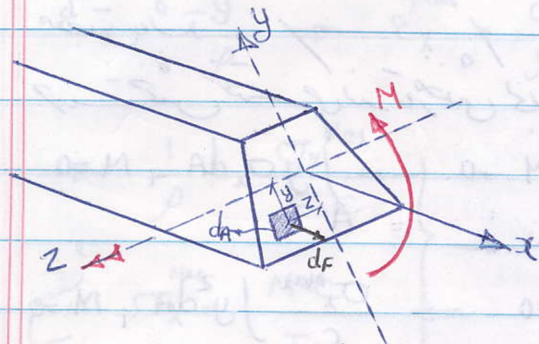
$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \qquad \varepsilon_x = \frac{-y}{\rho} \quad \Longrightarrow \quad \sigma_x = \frac{-y}{\rho} E$$

$$\varepsilon_x = \frac{y}{c}\, \varepsilon_x^{Max} \quad \longrightarrow \quad \sigma_x = \frac{y}{c}\, \sigma_x^{Max}$$



رابطه بین تنش خمشی در تنش نرمال ، محل تار خنثی .

۱) $S_z = \int y\,dA = 0$. این معادله نشان می دهد که گشتاور اول سطح مقطع حول محور خنثی آن باید برابر با صفر باشد. به عبارت دیگر، برای عضوی که تحت اثر خمش خالص قرار دارد و مادامی که تنش ها در ناحیه کشسان باقی می مانند، محور خنثی از مرکز جرم مقطع عبور می کند
به مرکز سطح مقطع



$dF = \sigma_x\, dA$ (کششی)

چون زیر تار خنثی است.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \int_A dF = 0 \Rightarrow \int_A \sigma_x\, dA = 0 \rightarrow \int_A \frac{y}{c}\,\sigma_x^{Max}\, dA = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_x^{Max}}{c}\int_A y\,dA = 0 \Rightarrow \int_A y\,dA = 0$$

$$\bar{y} = \frac{\int y\,dA}{\int dA} \qquad S_x = \sum y_i A_i = \int y\,dA = 0$$

برای یافتن تار خنثی

*محل تار خنثی از مرکز سطح عبور می کند.

$$\sum M_y = 0 \rightarrow \int_A dM_y = 0 \Rightarrow \int_A z\,dF = 0 \Rightarrow \int_A z.\sigma_x.dA = 0$$

$$\Rightarrow \int_A z.\frac{y}{c}\,\sigma_x^{Max}\, dA = 0 \Rightarrow \frac{\sigma_x^{Max}}{c}\int_A z.y\,dA = 0 \Rightarrow I_{zy} = 0$$

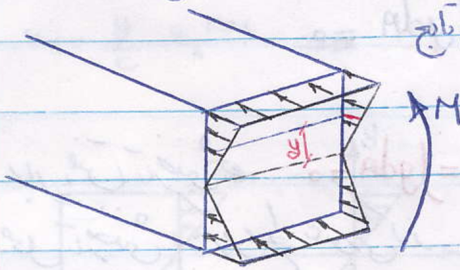
*بنابراین z و y محورهای اصلی می باشند. بنابراین تار خنثی باید یکی از محورهای اصلی

منطبق باشد.
جهت خمش تغییر می‌کند تا خمش کم کند.

$$\sum M_z = 0 \rightarrow \int_A y\,dF + M = 0 \rightarrow \int_A \bar{y}\,\sigma_x\,dA + M = 0$$

$$\rightarrow \int_A y\,\frac{y}{c}\,\sigma_x^{Max}\,dA + M = 0 \Rightarrow \frac{\sigma_x^{Max}}{c}\int y^2\,dA + M = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_x^{Max}}{c}\,I_z + M = 0 \Rightarrow \sigma_x^{Max} = \frac{-M.c}{I_z}$$



* این رابطه فقط در حالتی صادق است که مصالح تابع قانون هوک باشد. در غیر اینصورت باید از رابطه بالا به نحو دیگری استفاده شود.

$$\sigma_x = \frac{-M.y}{I_z}$$

مدول مقطع $S = \frac{I}{c} \Rightarrow \sigma^{Max} = \frac{M}{S} \Rightarrow S = \frac{M_{Max}}{\sigma_{\text{مجاز}}}$

اساس رابطه طراحی براساس خمش

$$\sigma_x = \frac{-M.y}{I_z} \qquad \varepsilon_x = \frac{-y}{\rho} \longrightarrow \sigma_x = E\varepsilon_x$$

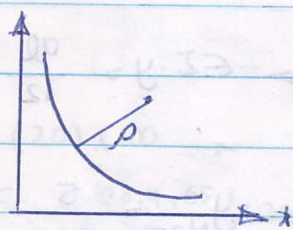
$$\varepsilon_x = \frac{-y}{\rho} \Rightarrow \varepsilon_x^{Max} = \frac{c}{\rho} \rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_x^{Max}}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_x^{Max}}{E.C}$$

قبلاً دیدیم $\sigma_x^{Max} = \frac{M.C}{I}$

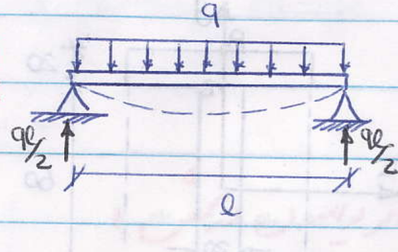
$$\rightarrow \text{لذا } \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (k = 1/\rho)$$

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$



$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} \sim \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\rightarrow \frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} \rightarrow \frac{M}{EI_z} = \frac{d^2y}{dx^2}$$



$$M(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2$$

$$\Rightarrow EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} \Rightarrow EI\frac{dy}{dx} = \frac{ql}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right) - \frac{qx^3}{6} + C_1$$

$$EI \cdot y = \frac{ql}{12}x^3 - \frac{q}{24}x^4 + C_1 x + C_2$$

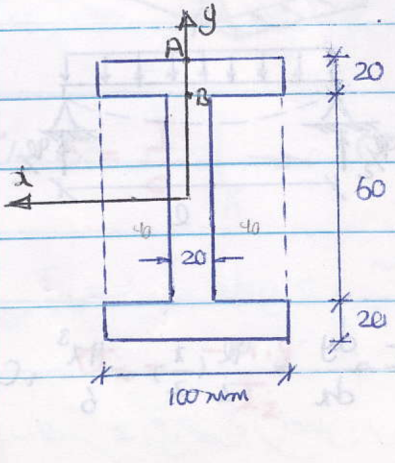
$$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$x = l \rightarrow y = 0 \rightarrow 0 = \frac{ql^4}{12} - \frac{ql^4}{24} + C_1 l \Rightarrow C_1 = \frac{-ql^3}{24}$$

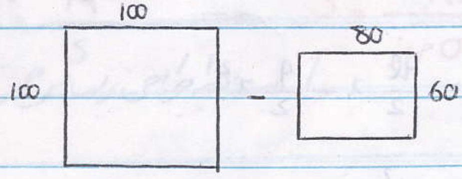
$$\Rightarrow EI \cdot y = \frac{ql}{12}x^3 - \frac{q}{24}x^4 - \frac{ql^3}{24}x$$

$$\Rightarrow y_{Max} = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI} \quad at \quad x = l/2$$

مثال: مقطع تیر I شکل مطابق زیر تحت لنگر خمشی 15 kN.m + قرار می‌گیرد محاسبه کنید جمع نیرویی که به بال فوقانی تیر وارد می‌شود چقدر است.



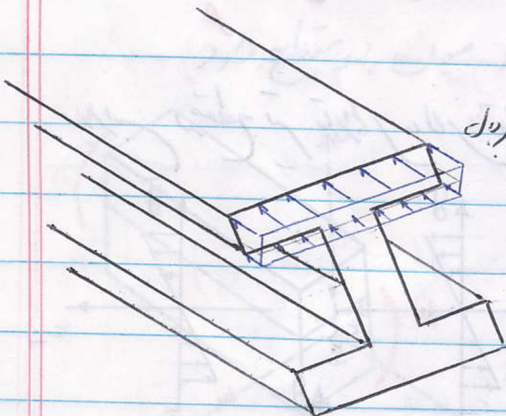
$$\sigma = -\frac{M \cdot y}{I}$$



حل $I = \frac{100^4}{12} - \frac{80 \times 60^3}{12} = 6.89 \times 10^6 \ mm^4$

$$\sigma_A = \frac{-M y_A}{I} = -\frac{15 \times 10^6 \times 50}{6.89 \times 10^6} = -108.9 \ Mpa$$

$$\sigma_B = \frac{3}{5} \sigma_A = -65.3 \ Mpa$$

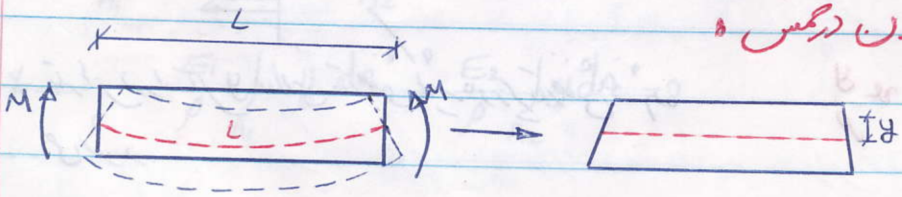


$$\frac{\sigma_A + \sigma_B}{2} (20) \times 100 \longrightarrow$$

نیروی فشاری وارد بر بال $F = -\frac{108.9 + 65.3}{2} (20)(100)$

$$= -174.2 \ kN$$

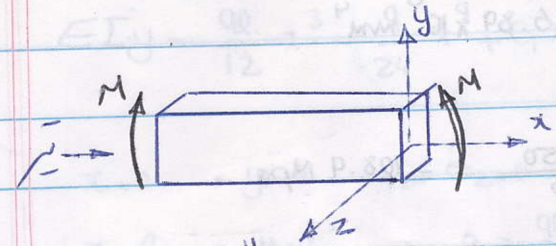
۵۰. اثر پواسون در خمش:



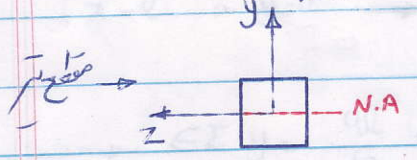
$$\varepsilon_x = \frac{-y}{\rho}$$

نکته 8: روابط $\varepsilon_z = \varepsilon_y = \nu \frac{y}{\rho}$ نشان می‌دهند که اجزای واقع در بالای سطح خنثی $(y>0)$ در هر دو جهت y و z انبساط پیدا می‌کند. (کششی). درحالیکه اجزای زیر تار خنثی $(y<0)$ منقبض می‌گردند.

مقطع تیر به صورت مقابل است.



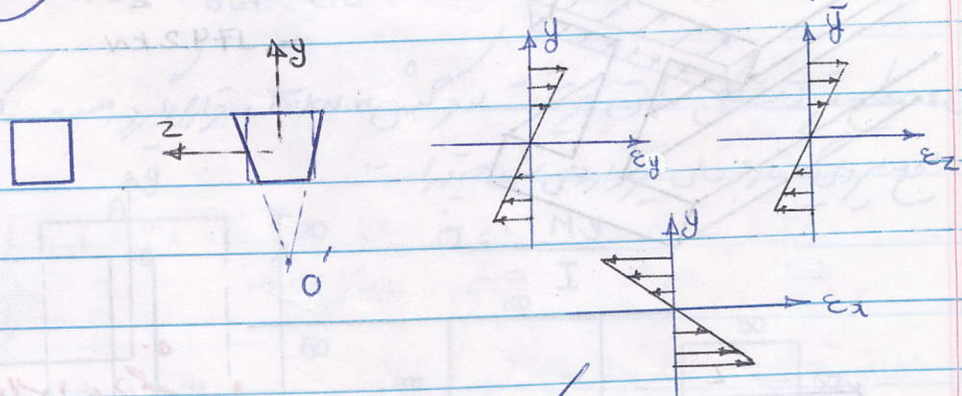
$$\nu = \left| \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \right| \longrightarrow \varepsilon_y = -\nu . \varepsilon_x$$



$$\varepsilon_z = -\nu . \varepsilon_x$$

$$\Longrightarrow \varepsilon_z = \nu \frac{y}{\rho}$$

بنابراین در مقطع تیر تارهای بالای تار خنثی کششی و زیر تار خنثی فشاری است.

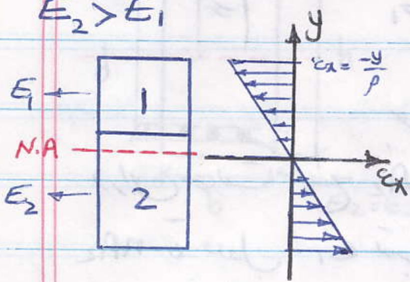


$$\varepsilon_y = \nu \frac{y}{\rho}$$

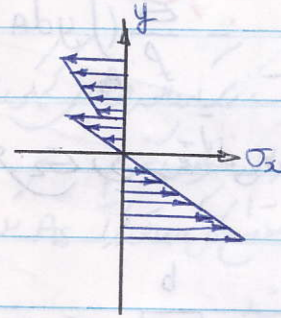
* تارهای در راستای y بالای تار خنثی کشیده و زیر تار خنثی فشرده می‌شود.

خمش مقاطع مرکب:

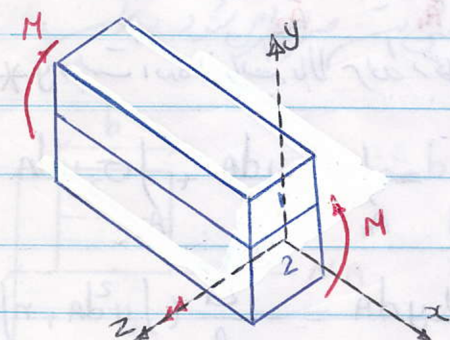
$E_2 > E_1$



$$\sigma_x = E\,\varepsilon_x$$



دراینجا $\sigma_x = \frac{y}{c}\sigma_{Max}$ صادق نیست. چون دو مقطع دارد



$$\sum F_x = 0$$

$$\rightarrow \int \sigma_x \, dA = 0$$

$$\rightarrow \int_{A_1} \sigma_x \, dA + \int_{A_2} \sigma_x \, dA = 0$$

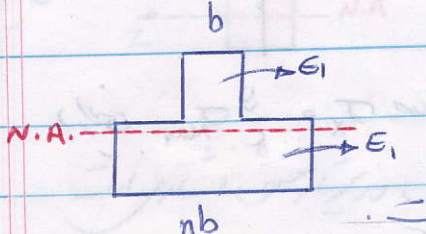
$$\rightarrow \int_{A_1} -E_1 \frac{y}{\rho} \, dA + \int_{A_2} -E_2 \frac{y}{\rho} \, dA = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{E_1}{\rho}\int_{A_1} y \, dA - \frac{E_2}{\rho}\int_{A_2} y \, dA = 0$$

فرض می کنیم $\frac{E_2}{E_1}=n$

$$\Rightarrow -\frac{E_1}{\rho}\left(\int_{A_1} y\,dA + \int_{A_2} ny\,dA\right)=0$$

در این حالت مقطع A_2 را که دارای مدول الاستیک E_2 بود به مقطعی معادل nA_2 با مدول E_1 تبدیل کردیم.



$$-\frac{E_1}{\rho}\left(\int_{A_1} y\,dA + \int_{A_2} y\,d(nA_1)\right)=0$$

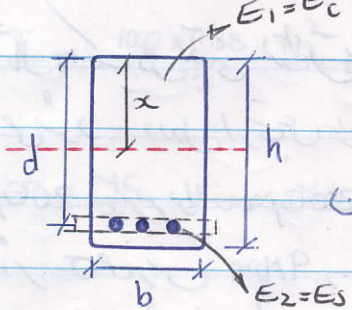
* y بدست آمده از رابطه بالا مربوط به محل تار خنثی است.

$$\sum M_z=0 \rightarrow M=\int \sigma_x y\,dA = \int_{A_1} \sigma_x y\,dA + \int_{A_2} \sigma_x y\,dA$$

$$\rightarrow M=\int_{A_1} -\frac{E_1 y}{\rho} y\,dA + \int_{A_2} -\frac{E_2 y}{\rho} y\,dA = -\frac{E_1}{\rho}\left(\int_{A_1} y^2 dA + n\int_{A_2} y^2 dA\right)$$

$$= -\frac{E_1}{\rho}\left(I_1+nI_2\right) \qquad M=-\frac{E_1}{\rho}\underbrace{(I_1+nI_2)}_{I\ \text{کل}}$$

بنابراین می توان فهمید که y نباید n برابر شود و b باید n برابر شود.



تیر بتن مسلح:

قسمت زیر آرماتور فولادی کمکی از لحاظ زه‌ای ندارد. بنابراین آن را در نظر نمی‌گیرم.

اگر سطح مقطع کل آرماتورها را As بگیریم مقطع معادل n.As می‌باشد.

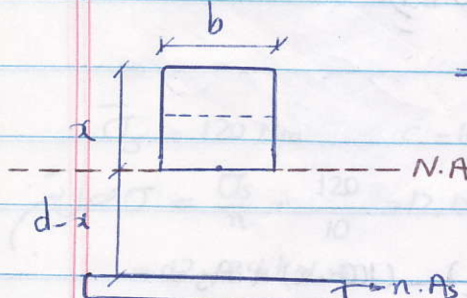
$$\frac{E_s}{E_c}=10=n$$

در محاسبهٔ بارهای خمشی مقطع بتن مسلح از قسمت کششی بتن صرف‌نظر می‌شود. بنابراین:

$$S_x=\sum y_i A_i=0$$

$$\Longrightarrow b.x.\frac{x}{2}-n.A_s(d-x)=0$$

$$\frac{b}{2}x^2+nA_s x-nA_s d=0$$

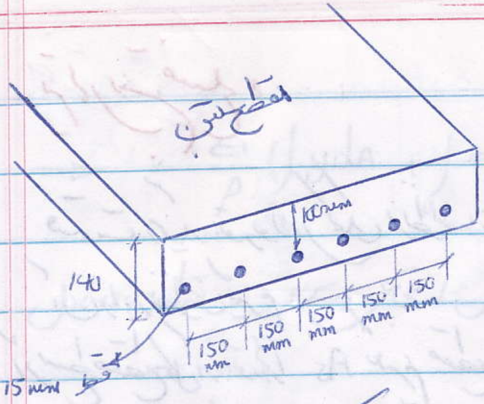


* چون بتن کشش را تحمل نمی‌کند، در قسمت کششی آرماتور فولادی قرار می‌دهند.

نکته: اگر مقطع مرکب از دو مقطع 1 و 2 تشکیل شده باشد که $\frac{E_2}{E_1}$ برابر n شود، مقطع 2 را در جهت عمود بر محور n برابر می‌کنیم تا سطح 2، n برابر شود. حال فرض می‌کنیم کل مقطع دارای مدول ارتجاعی E_1 است. در این حالت برای مقطع جدید σ_1 را بدست می‌آوریم. چون طبق رابطهٔ $\sigma=E\varepsilon$ پس:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1}=\frac{E_2}{E_1}=n$$

مثال ۶: یک دال بتنی مطابق شکل مسلح می‌شود. مدول ارتجاعی برای بتن 20Gpa و برای فولاد 200Gpa می‌باشد. اگر σ مجاز بتن 9Mpa و σ مجاز فولاد 120Mpa فرض شود، مطلوبست حداکثر گشتاور مثبتی که می‌توان به 1m عرض این دال اعمال کرد.

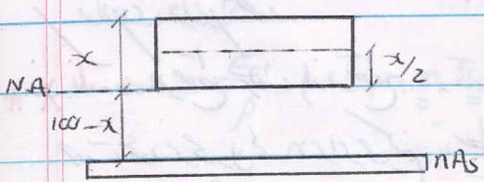


$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{200}{20} = 10$$

$$\text{تعداد میلگردهای دال در عرض } 1m = \frac{1}{0.15} = 6.667 \text{ میلگرد}$$

$$A_s = 6.667 \times \pi \times \frac{15^2}{4} = 1.178 \times 10^3 \ mm^2$$

$$nA_s = 10\,(1.178 \times 10^3) = 1.178 \times 10^4 \ mm^2$$



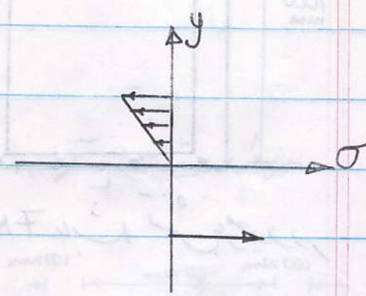
$$1000\,x\,(x/2) - (100 - x)\,n.A_s = 0$$

$$\rightarrow x = 38.17 mm$$

$$\rightarrow 100 - x = 61.83 mm$$

$$I = \frac{1000\times(38.17)^3}{3} + 1.178\times10^4\times(61.83)^2 + I_{\text{فولاد}} = 63.57\times10^6\ mm^4$$

$$\sigma = \frac{MC}{I} \longrightarrow M = \sigma \cdot \frac{I}{C}$$



۱) کنترل مقطع براساس تنش فشاری مجاز بتن

$$M_{Max} = \bar{\sigma}_c \cdot I/_C = 9\times\frac{63.57\times10^6}{38.17}\times10^{-6} = 14.99\ kN.m$$

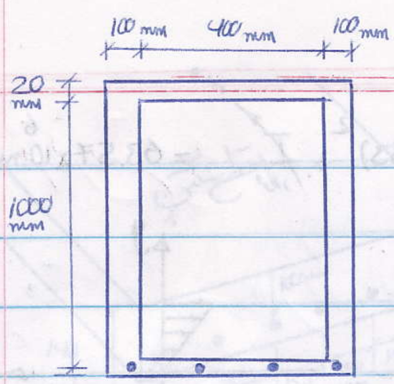
۲) کنترل مقطع براساس تنش مجاز فولاد

$\bar{\sigma}_s = 120\ Mpa \qquad C = 100 - x = 61.83\ mm$

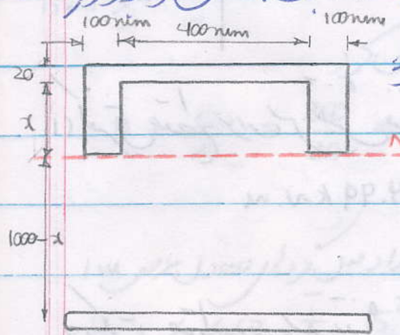
معادل بتن $\sigma = \frac{\sigma_s}{n} = \frac{120}{10} = 12\ Mpa \longrightarrow M_{Max} = \bar{\sigma} \cdot \frac{I}{C} = 12\times\frac{63.57\times10^6}{61.83}\times10^{-6} =$

$= 12.34\ kN.m$

$$M_{Max} = Min\,(14.99,\ 12.34) = 12.34$$



مثال ؛ مقطع تیر بتن مسلح جعبه ای شکل به صورت مقابل می باشد. سطح مقطع مجموع میلگردهای کششی برابر $3600\ mm^2$ و $n=10$ فرض می گردد. هرگاه حداکثر تنش فشاری ناشی از خمش در بتن مساوی $7\ N/mm^2$ باشد تنش موجود در میلگردهای کششی و لنگر خمشی وارد بر مقطع را محاسبه کنید.



$A_s = 3600\ mm^2 \rightarrow nA_s = 36000\ mm^2$

$S_x = 0 \rightarrow \sum y_i A_i = 0$

$(x+10)(20\times600) + \frac{x}{2}(100x)\times2 - (1000-x)(36000) = 0 \rightarrow x = 405.29\ m$

$$\rightarrow I = \frac{600(20)^3}{12} + (415.29)^2(20\times600) + 2\left(\frac{100(405.29)^3}{3}\right) + (594.71)^2(36000)$$

$$\rightarrow I = 4\times10^5 + 20695.89\times10^5 + 44381.95\times10^5 + 127324.79\times10^5$$

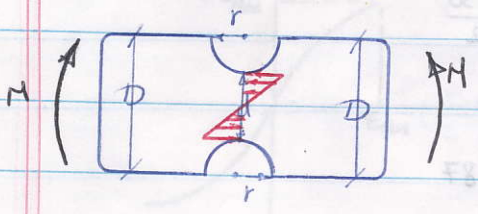
$$\Rightarrow I = 192406.63\times10^5\ mm^4$$

$(\sigma_{all})_c = 7\ N/mm^2 \rightarrow \sigma_s = 70\ N/mm^2$

بتن $\quad 7\ \frac{N}{mm^2} = \frac{M(425.29)mm}{192406.63\times10^5 mm^4} \Rightarrow M = 316.69\ kN.m$

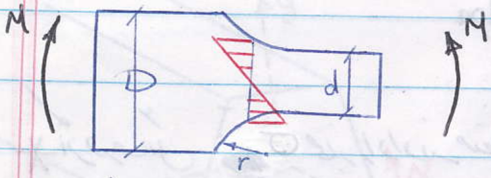
فولاد $\quad 70\ \frac{N}{mm^2} = \frac{M(594.71)mm}{192406.63\times10^5 mm^4} \Rightarrow M = 2264.7\ kN.m$

تمرکز تنش در خمش :

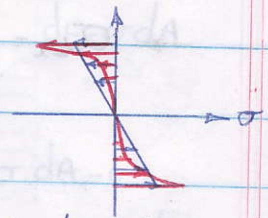


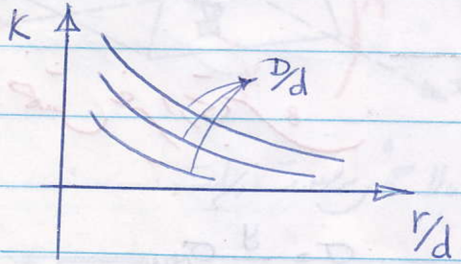
$\sigma_{Max} = K\sigma_{avg}$

$\sigma_{avg} = M\frac{C}{I}$ → مربوط به مقطع ضعیف‌تر

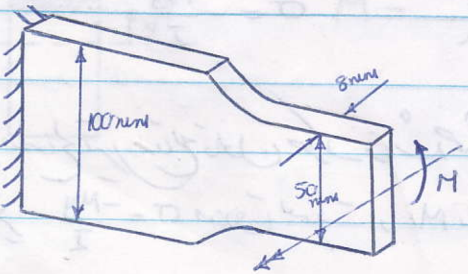


$\sigma_{Max} = K\sigma_{avg}$

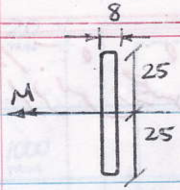




البته سطح دو نمودار باید برابر باشد که شکستگی فقط توزیع تنش را بهم می‌زند.



مثال ۶: اگر $M = 350\,N.m$ باشد مطلوبست حداکثر تنش وارد شده روی کار اگر $r = 5\,mm$ باشد:



$$\sigma_{avg} = \frac{Mc}{I} = \frac{350\times10^{3}\times25}{\frac{8\times50^{3}}{12}} = 105\ Mpa$$

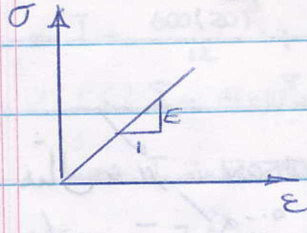
$$\sigma_{Max} = K\,\sigma_{avg}$$

$$D/d = 2 \quad r/d = 0.1 \longrightarrow K = 1.87$$

$$\longrightarrow \sigma_{Max} = 1.87 \times 105 = 196\ Mpa$$

* اگر در سؤال تنش مجاز را دادند منظور σ_{Max} است.

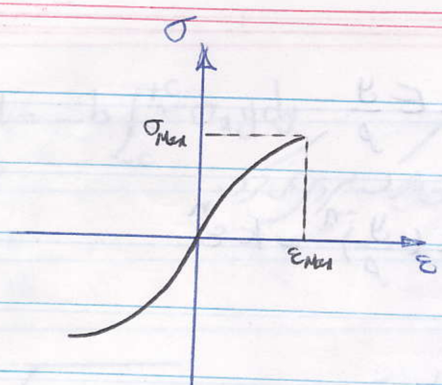
خمش غیر ارتجاعی

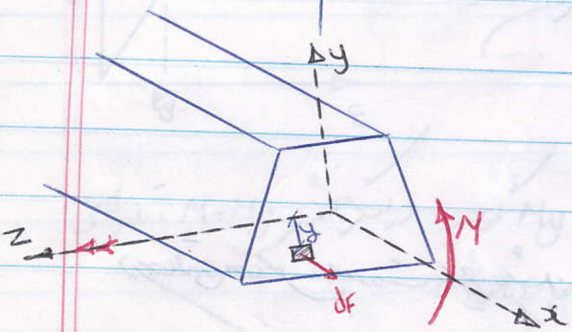


$$\sigma = E.\varepsilon \qquad \sigma = \frac{y}{c}\,\sigma_{Max}$$

$$\sigma = -\frac{My}{I}$$

اگر مصالح تیر تابع قانون هوک نباشد خمش ایجاد شده غیر ارتجاعی است.
و دیگر $\sigma = \frac{-My}{I}$ صدق نمی‌کند، و M به صورت زیر بدست می‌آید.





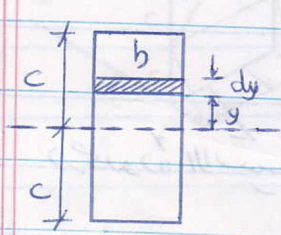
$$\Sigma M_z = 0 \qquad dF = \sigma\, dA$$

$$M + \int y\, dF = 0$$

$$\Rightarrow M + \int y\sigma \cdot dA = 0$$

$$\rightarrow M = -\int y\sigma \cdot dA$$

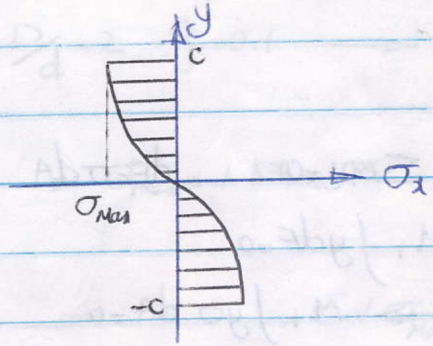
برای مستطیل زیر با توجه به نمودار σ ـ ε بالا خمش به صورت زیر است.



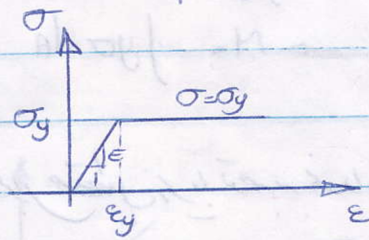
$$M = -\int y\sigma\, dA = -b\int_{-c}^{+c} \sigma \cdot y \cdot dy$$

برای الاستیک خطی $\longrightarrow \sigma_x = -E\dfrac{y}{\rho}$

در حالت کلی $\longrightarrow \sigma_x = K\left(\dfrac{y}{\rho}\right)^n = K\varepsilon^n$



در حالتی خاص به صورت زیر می باشد.



در محدوده الاستیک خطی:

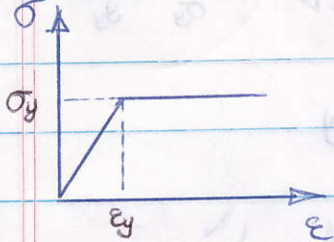
$$\sigma_{Max} = \frac{-Mc}{I}$$

$$\sigma = \frac{-My}{I}$$

در جلسه قبل برای مستطیل گفتیم: $M = -b\int_{-c}^{+c} \sigma_x y\, dy$

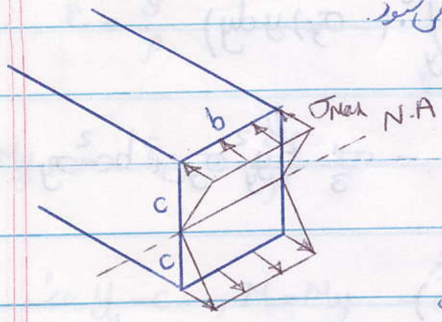
که در آن از قانون هوک پیروی می کرد.

رفتار الاستو - پلاستیک در خمش:



چون تنش در دورترین تارها بیشتر است بنابراین این تارها زودتر جاری می شوند.

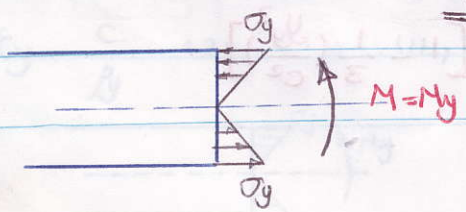
لنگری که اولین جاری شدن را دارد M_y گویند. در لنگر خمشی $M=M_y$ ، تارهای فوقانی (دورترین تار نسبت به تار خنثی) جاری می شود.



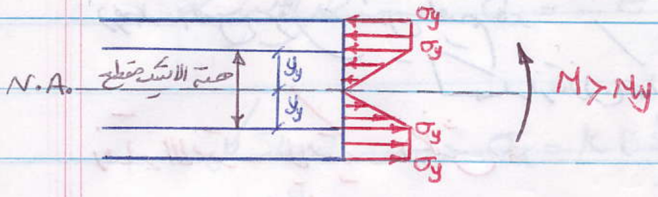
1) $M=M_y$: $\sigma_{Max} = \sigma_y = \dfrac{M_y \cdot c}{I}$

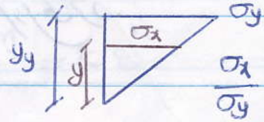
شکل $I = \dfrac{b(2c)^3}{12} = \dfrac{2}{3} bc^3$

$\xRightarrow{\text{مستطیل}} M_y = \dfrac{2}{3} bc^2 \sigma_y$



$M > M_y$ 12





$$\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{y}{y_y}$$

$$M = -b\int_{-c}^{c} \sigma_x y\,dy = -2b\int_{0}^{c} \sigma_x y\,dy$$

$$= -2b\left(\int_0^{y_y} \sigma_x y\,dy + \int_{y_y}^{c} \sigma_x \cdot y\,dy\right)$$

$$= -2b\left(\int_0^{y_y} \left(\frac{-y}{y_y}\sigma_y\right) y\,dy + \int_{y_y}^{c} (-\sigma_y)\,y\,dy\right)$$

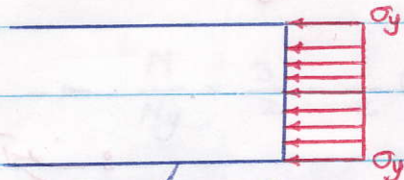
$$= \frac{2}{3} b y_y^2 \sigma_y + bc^2\sigma_y - b y_y^2 \sigma_y = \frac{-1}{3} b y_y^2 \sigma_y + bc^2 \sigma_y$$

$$\Longrightarrow M = bc^2\sigma_y\left(1 - \frac{1}{3}\frac{y_y^2}{c^2}\right).$$

$$\Longrightarrow M = \frac{3}{2} M_y \left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{y_y^2}{c^2}\right)\right]$$

3) $M = M_p$

M_p حداکثر لنگری که می‌توان به مقطع وارد کرد و در این صورت مقطع دچار گسیختگی می‌گردد.



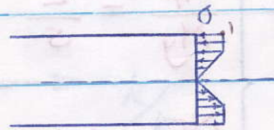
$y_y = 0$

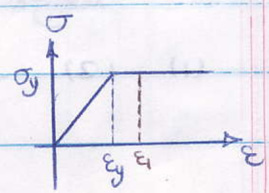
$M_p = \frac{3}{2} M_y$

* در حالت کلی $M_p = k M_y$ است که k را shape factor گویند و برای مستطیل $3/2$ است.

$\varepsilon = \frac{y}{\rho} \longrightarrow$ (منفی را برای رسم نیست)

$M > M_y \longrightarrow \varepsilon_y = \frac{y_y}{\rho}$ (1)

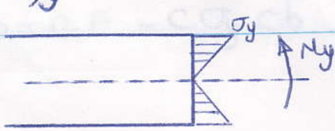




ρ_y شعاع انحنای معادل مقطع جاری شده وقتی که $M = M_y$, $y_y = c$ باشد.

$M = M_y ; \varepsilon_y = \frac{c}{\rho_y}$ (2)

(1) , (2) $\longrightarrow \frac{y_y}{\rho} = \frac{c}{\rho_y} \longrightarrow \frac{y_y}{c} = \frac{\rho}{\rho_y}$



$\rho > \rho_y$ می باشد.

$$\frac{y_y}{c} = \frac{\rho}{\rho_y} \longrightarrow M = \frac{3}{2} M_y \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\rho}{\rho_y} \right)^2 \right]$$

تعریف:

(1) $\frac{M_p}{\sigma_y} = Z$ مدول پلاستیک مقطع

$\frac{M}{\sigma} = S$ مدول الاستیک مقطع $\longrightarrow \frac{M_y}{\sigma_y} = S$ (2) $\left(\frac{I}{c} = \frac{M}{\sigma} = S \right)$

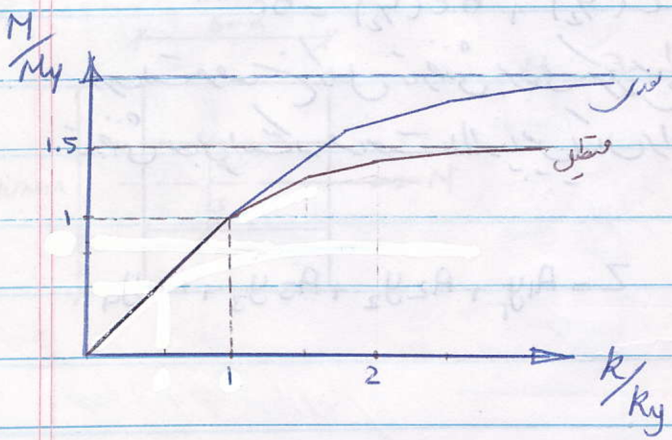
$$(1), (2) \longrightarrow \begin{cases} \frac{M_p}{M_y} = \frac{Z}{S} \\ \frac{M_p}{M_y} = k \end{cases} \longrightarrow \frac{Z}{S} = k \rightarrow$$ ضریب شکل سطح مقطع

K برای مقطع I شکل 1.15 و برای دایره 1.7 می باشد.

$\frac{1}{\rho} = k$ اگر $\frac{1}{\rho_y} = k_y$

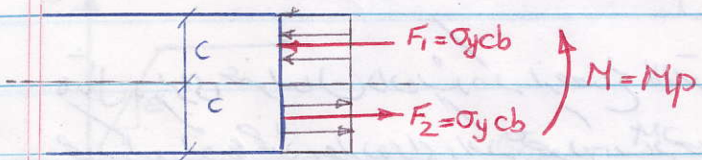
$\longrightarrow M = \frac{3}{2} M_y \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{k_y}{k} \right)^2 \right]$

$\longrightarrow \frac{M}{M_y} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{k_y}{k} \right)^2$



مقطع مستطیل 8

در حالت مومسان کامل .



$F_1 = F_2 = F$

$M_p = c.F = c\sigma_y cb = bc^2\sigma_y$

حالت کلی :

$F_1 = b_1 c_1 \sigma_y \quad F_2 = b_2 c_2 \sigma_y \quad (F_1 = A_1 \sigma_y \,,\; F_2 = A_2 \sigma_y)$

$\rightarrow M_p = F_1 y_1 + F_2 y_2 = b_1 c_1 y_1 \sigma_y + b_2 c_2 y_2 \sigma_y = A_1 y_1 \sigma_y + A_2 y_2 \sigma_y$

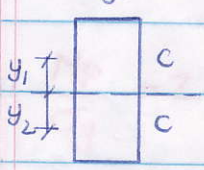
$\rightarrow M_p = \sigma_y (A_1 y_1 + A_2 y_2) \rightarrow Z = A_1 y_1 + A_2 y_2$

$$M_p = Z \sigma_y \Rightarrow Z = bc^2$$

در حالت کلی :

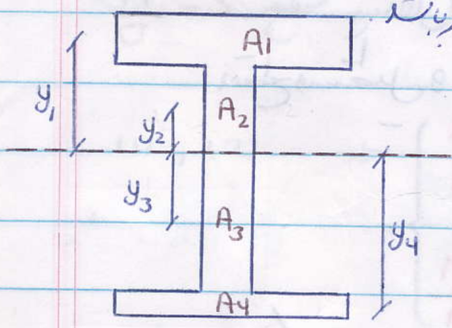
$$Z = A_1 y_1 + A_2 y_2$$

$$\rightarrow M_p = (A_1 y_1 + A_2 y_2)\, \sigma_y$$



$$Z = b.c\,(c/2) + b.c\,(c/2) = bc^2$$

در حالت مومسان کامل تار خنثی در روی مرکز سطح نیست بلکه تار خنثی جایی است که سطح بالا و پایین آن برابر باشد.



$$Z = A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 + A_4 y_4$$

مثال : برای عضو نشان داده شده که از مصالح الاستو - پلاستیک تشکیل شده است محاسبه کنید لنگر خمشی وارده را برای اینکه عضو در آستانه جاری شدن قرار گیرد. مطلق لنگری که هسته الاستیکی برابر است 6mm در مقطع این عضو به وجود آید؟

$\sigma_y = 300\,\text{Mpa} \quad E = 200\,\text{Gpa}$

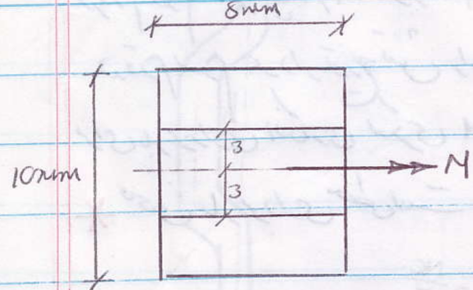
$$\sigma_y = 300\ Mpa \qquad E = 200\ Gpa$$

$$M \geq M_y \longrightarrow M = \frac{3}{2} M_y \left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{y_y}{c}\right)^2\right]$$

$$b = 8\ mm \qquad c = 5\ mm$$

$$M_y = \frac{2}{3} b c^2 \sigma_y = \frac{2}{3}\, 8\, (5)^2 \times 300 = 40\ N.m$$

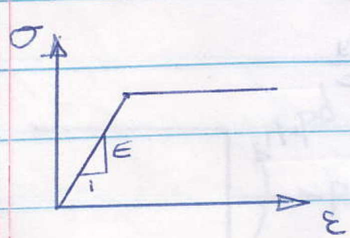
$$2y_y = 6\ mm \longrightarrow y_y = 3\ mm$$



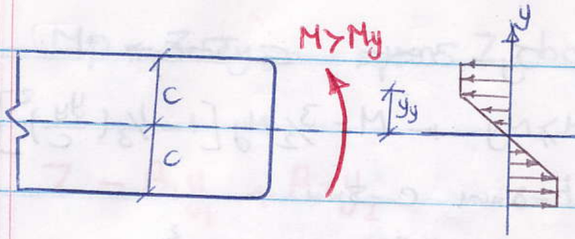
$$M = \frac{3}{2} \times 40 \left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^2\right] = 52.8\ N.m$$

تنش های باقیمانده در خمش 8

مدل ما به صورت زیر می باشد.



$$\sigma_{Max} = \frac{Mc}{I} \qquad \sigma_y = \frac{M_y c}{I}$$



نمودار توزیع تنش در بارگذاری :

$$M_y = \frac{2}{3} b c^2 \sigma_y$$

در قدم اول My را حساب می کنیم.

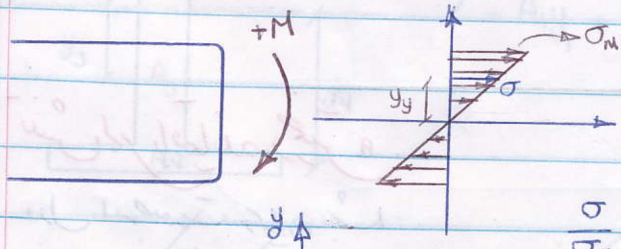
$$M = \frac{3}{2} M_y \left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{y_y}{c}\right)^2\right]$$

در قدم دوم اگر M>My بود هسته الاستیک را رسم می کنیم.

در قدم سوم نمودار توزیع تنش را رسم می کنیم.

برای باربرداری انگاری لنگری M− به مقطع وارد می کنیم.

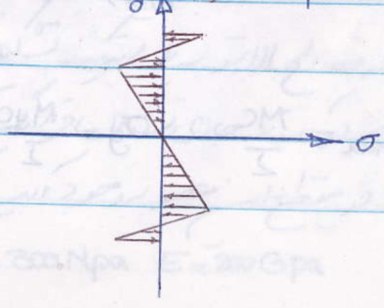
* منحنی باربرداری خطی است. پس توزیع تنش در باربرداری خطی است.



$$\sigma_M = \frac{Mc}{I}$$

نمودار توزیع تنش در باربرداری :

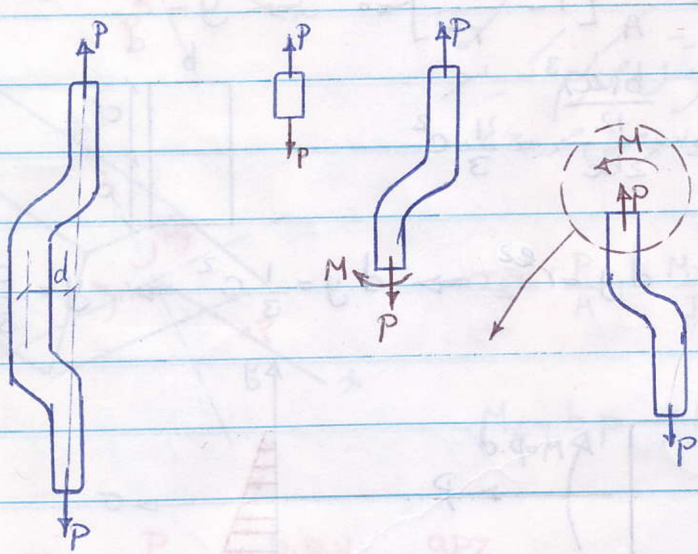
$$\frac{\sigma}{\sigma_m} = \frac{y_y}{c}$$

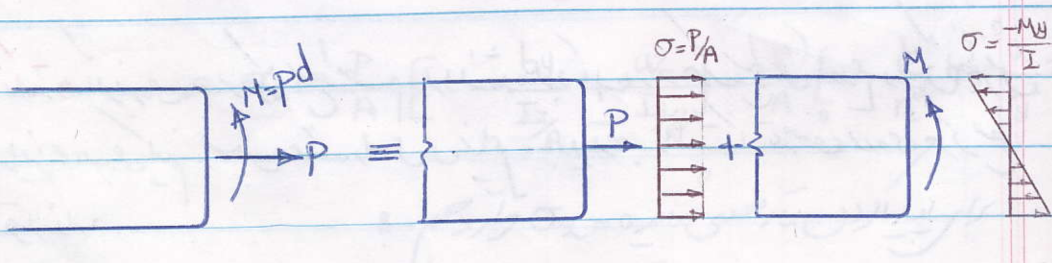


بارگذاری خارج از محور

در عمل بار همیشه از مرکز مقطع وارد نمی‌شود.

دو نوع خروج از مرکزیت داریم. ۱) خروج از مرکزیت بار ۲) خروج از مرکزیت هندسی.



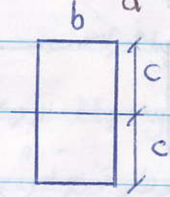


$$\sigma = \frac{P}{A} - \frac{My}{I} = \frac{P}{A}\left[1 - \frac{d.y}{I/A}\right] \qquad I/A = r^2$$

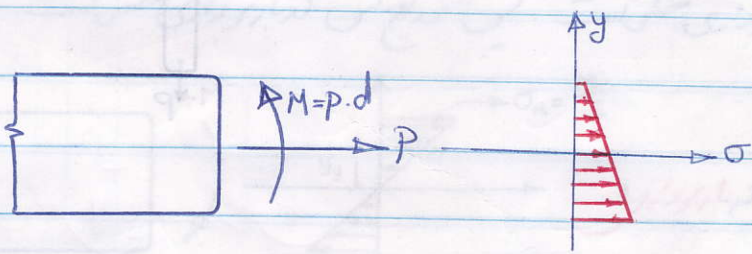
برای پیدا کردن تار خنثی باید $\sigma=0$ باشد.

$$\sigma = 0 \rightarrow \frac{P}{A}\left[1 - \frac{d.y}{r^2}\right] = 0 \Rightarrow y = \frac{r^2}{d}$$

$$r^2 = \frac{I}{A} = \frac{\frac{b(2c)^3}{12}}{2bc} = \frac{1}{3}c^2$$

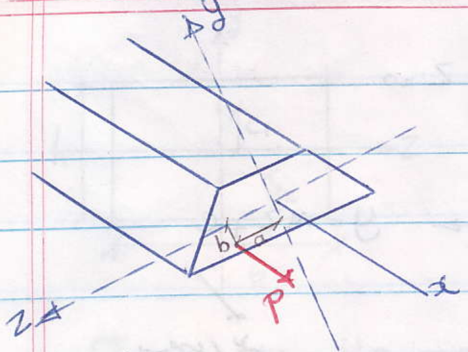


$$\sigma = 0 \Rightarrow d.y = r^2 \Rightarrow d.y = \frac{1}{3}c^2 \Rightarrow y = \frac{c^2}{3d}$$

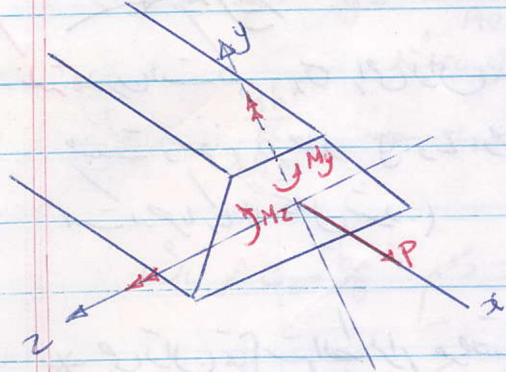


نکته 8: اگر نیروی P بر مرکز سطح جسم وارد نشده بود آن را به مرکز سطح می آوریم و لنگر نیرو را نیز محاسبه می کنیم. سپس مسئله را حل می نماییم. باید توجه داشت که تار خنثی بر روی مرکز سطح قرار ندارد.

بارگذاری خارج از محور:



می‌خواهیم معادله تنش را برای مقطع مقابل بنویسیم.



بار را به مرکز ثقل منتقل می‌کنیم. یک لنگر حول محور y و یک لنگر حول محور z نیز بوجود می‌آید.

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z \cdot y}{I_z} + \frac{M_y \cdot z}{I_y}$$

$$M_z = b.p \qquad M_y = a.p$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{b.p.y}{I_z} + \frac{apz}{I_y}$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{P}{A}\left[1 - \frac{by}{I_z/A} + \frac{az}{I_y/A}\right] = \frac{P}{A}\left[1 - \frac{b}{r_z^2}y + \frac{a}{r_y^2}z\right]$$

برای پیدا کردن تار خنثی باید $\sigma_x = 0$ قرار دهیم:

$$\sigma_x = 0 \Rightarrow r - \frac{b}{r_z^2} y + \frac{a}{r_y^2} z = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{a}{b} \frac{I_z}{I_y} z + \frac{r_z^2}{b} \longrightarrow y = mz + c$$

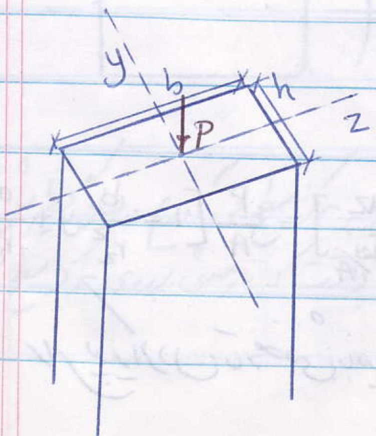
به محور خنثی

نکته: در حالت کلی σ_x را می‌توان به صورت زیر نوشت. در این حالت علامت‌های مثبت و منفی در خود y و z وجود دارد و باید لحاظ شود (البته بهترین راه این است که هر بار کاملاً تحلیل شود.)

$$\sigma_x = \frac{P}{A} + \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

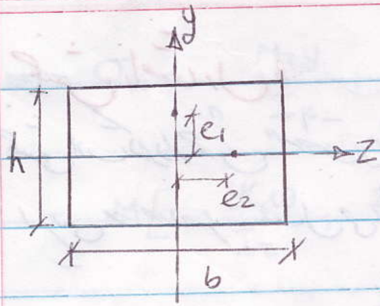
* می‌توان تمام شرایط برای موقعیت نیروی P را بررسی نمود.

مثال: میزان خروج از مرکزیت P چقدر باشد که در ستون به کشش نیفتد؟



در این حالت تار خنثی در لبه‌ی نهایت قرار دارد چون صفحه تنش با صفحه مقطع ستون در لبه‌ی نهایت همدیگر را قطع می‌کند. محل P را به جایی می‌بریم تا لبه تار خنثی ب

که در کشش نیفتد.



$$I = \frac{bh^3}{12} \quad , \quad A = bh$$

$$\sigma_x = \frac{-P}{A} - \frac{P \cdot e_1 y}{I}$$

$$\sigma_x = 0 \Rightarrow y = -\frac{I}{Ae_1}$$

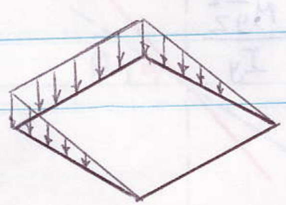
برای اینکه تار پایینی دچار کشش نباشد $y = -h/2$ باشد.

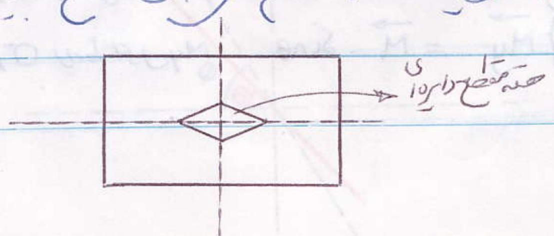
$$-h/2 = -\frac{\frac{bh^3}{12}}{bh\,e_1} \Rightarrow e_1 = h/6$$

به همین ترتیب اگر P را روی محور z حرکت دهیم $e_2 = b/6$ می باشد.

بنابراین مکان هندسی نقاطی که بار محوری فشاری در آن نقاط قرار می‌گیرند تا مقطع دچار کشش نیفتد لوزی با اقطار $b/3$ و $h/3$ است.

* این هسته در ستون های بتن مسلح بسیار مهم است که ستون به کشش نیفتد.

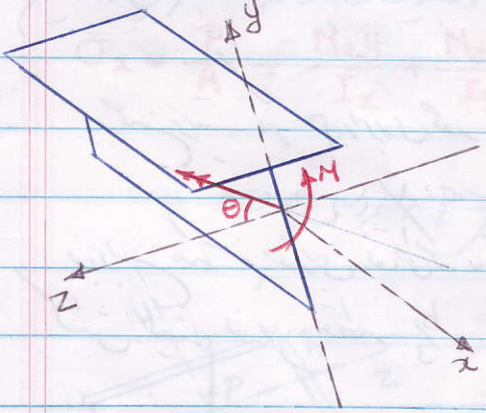


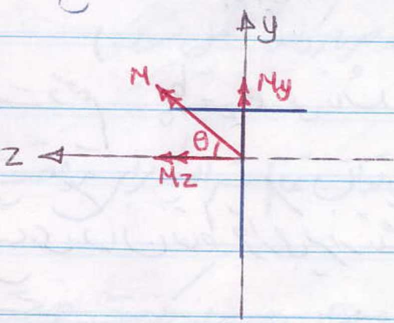


خمش نامتقارن:

خمشی است که بردار خمش منطبق بر محورهای اصلی مقطع نباشد. در این حالت ممان اینرسی حاصلضرب فعال می شود.

۱) محورهای اصلی مقطع را مشخص می کنیم. ۲) بردار خمش را بر این ها تجزیه می کنیم. ۳) از فرمول $\sigma = \frac{My}{I}$ برای هر مولفه خمش تنش را محاسبه می کنیم. ۴) با استفاده از روش جمع آثار قوا تنش را بدست می آوریم.





$$\begin{cases} \vec{M_z} = \vec{M} \cdot \cos\theta \\ \vec{M_y} = \vec{M} \cdot \sin\theta \end{cases}$$

بواسطه اعمال M_z: $\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z}$

بواسطه اعمال M_y: $\sigma_x = +\frac{M_y z}{I_y}$

$$\Rightarrow \sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} = -\frac{M\cos\theta\, y}{I_z} + \frac{M\sin\theta\, z}{I_y}$$

$$= M\left[-\frac{y\cos\theta}{I_z} + \frac{z\sin\theta}{I_y}\right] \qquad \sigma_x = M\left[-\frac{y\cos\theta}{I_z} + \frac{z\sin\theta}{I_y}\right]$$

معادله تار خنثی مقطع با قرار دادن $\sigma_x=0$ بدست می آید.

$$\sigma_x = 0$$

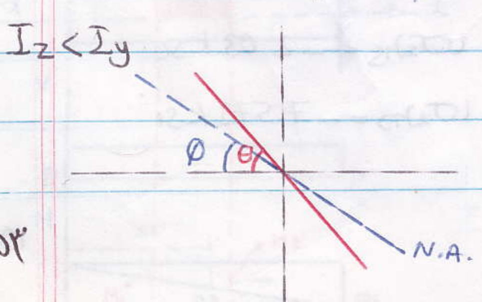
$$\Rightarrow M\left[-\frac{y\cos\theta}{I_z} + \frac{z\sin\theta}{I_y}\right] = 0 \Rightarrow \underbrace{y = \frac{I_z}{I_y}\, tg\theta . z}_{\text{معادله تار خنثی}}$$

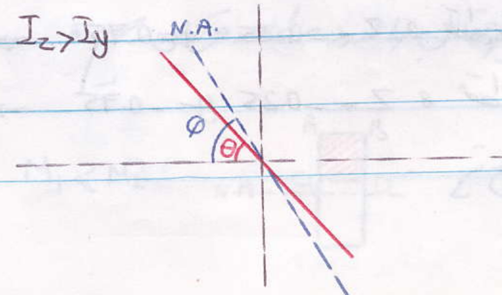
$$y = m z \Leftarrow \frac{I_z}{I_y}\, tg\theta = m$$ اگر

در اینجا $m = tg\varphi$ قرار داده است. (φ زاویه بین محور خنثی و محور z می باشد)

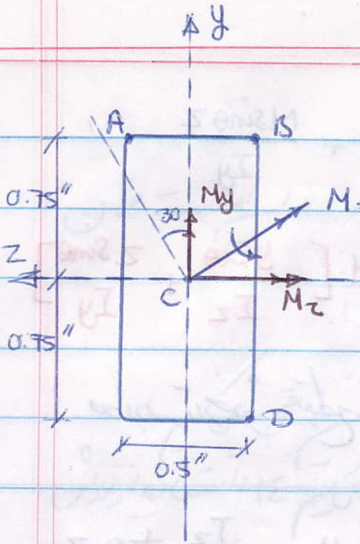
$$\rightarrow \varphi = tg^{-1}\left(\frac{I_z}{I_y}\, tg\theta\right) \qquad \varphi = tg^{-1}\left(\frac{I_z}{I_y}\, tg\theta\right)$$

اگر $I_z = I_y$ باشد، امتداد محور خنثی در امتداد بردار گشتاور است.





10, 16, 24, 28, 42, 49, 50, 56, 58, 60, 68, 72, 84, 88, 106, 110, 116, 123, 130
148, 159, 168, 204



مثال: مطلوبست مقدار تنش در نقاط A، B و D تیر بارگذاری شده مطابق شکل.

$$M_z = M\cos 30 = 600 \times \cos 30 = 520 \text{ lb.in}$$

$$M_y = M\sin 30 = 600 \times \sin 30 = 300 \text{ lb.in}$$

$$I_z = \frac{0.5 \times 1.5^3}{12} = 0.1406 \text{ in}^4$$

$$I_y = \frac{1.5 \times 0.5^3}{12} = 0.01563 \text{ in}^4$$

$$\sigma_x = \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

$$\Longrightarrow \sigma_x = \frac{520\,y}{0.1406} + \frac{300\,z}{0.01563}$$

A نقطه: $z = 0.25$ $y = 0.75$ $\Longrightarrow (\sigma_x)_A = 7573 \text{ psi} = 7.573 \text{ ks}$

$$\text{psi} = \text{lb}/\text{in}^2$$

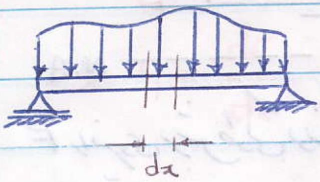
B نقطه: $z = -0.25$ $y = 0.75$ $\Longrightarrow (\sigma_x)_B = -2.03 \text{ ksi}$

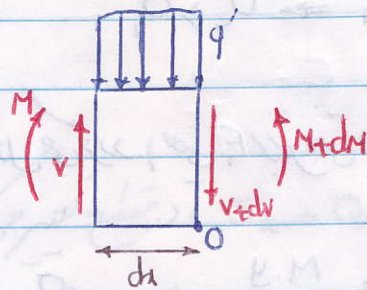
D نقطه: $z = -0.25$ $y = -0.75$ $\Longrightarrow (\sigma_x)_D = -7.573 \text{ ksi}$

حمید کاظم ۱۰/۱

فصل پنجم

بارگذاری جانبی (برش)





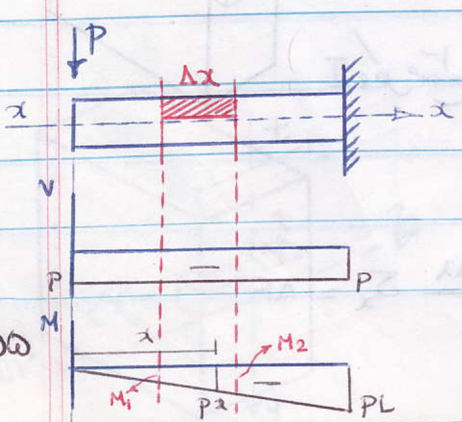
$$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow -M - V\,dx + q'\,dx\left(\frac{dx}{2}\right) + (M + dM) = 0$$

$$\Rightarrow -V\,dx + \frac{q'}{2}dx^2 + dM = 0$$

$$\Rightarrow -V\,dx = dM \Rightarrow \frac{dM}{dx} = V$$

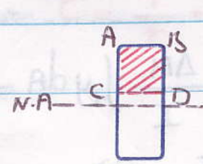
$$M = \int V\,dx \longrightarrow M_2 - M_1 = \int_{(1)}^{(2)} V\,dx$$

برش وقتی وجود دارد که خمش متغیر باشد.



تیر مقابل را مورد مطالعه قرار می دهیم.

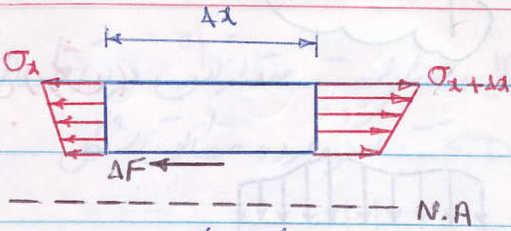
$M_1 < M_2$



مقطع تیر

$$\sigma = -\frac{M \cdot y}{I}$$

$$M_2 > M_1 \Rightarrow \sigma_2 > \sigma_1$$

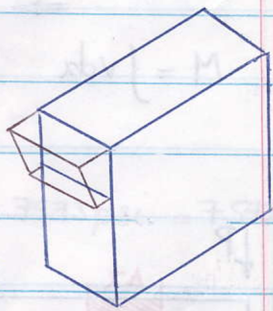


F را نیروی برشی طولی گویند که باعث تعادل می گردد. (یعنی q برش افقی در واحد طول است)

$$\sigma_x = \frac{M \cdot y}{I} \qquad \sigma_{x+\Delta x} = \frac{(M+\Delta M)\cdot y}{I}$$

$$\Sigma F_x = 0 \longrightarrow \int_{ABCD} \sigma_x \, dA + \Delta F - \int_{ABCD} \sigma_{x+\Delta x} \, dA = 0$$

$$\Rightarrow \int_{ABCD} (\sigma_x - \sigma_{x+\Delta x})\, dA + \Delta F = 0$$



$$\Rightarrow \int_{ABCD} \frac{(M - M - \Delta M)y}{I} \, dA = -\Delta F$$

I کل مقطع

$$\Rightarrow \frac{-\Delta M}{I} \int y \, dA = -\Delta F$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta M}{I} \int y \, dA = \Delta F \Rightarrow \frac{V \Delta x}{I} S_x = \Delta F$$

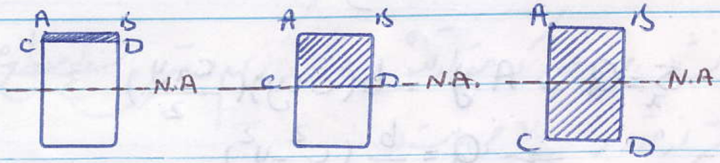
$(S_x = Q)$

Q* لنگر استاتیک سطح واقع در بالا یا پایین تراز مورد نظر برای محاسبه Q است که در حول محور خنثی کل مقطع حساب می شود.

$$\Rightarrow \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{V S_x}{I} \Rightarrow q = \frac{dF}{dx} = \frac{V S_x}{I}$$

$$\rightarrow q = \frac{dF}{dx} = \frac{VQ}{I}$$

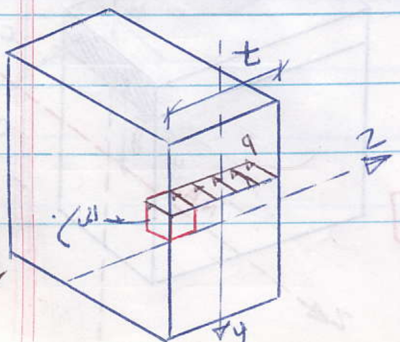
$S_x = Q = \int y\,dA$ ، در مقطع تغییر می کند.



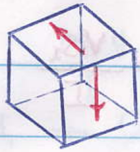
Q_{Min} Q_{Max} $Q=0$

در فرمول $\frac{dF}{dx} = \frac{VQ}{I}$ ، V نیروی برشی مقطع ثابت است و I نیز ثابت می باشد.

F و q نیز نیروی برشی در طول می باشد.



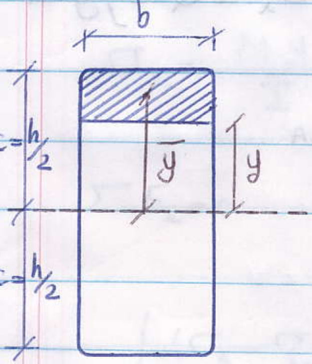
$$\tau = \frac{dF}{dx.t} \Rightarrow \tau = \frac{q}{t} = \frac{VQ}{It}$$



بنابراین تنش برشی مقطع با تنش برشی طول برابر است.

$$\tau_{\text{تنش برشی مقطع}} = \tau_{\text{تنش برشی طول}} = \frac{VQ}{It}$$

مقطع مستطیلی زیر را در نظر می‌گیریم:

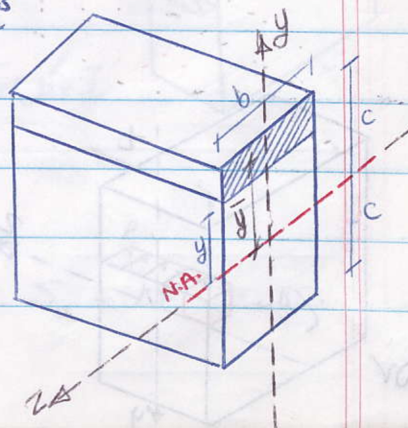


$$S_x = Q = A.\bar{y} = b(c-y)\left(\frac{c+y}{2}\right)$$

$$\Rightarrow Q = \frac{b}{2}(c^2 - y^2)$$

$$\Rightarrow Q = \frac{bc^2}{2}\left[1-\left(\frac{y}{c}\right)^2\right]$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} \qquad I = \frac{bh^3}{12} = \frac{2}{3}bc^3$$

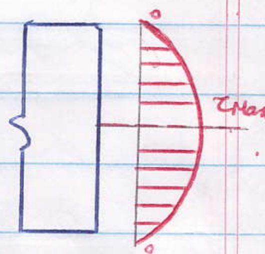


$$\Rightarrow \tau = \frac{V\,\frac{bc^2}{2}}{\frac{2}{3}bc^3 b}\left[1-\left(\frac{y}{c}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{3V}{4cb}\left[1-\left(\frac{y}{c}\right)^2\right]$$

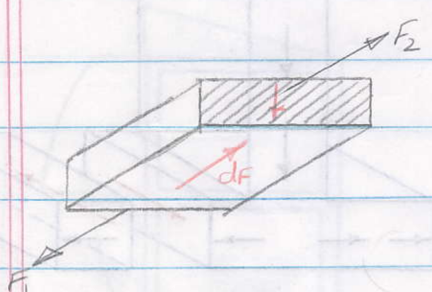
$0 \leqslant y \leqslant c$

$y = 0 \longrightarrow \tau_{Max} = \dfrac{3V}{4bc} = \dfrac{3V}{2A}$

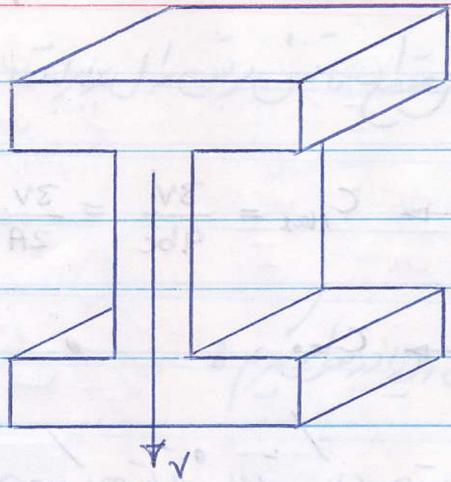


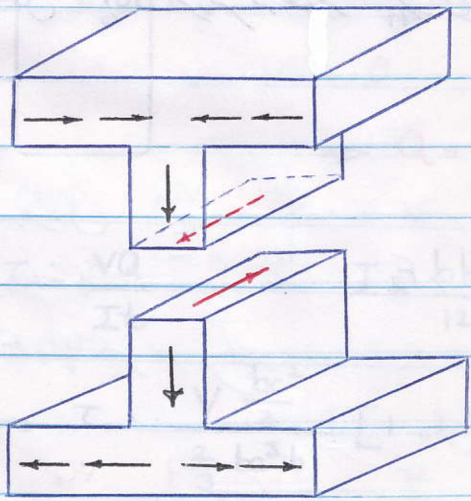
$y = c \longrightarrow \tau = 0$

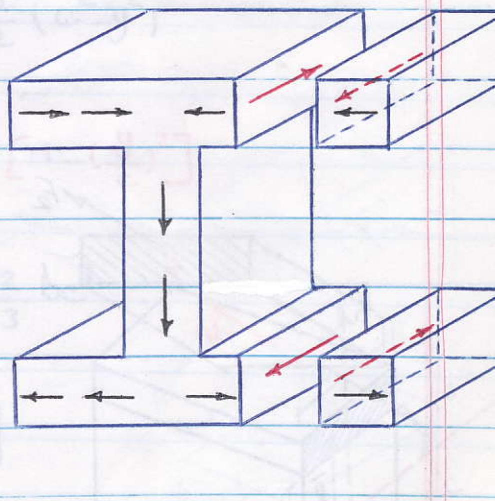
رابطه بدست آمده نشان می دهد که مقدار تنش برشی ماکزیمم در تیر با سطح مقطع مستطیل شکل 50% بزرگتر از مقدار V/A می باشد.

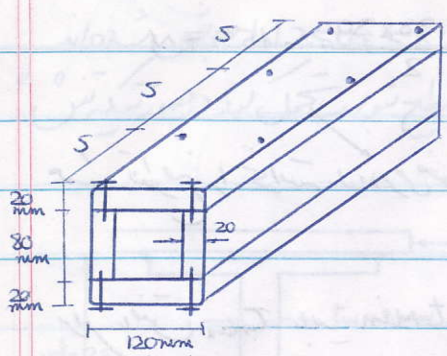


$F_1 > F_2$


V



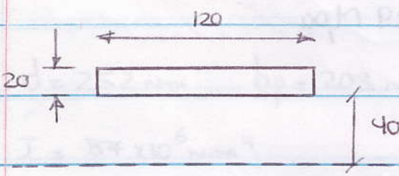




مثال: مقطع تیری مطابق شکل بصورت قوطی مربعی از دو قطعه چوب به ابعاد $20 \times 80\ mm^2$ بصورت قائم و دو قطعه دیگر به ابعاد $20 \times 120\ mm^2$ بصورت افقی به یکدیگر میخ شده اند تشکیل شده است

اگر بدانیم که فاصله میخ ها از هم برابر $S = 30\ mm$ باشد و نیروی برش مقطع به صورت قائم و برابر $1200\ N$ درنظر گرفته شود، محاسبه کنید نیروی برشی ایجاد شده در هر میخ و حداکثر تنش برشی که در تیر ایجاد شود.

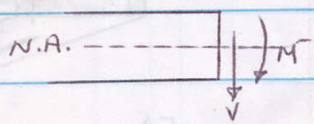
$S = 30\ mm \qquad V = 1200\ N$

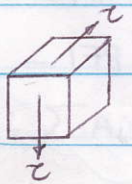


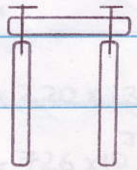
$$Q = A \cdot \bar{y} = 20 \times 120 \times 50 = 120000\ mm^3$$

$$I = \frac{120^4 - 80^4}{12} = 13.87 \times 10^6\ mm^4$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{1200 \times 120000}{13.87 \times 10^6} = 10.38\ N/mm$$



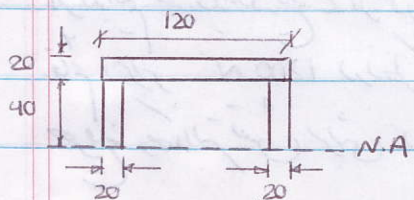




$$\text{نیروی برشی وارد بر هر میخ} = \frac{q.s}{2} = \frac{10.38 \times 30}{2} = 155.7\,N$$

مشخصه قطر میخ را نداشته اما اگر می‌خواست باید τ_{all} را می‌داد.

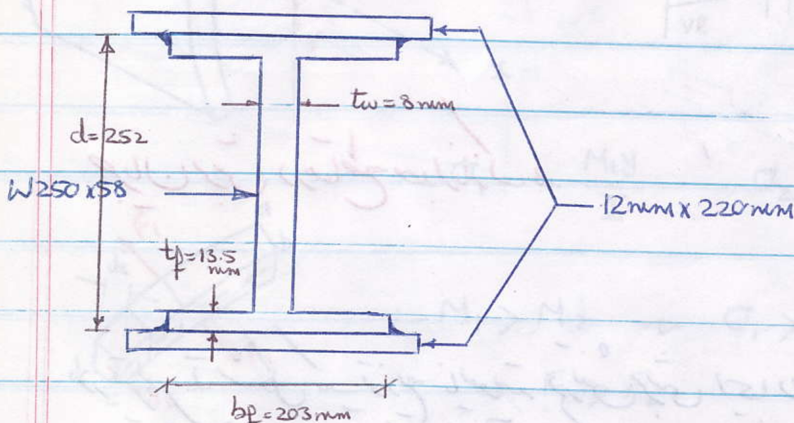
۵. برای یافتن τ_{Max} باید t_{Min} و Q_{Max} را پیدا کنیم. این دو مقدار در محل تار خنثی تأمین می‌شوند.



$$Q_{Max} = 120000 + 2 \times 40 \times 20 \times 20$$
$$= 152000\ mm^3$$

$$\Rightarrow \tau_{Max} = \frac{1200 \times 152000}{13.87 \times 10^6 \times 40} = 0.329\ Mpa$$

مثال: دو صفحه مستطیلی به دو بال تیر بال پهن W250x58 جوش شده‌اند
مطلوبست حداکثر نیروی برشی که این مقطع می‌تواند تحمل کند در صورتیکه تنش
برشی τ_{Max} از مقدار 90 Mpa فراتر نرود.



$d = 252\,mm \quad b_f = 203\,mm \quad t_f = 13.5\,mm \quad t_w = 8\,mm$

$I = 87\times10^6\,mm^4$

$$\tau_{Max} = \frac{V_{Max}\,Q_{Max}}{I.t}$$

$$I_{مقطع} = 87\times10^6 + 2\times\left[\frac{220\times12^3}{12} + 12\times220\times\left(\frac{252}{2}+6\right)^2\right]$$
$$= 179.1\times10^6\,mm^4$$

$$Q_{Max} = \sum A_i\bar{y}_i = 12\times220\times132 + 203\times13.5\times\left(126-\frac{13.5}{2}\right)$$
$$+ 112.5\times8\times\frac{112.5}{2} = 726\times10^3\,mm^3$$

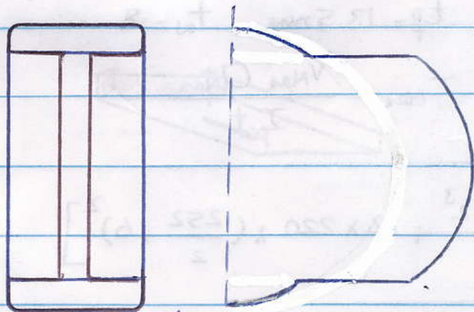
$$\tau_{Max} = \frac{V_{Max}\, Q_{Max}}{I \cdot t} \Longrightarrow 90 = \frac{V \cdot (726 \times 10^3)}{179.1 \times 10^6 \times 8}$$

$$\Longrightarrow V_{Max} = 177.6 \times 10^3\ N$$

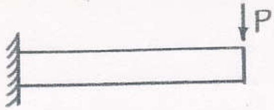
جریان برش در مقاطع جدار نازک :

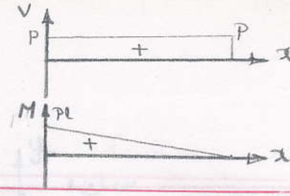
$$\tau = \frac{V \cdot Q}{I t}$$

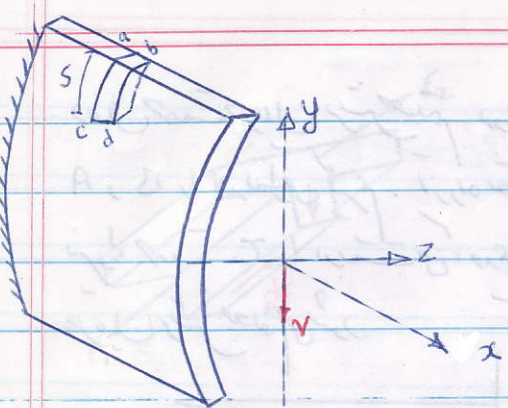
در تیرهای I شکل یک توزیع ناپیوسته در تنش برشی ایجاد می‌شود. این دیدگاه را بررسی تنش برشی بر اساس سطح مقطع تیر گویند.

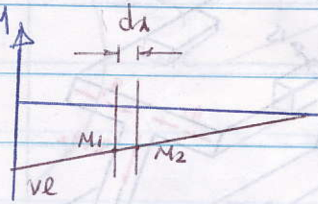


دیدگاه دیگری نیز وجود دارد که جریان برش در مقطع جدار نازک گویند.

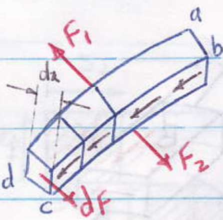








$$\sigma_1 = +\frac{M_1 y}{I} \qquad \sigma_2 = +\frac{M_2 y}{I}$$

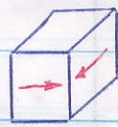


$$M_1 > M_2 \Rightarrow \sigma_1 > \sigma_2$$

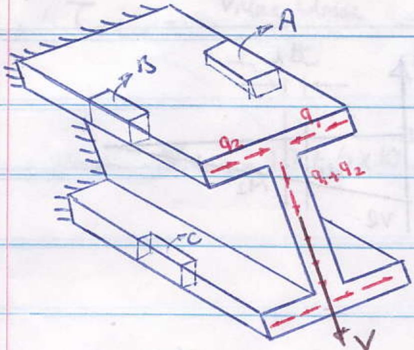
$$\Rightarrow F_1 > F_2$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_2 + dF = F_1$$

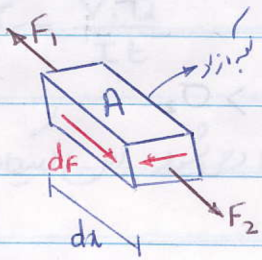
از طرفی $dF = t \cdot dx \cdot \tau = q\,dx$



حال این بحث را برای مقطع I شکل ادامه می‌دهیم.



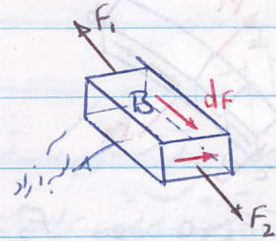
دنبال جهت جریان برش هستیم. دو مقطع A و B را در نظر می‌گیریم. از راه تعادل نیروها جهت ح را بدست می‌آوریم و جریان برش معلوم می‌شود.

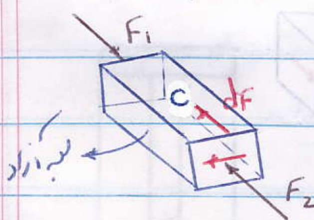


$$dF + F_2 = F_1$$

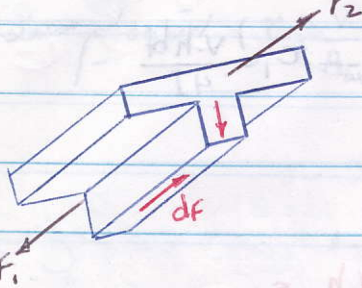
$$F_1 > F_2$$

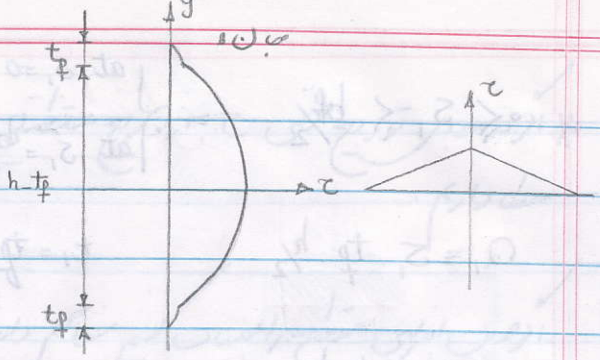
$$dF = q \cdot dx$$



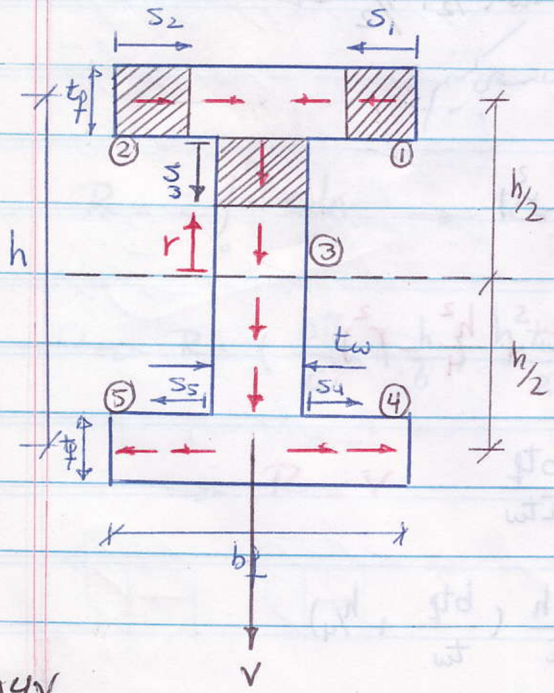


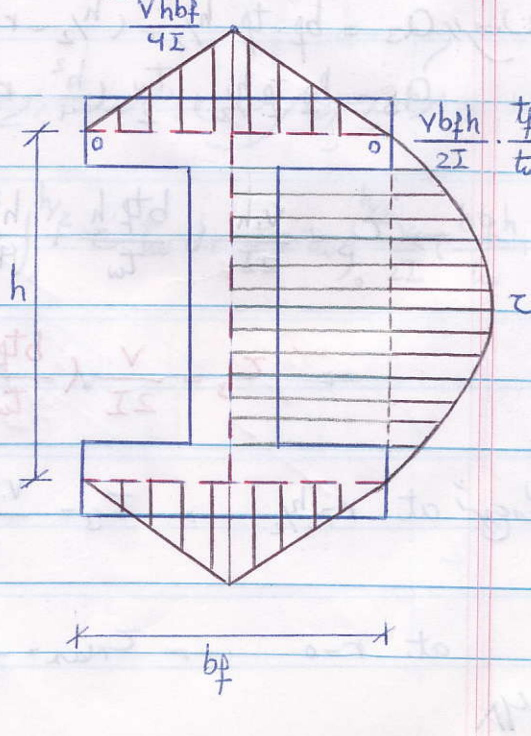
$$F_1 > F_2$$





توزیع تنش برشی در تیرهای پروفیل با I شکل





$0 \le s_1 \le b_f/2 \longrightarrow \begin{cases} at\ s_1=0 \longrightarrow \tau_1=0 \\ at\ s_1=b_f/2 \longrightarrow \tau_1=\dfrac{V.h\,b_f}{4I} \end{cases}$

$Q_1 = s_1 \cdot t_f \cdot h/2 \qquad t_1 = t_f$

$$\Rightarrow \tau_1 = \frac{V \cdot t_f \cdot h/2}{I\, t_f} \cdot s_1 \Rightarrow \tau_1 = \frac{V.h}{2I}\, s_1$$

در جان $Q_3 = b_f \cdot t_f \cdot h/2 + (h/2 - r) \cdot t_w (h/2 + r)/2 \Rightarrow$

$Q_3 = b_f\, t_f\, h/2 + \frac{t_w}{2}\left(\frac{h^2}{4} - r^2\right)$

$$\Rightarrow \tau_3 = \frac{V}{2I}\left(\frac{b t_f . h}{t_w} + \frac{h^2}{4} - r^2\right)$$

$$\Rightarrow \tau_3 = \frac{V}{2I}\left(\frac{b t_f . h}{t_w} + \frac{h^2}{4} - r^2\right)$$

شروع جان at $r = h/2 \longrightarrow \tau_3 = \dfrac{V.h\,b t_f}{2I t_w}$

at $r=0 \longrightarrow \tau_{Max} = \dfrac{V.h}{2I}\left(\dfrac{b t_f}{t_w} + h/4\right)$

* اگر به جای توزیع منحنی τ از توزیع متوسط ($\tau = \frac{V}{A_{web}}$) استفاده کنیم حدود 12% خطا داریم.

از همان ابتدای مقطع را حساب کنیم خواهیم داشت :

$$I = \frac{t_w h^3}{12} + 2 b t_f \frac{h^2}{4} = \frac{t_w h^3}{12} + b t_f \frac{h^2}{2}$$

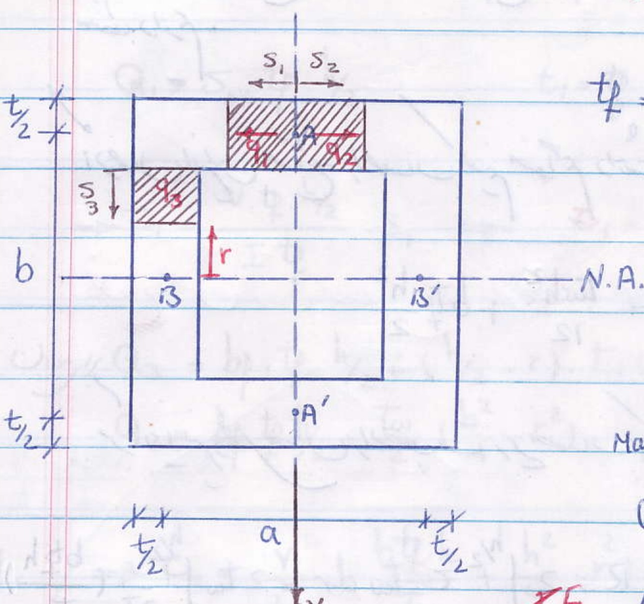
برآیند نیروهای حاصل را به صورت زیر حساب می‌کنیم :

$$R = 2\int_0^{h/2} \tau \, dA \Rightarrow R = 2\int_0^{h/2} \tau \, t_w \, dr = 2 t_w \int_0^{h/2} \frac{V}{2I}\left(\frac{b t_f h}{t_w} + \frac{h^2}{4} - r^2\right)$$

$$\Rightarrow R = \left(\frac{b t_f}{t_w} + \frac{h}{6}\right) \frac{h^2 t_w \cdot V}{2I} = V$$

$$\Rightarrow R = V$$

توزیع تنش برشی برای پروفیل بسته قوطی شکل:



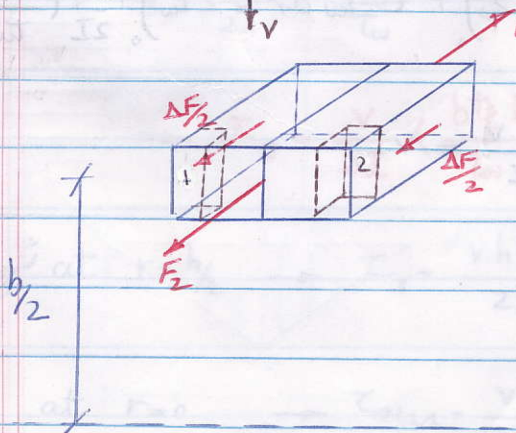
$t_f = t_w = t$

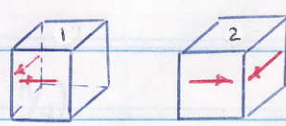
* در مقاطع بسته محور اصلی عمود بر محور خمشی مقدار تنش برشی صفر است. مثلاً در مقطع نقاط A و A' دارای تنش برشی صفر و B و B' دارای تنش برشی ماکزیمم است. (علت Max بودن τ، Max بودن Q است.)

المانی بصورت بالا در نظر می‌گیریم برای قسمت افقی داریم:

$$F_1 > F_2$$

$$\rightarrow F_2 + \Delta F = F_1$$





$$q = \frac{VQ}{I} \rightarrow \begin{cases} Q_1 = S_1 t \, b/2 \\ Q_2 = S_2 t \, b/2 \end{cases}$$

$$\tau_1 = \frac{q_1}{t} = \frac{V(S_1 t b)}{I \, 2t} \Rightarrow \tau_1 = \frac{Vb}{2I} S_1$$

$$\tau_2 = \frac{q_2}{t} = \frac{V(S_2 t b)}{I \, 2t} \qquad \tau_2 = \frac{Vb}{2I} S_2$$

$$\begin{cases} S_1 = 0 \rightarrow \tau_1 = 0 \\ S_1 = a/2 \rightarrow \tau_1 = \dfrac{Vab}{4I} \end{cases}$$

برای قسمت قائم داریم:

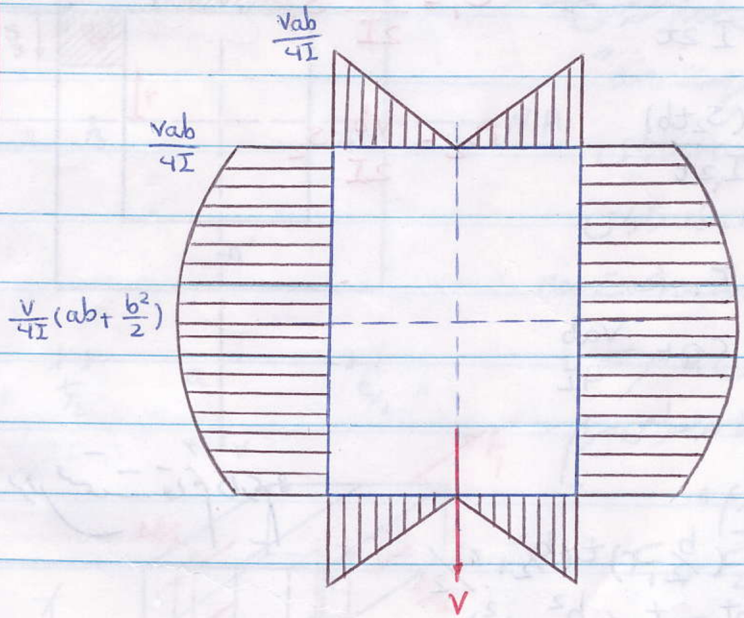
$$Q_3 = t \, \tfrac{a}{2} \, \tfrac{b}{2} + \left(\tfrac{b}{2} - r\right) t \left(\tfrac{b}{2} + r\right)/2$$

$$\rightarrow Q_3 = \frac{abt}{4} + \frac{t}{2}\left(\frac{b^2}{4} - r^2\right)$$

$$\tau_3 = \frac{V}{It}\left[\left(\frac{abt}{4} + \frac{t}{2}\left(\frac{b^2}{4} - r^2\right)\right]\right.$$

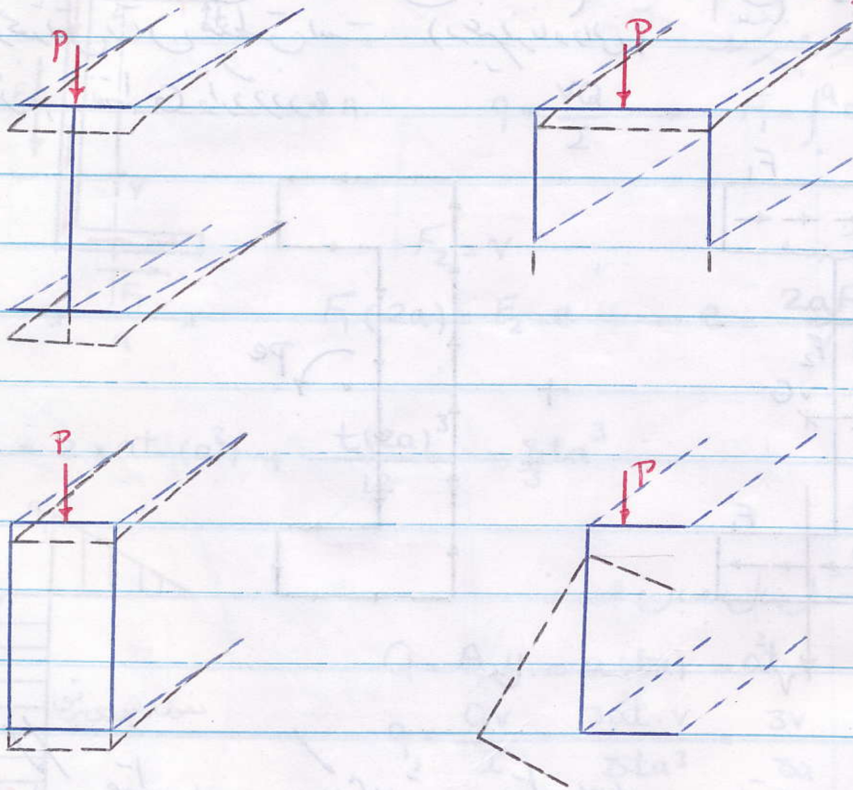
$$r = 0 \qquad \tau_{Max} = \frac{V}{4I}\left(ab + \frac{b^2}{2}\right)$$

$$r = b/2 \qquad \tau_{min} = \frac{Vab}{4I}$$



معمولاً سطوحی که موازی برش مقطع هستند منحنی تنش برشی شان درجه ۲ و سطوح عمود بر نیروی برشی مقطع درجه ۱ هستند.

مرکز برش :

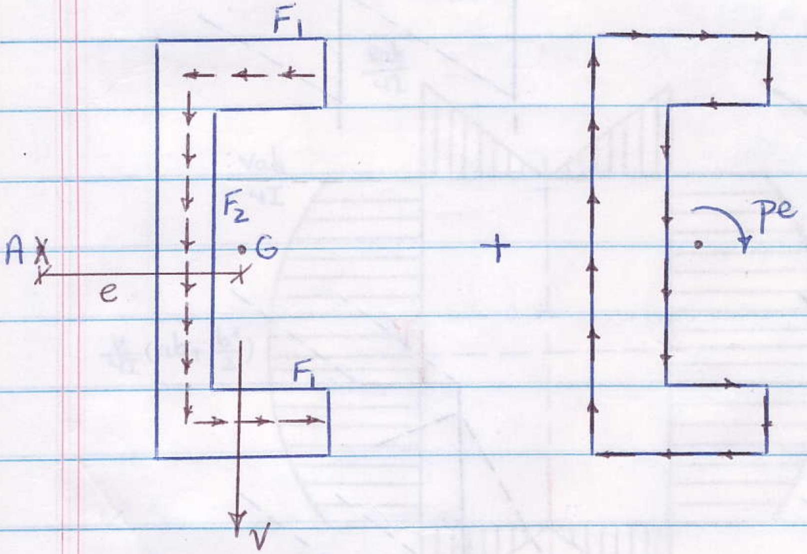


پروفیل های شکل (۱) ، (۲) ، (۳) وقتی بار در راستای محور تقارن اعمال شود نمی چرخند و تغییر در راستای قائم می دهند.

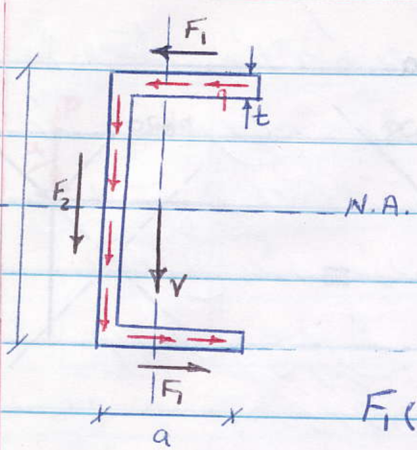
ولی هر پروفیل ناودونی (۴) که بار در امتداد محور تقارن وارد شده می چرخد

اگر در مقطع یک سطحی دارای دو محور تقارن هستند بنابراین محور چرخش آن‌ها بر محور تقارن شان منطبق است. (به غیر از ناودانی)

اگر P در نقطه G وارد گردد:



نکته: اگر یک مقطع داده و دیاگرام برش آن مقطع را خواستند، در ابتدا جریان برش را تعیین می‌کنیم و سپس به کمک فرض‌هایی که ... به دنبال حساب کردن Q و τ می‌رویم.



* دنبال نقطه‌ای هستیم که کوپل‌های F_1 , F_2 برابر صفر شود.

$$q = \frac{VQ}{I} \rightarrow F_1 = \int_0^a q\,ds$$

ثابت شده :

$$F_2 = V$$

$$F_1(2a) = F_2 \cdot e \rightarrow e = \frac{2aF_1}{V} \quad (1)$$

$$I = 2 \times at\,(a^2) + \frac{t(2a)^3}{12} = \frac{8}{3}ta^3$$

در محل اتصال بال به جان :

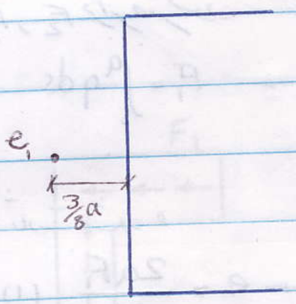
$$Q = A \cdot y = a(ta) = a^2t$$

$$q_1 = \frac{QV}{I} = \frac{3a^2t \cdot V}{8ta^3} = \frac{3V}{8a}$$

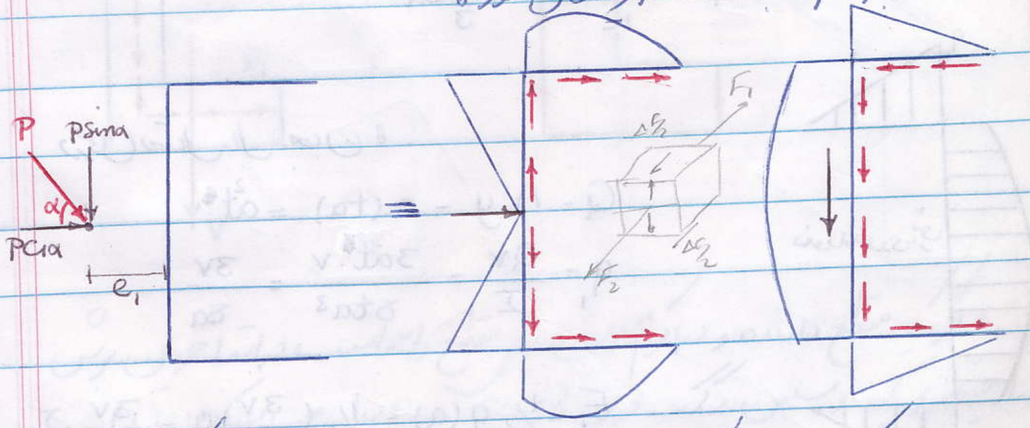
$$F_1 = \frac{1}{2}q(a) = \frac{1}{2}\left(\frac{3V}{8a}\right)a = \frac{3V}{16}$$

حال از فرمول (1) داریم :

$$e = \frac{2aF_1}{V} = \frac{2a(\frac{3}{16})V}{V} = \frac{3}{8}a$$

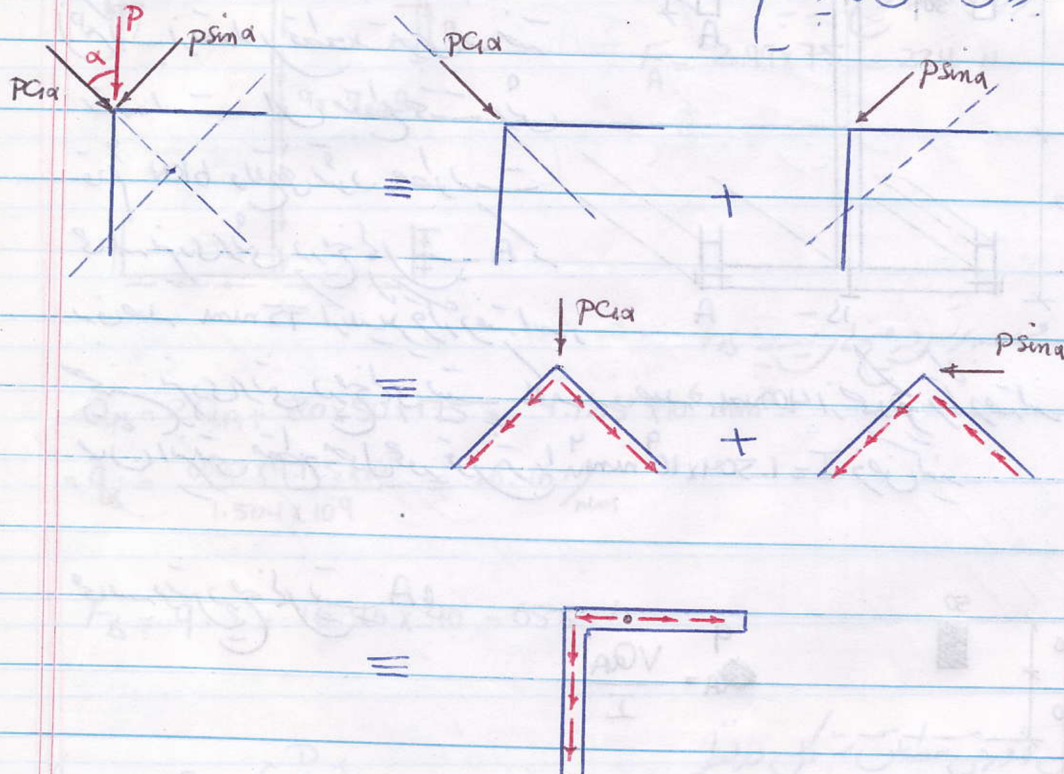


حال اگر بار P بصورت زیر اعمال شود

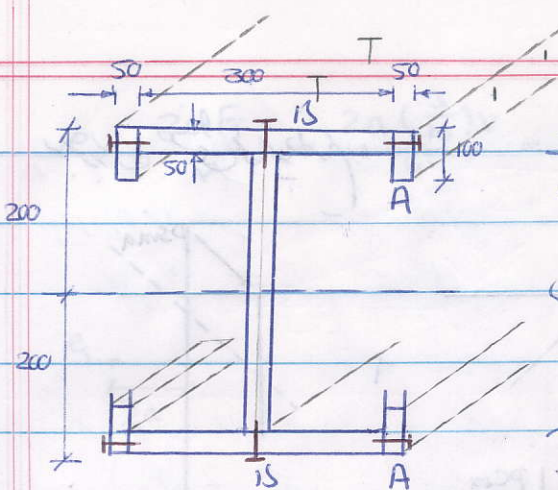


باید برای ترکیب دو شکل با توجه به جریان برش نمودارها را جمع جبری کنیم.

به بررسی نبشی می پردازیم.

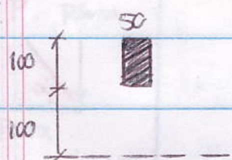


نکته: اگر با برش نامتقارن روبرو شدیم بار نامتقارن را تجزیه می کنیم و برای هر شکل توزیع تنش برشی را رسم می کنیم و شکل ها را با هم جمع جبری می کنیم



مثال ۸: مقطعی مطابق شکل به صورت مرکب از تعدادی قطعات چوبی میخ شده است. این مقطع تحت برش قائم 6kN واقع می‌شود. مطلوبست محاسبه نیروی برشی در میخ‌های بیت A که در فاصله 75 mm از یکدیگر قرار گرفته‌اند و همچنین نیروی برشی در میخ‌های بیت دیگر که در فاصله 140mm از همدیگر قرار گرفته‌اند. ممان اینرسی مقطع حول محور خنثی را $I = 1.504 \times 10^9 \ mm^4$ فرض کنید.

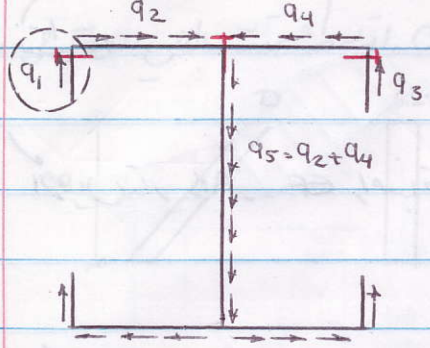
محاسبه برش در میخ‌های بیت A



$$q_A = \frac{VQ_A}{I}$$

$$Q_A = A\bar{y} = 50 \times 100 \times 150 = 750000 \ mm^3$$

$$\rightarrow q_A = \frac{6 \times 10^3 \times 750000}{1.504 \times 10^9} = 2.99 \ kN/m = 2.99 \ N/mm$$



نیروی وارد بر جوش تیپ A

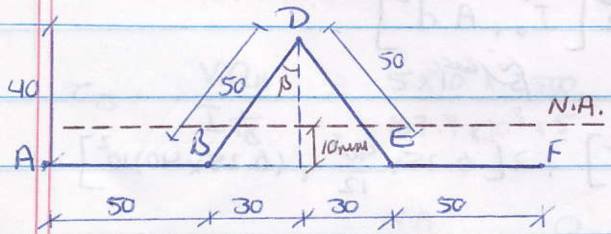
$$F_A = 2.99 \times 75 = 224\ N$$

محاسبه برش در جوش‌های تیپ B

$$Q_B = 2Q_A + 300 \times 50 \times 175 = 4.125 \times 10^6\ mm^3$$

$$q_B = \frac{6000 \times 4.125 \times 10^6}{1.504 \times 10^9} = 16.46\ N/mm$$

$$F_B = q \cdot S = 16.46 \times 40 = 658\ N$$



مثال) ورق مطابق شکل در نظر گرفته می‌شود. ضخامت ورق مقدار ثابت 5mm است. در صورتیکه برش وارد در مقطع برابر $V = 5kN$ باشد مطلوبست الف) حداکثر تنش برشی در مقطع ب) تنش برشی در

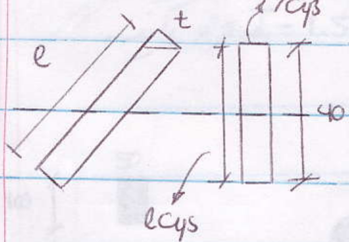
$S_x = \sum A_i y_i \qquad \bar{y} = \dfrac{S_x}{\sum A_i}$ 1- نقص 15.

اگر میان تار AB و EF را مبنا قرار دهیم می‌بینیم اشکال‌های نوک‌ها صفر می‌شود

فاصله مرکز ثقل از مبنا

$S_x = (50 \times t \times 20)\,2$

$\longrightarrow \bar{y} = \dfrac{50 \times t \times 20 \times 2}{4 \times 50\, t} = 10\ mm$ فاصله مرکز سطح تا میان تار پایینی



برای محاسبه کردن ممان اینرسی:

$\cos\beta = \frac{4}{5}$

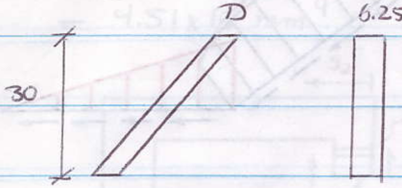
$t' = \dfrac{t}{\cos\beta} = \dfrac{5}{4/5} = \dfrac{25}{4} = 6.25\ mm$

$I = 2\big[\underbrace{I_o + A.d^2}_{\text{اعضای افقی}}\big] + 2\big[\underbrace{I'_o + A'.d^2}_{\text{اعضای مایل}}\big]$

$= 2\left[50 \times \dfrac{5^3}{12} + 50 \times 5 \times 10^2\right] + 2\left[6.25 \times \dfrac{40^3}{12} + (6.25 \times 40)10^2\right]$

$= 167.7 \times 10^3\ mm^4$

بیشترین تنش برشی در محل تار خنثی است. Q را توسط قسمت بالایی بدست می آوریم.



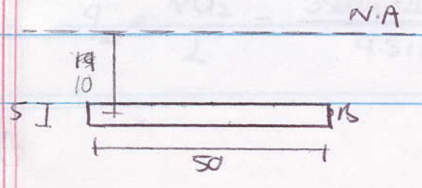
$$Q = A\bar{y} = 30 \times 6.25 \times 15$$
$$= 5625$$

از قسمت پایینی هم می توان استفاده کرد.

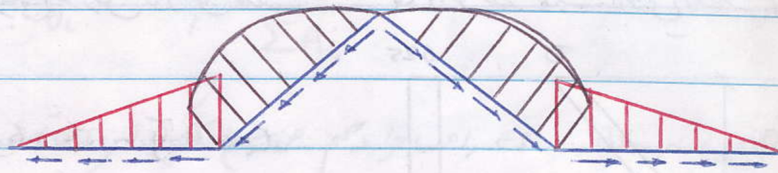
$$Q = 50 \times 5 \times 10 + 10 \times 6.25 \times 5 = 5625$$

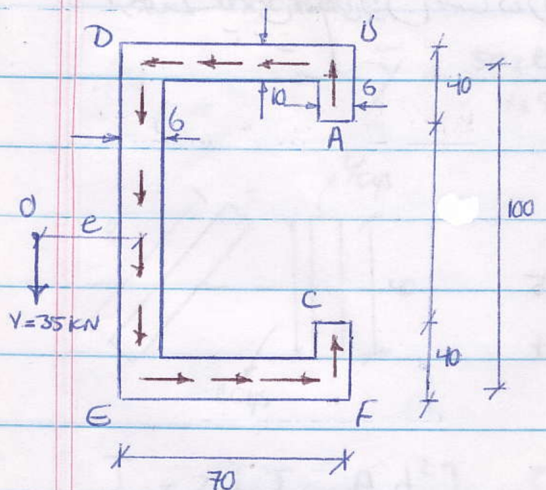
$$\tau_{Max} = \frac{5000 \times 5625}{167.7 \times 10^3 \times 5} = 16.77\ Mpa$$

$$\tau_B = \frac{V Q_B}{I t_B} = \frac{5 \times 10^3 \times 2500}{167.7 \times 10^3 \times 5} = 14.91\ Mpa$$



$$Q_B = 50 \times 5 \times 10 = 2500$$

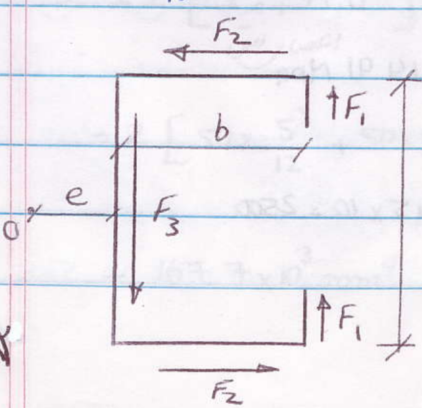




ل O مرکز برش را تعیین کنید. توزیع تنش های
ایجاد شده (برشی) توسط نیروی قائم برشی
35 kN که در محل مرکز برش O مطابق شکل
وارد می شود.

$$F_2 \cdot h + 2F_1(b+e) - F_3 e = 0$$

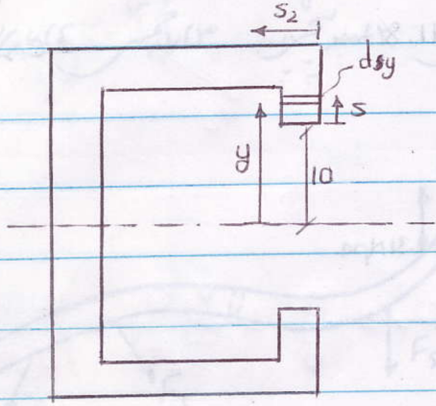
$$e = \frac{F_2 \cdot h + 2F_1 b}{F_3 - 2F_1} \qquad F_3 - 2F_1 = V$$



$$\Rightarrow e = \frac{F_2 h + 2F_1 b}{V}$$

$$I = 2\left[\frac{6(100)^3}{12}\right] - \left(\tfrac{1}{12}\, 6\times(20)^3\right) + 2\left[\tfrac{1}{12}\, 70(10)^3 + (70\times10)\,50^2\right]$$
$$= 4.51\times10^6 \ mm^4$$

محاسبه τ_1 , F_1 :



$$Q_1 = (y-10)\times 6\times \tfrac{1}{2}(y+10)$$
$$= 3(y^2-100) \qquad 10 < y < 50$$

$$F_1 = \int_{10}^{5} q\, ds$$

$$F_1 = \frac{35000}{4.51\times10^6}\int_{10}^{50} 3(y^2-100)\, ds = 869\ N$$

$$\tau_1 = \frac{q_1}{t_1} = \frac{VQ_1}{It_1} = \frac{35000\times3(y^2-100)}{6\times4.51\times10^6} \begin{cases} \text{at } y = 50mm \rightarrow \tau_1 = 9.31\ Mpa \\ \text{at } y = 10mm \rightarrow \tau_1 = 0\ Mpa \end{cases}$$

محاسبه τ_2 , F_2 : در محل اتصال بال به بال فوقانی ← $Q_{1Max} = 7200$

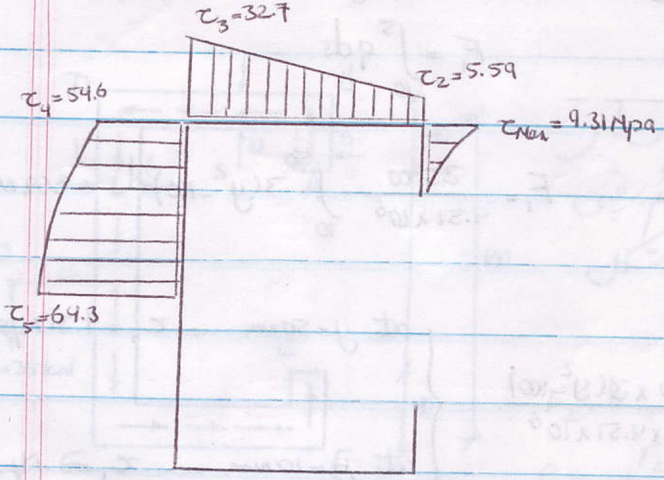
$$Q_2 = Q_{1Max} + A\bar{y} = 7200 + 50\times10\,S_2 \qquad 0 < S_2 < 70$$

$$q_2 = \frac{VQ_2}{I} = \frac{35000(7200 + 500\,S_2)}{4.51\times10^6}$$

$$F_2 = \int_0^{70} q_2 \, ds_2 = 13.4 \text{ KN}$$

$$e = \frac{13400(100) + 2(869)70}{35000} = 41.8 \text{ mm}$$

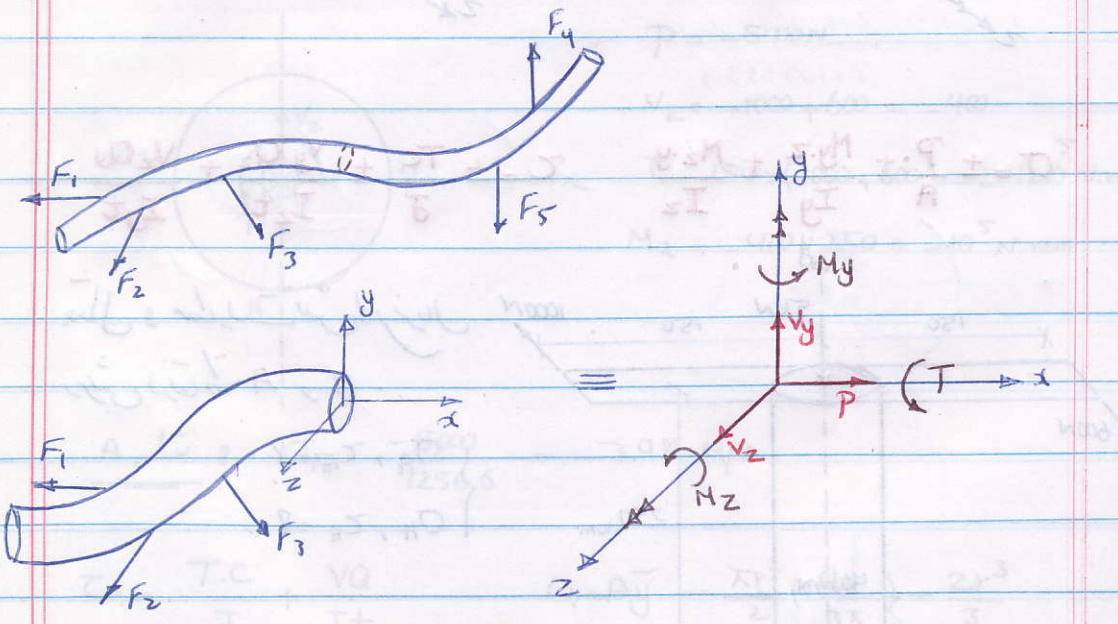
e بيس



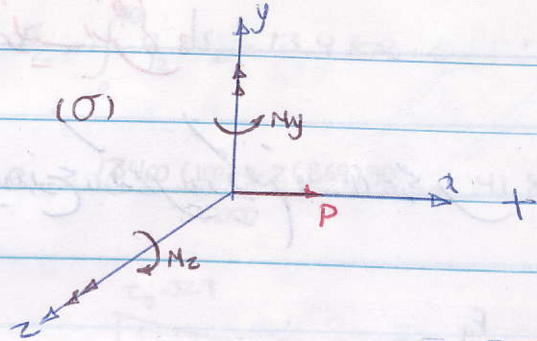
M2

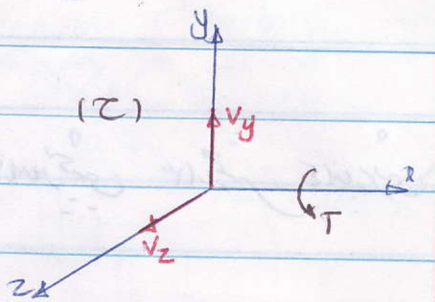
ترکیب تنش‌ها:

چهار نوع بارگذاری یاد گرفتیم: ۱) بار محوری ۲) بار پیچشی ۳) بار خمشی ۴) بار برشی

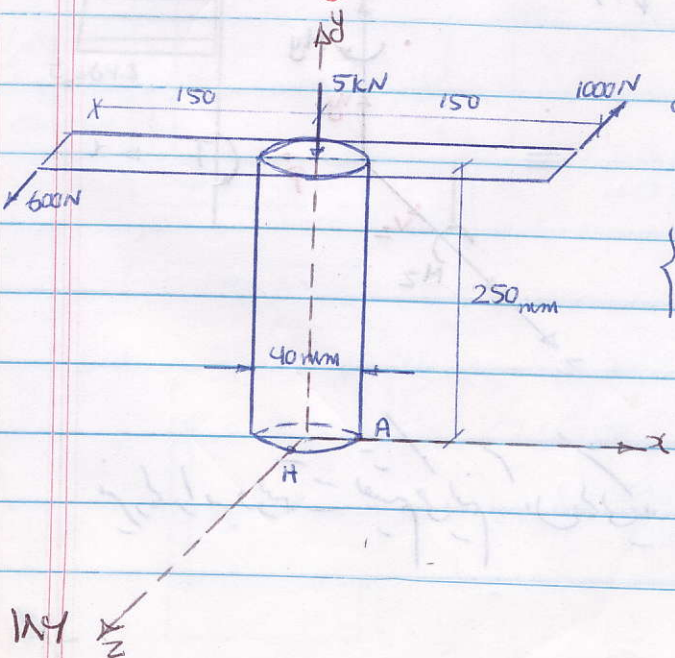


نیروها را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم. آن‌هایی که σ می‌سازند و آن‌هایی که τ می‌سازند.





$$\sigma = \pm \frac{P}{A} \pm \frac{M_y \cdot z}{I_y} \pm \frac{M_z \cdot y}{I_z} \qquad \tau = \pm \frac{Tc}{J} \pm \frac{V_y Q_z}{I_z t} \pm \frac{V_z Q_y}{I_y t}$$

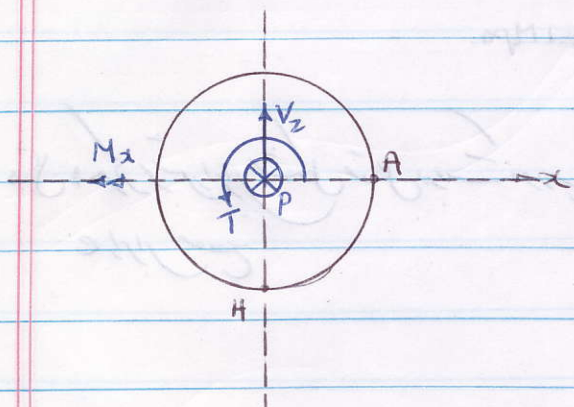


مثال: مطلوبست تنش‌های نرمال و برشی در نقاط A و H.

$$\begin{cases} \sigma_A , \tau_A = ? \\ \sigma_H , \tau_H = ? \end{cases}$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4}(40)^2 = 1256.6\ mm^2$$

$$I = \frac{1}{4}\pi r^4 = \frac{1}{4}(\pi \times 20^4) = 125663.7\ mm^4$$



$P = -5000N$

$V_z = -1000 + 600 = -400$

$T = 150 \times (1000 + 600) = 2.4 \times 10^5\ N.mm$

$M_x = -400 \times 250 = -10^5\ N.mm$

A نقطة : $\sigma_A = \frac{-5000}{1256.6} = -3.98$ Mpa

$$\tau_A = \frac{T.c}{J} + \frac{VQ}{It} \qquad Q = A\bar{y} = \frac{\pi r^2}{2}\left(\frac{4r}{3\pi}\right) = \frac{2r^3}{3}$$

$$\rightarrow \tau_A = \frac{2.4 \times 10^5 \times 20}{2 \times 125663.7} + \frac{400\left(\frac{2 \times 20^3}{3}\right)}{125663.7 \times 40} = 19.51\ Mpa$$

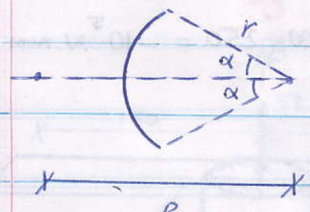
نقطه H : $\sigma_H = -3.98 + \dfrac{1 \times 10^5 \times 20}{125663.7} = +11.93\ Mpa$

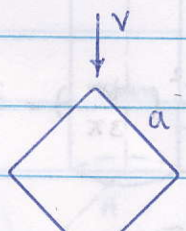
$$\tau_H = \frac{TC}{J} + \frac{VQ_H}{It} \Longrightarrow Q_H = 0 \Longrightarrow \tau_H = \frac{TC}{J}$$

$$\Longrightarrow \tau_H = \frac{2.4 \times 10^5 \times 20}{2 \times 125663.7} = 19.1\ Mpa$$

مثال: مرکز برش را برای شکل مقابل بدست آورید.

e را برای مقطع





$\tau_{Max} = ?$

تمارین :
5, 12, 16, 23, 36, 49, 62, 72, 87, 79, 94, 109
114, 120, 127, 138

تشکر :

در انتها لازم میدانم از آقای نوید ذوالقدری (کارشناس عمران دانشگاه صنعتی امیر کبیر- دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه صنعتی شریف) و آقای مسعود قهرمان نژاد (کارشناس عمران دانشگاه صنعتی تبریز- دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه صنعتی امیر کبیر) که بنده را در تهیه این فایل کمک نموده اند کمال تشکر را داشته باشم .

در صورت لزوم می توانید با آدرس پست الکترونیکی زیر انتقادات و پیشنهادات خود را ارائه فرمائید .

hamid_kazem041@yahoo.com