دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست

جزوه درس :

اصول مهندسی زلزله

استاد :

جناب آقای دکتر تهرانی زاده

نگارش:

حمید کاظم

(کارشناس عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

(دانشجوی کارشناسی ارشد گرایش سازه دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

تابستان ۱۳۸۹

«بسم الله الرحمن الرحیم»

دکتر تهرانی زاده

حمید کاظم

فهرست منابع و مراجع:

1) Rosenbluth, Design of Earthquake Resistant structure.

2) Green, N.B. Earthquake Resistant Building Design & Construction

3) Borg. Earthquake Engineering, Damage Assessment and Structural Design.

4) Newmark & Rosenbluth. Fundamental Of Earth-quake Engineering.

5) Clough & Pensien. Dynamics of structures.

6) Krinsha. Elements Of Earthquake Engineering.

7) Wiegel. Earthquake Engineering.

۱) مبنای طراحی

۲) مبنای طراحی و اجرا

۳) تئوری مهندسی زلزله

۴) تحلیل و تئوری

۵) دینامیک سازه

۶) تئوری و طراحی

۷) جمع‌آوری یک سری مقالات مربوط به مهندسی زلزله

نحوه ارزیابی:

۱) تکلیف 15%

۲) امتحان میان ترم 25%

۳) امتحان پایان ترم 50%

۴) پروژه 10%

بخش اول: مهندسی زلزله بخش دوم: زلزله شناسی مهندسی

زلزله: ماهیتی طبیعی به علت حرکات پوسته زمین است.

زلزله شناسی مهندسی: به حرکت از نقطه ای می پردازد که تحول ایجاد می شود (کانون) تا نقطه ای که امواج روی زمین انتقال پیدا می کند.

مهندسی زلزله: بررسی رفتار سازه مقابل تکان های ناشی از زلزله می باشد.

---

* $g = 9.81\ \frac{m}{s^2} = 386.06\ \frac{in}{s^2} = 32.17\ \frac{ft}{s^2}$

* 1 kips = 1000 lb وزنی $\qquad$ 1 ft = 12 in

* lb وزنی را اگر بر g تقسیم کنیم lb جرمی بوجود می آید.

* psi = Pound per square inch = $\frac{lb_{\text{وزنی}}}{in^2}$

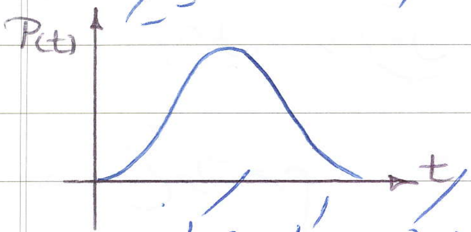
* kpsi = 1000 psi

$\frac{lb_{\text{جرمی}} \cdot in}{sec^2} = lb_{\text{وزنی}}$

حمید کاظم

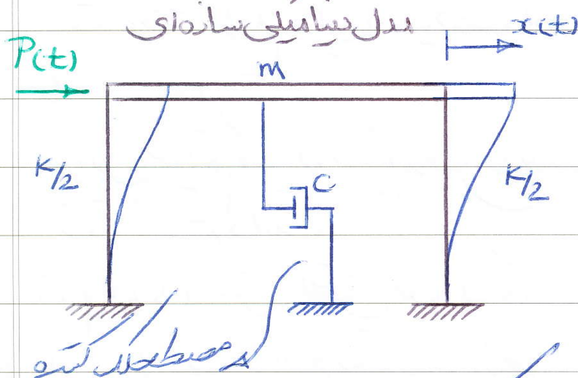
فصل اول :
مقدمه ای بر دینامیک سازه :

بار دینامیکی باری است که اندازه ، جهت و نقطه اثرش با زمان تغییر کند.



هدف : تحمل سازه در مقابل بار.

در مسائل استاتیکی نیروها و تنش ها را در المان ها حساب کرده و طراحی می کنیم.
در مسائل دینامیکی آنچه اهمیت دارد تغییر مکان است . با تغییر مکان نیروها و تنش ها را حساب کرده ، طراحی صورت می گیرد.



سختی ستون
- ارتفاع
- جنس
- صلبیت
- مقطع
- تکیه گاه

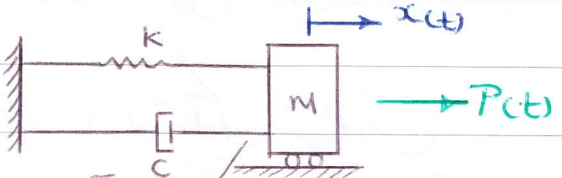
مقدار تغییر مکان به سختی ستون بستگی دارد.

یکی از عوامل بسیار مهم جرم ساختمان است.
عامل مهم دیگر میرایی سازه است که به اصطکاک کریستال های مصالح سازه بستگی دارد.

ابتدا باید معادله حرکت را تعیین کنیم.

معادله حرکت معادله‌ای است که از حل آن بتوان تابع حرکت (تغییر مکان) را بدست آورد.

مدل دینامیکی سازه‌ی قبل را به صورت زیر می‌توان نشان داد:



مدل دینامیکی سیستم یک درجه آزادی

$x(t)$ تابع حرکت جرم

چون سقف صلب است تنها در یک جهت حرکت داریم. پس یک درجه آزادی دارد.

هر مدل سیستم یک درجه آزادی را باید به صورت بالا درآورد. اگر این کار نشود اشتباه شده است.

قدم بعدی روش تعیین معادله حرکت می‌باشد. (معادله حرکت معادله‌ای است بر حسب تابع حرکت، که از حل مستقیم آن تابع حرکت بدست می‌آید)

روش‌های تعیین معادله حرکت:

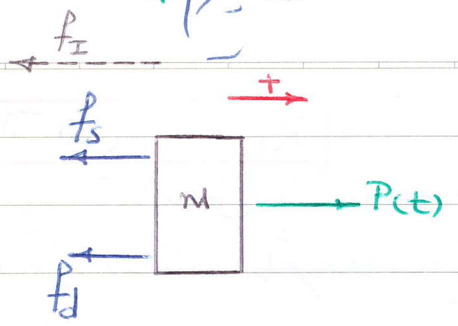
روش مستقیم:

این روش از کاربرد اعمال قانون دوم نیوتن بدست می‌آید.

قانون دوم نیوتن: کلیه نیروهای اعمالی بر جرم برابر است با جرم جسم ضربدر شتاب در جهت برآیند نیروها.

وقتی $x(t)$ در جهت مثبت است $\dot{x}(t)$ و $\ddot{x}(t)$ هم در همان جهت مثبت است.

* اینرسی را همانند نیرویی در خلاف جهت حرکت در نظر می‌گیریم *



جرم را در جهت $x(t)$ حرکت می‌دهیم. با این کار نیروهای داخلی و جهتشان مشخص می‌گردد.

اعمال قانون دوم نیوتن:

$$\Sigma F_x = m a_x = f_I \quad (1)$$

$$-f_d - f_s + P(t) = f_I \quad (2)$$

$$f_I + f_d + f_s = P(t) \quad (3)$$

f_I: نیروی اینرسی

معادله تعادل دینامیکی ←

این معادله، معادله حرکت است.

$$f_s = k\,x(t) \quad (4)$$

$$f_d = c\,\dot{x}(t) \quad (7)$$

$$f_I = m\,\ddot{x}(t) \quad (5)$$

اگر کمک فنر ماشین را با سرعت بیشتر نیرو وارد کنیم عکس العمل بیشتری داریم

پس $f_d \propto \dot{x}(t) \quad (6)$

c ← ضریب استهلاک

با جایگذاری روابط 4، 5، 7 در رابطه 3 خواهیم داشت:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t) \quad (8)$$

این معادله، معادله‌ی حرکت است. از نظر ریاضی هم معادله‌ی دیفرانسیل درجه دوم خطی است. علت خطی بودن آن این است که پارامترهای سمت چپ معادله ثابت هستند.

فرضاً اگر k تابعی از سرعت بود معادله غیرخطی می‌شد.

حل معادله حرکت:

۱) حالت اول: $\boxed{P_{(t)} = 0}$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \qquad (9)$$

این حالت، حالتی است که به سیستم تغییر مکان اولیه اعمال کنیم. این ارتعاش ارتعاشی است که در اثر حذف نیرو ایجاد می‌شود. در این صورت ارتعاش آزاد داریم.

به این دستگاه، دستگاه یک درجه آزادی با ارتعاش آزاد می‌گویند.

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (10)$$

تعریف‌های زیر را داریم:

$$\begin{cases} \frac{k}{m} = \omega_n^2 & (11) \quad \omega_n = \text{فرکانس طبیعی} \\ \frac{c}{m} = 2\xi\omega_n & (12) \quad \xi = \text{نسبت استهلاک بحرانی} \end{cases}$$

پس از جایگزین کردن روابط ۱۱ و ۱۲ در رابطه ۱۰ خواهیم داشت:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \qquad (13)$$

این معادله، معادله حرکت ارتعاش آزاد سیستم یک درجه آزادی است.

حل:

$$x_{(t)} = Xe^{\lambda t} \qquad (14)$$

فرض می‌کنیم $x_{(t)}$ جواب معادله باشد. (X عدد ثابت است)

$$\dot{x}_{(t)} = X\lambda e^{\lambda t} \qquad \ddot{x}_{(t)} = X\lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$\rightarrow Xe^{\lambda t}(\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2) = 0$$

اگر $Xe^{\lambda t} = 0$ باشد یعنی حرکتی نداریم. پس داخل پرانتز باید صفر باشد.

$$\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0 \quad (15)$$

$$\rightarrow \lambda_1 , \lambda_2 = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \quad (16)$$

$$\rightarrow x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \quad (17)$$

شرایط مرزی مربوط به مکان است. اما چون زمانی با زمان سروکار داریم با شرایط اولیه مواجه هستیم.

$$\begin{cases} x(t=0) = X_0 & \text{تغییر مکان اولیه} \\ \dot{x}(t=0) = \dot{X}_0 & \text{سرعت اولیه} \end{cases} \quad (18)$$

اگر تغییر مکان اولیه و سرعت اولیه صفر باشد حرکت اولیه نداریم. در غیر اینصورت حرکت اولیه را داریم.

۱) حالت اول (ارتعاش آزاد بدون استهلاک (هارمونیک ساده)):

با فرض اینکه استهلاک قابل صرفنظر کردن باشد: $c = \xi = 0$

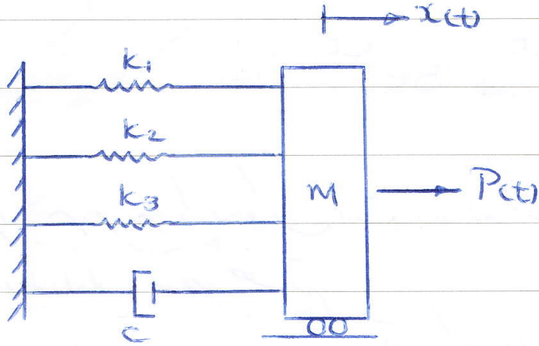
$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_n$$

$$\begin{cases} x(t) = Ae^{i\omega_n t} + Be^{-i\omega_n t} \\ x(t) = C\cos\omega_n t + D\sin\omega_n t \end{cases}$$ حرکت نوسانی هارمونیک ساده:

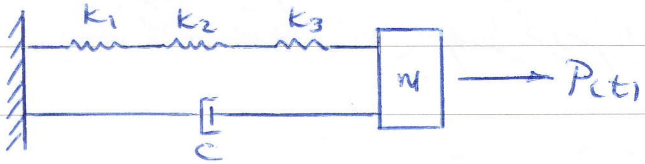
ω_n فرکانس طبیعی سیستم است. یعنی همواره اگر نیرویی به سازه اعمال شود و حرکت داشته باشیم این فرکانس همیشه وجود دارد.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

مسئله اول ۶ در صورتی که مدل یک درجه آزادی سیستم سازه ای به صورت زیر باشد ، مطلوبست تعیین معادله حرکت و هم چنین تابع تغییر مکان اگر $P(t)=0$ ، $k_1=k_2=k_3=k$ و $c=0$ باشد.



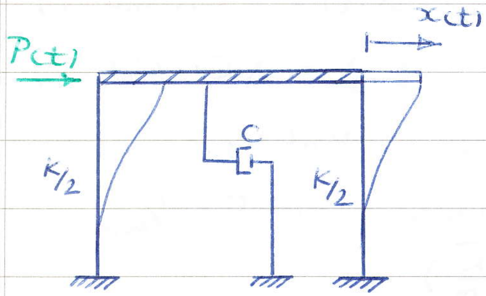
مسئله دوم ۶ مدل دینامیکی سیستم یک درجه آزادی بصورت شکل مقابل می باشد. مطلوبست تعیین معادله حرکت و هم چنین تابع تغییر مکان در صورتیکه $P(t)=0$ ، $k_1=k_2=k_3=k$ و $c=0$ باشد.



یادآوری

$$e^{i\beta x}=\cos\beta x+i\sin\beta x \qquad e^{-i\beta x}=\cos\beta x-i\sin\beta x$$

$$ax^2+bx+c=0 \longrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a} \quad (b'=b/2) \end{cases}$$



$$x(t) = C\cos\omega_n t + D\sin\omega_n t$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

اعمال شرایط اولیه:

$$\begin{cases} x(0) = X_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{X}_0 \end{cases}$$

$$x(0) = X_0 = C \Rightarrow C = X_0$$

$$\dot{x}(0) = \dot{X}_0 = D\omega_n \Rightarrow D = \frac{\dot{X}_0}{\omega_n}$$

$$\Rightarrow x(t) = X_0\cos\omega_n t + \frac{\dot{X}_0}{\omega_n}\sin\omega_n t$$

زمانی که هم سرعت اولیه و هم تغییر مکان اولیه صفر باشند حرکت نداریم.

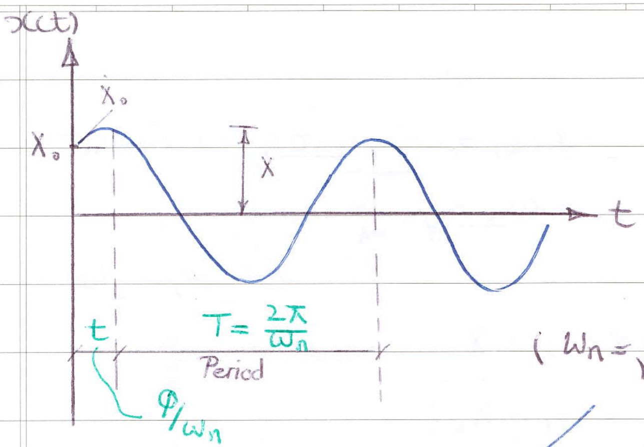
فرض:

$$x(t) = X\cos(\omega_n t - \varphi)$$

اگر رابطه بالا را بسط دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{cases} X = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{\dot{X}_0}{\omega_n}\right)^2} & \text{دامنه نوسان} \\ \varphi = tg^{-1}\left(\frac{\dot{X}_0}{\omega_n X_0}\right) & \text{زاویه فاز} \end{cases}$$

تمرین: مطلوبست تأیید روابط فوق.



$$x(t) = X\cos(\omega_n t-\varphi)$$
$$X = X\cos(\omega_n t-\varphi)$$
$$\omega_n t-\varphi = 0$$
$$\rightarrow t = \varphi/\omega_n$$

$$\left(\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

اگر مقدار $c=0$ باشد تا بی نهایت این حرکت را داریم.
فرکانس طبیعی به سختی و جرم بستگی دارد.

ساختمان های بلند سختی کمتری دارند. پس فرکانس آنها کم و پریودشان بالاست.

نواحی اطراف کانون، نوسان های ایجاد شده دارای فرکانس زیادی است
پس Period شان کم است و این امکان پدیده تشدید را ایجاد می کند.
(وقتی فرکانس زلزله با فرکانس سازه برابر باشد تشدید رخ می دهد)

فرکانس $\uparrow$ $\Rightarrow$ Period $\downarrow$

۲) حالت دوم (ارتعاش آزاد با استهلاک): $c\neq 0\ ,\ \xi<1$

$$\lambda_1,\lambda_2 = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2-1}$$
$$\lambda_1,\lambda_2 = -\xi\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

فرکانس استهلاکی $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

$$\Longrightarrow \lambda_1, \lambda_2 = -\xi\omega_n \pm i\omega_d$$

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} = Ae^{-\xi\omega_n t + i\omega_d t} + Be^{-\xi\omega_n t - i\omega_d t}$$

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}(C\cos\omega_d t + D\sin\omega_d t)$$

به این حرکت، حرکت نوسانی میرا گویند. با گذشت زمان حرکت، دامنه حرکت نوسانی کاهش می یابد

اعمال شرایط اولیه:

$$x(0) = X_0$$

$$\dot{x}(0) = \dot{X}_0$$

پس از جایگزین کردن شرایط اولیه در رابطه اصلی خواهیم داشت:

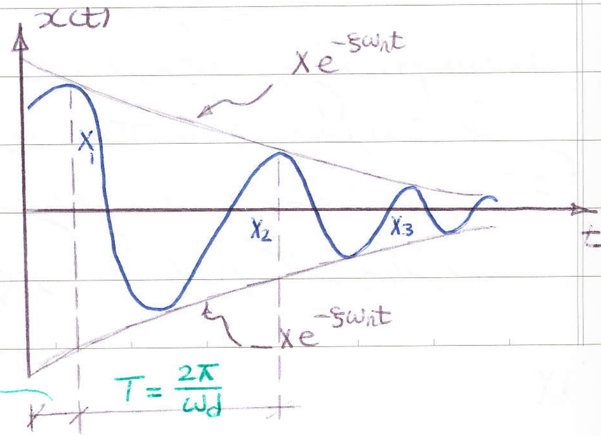
$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left(X_0\cos\omega_d t + \frac{\dot{X}_0 + \xi\omega_n X_0}{\omega_d}\sin\omega_d t\right)$$

$$x(t) = \underbrace{Xe^{-\xi\omega_n t}}_{\text{دامنه}}\cos(\omega_d t - \varphi)$$

$$\Longrightarrow \omega_d \simeq \omega_n$$

در بازه‌ی $2\% < \xi < 7\%$ تغییر دارد

$$\begin{cases} X = \left[\left(\dfrac{\dot{X}_0 + \xi\omega_n X_0}{\omega_d}\right)^2 + X_0^2\right]^{1/2} \\ \varphi = tg^{-1}\left(\dfrac{\dot{X}_0 + \xi\omega_n X_0}{\omega_d X_0}\right) \end{cases}$$



* پریود ثابت است فقط دامنه کاهش می یابد.

ضریب کاهش لگاریتمی :

$$\frac{X_k}{X_{k+1}} = \frac{X e^{-\xi \omega_n (kT)}}{X e^{-\xi \omega_n (k+1)T}} = \frac{1}{e^{-\xi \omega_n T}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{X_k}{X_{k+1}} = e^{\xi \omega_n \left(\frac{2\pi}{\omega_d}\right)}$$

ضریب کاهش $\delta = \ln \frac{X_k}{X_{k+1}} = 2\pi \xi \frac{\omega_n}{\omega_d}$

$$\omega_d = \sqrt{1-\xi^2} \cdot \omega_n \quad \Rightarrow \quad \delta = 2\pi \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$\delta \simeq 2\pi \xi$ برای ξ های کوچک :

$$\Rightarrow \quad \xi = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{X_k}{X_{k+1}}\right)$$

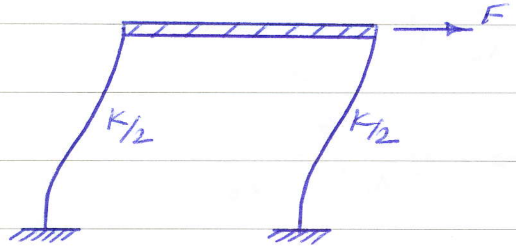
اگر بخواهیم رابطه فوق را برای حالتی عمومی تر، یعنی برای حالتی که n سیکل کامل بعد از دامنه X_k مورد نظر باشد بخواهیم داشت :

$$\xi = \frac{1}{2\pi n} \ln \frac{X_k}{X_{k+1}}$$

تمرین ۳: قاب یک طبقه شکل زیر مفروض است. در صورتیکه وزن قاب $W=200\,kips$ $(1\,kips = 1000\,lb)$ و پریود سازه $T=0.2\,s$ باشد مطلوبست تعیین تابع تغییر مکان در حالتیکه تغییر مکان اولیه $X_0 = 2\,in$ ، سرعت اولیه بصورت $\dot{X}_0 = 1.5\,in/sec$ باشد. مقدار حداکثر برش پایه را حساب کنید. حداکثر شتاب نیز را بدست آورید.

تمرین ۴ درصورتیکه در تمرین شماره ۱ مقدار نسبت استهلاک بحرانی ۲٪ و تغییر مکان اولیه 5 inch و سرعت اولیه صفر باشد مطلوبست تعیین تابع تغییر مکان و رسم تابع در دامنهٔ تغییر مکان تعداد ۵ سیکل کامل.

مثال: قاب شکل زیر مفروض است. درصورتیکه نیروی F مطابق شکل به آن اعمال گردد و پس از آن نیرو حذف شود دامنهٔ حرکت پس از یک رفت و برگشت 0.16 in باشد، مطلوبست تعیین:



۱) W وزن موثر

۲) فرکانس استهلاکی W_d

۳) C و ξ

۴) دامنه پس از ۵ سیکل کامل.

$T = 1.4\ sec$ $\quad F = 20,000\ lb$ $\quad X_0 = 0.20\ in$

۱) فرض $W_n \simeq W_d$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{kg}{mg}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{gk}{W}}}$$

$$\Rightarrow W = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 k \cdot g$$

$$F = kX_0 \Rightarrow k = \frac{F}{X_0} = \frac{20,000}{0.2} = 100,000\ lb/in$$

$$W = \left(\frac{1.4}{2\pi}\right)^2 (100000)(380) = 1.92 \times 10^6\ lb$$

۲) $$\omega_d = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1.4} \rightarrow \omega_d = 4.48\ rad/s$$

۳) $$\xi = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{X_k}{X_{k+1}} \rightarrow \xi = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{X_0}{X_1} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{0.2}{0.16}$$

$$= 0.0355 \rightarrow \xi = 3.55\%$$

$X_n = X_0 \left(\frac{X_1}{X_0}\right)^n$: دامنه‌ی n از شکل

$$c = 2\xi m \omega_n = 2(0.0355)\left(\frac{1.92\times10^6}{386}\right)(4.48)$$
$$= 1.58\times10^3 \ lb/in/s$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-(0.0355)^2} = \omega_n(0.999)^{1/2} \simeq \omega_n$$

فرض‌مان صحیح است.

۴)

$$\left.\begin{array}{l} \xi = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{X_k}{X_{k+1}} = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{X_0}{X_1} \\ \xi = \frac{1}{2\pi n}\ln\frac{X_k}{X_{k+n}} = \frac{1}{2\pi(6)}\ln\frac{X_0}{X_6} \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2\pi}\ln\frac{X_0}{X_1} = \frac{1}{2\pi(6)}\ln\frac{X_0}{X_6} \Rightarrow \left(\frac{X_0}{X_1}\right)^6 = \frac{X_0}{X_6}$$

$$\Rightarrow X_6 = X_0\left(\frac{X_1}{X_0}\right)^6 \Rightarrow X_6 = 0.2\left(\frac{0.16}{0.2}\right)^6 = 0.054 \ in$$

۳) حالت سوم $\xi \geq 1$ (ارتعاش آزاد با استهلاک بحرانی و فوق بحرانی)

الف) $\xi = 1$:

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2-1}$$

$\xi = 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\xi\omega_n$ ریشه مضاعف

$$\Rightarrow x(t) = Ae^{-\xi\omega_n t} + Bte^{-\xi\omega_n t}$$

این تابع، تابعی نمایی است. در این حالت حرکت داریم که دیگر نوسان نداریم
به این دلیل به این حالت ارتعاش آزاد با استهلاک بحرانی می‌گویند

$\xi = 1 \longrightarrow$ نسبت استهلاک بحرانی

(Critical Damped)

ب) $\xi > 1$:

$\lambda_{1,2} =$ ریشه‌های حقیقی

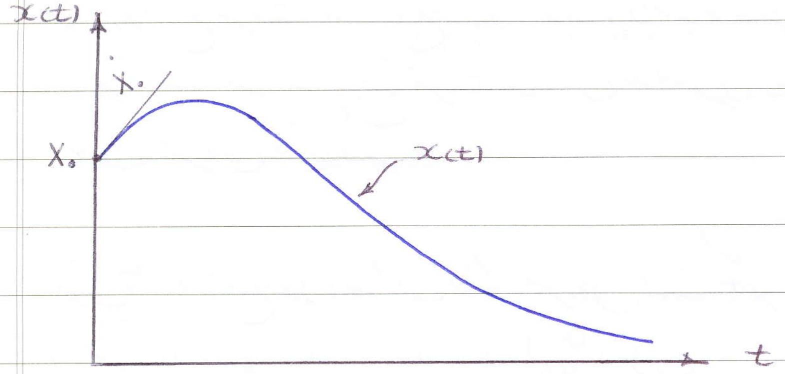
$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

در اینجا هم حرکت نوسانی نداریم. (Over Damped)

علت نوسانی نبودن وجود نیروی دارای c است و منفی بود.

به این حالت ارتعاش آزاد با استهلاک فوق بحرانی گویند.

تعیین ضرایب A, B :



$$\xi = \frac{c}{2m\omega_n} \qquad \xi = 1 = \xi_c \Rightarrow C_c$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{C_c}{2m\omega_n} \Rightarrow C_c = 2m\omega_n$$

بر حسب تعریف که ξ نسبت استهلاک بحرانی است پس داریم:

$$\xi = \frac{c}{C_c}$$

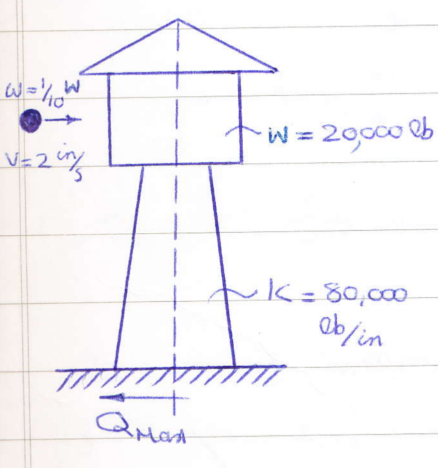
$$\rightarrow \xi = \frac{c}{2m\omega_n}$$

ξ ضریب استهلاک موجود به ضریب استهلاک بحرانی است.

اگر ضریب استهلاک c بزرگتر از ضریب استهلاک بحرانی (C_c) باشد سیستم را فوق بحرانی (Over Damped) می‌نامیم و اگر کوچکتر از C_c باشد سیستم را نوسانی (Under Damped) می‌گویند و حرکت سیستم نوسانی خواهد بود.

در صورتیکه $c \geq C_c$ باشد حرکت سیستم دیگر حرکتی ارتعاشی یا نوسانی نخواهد بود زیرا تابع حرکت یک تابع نمایی بوده و دامنه نوسان رو به میرایی می‌رود و در نهایت بدون هیچ حرکت نوسانی به صفر می‌رسد. این حالت را حالت فوق بحرانی می‌نامند.

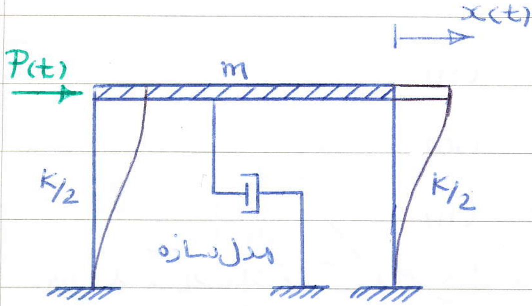
تمرین ۵) ۱) منبع آبی مطابق شکل مفروض است اگر وزن این منبع 20,000 lb و سختی پایه‌های منبع 80,000 (lb/in) فرض شود و این منبع تحت اثر نیرویی قرار گیرد که مقدار آن F = 16,000 lb باشد، مطلوبست تعیین دامنه حرکت پس از 3، 5، 10 سیکل. نسبت استهلاک بحرانی منبع، ضریب استهلاک، فرکانس طبیعی و فرکانس استهلاکی در صورتیکه دامنه نوسان پس از یک رفت و برگشت به 2/3 حالت اولیه کاهش یابد.

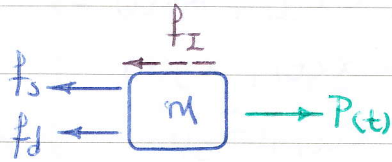


تمرین ۶) ۲) در صورتیکه در تمرین ۱ گلوله‌ای به وزن $w = 0.1W$ با سرعت $V = 2\ in/s$ به منبع اصابت کند و نوع تصادم الاستیک فرض شود مطلوبست تعیین تابع تغییر مکان، مقدار Max برش پایه و رسم منحنی در صورتیکه $\xi = 5\%$

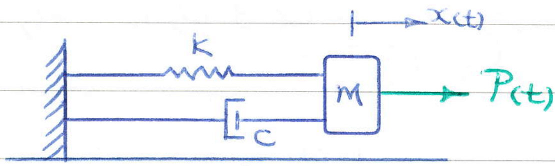
در نظر گرفته شود.

معادله حرکت قاب یک طبقه تحت اثر حرکت زمین 8



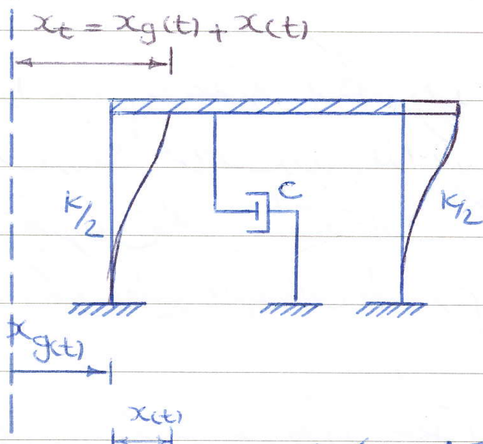


$$\sum F(x) = 0 \quad (1) \Rightarrow -f_I - f_d - f_s + P(t) = 0 \quad (2)$$



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t) \quad (3)$$

مدل دینامیکی سیستم یک درجه آزادی



$$P(t) = 0 \quad (4)$$

$$f_I + f_d + f_s = 0 \quad (5)$$

$$f_s = k\,x(t) \quad (6)$$

$$f_d = c\,\dot{x}(t) \quad (7)$$

f_s و f_d فرقی با حالت قبل ندارند.

زمانی نیرو در فنر یا مستهلک کننده ذخیره می شود که یک انتها نسبت به انتهای دیگر حرکت

داشته باشد.

$f_I = m\ddot{x}_t$ (8) نیروی اینرسی

شتابی که توسط زمین وارد می‌شود + شتاب ناشی از حرکت نسبی سقف به پایه = شتاب مطلق جرم

$m\ddot{x}_t + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0$ (۹)

$x_t = x(t) + x_g(t)$ (۱۰)

$\ddot{x}_t = \ddot{x}(t) + \ddot{x}_g(t)$ (۱۱)

$\ddot{x}_g(t)$ شتاب پایه است که در هر لحظه تغییر می‌کند.

از جایگذاری رابطه ۱۱ در ۹ داریم:

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{x}_g(t)$ (12)

(x همان $x(t)$ است)

اگر رابطه 12 را با 3 مقایسه کنیم این طور تلقی می‌شود که $m\ddot{x}_g(t)$ یک نیروی خارجی است.

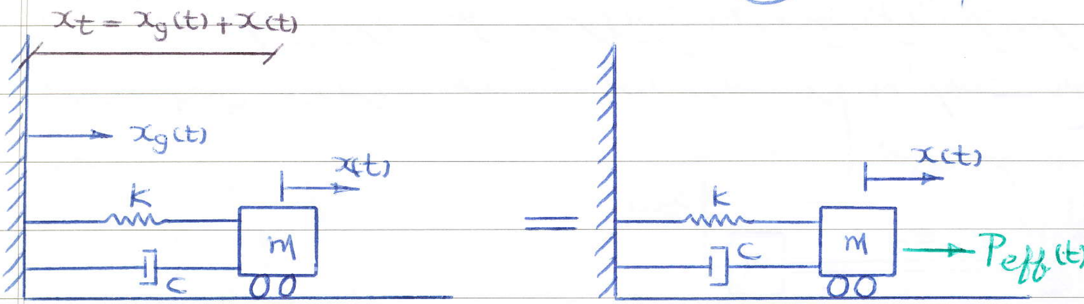
$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_{eff}(t)$ (13)

$P_{eff}(t) = -m\ddot{x}_g(t)$ نیروی موثر (14)

نیروی زلزله به جرم ساختمان بستگی دارد. هرچه جرم سازه بیشتر باشد نیروی وارد به سازه بیشتر خواهد بود. لذا تغییر مکان نسبی طبقات است. اگر Drift یک طبقه نسبت به دیگری زیاد شد، آن طبقه اصطلاحاً طبقه نرم می‌گردد و احتمال تخریب زیاد می‌گردد. تغییر مکان نسبی طبقات است. اگر Drift در یک طبقه Drift (تغییر شکل نسبی) در سازه اهمیت دارد.

شکل‌پذیری سازه یک خصیصه دارد که سبکتر از آن ساختمان در برابر انعطاف پذیری و تغییر شکل بالا می‌گردد.

ساختمان هایی که طبقه اول آن پیلوت دارد مثل دیوارهای برشی و بادبندها را برای افزایش فضای پارکینگ برمی دارند. طبقه نرم ایجاد شده ساختمان در هنگام زلزله روی طبقه اول تخریب می گردد.



مدل مکانیکی سیستم تحت اثر حرکت زمین

کافی است همان سیستم fix را حفظ کنیم و فقط نیروی موثر زلزله را اضافه کنیم
$x(t)$ حرکت جرم است نسبت به پایه.

سقف نسبت به پایه می تواند حرکت کند. جرم در طبقات متمرکز است. نیرو بین طبقات توزیع می شود.

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{1}{m} P_{eff}(t) \qquad (15)$$

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{1}{m} P_{eff}(t) \qquad (16)$$

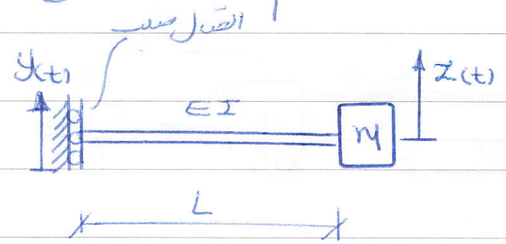
(نیروی زلزله علاوه بر جرم به شتاب زمین هم بستگی دارد. این شتاب وابسته به لرزه خیزی منطقه است. باید سازه ها را نوعی مقاوم سازی کرد تا بتوانند در مقابل زلزله مقاومت کنند.)

(زمان کل نسبت به زلزله شامل دو قسمت است. ۱) زمانی که امواج خودشان را به سطح می رسانند. ۲) زمانی که اثر آن را به سازه منتقل می کنند)

سمت دوم معمولاً بیشتر از ۱۵ ثانیه است. این زمان (سمت دوم) مدت دوام زلزله است که هر چه بیشتر باشد قدرت تخریب هم بیشتر است.

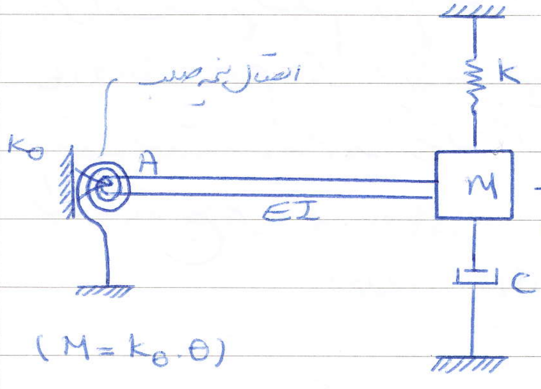
۷

تمرین ۱: تیر یکسر گیردار شکل زیر مفروض است. درصورتیکه تکیه‌گاه این تیر تحت اثر حرکت $y(t)$ قرار گیرد، مطلوبست معادله حرکت جرم m برحسب تابع $z(t)$

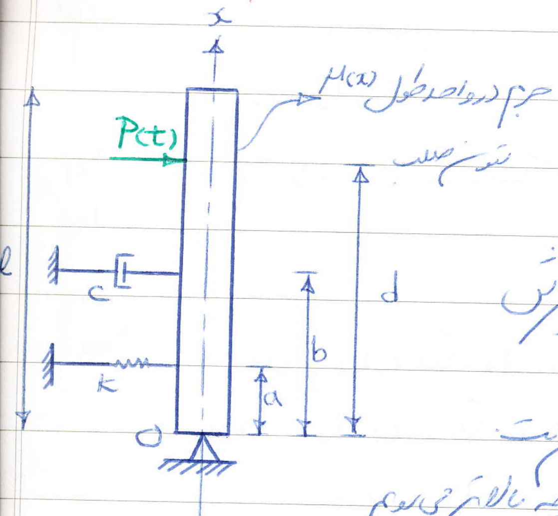


۸

تمرین ۲: سازه شکل مقابل مفروض است. درصورتیکه تیر AB بی‌وزن بوده و در تکیه‌گاه A علاوه بر لولا توسط فنر پیچشی مقید شده باشد، معادله حرکت جرم m را برحسب $y(t)$ بدست آورید. (سختی فنر k_θ است)



معادله حرکت در سیستم مختصات زمانی برای اجسام با جرم گسترده:



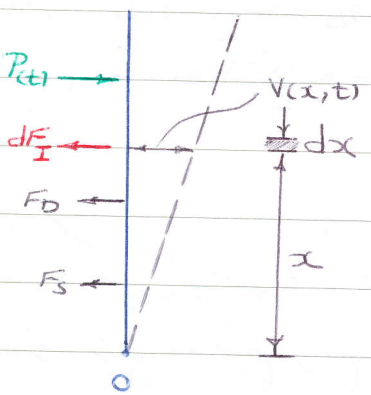
الف) جسم صلب:

آنچه می‌خواهیم معادله حرکت جسم در حالت حرکت صلبی است.

در حالت کلی تابع تغییر مکان x و متغیرش t بود.

حال اولین قدم تعیین تابع تغییر مکان است. در نقطه O تغییر مکان صفر است هر چه بالاتر می‌رویم بیشتر می‌شود. پس تابع تغییر مکان وابسته به مکان و زمان است. این تابع تغییر مکان را با V نشان می‌دهند.

$V(x,t)$ ← تابع تغییر مکان



$$V(x,t) = \psi(x) \cdot Y(t)$$

$\psi(x)$ = تابع شکلی یا مکانی

$Y(t)$ = تابع زمانی

تابع مکانی را طوری می‌گیرند که مقدار ماکزیمم آن واحد باشد. $\psi(L) = 1$

$$\Longrightarrow \psi(x) = x/L$$

آنچه لازم است به دست آید $Y(t)$ است.

$$V(x,t) = x/L \cdot Y(t)$$

تعیین معادله حرکت: (روش المان)

$$F_I + F_D + F_S = P(t)$$

در حالت جرم متمرکز داشتیم:

$$M_I + M_D + M_S = M_{p(t)} \qquad (6)$$

برای جرم گسترده داریم:
حول O ممان می‌گیریم:

$$M_{p(t)} = P_{(t)} \cdot d \qquad M_D = F_D \cdot b \qquad -M_S = F_S \cdot a$$

M_I از جنس اینرسی است. چون جرم گسترده است پس باید المان dx، dm را بگیریم.

جرم: $dm = \mu(x) \cdot dx \qquad (10)$

$$dF_I = dm \cdot \ddot{v}(x,t) \overset{(11)}{=} \mu(x)\, dx\, \ddot{v}(x,t) \qquad (12)$$

$$\Rightarrow dM_I = dF_I \cdot x = \mu(x) \cdot x\, \ddot{v}(x,t)\, dx \qquad (13)$$

$$\Rightarrow M_I = \int_0^L \mu(x) \cdot x \cdot \ddot{v}(x,t)\, dx \qquad (14)$$

$$M_{p(t)} = P_{(t)} \cdot d \qquad (7)$$

$$M_D = F_D \cdot b = c\, \dot{V}(b,t) \cdot b \rightarrow M_D = c\frac{b^2}{L}\dot{Y}(t) \qquad (8)$$

$$M_S = F_S \cdot a = k\, V(a,t) \cdot a \rightarrow M_S = k\frac{a^2}{L}Y(t) \qquad (9)$$

$$M_I = \ddot{Y}(t)\int \mu(x)\frac{x^2}{L}\,dx \qquad (15)$$

پس از جایگذاری روابط 7، 8، 9 و 15 در رابطه 6 خواهیم داشت:
(دو طرف را بر L تقسیم کرده‌ام)

$$\underbrace{\ddot{Y}\int_0^L \mu(x)\left(\frac{x}{L}\right)^2 dx}_{M^*\ (\text{جرم})} + \underbrace{c\left(\frac{b}{L}\right)^2}_{c^*}\dot{Y}(t) + \underbrace{k\left(\frac{a}{L}\right)^2}_{k^*}Y(t) = P(t)\cdot \frac{d}{L}$$

$$M^*\ddot{Y}(t) + C^*\dot{Y}(t) + K^*Y(t) = P^*(t)$$

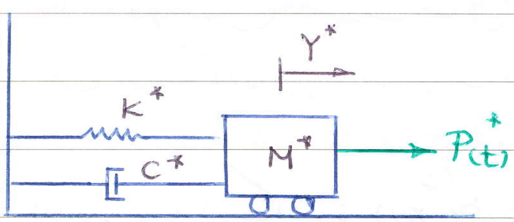
$$M^* = \int_0^L \mu(x) \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx$$ جرم معادل

$$C^* = C \left(b/L\right)^2$$ ضریب استهلاک معادل

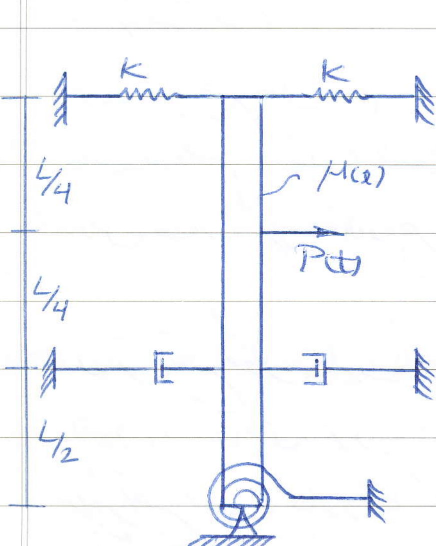
$$K^* = K \left(a/L\right)^2$$ ضریب سختی معادل

$$P^*_{(t)} = P_{(t)}\, d/L$$ نیروی معادل

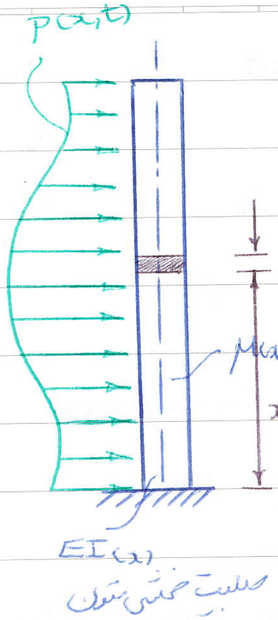
بر این اساس سیستم ما معادل شکل حالت زیر است:

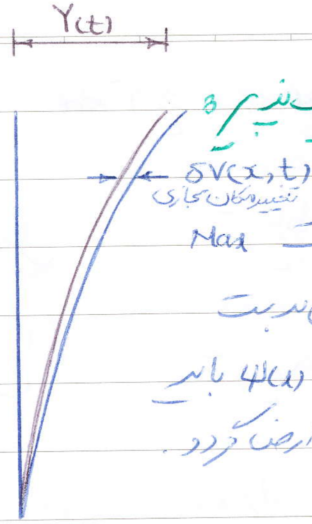


بازم این یک سیستم دو بعدی است ولی یک درجه آزادی داریم.



*تمرین ۹: ستون صلبی دارای تکیه‌گاه نیم مفصل می‌باشد که توسط فنرهایی در انتهای آن (آزاد آن) قرار دارند مهار شده است. مقاومت نقش مهمی در حرکت این سیستم در صورتیکه $\mu(x)$ جرم در واحد طول این ستون صلب باشد. در حالتی که $\mu(x) = \mu$ باشد معادله حرکت را بدست آورید و سیستم معادل یک درجه آزادی آن را نشان دهید.





ب) جسم انعطاف پذیر :

مقدار $\psi(x)$ در حالت Max واحد است. برای بدست آوردن معادله $\psi(x)$ باید شرایط مرزی ارضا گردد.

در نقطه $x=0$ تابع و مشتق اش صفر است و در $x=L$ تابع برابر یک است.

پس معادله ما بصورت مقابل می گردد :

$$\psi(x) = \frac{x^2}{L^2}$$

پس بدست آوردن $\psi(x)$ ساده است. مهم $Y(t)$ است.

تعیین معادله حرکت : (روش کار مجازی)

بی نهایت جرم
بی نهایت تغییر مکان } ← بی نهایت درجه آزادی

ما می خواهیم مسئله را بصورت یک سیستم معادل یک درجه آزادی حل کنیم. روش ساده تری علاوه بر روش المان وجود دارد.

روش تغییر مکان مجازی (کار مجازی) :

اصل کار مجازی بیان میکند که اگر سیستمی دارای تعادل استاتیکی باشد برای تغییر مکان مجازی کل کار انجام شده برابر صفر است.

و برای تغییر مکان مجازی بصورت زیر است.

۱) با قیود سازه هماهنگ باشد (جابجایی در صورت صفر بودن صفر باشد و جابجایی Max ، Max باشد)

۲) تغییر مکان کوچک باشد تا سیستم در حال تعادل بماند.

(Internal) (External)

کارمجازی نیروهای داخلی δW_E = کارمجازی نیروهای خارجی δW_I

براساس اصل کارمجازی، کار مجازی انجام شده توسط نیروهای داخلی را می‌توان برابر کارمجازی انجام شده توسط نیروهای خارجی دانست.

$p(x,t)$ نیرو در واحد طول است. شدت نیرو است.

تنش دو نوع است ← تنش فشاری (فشار) ، تنش کششی.

کارمجازی نیروهای خارجی $\delta W_E = \int_0^L \overbrace{p(x,t)\,dx}^{\text{نیرو}} \; \overbrace{\delta v(x,t)}^{\text{تغییر مکان}}$ (3)

کار ناشی از برش در مقابل خمش در تیرهای طویل بسیار کم است. بنابراین قابل اغماض است.

(4) به علت خمش ← کارمجازی نیروهای داخلی $\delta W_{I_1} = \int m(x)\,\delta d\theta$

چون حالت مجازی $d\theta$ را بحث می‌کنیم پس $\delta d\theta$ داریم. (کارمجازی به علت $\delta v(x,t)$ بوده است)

(5) به علت نیروی اینرسی ← کارمجازی نیروهای داخلی $\delta W_{I_2} = \int f_I(x,t)\,dx \;\; \delta v(x,t)$

$f_I(x,t)$ = شدت نیروی اینرسی (در نقطه x در لحظه t)

$$\theta = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \rightarrow d\theta = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\,dx \qquad (6)$$

$$\delta d\theta = \frac{\partial^2 \delta v(x,t)}{\partial x^2}\, dx \qquad (7)$$

$$\frac{M(x)}{EI(x)} = \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \Rightarrow M(x) = EI(x)\, \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \qquad (8)$$

1)
$$\begin{cases} \delta v(x,t) = \psi(x) . \delta Y(t) & (1) \\ v(x,t) = \psi(x) . Y(t) & (2) \end{cases}$$

$$\delta W_{I_1} = \int EI(x) \frac{d^2\psi}{dx^2} Y(t) \left[\frac{d^2\psi}{dx^2}\, \delta Y(t)\right] dx$$

$$\Rightarrow \delta W_{I_1} = Y(t) . \delta Y(t) \int_0^L EI(x) \left[\frac{d^2\psi}{dx^2}\right]^2 dx \qquad (9)$$

2) $f_I(x,t) =$ شدت نیروی اینرسی $\qquad f_I(x,t) . dx \rightarrow$ نیروی اینرسی

$$f_I(x,t) = \mu(x)\, \ddot{v}(x,t) = \mu(x)\, \psi(x)\, \ddot{Y}(t) \qquad (12)$$

$$\delta W_{I_2} = \ddot{Y}(t) \int \mu(x) . \psi(x) \left[\psi(x) . \delta Y(t)\right] dx$$

$$\delta W_{I_1} = \ddot{Y}(t)\, \delta Y(t) \int_0^L \mu(x) \left[\psi(x)\right]^2 dx \qquad (10)$$

3)
$$\delta W_E = \delta Y(t) \int_0^L p(x,t)\, \psi(x)\, dx \qquad (11)$$

با استفاده از اصل کار مجازی خواهیم داشت:

$$\delta W_{I_1} + \delta W_{I_2} = \delta W_E \qquad (13)$$

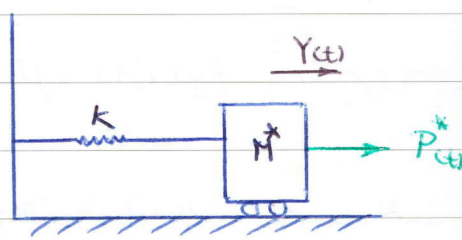
$$\ddot{Y}(t).\delta Y(t)\int_0^l \mu(x)\,(\psi(x))^2 dx + Y(t).\delta Y(t)\int_0^l EI\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)^2 dx = \delta Y(t)\int_0^l p(x,t)\,\psi(x)\,dx \qquad (14)$$

از آنجاکه $\delta v(x,t)$ مقداری اختیاری و غیر صفر می‌باشد، بنابراین می‌توان در رابطه 14، $\delta Y(t)$ را از دو طرف معادله حذف نمود. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\ddot{Y}\int_0^L \mu(x)\,[\psi(x)]^2 dx + Y\int_0^l EI(x)\left[\frac{d^2\psi}{dx^2}\right]^2 dx = \int_0^l p(x,t)\,\psi(x)\,dx$$

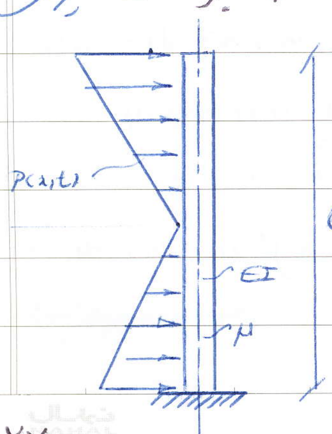
$$M^*\ddot{Y} + K^*Y = P^*_{(t)} \qquad (15)$$

جرم معادل $M^* = \int_0^L \mu(x)\,[\psi(x)]^2 dx$



سختی معادل $K^* = \int_0^L EI(x)\left[\frac{d^2\psi}{dx^2}\right]^2 dx$

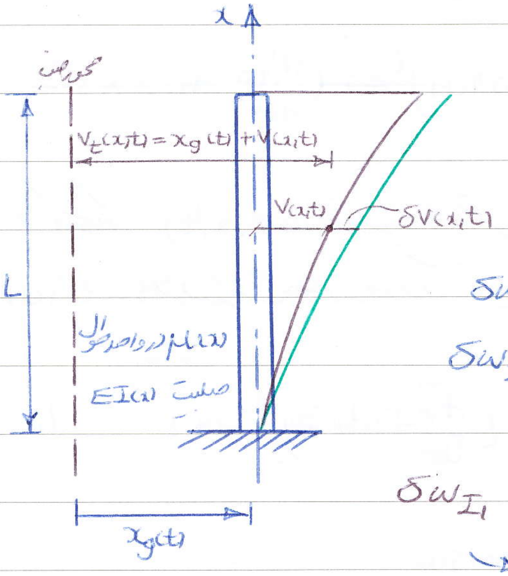
نیروی معادل $P^*_{(t)} = \int_0^L p(x,t)\,\psi(x)\,dx$



تمرین ۱: ستون طره‌ای نشان داده شده در شکل مقابل مفروض است. در صورتیکه EI و μ در طول ستون ثابت فرض شود، مطلوبست تعیین معادله حرکت، جرم و سختی و نیروی معادل. تابع شکلی $\psi(x)$ را بصورت $1-\cos\frac{\pi x}{2l}$

معادله حرکت اجسام الاستیک با جرم گسترده تحت اثر حرکت زمین :

(با استفاده از روش کار مجازی)



$$\begin{cases} V(x,t) = \psi(x) \, . \, Y(t) & (16) \\ \delta V(x,t) = \psi(x) \, . \, \delta Y(t) & (17) \end{cases}$$

$$\delta W_E = \delta W_I \quad (18)$$

چون نیروی خارجی نداریم : $\delta W_E = 0$ (19)

کار مجازی نیروهای داخلی $\delta W_I = \delta W_{I_1} + \delta W_{I_2}$ (20)

$$\delta W_{I_1} = Y . \delta Y \int_0^L EI(x) \left[\frac{d^2\psi}{dx^2}\right]^2 dx \quad (21)$$

کار مجازی نیروهای داخلی (ممان خمشی)

$$\delta W_{I_2} = \int_0^L f_I(x,t) \, \delta V(x,t) \, dx \quad (22)$$

کار مجازی نیروهای اینرسی :

شدت نیروی اینرسی $\quad f_I(x,t) = \mu(x) \, . \, \ddot{V}_t(x,t) \quad$ (23)

شتاب مطلق نقطه

$$V_t(x,t) = V(x,t) + x_g(t) \quad (24)$$

$$\delta W_{I_2} = \int_0^L \mu(x) \left[\ddot{V}(x,t) + \ddot{x}_g(t)\right] \psi(x) \, \delta Y \, . \, dx \quad (25)$$

$$= \int_0^L \mu(x) \, . \, \ddot{Y}(t) \left[\psi(x)\right]^2 \delta Y \, . \, dx + \int_0^L \mu(x) \, \ddot{x}_g(t) \, \psi(x) \, \delta Y \, . \, dx \quad (26)$$

$$= \ddot{Y}(t) \, . \, \delta Y \int_0^L \mu(x) \left[\psi(x)\right]^2 dx + \ddot{x}_g \, \delta Y(t) \int_0^L \mu(x) \, \psi(x) \, dx$$

$$\Rightarrow \delta W_{I_2} = \ddot{Y}(t) \, . \, \delta Y \int_0^L \mu(x) \left[\psi(x)\right]^2 dx + \ddot{x}_g \, \delta Y(t) \int_0^L \mu(x) \, \psi(x) \, dx \quad (27)$$

$$\delta W_{I_1} + \delta W_{I_2} = \delta W_E \qquad (28)$$

$$\ddot{Y}.\delta Y \int_0^L \mu(x)\,[\psi(x)]^2\,dx + Y.\delta Y \int_0^L EI(x)\left[\frac{d^2\psi}{dx^2}\right]^2 dx = -\delta Y.\ddot{x}_g \int_0^L \mu(x)\,\psi\,dx$$

(29)

در رابطه 29 چون مقدار تابع $\delta Y(t)$ اختیاری و مخالف صفر می باشد، بنابراین خواهیم داشت.

سختی

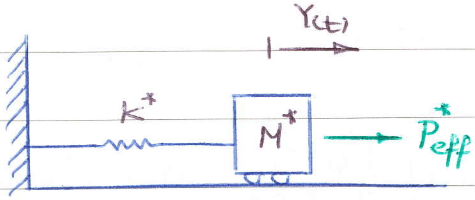
$$\underbrace{\ddot{Y}\int_0^L \mu(x)\,[\psi(x)]^2\,dx}_{M^*} + \underbrace{Y\int_0^L EI(x)\left[\frac{d^2\psi}{dx^2}\right]^2 dx}_{K^*} = -\ddot{x}_g(t)\underbrace{\int_0^L \mu(x)\,\psi(x)\,dx}_{\bar{K}} \qquad (30)$$

$$M^*\ddot{Y}(t) + K^* Y(t) = P^*_{eff}(t) \qquad (31)$$

$$\begin{cases} M^* = \int_0^L \mu(x)\,[\psi(x)]^2\,dx & \text{جرم معادل} \quad (32) \\ K^* = \int_0^L EI(x)\left[\dfrac{d^2\psi}{dx^2}\right]^2 dx & \text{سختی معادل} \quad (33) \\ \bar{K} = \int_0^L \mu(x).\psi(x).dx & \text{ضریب تحریک زلزله} \quad (34) \\ P^*_{eff} = -\bar{K}\,\ddot{x}_g(t) & (35) \end{cases}$$

هر چه $\bar{K}$ بیشتر باشد نیروی معادل بیشتر است.

اگر فقط جرم و شکل داشته باشیم اثرش بیشتر از شکل سختی است. (اثر زلزله)



اثر استهلاک در معادله حرکت:

اگر در سیستم استهلاک موجود باشد رابطه معادله حرکت (31) در حالت کلی بصورت رابطه زیر درخواهد آمد.

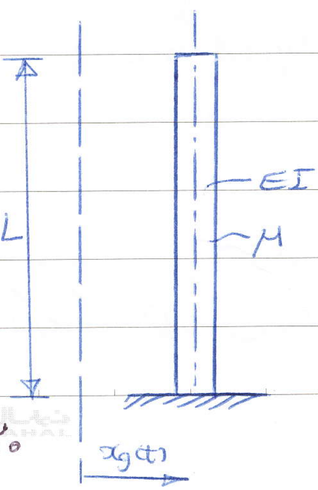
$$M^*\ddot{Y}(t) + C^*\dot{Y}(t) + K^*Y(t) = P^*_{eff}(t) \qquad (36)$$

که ξ نسبت استهلاک بحرانی از رابطه زیر بدست خواهد آمد.

$$\xi = \frac{C^*}{2M^*\omega} \qquad (37) \qquad\qquad \omega_{\text{فرکانس طبیعی}} = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}} \qquad (38)$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{Y}(t) + 2\xi\omega\dot{Y}(t) + \omega^2 Y(t) = \frac{1}{M^*}P^*_{eff}(t) \qquad (39)$$

مثال: برجی به شکل مقابل مفروض است. در صورتیکه M جرم در واحد طول و همچنین EI صلبیت خمشی در طول آن ثابت و یکنواخت باشد و تابع شکلی بصورت زیر باشد $\psi(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2L}$ مطلوبست معادله حرکت سیستم نشان داده شده در اثر حرکت زمین.



حل همین تمرین جرم معادل، سختی معادل و نیروی معادل.

$V(x,t) = \psi(x)\, Y(t) \qquad \psi(x) = 1 - \cos\dfrac{\pi x}{2L}$

$M^{*} \ddot{Y}(t) + k^{*} Y(t) = P^{*}_{eff}(t)$

$M^{*} = \int_0^L \mu(x) [\psi(x)]^2 dx = \mu \int_0^L (1 - \cos\dfrac{\pi x}{2L})^2 dx = 0.228\, \mu L$

$k^{*} = \int_0^L EI(x) [\dfrac{d^2\psi}{dx^2}]^2 dx = EI \int_0^L [\dfrac{\pi^2}{4L^2} \cos\dfrac{\pi x}{2L}]^2 dx$

$= \dfrac{\pi^4}{32} \dfrac{EI}{L^3}$

$\bar{k} = \int_0^L \mu(x)\, \psi(x)\, dx$ ضریب تحریک زلزله

$\bar{k} = \mu \int_0^L (1 - \cos\dfrac{\pi x}{2L}) dx = 0.364\, \mu L$

$P^{*}_{eff} = -\bar{k}\, \ddot{x}_g = -0.364\, \mu L\, \ddot{x}_g(t)$

پس از جایگزین کردن مقادیر جرم معادل، سختی معادل و نیروی موثر معادل در رابطه ۶ اصل خواهیم داشت:

$0.228\, \mu L\, \ddot{Y}(t) + \dfrac{\pi^4}{32} \dfrac{EI}{L^3} Y(t) = -0.364\, \mu L\, \ddot{x}_g(t)$

$\psi(x) = \dfrac{x^2}{L^2}$ تابع شکلی دیگر

$k^{*} = EI \int_0^L (\dfrac{2}{L^2})^2 dx = \dfrac{4EI}{L^3}$

$M^{*} = \mu \int_0^L \dfrac{x^4}{L^4} dx = \dfrac{\mu L}{5} = 0.2\, \mu L$

$\bar{k} = \mu \int_0^L \dfrac{x^2}{L^2} dx = \dfrac{\mu L}{3}$

$0.2\, \mu L\, \ddot{Y}(t) + \dfrac{4EI}{L^3} Y = -\dfrac{\mu L}{3} \ddot{x}_g(t)$

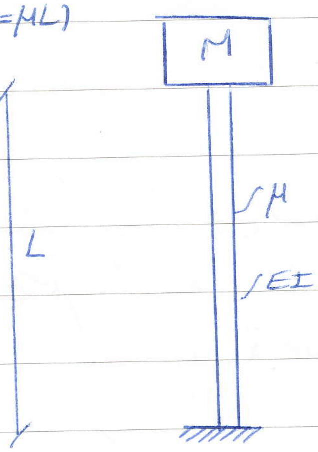
اگر ما توابع شکلی مختلف داشته باشیم چه معیاری برای انتخاب بهترین $\psi(x)$ وجود دارد؟

$$\omega_1^2=\frac{K_1^*}{M_1^*}=\frac{3.044}{0.228}\,\frac{EI}{\mu L^4}=13.35\,\frac{EI}{\mu L^4}\rightarrow \omega_1=3.65\sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}}$$

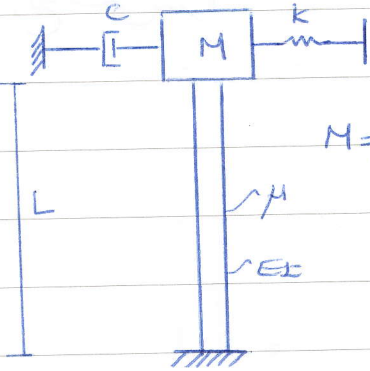
$$\omega_2^2=\frac{K_2^*}{M_2^*}=\frac{4\,EI}{0.2\,\mu L^4}=20\,\frac{EI}{\mu L^4}\longrightarrow \omega_2=4.47\sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}}$$

* اگر تابع، تابع دقیق نباشد فرکانس بیشتر می گردد. پس اگر تابع دقیق داشته باشیم کمترین فرکانس را با توجه به تابع خواهیم داشت.

$(M=\mu L)$



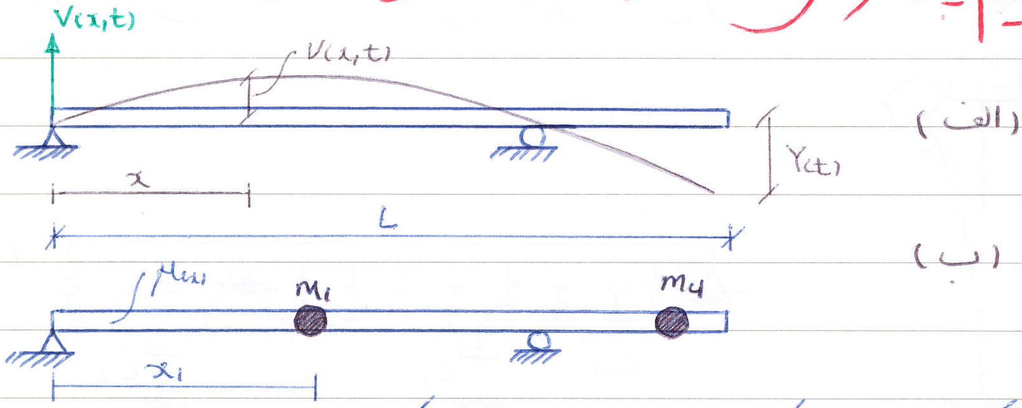
تمرین ۱۱: سازه برجی بصورت شکل مقابل مدل شده است. درصورتیکه μ , EI در طول برج ثابت در نظر گرفته شود، مطلوبست تعیین معادله حرکت جرم معادل و سختی معادل، جرم صوری، ضریب تحریک بارگذاری و نیروی مؤثر معادل. اگر این برج تحت اثر حرکت زمین با شتاب $\ddot{x}_g(t)$ قرار گرفته باشد.



$M=\mu L$

تمرین ۱۲: سازه برجی زیر شکل مقابل مدل شده است. مطلوبست تعیین معادله حرکت، سختی، جرم و نیروی مؤثر معادل و ضریب استهلاک معادل درصورتیکه سازه تحت اثر حرکت زمین قرار گرفته باشد.

تعمیم پارامترهای معادله حرکت در حالت کلی :



معادله حرکت هر سیستم یک درجه آزادی را هر اندازه که بغرنج و پیچیده باشد همواره می توان به شکل زیر نوشت.

$$M^*\ddot{Y}(t) + C^*\dot{Y}(t) + k^*Y(t) = P^*(t)$$

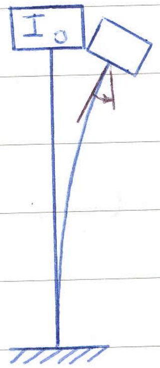
که در این رابطه $Y(t)$ مختصات تعمیم یافته منحصری است که حرکت سیستم را تبیین می کند.

یک سیستم یک درجه آزادی را در نظر بگیرید که دارای یک شکل تغییر مکان فرضی باشد. تغییر مکان ها را در هر نقطه برحسب مختصات تعمیم یافته $Y(t)$ می توان از رابطه $V(x,t) = \psi(x) \cdot Y(t)$ محاسبه کرد.

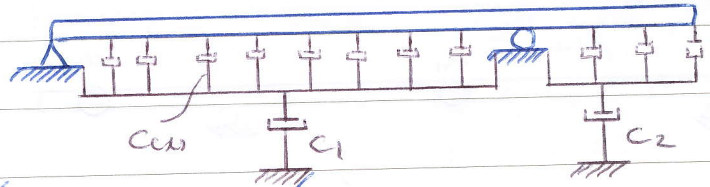
اثر ممان اینرسی جرمی حاصل از چرخش را هم باید همراه با اثر بارهای متمرکز در M^* لحاظ کرد.

$$M^* = \int_0^L \mu(x)\,[\psi(x)]^2\,dx + \sum_i m_i\,\psi_i^2 + \sum I_{o_i}\,(\psi_i')^2$$

مثال: اینرسی را وقتی استفاده می کنیم که سازه سنگین و بسیار بلند باشد (مثل برج میلاد)



(ج)

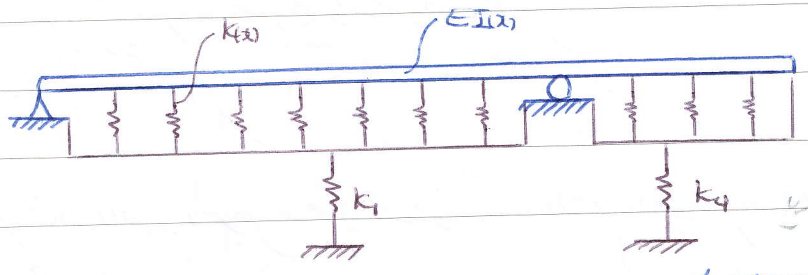


سازه (ج) نشان می دهد که سیستم دارای استهلاک گسترده و موضعی است.

استهلاک تعمیم یافته که ناشی از استهلاک های گسترده و مستهلک کننده های موضعی c_i در شکل (ج) می باشند.

$$C^* = \int_0^L c(x)\,[\psi(x)]^2\,dx + \sum_i c_i\,\psi_i^2$$

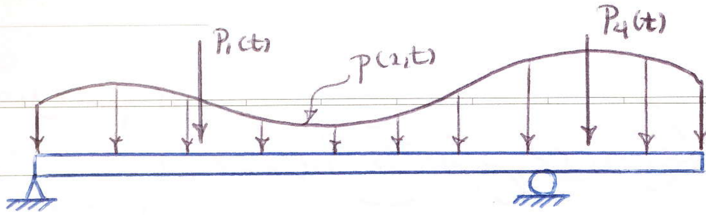
(د)



بپرسیم که این فنرها سری حساب شده یا موازی؟

برای سیستم، سیستم الاستیک نوشته. سختی تعمیم یافته از سیستم الاستیک ناشی خمش و فنرهای موضعی برابر است با:

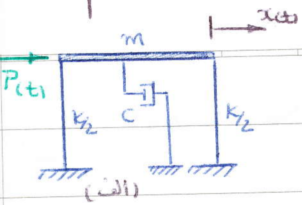
$$K^* = \int_0^L EI(x)\left[\frac{d^2\psi}{dx^2}\right]^2 dx + \int_0^L k(x)\,[\psi(x)]^2\,dx + \sum k_i\,\psi_i^2 + \sum k_\theta\,(\psi_i')^2$$



$$P^* = \int_0^L p(x,t)\,\psi(x)\,dx + \sum_i P_i \psi_i$$

$$\bar{K} = \int_0^L \mu(x) \cdot \psi(x)\,dx + \sum m_i \psi_i$$

حمید کاظم

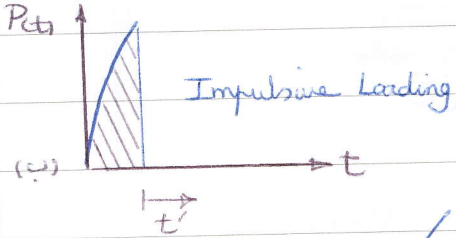


«فصل دوم»

۱) پاسخ سیستم تکدرجه آزادی تحت اثر نیروهای دینامیکی :

الف) پاسخ سیستم تکدرجه آزادی تحت اثر بارگذاری ضربه‌ای :

مشخصه بارگذاری ضربه‌ای آنست که در زمان کوتاهی نیروی زیادی به سازه اعمال گردد. (کمتر از ۱/۵ پریود سازه)



مقدار ضربه مساحت زیر منحنی بارگذاری ضربه‌ای

$\int p(t)\,dt =$ مقدار ضربه

(ایمپالس ضربه ← نیرو × زمان)

در این حالت به سیستم سرعت اولیه‌ای وارد می‌کنیم

$$P(t) = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow P(t)\cdot dt = m\,dv \rightarrow \int P(t)\cdot dt = \int m\,dv$$

$$\rightarrow \int P(t)\cdot dt = mv = m\dot{X}_0 \Rightarrow \dot{X}_0 = \frac{1}{m}\int P(t)\cdot dt$$

** در اثر ضربه سرعت به سیستم القا می‌گردد. سپس سیستم به سیستم با ارتعاش آزاد تبدیل می‌گردد.

فرض ← $\xi = 0$ (بدون استهلاک)

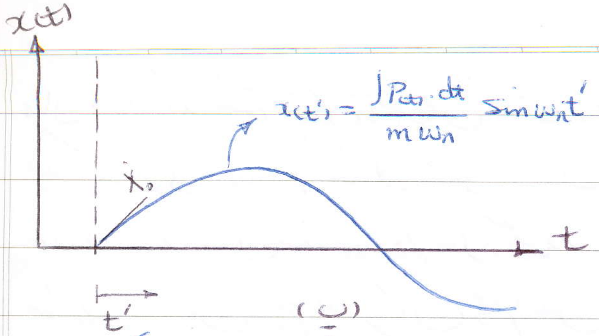
$X_0 = 0$ است.

$$x(t) = X_0\cos\omega_n t + \frac{\dot{X}_0}{\omega_n}\sin\omega_n t$$ (حرکت نوسانی با ارتعاش آزاد)

$$\Rightarrow x(t) = \frac{\int P(t)\cdot dt}{m\omega_n}\sin\omega_n t'$$

* t' در معادله $x(t)$ از زمانی است که اثر ضربه تمام شده است.

* اگر زمان اعمال نیرو در حد $t_d < 1/5\,T$ باشد اثر نیرو را ضربه‌ای در نظر می‌گیریم.



واکنش نوعی بار با فاصله زمانی خیلی کم از طریق روش ارتعاش آزاد بدست می آید. درصورتیکه نیروی $P(t)$ در فاصله زمانی بسیار کم یعنی $(t_1 \ll T)$ که T پریود سازه است به سیستم اعمال گردد، می توان فرض کرد که هیچگونه تغییر اساسی در تغییرات سازه در فاصله زمانی کم بوجود نمی آید $(x_0=0)$ ولی در عوض تغییری در سرعت سیستم بوجود می آید که با استفاده از رابطه اندازه حرکت می توان آن را بدست آورد.

درصورتیکه در این حالت استهلاک موجود باشد پاسخ سازه در اثر شرایط اولیه $x_0 = 0$ و $\dot{x}_0 = \frac{1}{m}\int P\,dt$ به صورت زیر در خواهد آمد.

$$x(t) = \frac{\int P(t)\,dt}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_n t'} \cdot \sin \omega_d t'$$ (ارتعاش آزاد با استهلاک)

تمرین ۱۳: برج مخابراتی شهری بصورت سازه مقابل مدل شده است. درصورتیکه:

$W = Mg = 100\ kips$, $L = 100\ ft$

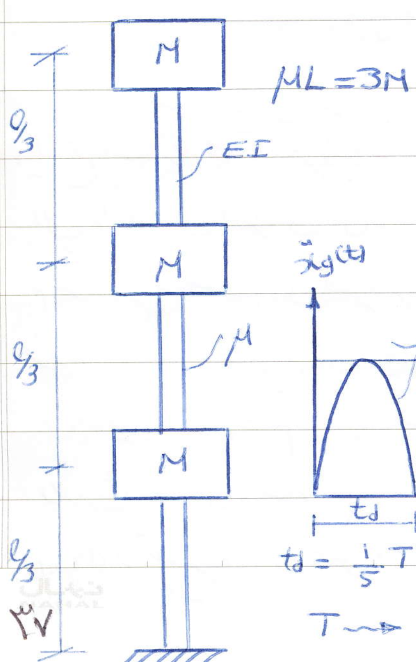
$EI = 3\times10^8\ lb.in^2$

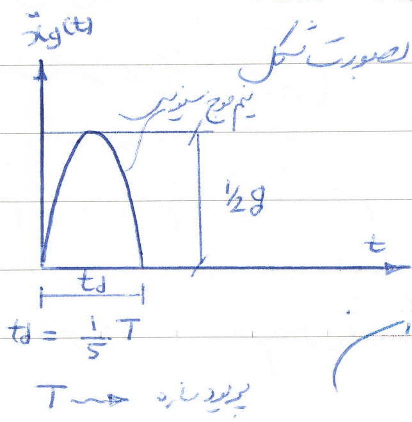
و این سازه تحت اثر حرکت زمین بصورت شکل زیر قرار گیرد. مطلوبست تعیین:

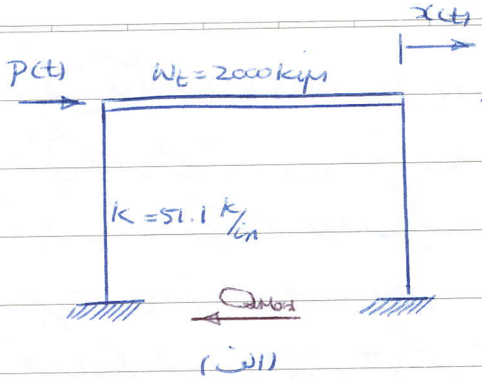
۱) Max تغییر مکان

۲) Max برش پایه

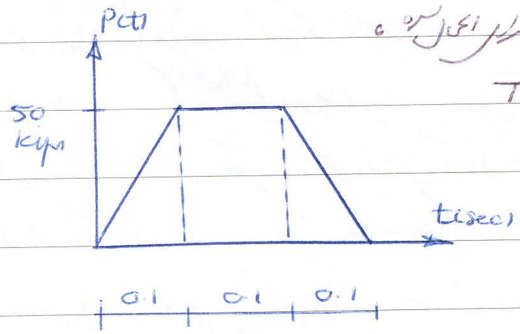
۳) معادله تابع تغییر مکان و رسم آن







مثال: قاب یک طبقه شکل (الف) مفروض است. در صورتیکه نیروی $p(t)$ مطابق منحنی نشان داده شده در شکل به قاب اعمال گردد. مطلوبست تعیین تابع تغییر مکان و هم چنین تعیین Max نیروی برشی پایه.



حل: تعیین زمان تناوب بمنظور تعیین نوع بارگذاری اعمال شده:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{2000}{51.1\times 386}} = 2.\ \text{sec}$$

$$2.0\ \text{sec} >> t_d = 0.3$$

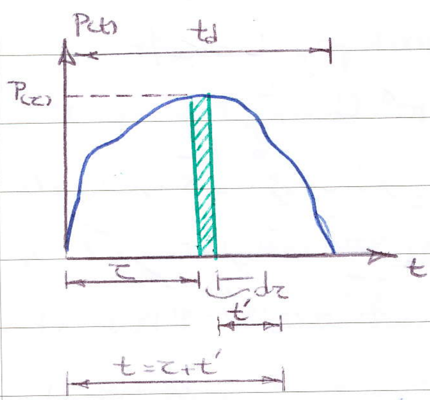
بارگذاری را میتوان ضربه‌ای در نظر گرفت.

$$\int p\,dt = \int_0^{t_1} p\,dt = \frac{0.3+0.1}{2}\times 50 = 10\ \text{k.sec}$$

$$x_{(t)} = \frac{\int p\,dt}{m\omega_n}\sin\omega_n t = \frac{10(386)(2)}{2000\times 2\pi}\sin\omega_n t = 0.614\sin\omega_n t$$

$$X_{Max} = 0.614\ \text{in}$$

$$Q_{Max} = K X_{Max} = 51.1(0.614) = 31.4\ \text{kips}$$

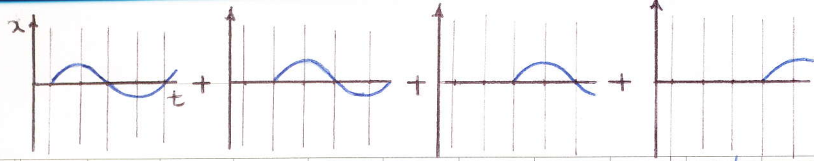


ب) پاسخ سازه تحت اثر بارگذاری اختیاری:

این بارگذاری ضربه‌ای نمی‌باشد لذا آن را می‌توان به قسمتهای ضربه‌ای و المان تقسیم نمود.

می‌خواهیم ببینیم سهم تغییر مکان از ضربه نشان داده شده چه می‌باشد.

$dx_{(t)}$: تغییر مکان حاصل از ضربه (سهم المان از تغییر مکان کلی)



$+ \cdots \longrightarrow$ انتگرال دوهامل

(با فرض $\xi = 0$)

سهم آن از تغییر مکان کلی سازه به علت ضربه $(p(\tau)d\tau)$ (1) $dx(t) = \frac{P(\tau)d\tau}{m\omega_n}\sin\omega_n t'$

چون از لحظه τ به بعد ضربه اتفاق می‌افتد پس $\sin\omega_n t'$ داریم.

$t = \tau + t'$ (2) $\Longrightarrow t' = t - \tau$ (3)

$$\Longrightarrow dx(t) = \frac{P(\tau)d\tau}{m\omega_n}\sin\omega_n(t-\tau) \quad (4)$$

$$\Longrightarrow x(t) = \int_0^t \frac{P(\tau)}{m\omega_n}\sin\omega_n(t-\tau)d\tau \quad (5)$$ انتگرال دوهامل

(Duhamel Integral)

t در اینجا مقدار ثابت است. می‌توان برحسب t هم مشتق گرفت.

* این انتگرال از $0 \le t \le t_d$ برقرار است. از $t = t_d$ به بعد یک حرکت با ارتعاش آزاد داریم که $\longrightarrow X_0 = X(t_d)$, $\dot{X}_0 = \dot{X}(t_d)$

با توجه به کنش بار ضربه‌ای و واکنش سیستم در مقابل آن، این امکان بوجود می‌آید که با استفاده از این کنش بتوان در مورد واکنش سازه در مقابل بارهای اختیاری بحث کرد. اگر فرض شود که بارگذاری اختیاری به زمانهای خیلی کوتاه تقسیم گردد، هر یک از این تقسیمات را می‌توان به عنوان یک ضربه در نظر گرفت. اگر یکی از این تقسیمات که در شکل نشان داده شده است توجه گردد، می‌توان دریافت که در زمان τ پس از شروع بارگذاری زیر شکل با فاصله زمانی $d\tau$ مقدار ضربه برابر با $p(\tau)d\tau$ می‌شود. که واکنش سازه مقابل این ضربه قابل محاسبه می‌باشد.

واکنش سازه به علت بارگذاری کامل با استفاده از اصل جمع آثار قوا برابر است با

واکنش مجموعه ضربه‌های دیفرانسیل دریافت شده از تعریف انتگرال تغییر مکان سازه در لحظه t از رابطه 5 قابل محاسبه می‌باشد.

* این انتگرال به نام دوهامل معروف است و واکنش هر سازه الاستیک را تحت هر بارگذاری اختیاری نشان می‌دهد.

* چون که جمع‌بست خطی بوده، این انتگرال با استفاده از اصل انطباق صورت گرفته بنابراین کاربرد این انتگرال برای سیستم‌های خطی صدق است.

کاربرد انتگرال دوهامل برای سیستم یک درجه آزادی (با استهلاک):

پاسخ سازه به علت بارگذاری ضربه‌ای:

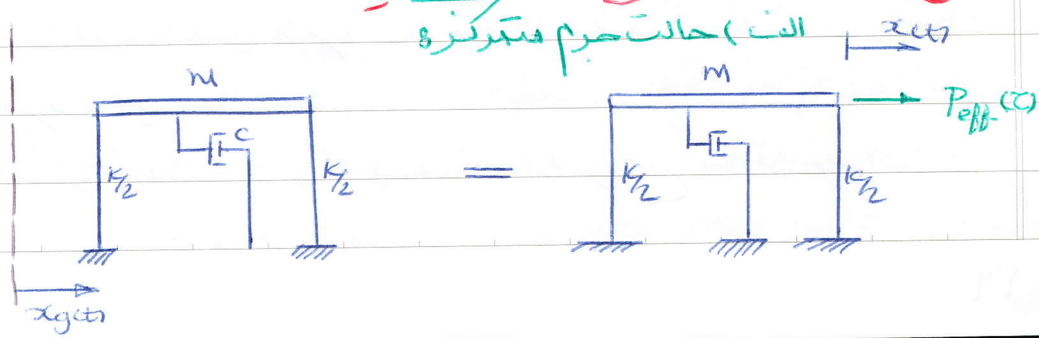
$$x(t) = \frac{\int P(t)dt}{m\omega_D} e^{-\xi\omega_n t} \sin\omega_D t \quad (6)$$

واکنش سیستم یک درجه آزادی شامل استهلاک کننده را می‌توان به طور مستقیم مطابق آنچه قبلاً توضیح داده شد از روابط جنبش ناشی از روش جمع‌بست آورد. در این صورت انتگرال دوهامل در حالت کلی برابر است با:

$$x(t) = \int_0^t \frac{P(\tau)}{m\omega_D} e^{-\xi\omega_n (t-\tau)} \sin\omega_D (t-\tau)\, d\tau \quad (7)$$

۲) پاسخ سازه یک درجه آزادی تحت اثر حرکت زمین:

الف) حالت جرم متمرکز:



به این علت که زمان اثر نیروی زلزله بر سازه زیاد است آن را بصورت بارگذاری اختیاری در نظر می گیریم.

$$x(t) = \int_0^t \frac{P_{eff}(\tau)}{m\omega_D} e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_D(t-\tau)\, d\tau \quad (8)$$

$$P_{eff}(t) = m\ddot{x}_g(\tau) \quad (9)$$

پس از جایگزینی رابطه (9) در (8) خواهیم داشت.

$$x(t) = \frac{1}{\omega_D}\int_0^t \ddot{x}_g(\tau) e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_D(t-\tau)\, d\tau \quad (10)$$

$$V(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_D(t-\tau)\, d\tau \quad (11)$$

$V(t)$ تابع شبه سرعت است.

$$x(t) = \frac{1}{\omega} V(t)$$

شتاب زلزله، میرایی سیستم و فرکانس سازه ۳ عامل مهم در شبه سرعت است.

۱) شتاب زلزله ← از شتاب نگاشت یک زلزله مشخص و معلوم باشد.

۲) میرایی ← میرایی را ۵٪ فرض میگیریم

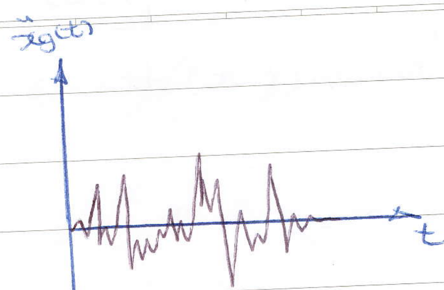
۳) فرکانس ← به سختی و جرم بستگی دارد.

در این حالت برای هر فرکانس سازه یک $V(t)$ خاص داریم. پس عملاً برای زلزله هم نحی فرکانس پیش میرود.

ب) حالت جرم گسترده

$$V(x,t) = \varphi(x) \cdot Y(t)$$

$$M^* \ddot{Y}(t) + C^* \dot{Y}(t) + K^* Y(t) = P^*_{eff}(t)$$



از مزایای اصلی روش دوهامل بوجود آمدن انتگرال بوده است که توان شدت آن را اعمال کند.

$$\ddot{Y}(t)=\int_0^t \frac{P^*_{eff}(\tau)}{M^*\omega}\cdot e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_D(t-\tau)\,d\tau$$

$P^*_{eff} = \bar{k}\,\ddot{x}_g(t) \leftarrow$ (در حالت جسم الاستیک با جرم گسترده تحت اثر حرکت زمین)

$$Y(t)=\frac{\bar{k}}{m^*\omega}\int_0^t \ddot{x}_g(\tau)\,e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$$

$$\Rightarrow Y(t)=\frac{\bar{k}}{M^*\omega}V(t)$$

$$V(x,t)=\psi(x)\cdot Y(t) \Rightarrow V(x,t)=\psi(x)\cdot\frac{\bar{k}}{m^*\omega}V(t)$$

$$\bar{k}=\int_0^L \psi(x)\,\mu(x)\,dx \qquad M^*=\int_0^L \mu(x)\,[\psi(x)]^2\,dx$$

نیروی وارده بر سازه در زمان حرکت زمین:

الف) جرم متمرکز

این خواسته یکی از مشکلات اصلی طراحان می باشد. این نیرو را می توان در حالت کاملاً قابل اطمینان از محاسبه شتاب موثر بدست آورد.

$$m\ddot{x}_t + c\dot{x} + kx = 0 \rightarrow \ddot{x}_t + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

در حالت تغییر مکان Max (سرعت صفر) و یا حالتی که مقدار نسبت استهلاک بحرانی کم باشد جمله دوم را می توان صرف نظر نمود. ($x_t = x_g(t) + x$)

فرضیات: ۱) تغییرمکان ماکزیمم (سرعت صفر)، یا ۲) C بسیار کم

$$\Rightarrow \ddot{x}_t + \omega_n^2 x \cong 0$$

$$\ddot{x}_t = \ddot{x}_e \rightsquigarrow$$ شتاب موثر سازه

$$\Rightarrow \ddot{x}_e + \omega_n^2 x(t) = 0 \Rightarrow \ddot{x}_e = -\omega_n^2 x(t)$$

بنابراین نیروی موثر وارد بر سازه برابر است با:

$$Q(t) = m\ddot{x}_e = m\omega^2 x(t)$$

علامت منفی را از این علت می‌توان حذف نمود که قدر مطلق نیروی Max زلزله مورد نظر می‌باشد.

$$x(t) = \frac{1}{\omega} V(t)$$

با استفاده از رابطه V(t) داریم:

$$\boxed{Q(t) = m\omega V(t)} \rightsquigarrow$$ نیروی برش پایه

این نیرو تاریخچه زمانی را به ما می‌دهد

ب) جرم گسترده:

مطابق حالت قبل در این حالت شتاب موثر بصورت زیر است.

$$m^* \ddot{Y}(t) + c^* \dot{Y}(t) + k^* Y(t) = P^*_{eff}(t)$$

$$\ddot{Y}_t + \omega_n^2 Y = 0$$

$$\ddot{Y}_t = \ddot{Y}_e$$

$$\ddot{Y}_e(t) = \omega_n^2 Y(t)$$ شتاب موثر

نیروی موثر اینرسی در واحد طول q(x,t) بصورت زیر است: (توزیع)

$$q(x,t) = \mu(x) \cdot \psi(x) \cdot \ddot{Y}_e(t)$$

$$(\ddot{v}(x,t) = \psi(x) \times \ddot{Y}_e(t))$$

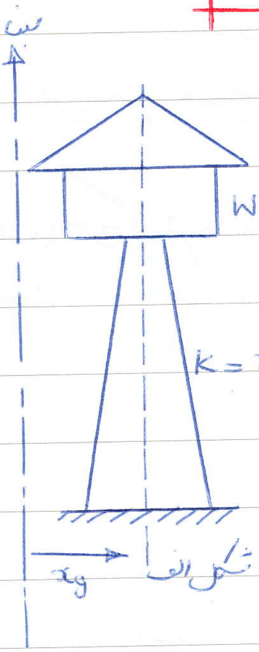
$$q(x,t) = \psi(x) \cdot \mu(x) \cdot (\omega^2 Y(t)) \quad , \quad Y(t) = \frac{\bar{K}}{M^* \omega} V(t)$$

$$q(x,t) = \mu(x).\varphi(x).\frac{\bar{K}}{M^*}\,\omega V(t)$$

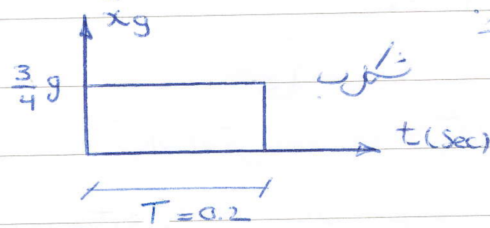
برابر است. با استفاده از این رابطه می توان هر نیروی داخلی و تنش مربوطه را بدست آورد. یکی از نیروهای مهم در زمان زلزله نیروی برش در پایه می باشد که در حقیقت کل نیروی وارده از سوی زلزله به سازه می باشد. در این حالت نیروی برش پایه برابر است با:

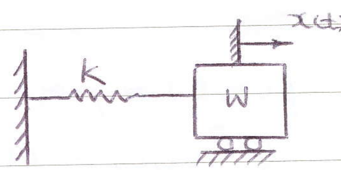
$$Q(t) = \int_0^L q(x,t).dx = \frac{\bar{K}}{M^*}\,\omega V(t)\int_0^L \mu(x).\varphi(x).dx$$

$$\Rightarrow \boxed{Q(t) = \frac{\bar{K}^2}{M^*}\,\omega V(t)}$$



مثال: منبع آبی مطابق شکل مفروض است. درصورتیکه این منبع تحت اثر زلزله‌ای با دیاگرام شتاب شکل ب قرار گیرد، مطلوبست تعیین Max تغییرمکان و هم چنین حداکثر برش پایه. استهلاک را صفر در نظر بگیرید.





$$m\ddot{x} + kx = P_{eff}(t) = -m\ddot{x}_g(t)$$

حالت اول: $0 < t \leq T = 0.2$

پریود لیست

تعیین تابع تغییر مکان با استفاده از انتگرال دوهامل : $\quad 0 \leq t \leq T$

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t P_{eff}(\tau) \sin\omega_n (t-\tau)\, d\tau$$

$$P_{eff}(t) = -m\ddot{x}_g = -m\left(\frac{3}{4}g\right) = -\frac{3}{4}W = P_0$$

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n} P_0 \int_0^t \sin\omega_n (t-\tau)\, d\tau = \frac{P_0}{m\omega_n^2} \cos(t-\tau)\Big]_0^t$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{P_0}{m\omega_n^2}(1-\cos\omega_n t) \qquad 0 \leq t \leq T$$

بعد از این تازه شروع به نوسان آزاد می کند.

<u>حالت دوم</u> : $\quad t > T = 0.2$

در این حالت $P_{eff} = 0$ بوده. یعنی به علت سرعت و تغییر مکان اولیه سیستم به سیستم ارتعاش آزاد با شرایط اولیه ذیل تبدیل می شود.

$$X_0 = x(T) \qquad \dot{X}_0 = \dot{x}(T)$$

$$x(t) = x(T)\cos\omega_n (t-T) + \frac{\dot{x}(T)}{\omega_n} \sin\omega_n (t-T) \qquad t > T$$

مهم

* تعیین ماکزیمم تغییر مکان :

باید ببینیم آیا تغییر مکان Max بین صفر تا 0.2 است یا پس از 0.2 است.

حالت اول :

$$x(t) = \frac{P_0}{m\omega_n^2}(1-\cos\omega_n t)$$

$$\rightarrow x(t) = \frac{P_0}{m\omega_n^2}\left(1-\left(1-2\sin^2\frac{\omega_n t}{2}\right)\right) = \frac{2P_0}{m\omega_n^2}\sin^2\frac{\omega_n t}{2}$$

$$= \frac{2P_0}{k}\sin^2\frac{\omega_n t}{2}$$

P_0/k یعنی تغییر مکان استاتیکی

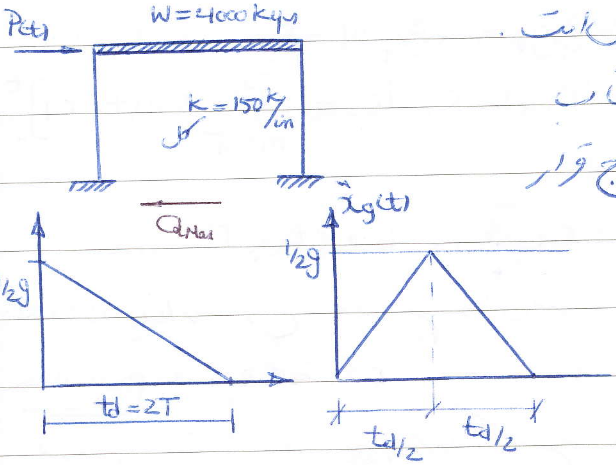
$$X_{Max} = \frac{2P_0}{k} \quad \text{با شرط} \rightarrow \sin^2\frac{\omega_n t}{2} = 1 \rightarrow \frac{\omega_n t}{2} = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{\omega_n}$$

درصورتیکه زمان دوام زیاد یعنی $T > \frac{\pi}{\omega_n}$ باشد مقدار ماکزیمم تغییر مکان برابر است با

$$X_{Max} = \frac{2P_0}{k}$$

تمرین ۱۴: قاب شکل مقابل مفروض است. درصورتیکه این قاب تحت اثر شتاب زمین بصورت دیاگرام های ب و ج قرار گیرد، مطلوبست تعیین تغییر مکان و برش پایه Max.

td دو برابر پریود سازه می باشد



ادامه حل:

تعیین ماکزیمم تغییر مکان:

الف)

$$x(t) = \frac{P_0}{m\omega_n^2}(1 - \cos\omega_n t) \qquad (0 \leq t \leq T)$$

$$x(t) = \frac{2P_0}{k}\sin^2\frac{\omega_n t}{2}$$

$$X_{Max} = \frac{2P_0}{k} \xrightarrow{\text{if}} \sin^2\frac{\omega_n t}{2} = 1 \rightarrow \frac{\omega_n t}{2} = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{\omega_n}$$

ب) $(t > T)$

ارتعاش آزاد

$$P_0 = \frac{-3}{4}W$$

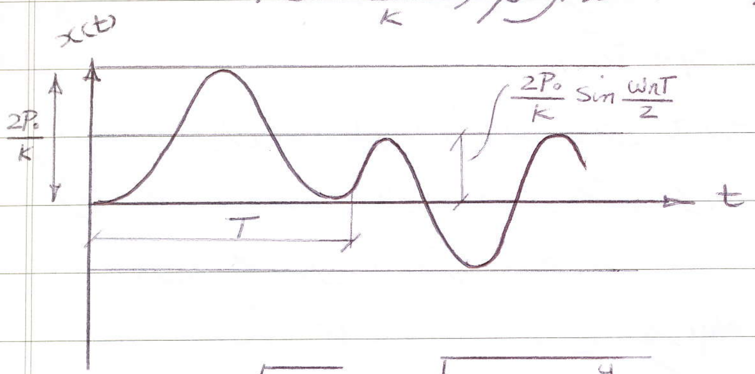
شرایط اولیه
$$\begin{cases} x(T) = X_0 \\ \dot{x}(T) = \dot{X}_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = X_{Max}\cos(\omega_n(t-T))$$

$$X_{Max} = \left[X_0^2 + \left(\frac{\dot{X}_0}{\omega_n}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$X_{Max} = \frac{P_0}{k}\left[(1 - (\cos\omega_n T)\times 2 + \cos^2\omega_n T) + \sin^2\omega_n T\right]^{1/2}$$

$$X_{Max} = \frac{P_0}{k}\left[2(1-\cos\omega_n T)\right]^{1/2} \Rightarrow X_{Max} = \frac{2P_0}{k}\sin\frac{\omega_n T}{2}$$

مقدار مطلق Max اگر $T < t$ شد مقدار کمتر از $\frac{2P_0}{k}$ است.



$$\frac{\pi}{\omega_n} = \pi\sqrt{\frac{W}{kg}} = \pi\sqrt{\frac{9.66\times10^4}{2.7\times10^6\times32.2}} = 0.104 < T = 0.2\ \text{sec}$$

$$\Rightarrow X_{Max} = \frac{2P_0}{k} = \frac{3}{2}\frac{W}{k} = \frac{3}{2}\,\frac{9.66\times10^4}{2.7\times10^6} = 0.054\ ft = 0.64\ in$$

$$Q_{Max} = kX_{Max} = 2.7\times10^6\times\frac{3\times9.66\times10^4}{2\times2.7\times10^6} = 145{,}800\ lb$$

* آیا Max تغییر مکان همیشه در هنگام بارگذاری است؟ در زمان زلزله چه اتفاقی می افتد؟
در حالت ضربه همیشه Max در مدت بارگذاری است. معمولاً وقتی زلزله اتفاق می افتد چون زمان وقوع زلزله زیاد است بنابراین Max تغییر مکان در هنگام بارگذاری صورت می گیرد (در حین وقوع زلزله)
پس Max تغییر مکان به نوع بارگذاری و زمان بارگذاری بستگی دارد.

این کارهایی که کردیم تحلیل تاریخچه زمانی بود که اطلاعاتش برای مهندس طراح آنقدر سودمند نیست. پس احتیاج به تحلیل بهتری داریم که تحلیل طیفی (آنالیز طیفی) گویند.

حمید کاظم

«فصل سوم»

تحلیل طیفی سازه‌ها در مقابل حرکت زمین

(Earthquake Response Spectra)

با توجه به انتگرال دوهامل واکنش در هر زمان t در سیستم یک درجه آزادی تحت اثر حرکت زمین به سادگی قابل محاسبه می‌باشد. ولی بدست آوردن تاریخچه نیرو و تغییر مکان در هر زمان کار ضروری نخواهد بود.

در طراحی از اشکال عملی بدست آوردن مقدار Max نیرو و تغییر مکان با اهمیت تلقی می‌شود. با استفاده از روابط قبل واضح است که زمانی نیرو و تغییر مکان Max می‌باشد که تابع $V(t)$ (شبه سرعت) مقدار Max خود را دارا باشد.

$$V(t)=\int_0^t \ddot{x}_g(\tau)\, e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_D(t-\tau)\,d\tau \qquad (1)$$

سرعت طیفی $$S_v = V_{Max} = \left[\int_0^t \ddot{x}_g(\tau)\, e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_D(t-\tau)\,d\tau\right]_{Max} \qquad (2)$$

$$(S_v = V_{Max}) \qquad (3)$$

نکته مهم: این مقدار Max بنام سرعت طیفی یا شبه سرعت طیفی معروف است و با S_v نشان داده می‌شود.

(Spectral Velocity)

همانطور که در روابط قبل مشخص گردید در سیستم‌های جرم متمرکز، تغییر مکان سازه برابر است با تابع شبه سرعت تقسیم بر فرکانس سازه. $x(t)=\frac{V(t)}{\omega}$ (4)

با استفاده از این تعریف تغییر مکان طیفی (S_d) عبارت است از:

تغییر مکان طیفی $$S_d=\frac{S_v}{\omega} \qquad (5)$$

بنابراین تغییر مکان طیفی برابر است با حاصل تقسیم سرعت طیفی بر فرکانس طبیعی سازه.

به همین ترتیب نیروی Max با استفاده از روابط پیشین بستگی به جرم و حاصلضرب فرکانس طبیعی سیستم و سرعت طیفی دارد.

کمیت حاصلضرب فرکانس طبیعی و سرعت طیفی را شتاب طیفی می‌نامند و با S_a نشان می‌دهند.

$$Q(t) = m\omega V(t) \qquad (6)$$

$$Q_{Max} = m\omega S_v \qquad (7) \qquad \text{شتاب طیفی } S_a = \omega S_v \qquad (8)$$

$$Q_{Max} = m S_a$$

تعیین مقادیر پاسخ‌های طیفی:

الف) سیستم‌های با جرم متمرکز:

$$x_{Max} = S_d$$ تغییر مکان طیفی

برش پایه در زمان‌های مختلف $$Q(t) = m\omega V(t)$$

$$Q_{Max} = m\omega S_v \Rightarrow Q_{Max} = m S_a$$

ب) سیستم‌های با جرم گسترده:

$$V(x,t) = \varphi(x) \cdot Y(t) = \varphi(x) \cdot \frac{\bar{K}}{M^* \omega} V(t)$$

$$V_{Max}(x,t) = \varphi(x) \, Y_{Max}(t)$$

$$\rightarrow V_{Max}(x,t) = \varphi(x) \frac{\bar{K}}{M^* \omega} S_v = \varphi(x) \frac{\bar{K}}{M^*} S_d$$ تغییر مکان ماکزیمم

$$q(x,t) = \mu(x) \, \varphi(x) \frac{\bar{K}}{M^*} \omega V(t)$$

$$q_{Max} = \mu(x) \cdot \varphi(x) \frac{\bar{K}}{M^*} S_a$$ شدت نیروی اینرسی ماکزیمم

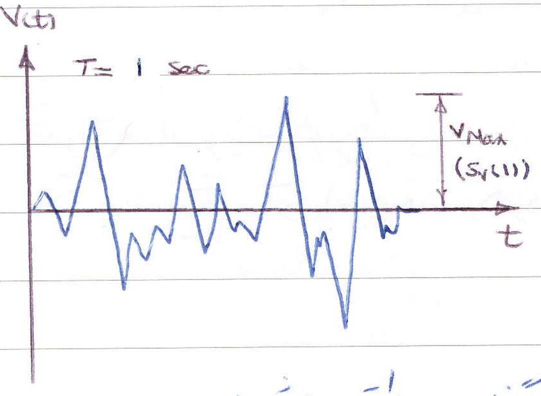
$$Q(t) = \frac{\bar{K}^2}{M^*} \omega V(t)$$ برش پایه در زمان‌های مختلف

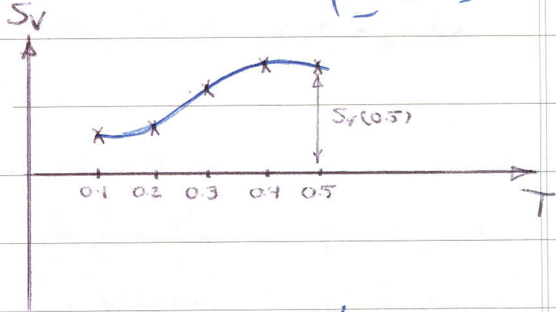
$$Q_{Max} = \frac{\bar{K}^2}{M^*} S_a$$

$$V(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau)\, e^{-\xi \omega_n (t-\tau)} \sin \omega_D (t-\tau)\, d\tau \qquad (a)$$

زلزله ورودی شتابنگاشت زلزله

برای سیستم $\xi = 2\%$





* ۰.۱ را در n ضرب کن و مقدار پریود سازه بگذار. n طبقه می‌باشد (تقریبی)

(T=2s → 0.1n=2 → n=20 طبقه)

با میانگین گیری و متوسط گیری می‌آیند و سرعت سازه را بصورت هموار می‌کنند تا اثرات شدید موضعی ایجاد شده را کم کنند و آن را برای تمام سازه‌ها قابل استفاده کنند.

طیف‌های زلزله بصورت زیر هستند.

۱) طیف تغییر مکان (S_d) ۲) طیف سرعت (S_V) ۳) طیف شتاب (S_a)

از رابطه (a) می‌توان دریافت که طیف سرعت بستگی به سه پارامتر دارد:

۱) طبیعت شتاب زمین $(\ddot{x}_g(t))$

۲) نسبت استهلاک بحرانی (ξ) — طیف سرعت به چه پارامترهایی بستگی دارد؟

۳) فرکانس طبیعی سازه

بنابراین برای هر شتاب زلزله ورودی و برای هر نسبت استهلاک بحرانی مشخص

می‌توان طیف سرعت را بصورت تابعی از پریود ($T = \frac{2\pi}{\omega_n}$) بدست آورد و برای نسبت ضریب استهلاک بحرانی تک سری از منحنی‌ها قابل رسم می‌باشند. بدیهی است، برای ترکیب تک پریود و نسبت استهلاک بحرانی مشخص برای شتاب ورودی خاص تک نقطه از منحنی بدست می‌آید که با بهم پیوستن این نقاط توسط خطوط مستقیم منحنی‌های مورد نظر ایجاد می‌گردد. این منحنی‌ها را در این شکل مخصوص طیف‌های سرعت می‌نامند.

(نقاط Max و Min در طیف سرعت به علت تشدیدهای محلی حرکت زمین بوجود آمده است. این نوع ناهمواری که اولاً بابت توسط شتابنگاشت‌های ایستگاه‌های مختلف هموار شده و ثانیاً میانگین آن‌ها بدست آید و سپس به عنوان طیف زلزله مورد نظر و طرح مورد استفاده قرار گیرد.)

* برای بدست آوردن طیف شتاب زلزله کافیست محور عرض این طیف را در فرکانس ضرب کرده و نتیجه را رسم نماییم. و برای بدست آوردن طیف تغییر مکان حاصل تقسیم طیف سرعت را بر فرکانس منحنی می‌نماییم.

$S_a = \omega S_v$ $\qquad\qquad$ $S_d = \frac{S_v}{\omega}$

طیف‌های پاسخ، طیف‌های سوسته هستند چون طیف‌های زلزله‌ها، ساده هستند. ما نیاز به طیف‌های طراحی برای طراحی سازه‌ها داریم.

ایران به دو ایالت تقسیم می‌شود:

۱) مرکزی، شرقی ← زاگرس

۲) شمالی ← البرز (دوره بازگشت بالا و شدت زیاد)

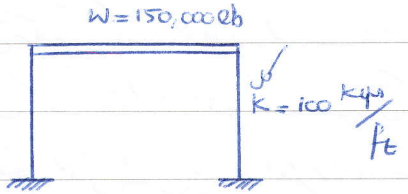
نوع زلزله به وضعیت تکتونیکی و زمین ساختی منطقه بستگی دارد. عامل بعدی

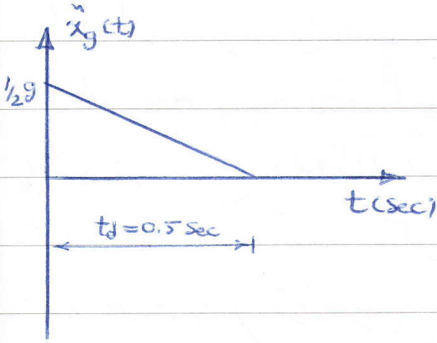
عامل ارتعاش تکیه‌گاهی (خاک) است.

تمرین ۱۵: قاب یک طبقه شکل مفروض است. درصورتیکه این قاب تحت اثر زلزله‌ای با منحنی شتاب مقابل قرار گیرد، مطلوبست تعیین

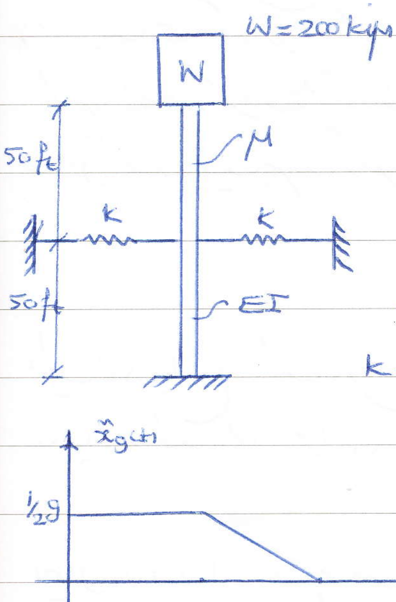
۱) تابع تغییر مکان ۲) رسم آن

۳) تعیین مقدار Max تغییر مکان و Max برش پایه.





تمرین ۱۶: برج مخابرات شهر بصورت شکل مقابل مدل شده است. درصورتیکه این سازه تحت اثر شتاب نگاشت بصورت زیر قرار گیرد مطلوبست تعیین



۱) تابع تغییر مکان

$MLg = 2W$

۲) مقدار Max تغییر مکان

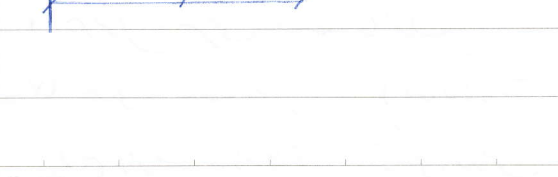
$EI = 2.1 \times 10^8 \, lb.in^2$

۳) شدت نیروی برش

$k = 50 \, kip/ft$

۴) Max برش پایه.

استهلاک را ۵٪ درنظر بگیرید.



طیف‌های طرح (Design Spectra) :

منحنی‌های ثبت شده شتاب زمین در هنگام وقوع زلزله‌های مختلف و طیف‌هایی که از آن‌ها بدست می‌آید اساس یک روش منطقی را برای طرح لرزه‌ای سازه‌ها فراهم می‌کند. با وجود آنکه طیف‌های مختلف با یکدیگر اختلاف دارند ولی در هر منطقه می‌توان بعضی خصوصیات مشترک را در آن‌ها یافت.

با استفاده از خصوصیات مشترک و هموار کردن منحنی‌ها می‌توان برای هر منطقه‌ای طیف‌های طرح را بدست آورد که با کاربرد آن می‌توان سازه‌های مقاوم در مقابل زلزله را طراحی کرد.

این منحنی‌ها اساس تحلیل لرزه‌ای سازه‌ها به روش طیفی را تشکیل می‌دهند.

هاوزنر بر اساس منحنی‌های شتاب ثبت شده در چهار زلزله بزرگ در امریکا (ال سنترو 1940، تفت 1953، الیمپیا 1949، واشنگتن 1965) منحنی‌های ایده‌آل و هموار شده‌ای را برای طیف‌های تغییر مکان، سرعت و شتاب رسم نموده است. شکل منحنی‌های مذکور با حرکات زمین در محل‌ها و مناطق دیگر جهان ممکن است سازگاری نداشته باشد به همین جهت برای هر منطقه باید طیف طرح آن را بدست آورد.

این منحنی‌ها برای مقدار معینی از شتاب Max زمین (شتاب در $T=0$) ضرایب و مقیاس می‌شوند.

(فرض کنید صنعت لرزه‌ای ایران رکوردی است که شتاب Max آن $0.35g$ است) در $T=0$ یعنی خود زمین.

برای رسم یک طیف متفاوت با استفاده از نوع الطراز یک نوع طیف به نام طیف تکاری سه‌جانبه بدست می‌آید.

به علت اینکه رابطه خاصی بین S_d، S_v و S_a وجود دارد، منحنی‌های مربوطه را

می توان هر یک از این سه طیف را روی یک نمودار لگاریتمی سه محوره رسم نمود. از روابط قبل داریم:

$$\begin{cases} S_v = \omega S_d = S_d \dfrac{2\pi}{T} \\ S_v = \dfrac{S_a}{\omega} = S_a \dfrac{T}{2\pi} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \log S_v = \log S_d + \log 2\pi - \log T \\ \log S_v = \log S_a + \log T - \log 2\pi \end{array}$$

رابطه (I) نشان می‌دهد که ازای یک مقدار ثابت S_d، تغییرات لگاریتم S_v برحسب لگاریتم T به صورت $y=-x+c_1$ می باشد.
رابطه (II) نشان می دهد به ازای مقدار ثابت S_a، تغییرات $\log S_v$ برحسب $\log T$ به صورت $y=x+c_2$ می باشد.

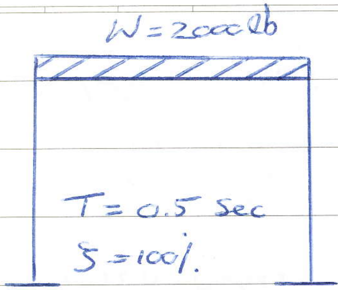
شکل (A1) منحنی های ترکیب شده طیف طرح الصورت تابعی از پریود سازه را نشان می دهد.
این منحنی ها همانطور که مشاهده می شود برای Max شتاب زمین PGA=0.2g
(شتاب در T=0) ترسیم شده است. (Pick Grand Acceleration)

$$\log S_v = \log S_d + \log 2\pi - \log T \Rightarrow y=-x+c_1$$
$$\log S_v = \log S_d - \log 2\pi + \log T \Rightarrow y=x+c_2$$

Damping در نمودار بصورت درصد است.

برای شتاب 0.35g باید مقادیر S_d و S_a را در $\frac{0.35}{0.2}$ ضرب کنیم.

(حالت جرم متمرکز)



مثال: قاب یک طبقه مفروض است. درصورتیکه پریود این قاب 0.5 sec و نسبت استهلاک بحرانی 10% در نظر گرفته شده باشد و این قاب در منطقه ای باشد که بتوان برای مقادیر آن از شکل (A) استفاده کرد، مطلوبست تعیین Max تغییر مکان و هم چنین Max برش پایه.

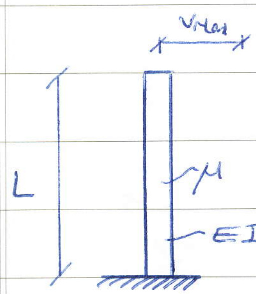
$S_v = 6\ in/sec$ $\qquad S_a = 0.2g$ $\qquad S_d = 0.48\ in$

این مقادیر با استفاده از نمودار شکل A بدست آمد.

$x_{Max} = S_d = 0.48\ in$

$Q_{Max} = m \cdot S_a = \frac{2000}{g} \times 0.2g = 400\ lb$

(حالت جرم گسترده)



مثال: ستون طره ای با شکل زیر مفروض است. درصورتیکه جرم در واحد طول μ به صورت یکنواخت و ثابت فرض شود و هم چنین صلبیت خمشی EI ثابت باشد و از تابع شکلی $\varphi(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2L}$ بتوان استفاده کرد. مطلوبست تعیین Max تغییر مکان. Max نیروی برشی ستون و هم چنین Max برش پایه درحالیکه بتوان از شکل A برای تعیین مقادیر طیفی استفاده کرد. (ضمناً داریم $T=0.5s$, $\xi = 10\%$ است)

$T=0.5s ,\ \xi = 10\% \longrightarrow S_v = 6\ in/sec \qquad S_a = 0.2g \qquad S_d = 0.48\ in$

$V_{Max}(x) = \frac{\bar{K}}{m^*} S_d\, \varphi(x)$

$$m^* = \int_0^L \mu(x)\,(\psi(x))^2\,dx = \mu \int_0^L \left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = 0.228\,\mu L$$

$$\bar{k} = \int_0^L \mu(x)\cdot\psi(x)\,dx = \int_0^L \left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right) dx \cdot \mu = 0.364\,\mu L$$

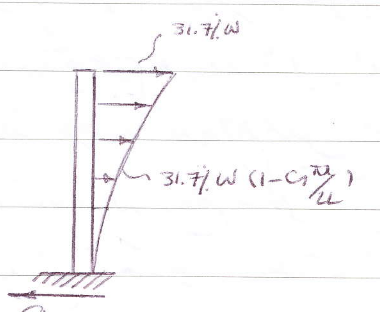
$$V_{Max}^{(x)} = \frac{0.364\,\mu L}{0.228\,\mu L}\,(0.48)\,\psi(x) \rightarrow V_{Max}^{(x)} = 0.77\,\psi(x) = 0.77\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)$$

$$\Rightarrow V_{Max} = 0.77\ in$$

$$q_{Max}^{(x)} = \frac{\bar{k}}{m^*}\,S_a\,\mu(x)\,\psi(x) = \frac{0.364\,\mu L}{0.228\,\mu L}\,(0.2g)\,\mu\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)$$

$$\mu = \frac{W}{g}$$ w وزن در واحد طول $$W = wL$$ کل وزن ستون

$$\Rightarrow q_{Max} = \frac{0.364}{0.228}\,0.2g \times \frac{w}{g}\,\psi(x) = 31.7\%\ w\,\psi(x)$$

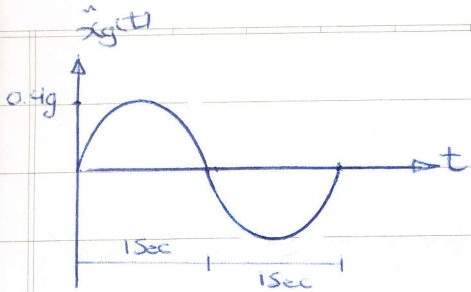


$$Q_{Max} = \frac{\bar{k}^2}{m^*}\,S_a$$

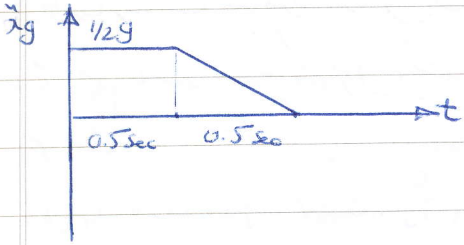
$$\Rightarrow Q_{Max} = \frac{0.364^2\,\mu L}{0.228}\,(0.2g)$$

$$Q_{Max} = \frac{0.364^2}{0.228}\,\frac{W}{g} \times 0.2g = 11.5\%\ W$$

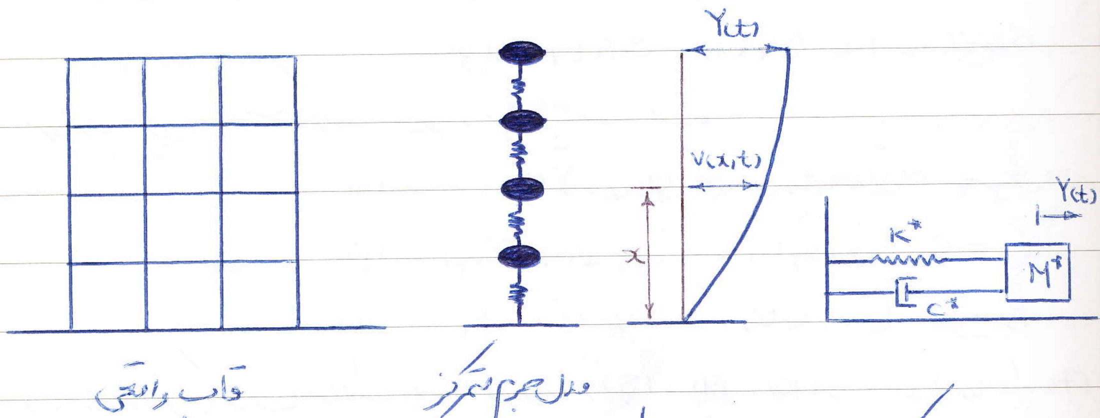
تمرین ۱۷: در صورتیکه شتاب ثبت شده زمین در دو زلزله مختلف مطابق اشکال الف و ب باشد، مطلوبست تعیین طیف پاسخ این دو زلزله برای تغییرمکان، سرعت و شتاب.



طیف‌های نیروی برابر را برای ۳ سیستم میرایی $\xi_1 = 0$ ، $\xi_2 = 5\%$ و $\xi_3 = 10\%$ بدست آورید
(دوره تناوب تا 4s بررسی)



پاسخ سازه‌های چند طبقه تحت اثر حرکت زمین:



سختی جرم متمرکز اول همان سختی طبقه اول است.

$$- \; V(x,t) = Y(t) \cdot \psi(x) \qquad (1)$$

$$- \; \dot{V}(x,t) = \psi(x) \cdot \dot{Y}(t) \qquad (2)$$

$$- \; \Delta V(x,t) = \Delta\psi(x) \cdot Y(t) \qquad (3)$$ ← تغییر مکان نسبی در طبقه

$$\Rightarrow \Delta V(x,t) = \Delta\,\psi(x_i)\,Y(t) - \Delta\,\psi(x_j)\,Y(t) \qquad (4)$$

$$- \; \delta V(x,t) = \psi(x)\;\delta Y(t) \qquad (6)$$ تغییر مکان مجازی

برای بدست آوردن معادلات حرکت کافیست معادله حرکت سیستم تعمیم یافته را

بصورت زیر نوشت.

$$f_I + f_D + f_S = p(t) \qquad (5)$$

برای حالت کلی و سیستم های چند طبقه این معادلات را می توان با استفاده از روش کار مجازی می نویسیم. در این حالت تغییر مکان مجازی باید هم ساز با شرایط تکیه گاهی سیستم باشد. با به کار بردن تغییر مکان مجازی، معادله (5) به معادله زیر تبدیل می شود.

$$\delta W = f_I\,\delta v(x,t) + f_D\cdot\delta\Delta v + f_S\cdot\delta\Delta v - p(t)\,\delta v(x,t) = 0 \qquad (7)$$

$\delta\Delta v(x,t)$ ← تغییر مکان نسبی مجازی طبقه

$$\delta\Delta v(x,t) = \Delta\psi(x)\cdot\delta Y(t) \qquad (8)$$

نیروهای اینرسی، استهلاک و فنر برابر خواهند بود با:

$$f_I = m\ddot{v}(x,t) = m\,\psi(x)\cdot\ddot{Y}(t) \qquad (9)$$

$$f_d = c\cdot\Delta\dot{v}(x,t) = c\cdot\Delta\psi(x)\cdot\dot{Y}(t) \qquad (10)$$

$$f_s = k\cdot\Delta v(x,t) = k\Delta\psi(x)\cdot Y(t) \qquad (11)$$

پس از جانشین کردن روابط (3)، (6)، (8)، (9)، (10)، و (11) در رابطه (7) و نتیجه را بصورت معادله حرکت تعمیم یافته نوشت داریم:

$$M^*\ddot{Y} + C^*\dot{Y} + KY = P^*(t)$$

در این رابطه مقادیر M^*، C^*، K^* و P^* به عنوان پارامترهای تعمیم یافته می باشند که بصورت زیر تعریف می شوند.

$M^* = \sum m_i \psi_i^2$ جرم معادل

$C^* = \sum c_i \Delta\psi_i^2$ ضریب استهلاک معادل

$K^* = \sum k_i \Delta\psi_i^2$ سختی معادل

$\Sigma p^* = \Sigma p_i \psi_i$ نیروی معادل

این در حالت اعمال p_i بود. درحالتی که سیستم تحت اثر حرکت زمین قرار گیرد نیروی معادل موثر P^*_{eff} به صورت زیراست.

$$P_{eff} = \bar{K} \ddot{x}_g(t) \quad (17)$$

$$\bar{K} = \Sigma m_i \psi_i \quad (18)$$ ضریب تحریک

معمولاً ضریب استهلاک معادل برحسب نسبت استهلاک بحرانی بیان می گردد. دراین حالت:

$$C^* = \Sigma c_i \Delta\psi_i^2 = 2\xi m^* \omega$$

که دراین رابطه ω نمایده فرکانس زاویه ای سیستم تعمیم یافته می باشد که مقدار آن برابر است با:

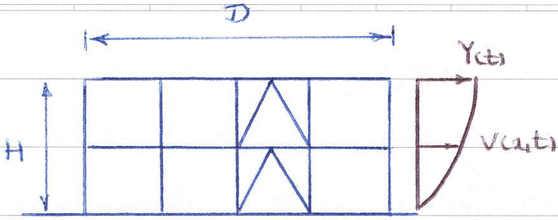
$$\omega = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} \quad (20)$$

همانطورکه مشاهده می شود، این فرکانس به مقادیر سختی معادل و جرم معادل بستگی دارد که هر کدام از آن ها بستگی به تابع شکل تعیین شده (ψ) خواهند داشت. بنابراین هرقدر تابع شکلی به تابع واقعی نزدیک تر باشد، فرکانس بدست آمده دقیق‌تر خواهد بود. به عبارت دیگر درصورتی این وضعیت بوجود خواهد آمد که مقدار فرکانس کوچکتر شود.

چرا فرکانس واقعی سازه، فرکانس کوچکتر است؟

(فرکانس کوچکتر به علت آنست که سیستم می خواهد حداقل انرژی را مصرف کند. پس سراغ قیدهای اضافی نمی رود. مثال‌های دیگر قیدهای اضافی ایجاد می کنند.)

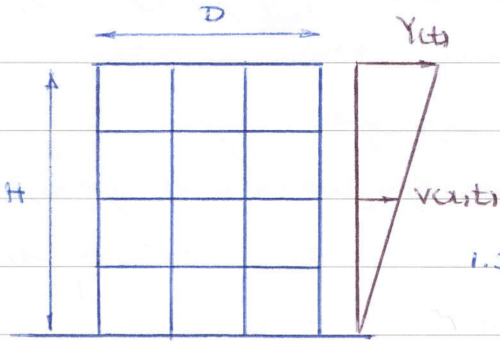
توابع شکلی پیشنهادی برای ساختمان ها با طبقات مختلف:



۱) ساختمان‌های کوتاه مرتبه:

(LOW H/D)

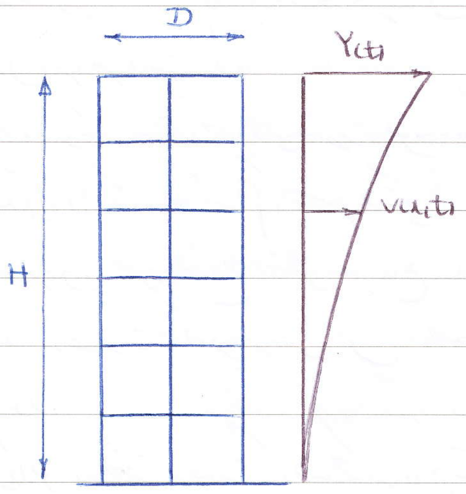
$$\frac{H}{D} < 1.5 \rightarrow \psi(x) = \sin\frac{\pi x}{2H}$$



۲) ساختمان‌های میان مرتبه:

(MID H/D)

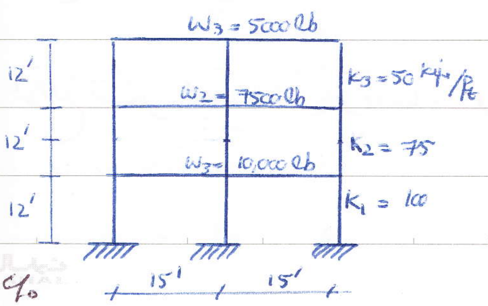
$$1.3 < \frac{H}{D} < 3 \rightarrow \psi(x) = \frac{x}{H}$$



۳) ساختمان‌های بلند مرتبه:

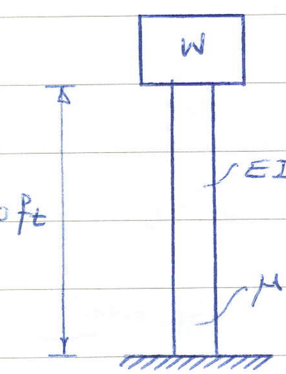
(HIGH)

$$\frac{H}{D} > 3 \rightarrow \psi(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2H}$$



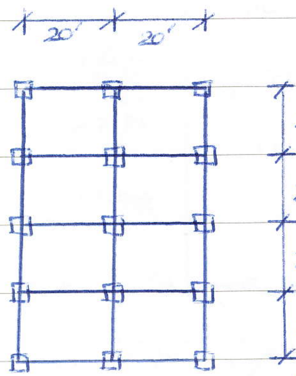
تمرین ۱۸: قاب سه طبقه شکل مفروض است. مطلوبست تعیین جرم معادل، سختی معادل، و فرکانس پایه قاب درصورتیکه قاب دارای نسبت استهلاک بحرانی ($\xi = 2\%$) باشد و در

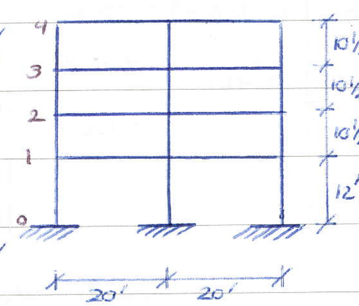
منطقه تهران که شتاب حداکثر زمین 0.35g می‌باشد قرار داشته باشد و برای طراحی آن در مقابل زلزله بتوان از نمودارهای شکل "A" استفاده کرد مطلوبست تعیین تغییر مکان Max و هم چنین برش پایه Max.



تمرین 19: برج مخابرات شهری بصورت شکل زیر مدل شده است. درصورتیکه W=100 kips وزن پایه برابر 150 kips باشد و صلبیت خمشی $EI = 9.1\times10^{8}\ lb.in^2$ باشد مطلوبست تعیین جرم معادل، سختی معادل و زمان تناوب برج. هم چنین تعیین کنید مقدار Max تغییر مکان، شدت نیروی برشی و برش پایه Max درصورتیکه این برج در منطقه‌ای قرار دارد که شتاب Max آن 0.3g باشد و بتوان از نمودارهای شکل A برای طراحی آن استفاده کرد.

$\xi = 7\%$



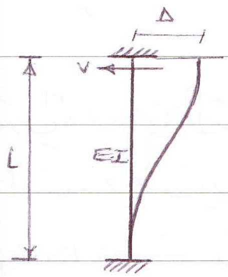


مثال: ساختمان 4 طبقه بتنی شکل مفروض است. درصورتیکه ابعاد هر یک از ستونها 14 in × 14 in و مدول الاستیسیته بتن 3.6×10^{6} psi بوده و مجموع بار مرده در بام 390 kips، طبقه دوم و سوم 445 kips، طبقه اول 448 kips و شدت بار زنده در بام 30 lb/ft^2 و در طبقات 80 lb/ft^2 در نظر گرفته شود، مطلوبست تعیین جرم معادل، سختی معادل و هم چنین پریود

a) $\psi(x) = \sin\frac{\pi x}{2L}$ (الف   عرض ساختمان برای حالات

b) $\psi(x) = x/L$ (ب

(مشارکت بار زنده در طبقات 35% و در بام 85% است)



ابتدا به سختی مربوط به ستون می‌پردازیم.

$$V = \frac{12EI}{L^3}\Delta \rightarrow k_i = \frac{V}{\Delta} = \frac{12EI}{L^3}$$

$$I = \frac{1}{12} \times 14 \times 14^3 = 3201\ in^4$$

$$k_{story}\text{طبقه} = \sum_{i=1}^{3} k_i = 3k_i$$

* محاسبات مربوط به یک قاب می‌باشد

$$\text{طبقه 4}\ k_4 = k_3 = k_2 \neq k_1$$

$$k_2 = k_3 = k_4 = 3 \times (3.6 \times 10^3 \times 3201) \frac{1}{126^3} = 209\ kip/in$$

$$k_1 = 3 \times (3.6 \times 10^3 \times 3201) \frac{1}{144^3} = 140\ kip/in$$

برای $\psi(x) = \sin\frac{\pi x}{2L}$

تراز	K	M تراز ($\frac{kip \cdot sec^2}{in}$)	ψ_i	$\Delta\psi_i$	$M\psi_i^2$	$K\Delta\psi_i^2$
4		0.252	1		0.252	
	209			0.071		1.054
3		0.288	0.929		0.249	
	209			0.203		8.613
2		0.288	0.726		0.152	
	209			0.306		19.570
1		0.290	0.420		0.51	
	140			0.420		24.696
0						
Σ					$M^* = 0.704$	$K^* = 53.933$

M در تراز طبقات است و K بین دو طبقه است.

5 قاب بار جانبی را می‌گیرد.

برای بار زنده هم درصدی در نظر می‌گیرند. علت هم احتمال کم حضور بار زنده همراه است.

بار زنده نسبت به زمین حرکت می‌کنند. بنابراین بار زنده در زلزله منتقل نمی‌شود. بنابراین درصد

نسبت به مقدار زیادی از بار زنده را به زلزله می‌دهیم.

علت زیاد بودن درصد بار زنده بام برف است.

حالت الف

$$\omega_a = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}} = \sqrt{\frac{53.933}{0.704}} = 8.75 \ rad/sec$$

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} = 0.72$$

برای $\psi_{(x)} = x/L$

تراز	K	M	ψ_i	$\Delta\psi_i$	$M\psi_i^2$	$K\Delta\psi_i^2$
4		0.252	1		0.252	
3	209	0.288	0.759	0.241	0.166	12.139
2	209	0.288	0.517	0.242	0.077	12.24
1	209	0.290	0.276	0.241	0.022	12.139
0	140			0.276		10.665
Σ					$M^* = 0.517$	$K^* = 47.183$

$$\omega_b = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}} = \sqrt{\frac{47.183}{0.517}} = 9.55 \ rad/s$$

$$T_b = \frac{2\pi}{\omega_b} = 0.66$$

با اینکه این حالت $\psi_{(x)} = x/L$ می‌گیرند اما $\psi_{(x)} = \sin\frac{\pi x}{2L}$ دقیق‌تر است.

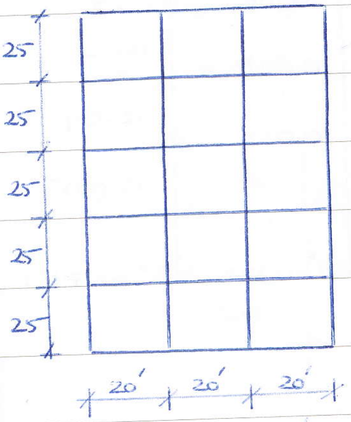
نظر به اینکه $\omega_a < \omega_b$ می‌باشد بنابراین $\psi_a(x) = \sin\frac{\pi x}{2L}$ تقریب بهتری نسبت به حالت $\psi_b(x) = x/L$ می‌باشد.

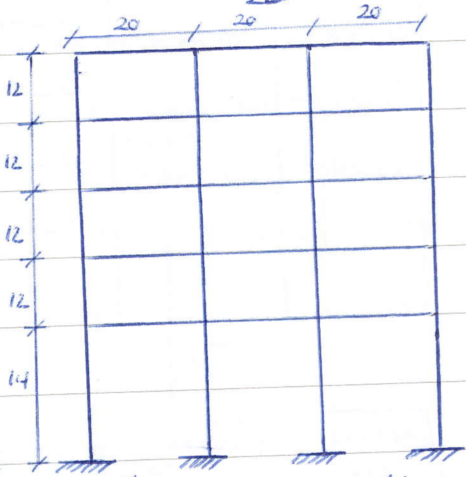
تمرین ۲۰: ساختمان ۵ طبقه‌ای شکل زیر مفروض است. در صورتیکه ابعاد مقاطع کلیه ستونها یکسان و برابر $16in \times 16in$ باشد، مدول الاستیسیته بتن به صورت $E = 3.6 \times 10^6 \, psi$ و شدت بار مرده در طبقات $90 \, lb/ft^2$ و در بام $60 \, lb/ft^2$ و در جهت شدت بار زنده در طبقات $70 \, lb/ft^2$ و بام $30 \, lb/ft^2$ در نظر گرفته شود. مطلوبست تعیین جرم معادل، سختی معادل برای ۳ حالت:

الف) $$\psi_a(x) = \sin \frac{\pi x}{2L}$$

ب) $$\psi_b(x) = x/L$$

ج) $$\psi_c(x) = 1 - \cos \frac{\pi x}{2L}$$

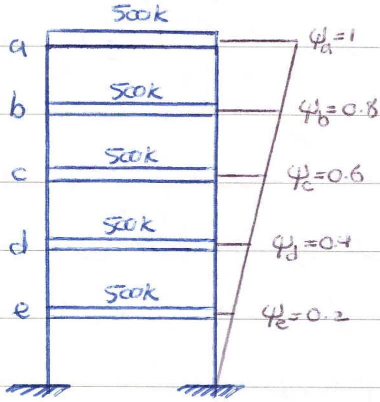




ضریب بار زنده بام 0.65

ضریب بار زنده طبقات 0.35

مثال ۵: ساختمان ۵ طبقه شکل مفروض است. که با استفاده از این شکل الگوی ساختمان که فرض می‌شود کلیه جرم که صرفاً از طبقات به صورت متمرکز در نظر گرفته شود. در صورتیکه فرض شود تابع شکل مانند مثال x/L باشد جرم موثر و همچنین ضریب تحریک بار را محاسبه نمایید. اگر فرض شود زمان تناوب سازه $T = 0.5s$ و $\xi = 10\%$ باشد و بتوان از نمودار شکل A برای طراحی این ساختمان مقابل زلزله استفاده کرد. مطلوبست تعیین Max تغییر مکان، M نیروی برشی در پایه ساختمان (برش پایه) و همچنین



نیروی برشی (نیروی وارده در تراز هر یک از طبقات).

$$M^* = \sum m_i \varphi_i^2$$

$$= \frac{500}{g}\left(1^2 + 0.8^2 + 0.6^2 + 0.4^2 + 0.2^2\right)$$

$$= \frac{1100}{g}\left(\frac{kips \cdot s^2}{in}\right)$$

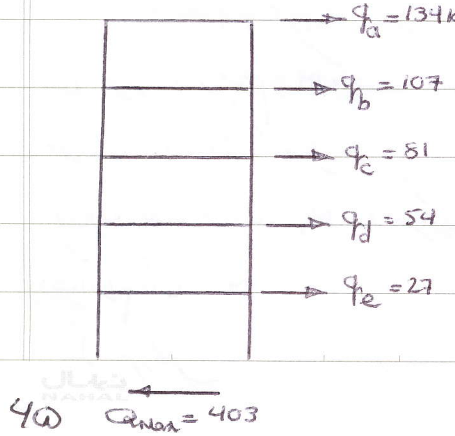
$$\bar{K} = \sum m_i \varphi_i = \frac{500}{g}(1 + 0.8 + 0.6 + 0.4 + 0.2) = \frac{1500}{g}$$

$T = 0.5$ sec , $\xi = 10\%$ $\xrightarrow{\text{A از جدول}}$ $S_d = 0.48\,in$ $S_v = 6\ in/sec$ $S_a = 0.2g$

$$V_{i(Max)} = \frac{\bar{K}}{M^*} S_d \varphi_i = \frac{\frac{1500}{g}}{\frac{1100}{g}}(0.48)\varphi_i = 0.65\,\varphi_i$$

$$\rightarrow V_{i(Max)} = 0.65\,in$$

$$Q_{Max} = \frac{\bar{K}^2}{M^*} S_a = \frac{(1500)^2}{1100} \times \frac{0.2g}{g} = 403\ kips$$



نیروی برش

$$\left\{\begin{array}{l} q_{Max} = \dfrac{\bar{K}}{M^*} S_a\, M_{\omega}\, \varphi_{\omega} \\ Q_{Max} = \dfrac{\bar{K}^2}{M^*} S_a \end{array}\right.$$

نیروی طبقه

$$\rightarrow q_{i\,Max} = \frac{\bar{K}}{M^*} S_a \cdot M_i \cdot \varphi_{i\omega}$$

$$\Rightarrow q_{i\,Max} = \frac{Q_{Max}}{\bar{K}} M_i \varphi_i$$

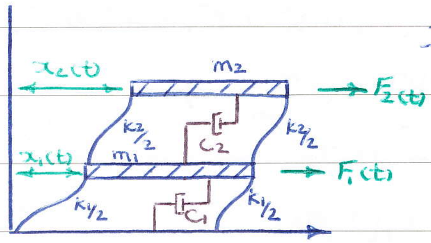
$$q_{i\,Max} = \frac{403}{1500/g} \cdot \frac{500}{g} \varphi_i = 134.2\,\varphi_i$$

حمید کاظم

فصل چهارم:

پاسخ دینامیکی سیستم های چند درجه آزادی:

الف) سیستم دو درجه آزادی:

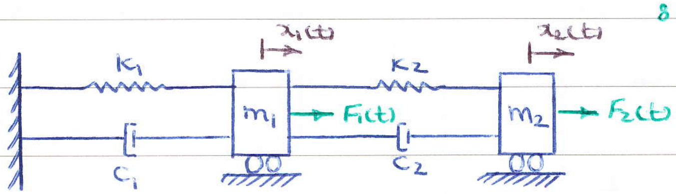


ساختمان دو طبقه شکل مقابل را در نظر بگیرید. اگر سقف ها را بتوان صلب در نظر گرفت و ضریب استهلاک در طبقات اول و دوم به ترتیب c_1 و c_2 باشند. معادله حرکت این سیستم دو طبقه مورد نظر می باشد.

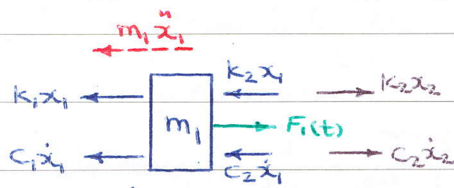
درجات آزادی ما در جهت x است. اما چون در حالت تست و سقف می تواند حرکت کند سیستم دو درجه آزادی دارد. (تعداد طبقات همان تعداد درجات آزادی هستند)

در ابتدا مدل دینامیکی این سیستم دو درجه آزادی را تعیین می کنیم.

تعیین مدل دینامیکی سیستم:



دیاگرام آزاد M_1:

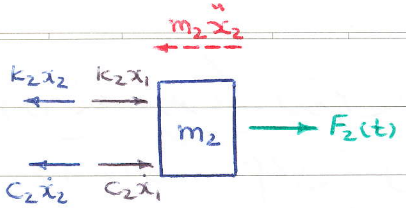


اول فرض کنید جرم M_2 حرکت ندارد. جرم M_1 را به اندازه x_1 حرکت دهید. سپس نیروهای هر عامل را بدست آورید.

در مرحله بعد حرکت M_1 را صفر کرده، M_2 را به اندازه x_2 حرکت دهید.

دیاگرام آزاد M_2:

اول نیروهای می رسیم. بعد عکس حالت قبل عمل می کنیم: اول M_2 ثابت است M_1 حرکت کند



سپس M_2 حرکت کند و M_1 ثابت باشد

* اینرسی به صورت نیرو، جهتی در خلاف جهت حرکت دارد

$$m_1:\ \sum F_x=0 \rightarrow -m_1\ddot{x}_1-c_1\dot{x}_1-c_2\dot{x}_1+c_2\dot{x}_2-k_1x_1+k_2x_2-k_2x_1+F_1(t)=0 \quad (1)$$

$$m_2:\ \sum F_x=0 \rightarrow -m_2\ddot{x}_2+c_2\dot{x}_1-c_2\dot{x}_2+k_2x_1-k_2x_2+F_2(t)=0 \quad (2)$$

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1+(c_1+c_2)\dot{x}_1-c_2\dot{x}_2+(k_1+k_2)x_1-k_2x_2=F_1(t) \\ m_2\ddot{x}_2-c_2\dot{x}_1+c_2\dot{x}_2-k_2x_1+k_2x_2=F_2(t) \end{cases} \quad (3)$$

یک سیستم معادلات درجه دوم خطی بدست آمد. دستگاه معادلات فوق یک دستگاه معادلات دیفرانسیل درجه دوم خطی می‌باشد که می‌توان آن را به صورت ماتریسی به صورت زیر نوشت.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$[m]\{\ddot{x}_{(t)}\}+[c]\{\dot{x}_{(t)}\}+[k]\{x_{(t)}\}=\{F_{(t)}\} \quad (5)$$

$[m]$: ماتریس جرم $=[M]^T$ — $\{x\}$: بردار تغییر مکان

$[C]$: ماتریس استهلاک $=[C]^T$ — $\{F\}$: بردار نیرو

$[K]$: ماتریس سختی $=[K]^T$

همانطور که از رابطه ۴ مشهود است ماتریس‌های $[m]$، $[C]$ و $[K]$ ماتریس‌های متقارن می‌باشند.

تمرین ۲۱: در صورتیکه در تمرین حلقه قبل بتوان فرض نمود که برای طراحی سازه می‌توان از دیاگرام های شکل A با شتاب Max $0.35g$ استفاده کرد، مطلوبست تعیین Max تغییر مکان، Max برش پایه و Max نیروهای جانبی در تراز طبقات از سوی زلزله.

- بدون استهلاک (سیستم دو درجه آزادی):

$$[m]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = 0 \qquad (6)$$

برای قبل از ضمن دو طبقه داریم:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = 0 \end{cases} \qquad (7)$$

فرض: حل دستگاه معادلات فوق دارای جواب زیر است.

$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \sin\omega t \qquad (8)$$

پس از جایگزین کردن رابطه (8) در رابطه (7) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} (-m_1\omega^2 X_1 + (k_1+k_2)X_1 - k_2X_2)\sin\omega t = 0 \\ (-m_2\omega^2 X_2 - k_2X_1 + k_2X_2)\sin\omega t = 0 \end{cases} \qquad (9)$$

اگر $\sin\omega t = 0$ باشد نتیجه جواب نداریم. پس جمله داخل پرانتز صفر است.

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 m_1 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -\omega^2 m_2 + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (10)$$

دستگاه معادلات فوق که دستگاه معادلات همگن خطی می‌باشد همواره جواب های $X_1 = X_2 = 0$ در آن صدق می‌کند. برای داشتن جواب غیر از صفر لازم است دترمینان ضرائب آن برابر صفر باشد.

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 m_1 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -\omega^2 m_2 + k_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (-\omega^2 m_1 + k_1 + k_2)(-\omega^2 m_2 + k_2) - k_2^2 = 0 \qquad (11)$$

برای سادگی در عملیات فرض می‌کنیم $m_1 = m_2 = m$, $k_1 = k_2 = k$. (12)

پس از جایگزینی (12) در (11) خواهیم داشت:

$$m^2\omega^4 - 3km\omega^2 + k^2 = 0 \qquad (13)$$

$$\Rightarrow \omega_{1,2}^2 = \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\,\frac{k}{m}\right)$$

$$\begin{cases} \omega_1 = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\,\frac{k}{m}\right)^{1/2} & (14) \\ \omega_2 = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\,\frac{k}{m}\right)^{1/2} & (15) \end{cases}$$

فرکانس‌های طبیعی

X_1, X_2 که می‌خواهیم نسبت آوریم مستقل نیستند

۱) با قرار دادن $\bar{\omega} = \omega_1$ در رابطه 10 خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2} X_1 - X_2 = 0 \\ -X_1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} X_2 = 0 \end{cases} \qquad (16) \qquad \Rightarrow \frac{X_2}{X_1} = 1.62$$

دو رابطه کاملاً یکسان هستند

۲) با قرار دادن $\omega = \omega_2$ در رابطه 10 خواهیم داشت:

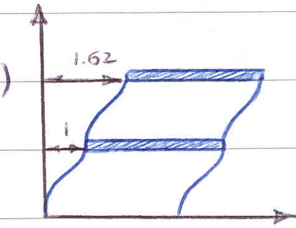
$$\begin{cases} \frac{1-\sqrt{5}}{2} X_1 - X_2 = 0 \\ -X_1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} X_2 = 0 \end{cases} \qquad (17) \qquad \Rightarrow \frac{X_2}{X_1} = -0.62$$

خلاصه مباحث:

1) $\omega_1 = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{1/2}\sqrt{\frac{k}{m}} = 0.618\sqrt{\frac{k}{m}}$ فرکانس طبیعی مود اول

$\bar{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.62 \end{Bmatrix}$ $\left(\omega_1 = 0.618\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$

بردار مود اول

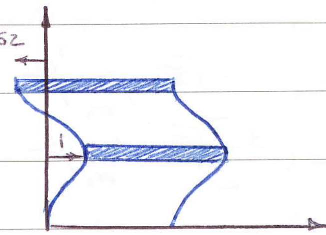


نمایش اولین مد ارتعاشی

2) $\omega_2 = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{1/2}\sqrt{\frac{k}{m}} = 1.618\sqrt{\frac{k}{m}}$ فرکانس طبیعی مود دوم

$\bar{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.62 \end{Bmatrix}$ $\left(\omega_2 = 1.618\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$

بردار مد دوم



نمایش دومین مد ارتعاشی

برای فرکانس کوچکتر مود اول داریم. این مود اول مودی است که سازه‌ها به طور طبیعی دارند. طبقه اول آن دارای تغییر مکان کمتر است و در اکثر مسائل سازه‌ای مود اول مود غالب است

چون سازه‌ها براساس اصل Min انرژی خواستار مصرف کمترین انرژی هستند بنابراین به دنبال مود اول هستند. البته بعداً خواهیم دید که ترکیب این مودها تغییر مکان‌های واقعی را می‌دهد.

در ساختمان ۱۰ طبقه ۱۰ فرکانس و ۱۰ مود داریم.

* برای بدست آوردن بردار مود اول و دوم، فرض در هر دو $X_1 = 1$ قرار می‌دهیم تا X_2 بدست آید. (دقت شود اگر X_n را عددی فرض کردی برای بقیه مودها هم X_n را همین عدد بگذار)

خاصیت تعامد مُدها:

$$\{X_1\}^T [m] \{X_2\} = 0$$

$$\left(1 \quad \frac{1+\sqrt5}{2}\right)\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt5}{2} \end{Bmatrix} = \left(m \quad \frac{1+\sqrt5}{2}m\right)\begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt5}{2} \end{Bmatrix}$$

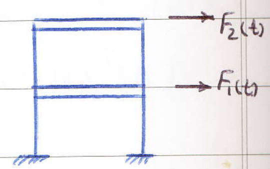
$$= m + \frac{1+\sqrt5}{2}\cdot\frac{1-\sqrt5}{2}m = m - m = 0$$

$$\{X_i\}^T [m] \{X_j\} = 0 \qquad \forall i \neq j$$

ب) تعیین پاسخ دینامیکی سیستم n درجه آزادی تحت اثر بار دینامیکی (بدون استهلاک):

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{F(t)\} \qquad (18)$$

تعریف:



ماتریس مُدی $[A] = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix}_{2\times2} \qquad (19)$

ماتریس A ماتریسی است که هر ستون آن یک بردار مُد است.

در دو درجه آزادی $[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt5}{2} & \frac{1-\sqrt5}{2} \end{bmatrix}$

(اگر دو طرف رابطه 18 را در حاصلضرب ماتریس $[A]^T[M]$ پیش ضرب نماییم خواهیم داشت.) ← اشکال

قبل از اینکار تعریف زیر را خواهیم داشت:

بردار تغییر مکان $\{x(t)\} = [A]\{Y(t)\}$ تغییر متغیر (20)

بردار شکل مودهای دو طبقه $\{x(t)\} = [X_1 \mid X_2]\begin{Bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{Bmatrix}$ (21)

$$= X_1 Y_1(t) + X_2 Y_2(t)$$

اینجا می‌بینیم که تغییر مکان ترکیبی از مُدها هستند. حال اگر توابع زمانی را بدست آوریم مسئله حل است. (اینجا تبدیلی با $V = \varphi_{(t)} Y_{(t)}$ داریم)

پس از جایگزین کردن رابطه (20) در (18) خواهیم داشت:

$$[m][A]\{\ddot{Y}(t)\} + [k][A]\{Y(t)\} = \{F(t)\} \qquad (22)$$

دو طرف رابطه (22) را در ماتریس $[A]^T$ پیش ضرب می‌کنیم.

$$[A]^T[m][A]\{\ddot{Y}(t)\} + [A]^T[k][A]\{Y(t)\} = \{A\}^T\{F(t)\} \qquad (23)$$

$$[A]^T[m][A] = \begin{bmatrix} X_1^T \\ \\ X_2^T \end{bmatrix}[m]\,[X_1 \quad X_2] = \begin{bmatrix} X_1^T \\ \\ X_2^T \end{bmatrix}\left[[m]X_1 \quad [m]X_2\right]$$

$$= \begin{bmatrix} X_1^T[m]X_1 & \cancel{X_1^T[m]X_2} \\ \\ \cancel{X_2^T[m]X_1} & X_2[m]X_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} X_1^T[m]X_1 = M_1 \\ X_2^T[m]X_2 = M_2 \end{cases}$$

جرم مُدی مد اول

جرم مُدی مد دوم

$$M_1 = X_1^T[m]X_1$$

$$M_2 = X_2^T[m]X_2$$

بردار تغییر مکان $\{x(t)\} = [A]\{Y(t)\}$ تغییر متغیر (20)

برای قاب قبل به صورت دو طبقه $\{x(t)\} = [X_1 \mid X_2]\begin{Bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{Bmatrix}$ (21)

$$= X_1 Y_1(t) + X_2 Y_2(t)$$

اینجا می‌بینیم با تغییر متغیر، ترکیبی از مدها هستند. حال اگر توابع زمانی را بدست آوریم مسئله حل است. (اینجا یک شبیه‌سازی با $V = \varphi_{(x)} \cdot Y_{(t)}$ داریم)

پس از جایگزین کردن رابطه (20) در (18) خواهیم داشت:

$$[m][A]\{\ddot{Y}(t)\} + [k][A]\{Y(t)\} = \{F(t)\} \qquad (22)$$

دو طرف رابطه (22) را در ماتریس $[A]^T$ پیش ضرب می‌کنیم.

$$[A]^T[m][A]\{\ddot{Y}(t)\} + [A]^T[k][A]\{Y(t)\} = \{A\}^T\{F(t)\} \qquad (23)$$

$$[A]^T[m][A] = \begin{bmatrix} X_1^T \\ \\ X_2^T \end{bmatrix} [m]\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^T \\ \\ X_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [m]X_1 & [m]X_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} X_1^T[m]X_1 & \overset{0}{\cancel{X_1^T[m]X_2}} \\ \\ \overset{0}{\cancel{X_2^T[m]X_1}} & X_2[m]X_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} X_1^T[m]X_1 = M_1 \\ X_2^T[m]X_2 = M_2 \end{cases}$$

جرم مدی مد اول

جرم مدی مد دوم

$$M_1 = X_1^T[m]X_1$$

$$M_2 = X_2^T[m]X_2$$

$$[A]^T[m][A] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} = [M] \qquad (24)$$

$$\left(M_1 = \bar{X}_1^T\, m\, \bar{X}_1 \quad , \quad M_2 = \bar{X}_2\, m\, \bar{X}_2^T \right) \qquad (25)$$

ارتعاش آزاد $\longrightarrow$ $[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\}$ (26)

$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \sin\omega t = \bar{X} \sin\omega t \qquad (27)$$

$$\ddot{x}_{(t)} = -\omega^2 \bar{X} \sin\omega t$$

پس از جایگزین کردن رابطه (27) در (26) داریم:

$$-\omega^2 [m]\bar{X}\sin\omega t + [k]\bar{X}\sin\omega t = \{0\} \qquad (28)$$

$$\omega_k^2 [m]\bar{X}_k = [k]\bar{X}_k \qquad k=1,2 \qquad (29)$$

$$[A]^T[k][A] = \begin{bmatrix} \bar{X}_1^T \\ \\ \bar{X}_2^T \end{bmatrix} [k] \begin{bmatrix} \bar{X}_1 & \bar{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1^T \\ \\ \bar{X}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [k]\bar{X}_1 & [k]\bar{X}_2 \end{bmatrix}$$

با استفاده از رابطه 29 خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_1^T \\ \\ \bar{X}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 [m]\bar{X}_1 & \omega_2^2 [m]\bar{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 \bar{X}_1^T [m]\bar{X}_1 & \omega_2^2 \bar{X}_1^T [m]\bar{X}_2 \\ \\ \omega_1^2 \bar{X}_2^T [m]\bar{X}_1 & \omega_2^2 \bar{X}_2^T [m]\bar{X}_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [A]^T[k][A] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 M_1 & 0 \\ \\ 0 & \omega_2^2 M_2 \end{bmatrix} \qquad (30)$$

$$[A]^T\{F(t)\} = \begin{bmatrix} X_1^T \\ \\ X_2^T \end{bmatrix}\{F(t)\} = \begin{bmatrix} X_1^T\{F(t)\} \\ \\ X_2^T\{F(t)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \\ f_2(t) \end{bmatrix} \qquad (31)$$

پس از جایگزین کردن روابط (24)، (30) و (31) در رابطه (23)

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{Y}_1(t) \\ \\ \ddot{Y}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +\omega_1^2 M_1 & 0 \\ \\ 0 & +\omega_2^2 M_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_1(t) \\ \\ Y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \\ f_2(t) \end{bmatrix} \qquad (32)$$

در معادله (32) در هر سطر فقط یک مجهول داریم که می‌توانیم در هر سطر از آن، مجهول را پیدا کنیم. یعنی یک سیستم n درجه آزادی را به n سیستم یک درجه آزادی تبدیل کردیم.

اما در معادله (18) در هر سطر چند مجهول و مشتقات آن را داشتیم.

با مقایسه دو رابطه (18) و (32) مشخص می‌گردد که با استفاده از مختصات نرمال می‌توان سیستم n درجه آزادی را به تعداد n سیستم یک درجه آزادی تبدیل نمود که هر یک از آن‌ها به تنهایی قابل حل می‌باشد. به عنوان مثال سطر k ام رابطه (32) برابر است با:

$$M_k \ddot{Y}_k(t) + \omega_k^2 M_k Y_k(t) = f_k(t) \qquad k=1,2 \qquad (33)$$

دو طرف معادله (33) را به M_k تقسیم می‌کنیم

$$\ddot{Y}_k(t) + \omega_k^2 Y_k(t) = \frac{f_k(t)}{M_k} \qquad (34)$$

معادله بالا را با انتگرال دوهامل حل می‌کنیم.

$$Y_k(t) = \frac{1}{M_k \omega_k}\int_0^t f_k(\tau)\sin\omega_k(t-\tau)\,d\tau \qquad (35)$$

$$\{x(t)\} = [A]\{Y(t)\} = [\,X_1 \quad X_2\,]\{Y(t)\}$$
$$= X_1 Y_1(t) + X_2 Y_2(t) = \sum_{k=1}^{2} X_k Y_k(t)$$

$$\Rightarrow \{x(t)\} = \sum_{k=1}^{n} X_k \left\{ \frac{1}{M_k \omega_k} \int_0^t f_k(\tau) \sin \omega_k (t-\tau)\, d\tau \right\} \qquad (36)$$

تحلیل تاریخچه زمانی _ تحلیل دینامیکی تاریخچه زمانی

تعیین پاسخ دینامیکی سیستم n درجه آزادی تحت اثر نیروهای دینامیکی (با استهلاک) 8

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{F(t)\} \qquad (37)$$

با استفاده از روش مختصات نرمال

$$\{x(t)\} = [A]\{Y(t)\} \qquad (20)$$

با جایگزین کردن رابطه (20) در (37) و پیش ضرب کردن ماتریس $[A]^T$ در دو طرف معادله خواهیم داشت.

$$[A]^T[m]\underbrace{\{\ddot{Y}(t)\}}_{}^{[A]} + [A]^T[c][A]\{\dot{Y}(t)\} + [A]^T[k][A]\{Y(t)\} = [A]^T\{F(t)\} \qquad (38)$$

درصورتیکه در رابطه (38) حاصلضرب $[A]^T[C][A]$ یک ماتریس قطری شود حرکت هر یک از سطرهای رابطه 38 نیز مستقل از سطرهای دیگر خواهد بود.

$$[A]^T[C][A] = \text{Diagonal} \qquad \text{ماتریس قطری} \qquad (39)$$

رابطه (39) درصورتی برقرار است که شرایطی نظیر شرایط زیر برقرار باشد.

1) $[C] = \alpha[K] + \beta[M]$

2) در حالت کلی $([M]^{-1}[C])([M]^{-1}[K]) = ([M]^{-1}[K])([M]^{-1}[C])$

در عمل نظر به اینکه مقدار استهلاک سازه کم می باشد عناصر غیرقطری در رابطه (39) نسبت به عناصر

قطری مقادیر ثابت ناچیز بوده، قابل صرفنظر کردن می باشند. در نتیجه رابطه (39) را می توان در خصوص سازه که صدق فرض نمود.

سطر k ام رابطه ماتریسی (38) برابر خواهد بود با:

$$M_k \ddot{Y}_k + C_k \dot{Y}_k + \omega_k^2 M_k Y_k = f_k(t) \qquad (40)$$

دو طرف رابطه (40) را به M_k تقسیم نموده خواهیم داشت:

$$\ddot{Y}_k + 2\xi_k \omega_k \dot{Y}_k + \omega_k^2 Y_k = \frac{1}{M_k} f_k(t) \qquad (41)$$

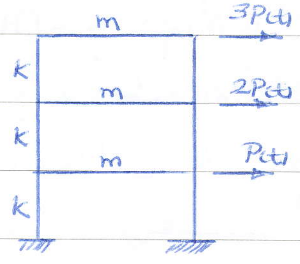
ξ_k نسبت استهلاک بحرانی مد k ام نامیده می شود.

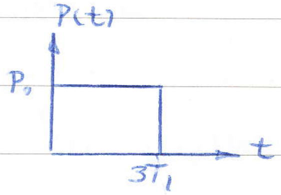
$$Y_k(t) = \frac{1}{M_k \omega_{d_k}} \int_0^t f_k(\tau)\, e^{-\xi_k \omega_k (t-\tau)} \sin \omega_{d_k} (t-\tau)\, d\tau \qquad (42)$$

$$\omega_{d_k} = \omega_k \sqrt{1-\xi_k^2} \qquad (43)$$

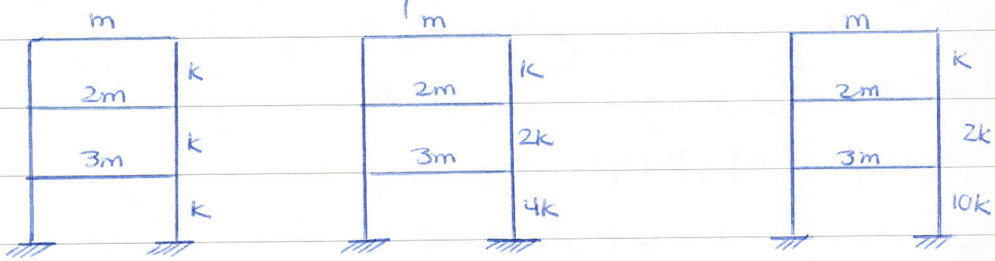
$$\{x(t)\} = \sum_{k=1}^{n} \Phi_k \left\{ \frac{1}{M_k \omega_{d_k}} \int_0^t f_k(\tau)\, e^{-\xi_k \omega_k (t-\tau)} \sin \omega_{d_k} (t-\tau)\, d\tau \right\}$$

تمرین ۲۲: سازه قاب سه طبقه شکل تحت اثر نیروهای نشان داده شده در شکل قرار گرفته است. اولاً سیستم معادلات حرکت را بدست آورید، فرکانس ها و بردارهای مدی متعلق به آن را پیدا کنید. توابع تغییر مکان را در هر یک از طبقات بدست آورید.
(T_1 پریود مد اول سیستم می باشد)



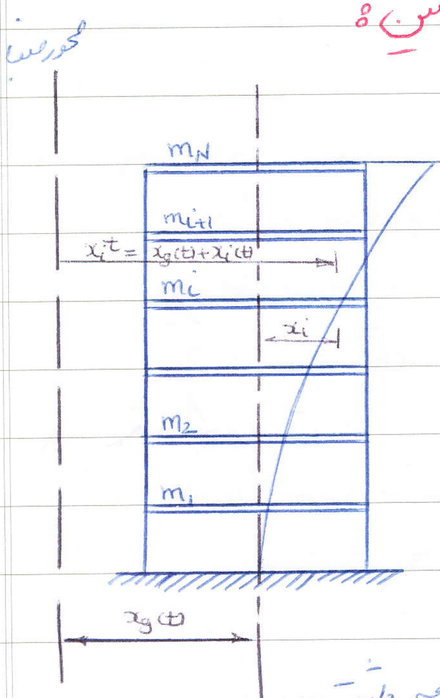


تمرین ۲۴ ؛ در حرکت ارتعاش آزاد برای ۳ طبقه سیستم معادلات حرکت را نوشته و فرکانس های طبیعی و بردارهای مودی را بدست آورده با هم مقایسه نمایید.



طبقه نرم: طبقه ای است که سختی اش از طبقات دیگر خیلی کمتر است.

پاسخ سیستم چند درجه آزادی در مقابل حرکت زمین:



$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{F(t)\} \qquad (1)$$

$$\{F(t)\} = \{0\} \qquad (2)$$

برای

نسبی

$$[m]\{\ddot{x}^t\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\} \qquad (3)$$

$$x_i^t = x_g(t) + x_i \qquad (4)$$

$$\{x^t\} = x_g(t) \cdot \{I\} + \{x(t)\} \qquad (5)$$

$$\{\ddot{x}^t\} = \ddot{x}_g(t)\{I\} + \{\ddot{x}(t)\} \qquad (6)$$

پس از جایگزین کردن رابطه (6) در رابطه (3) خواهیم داشت:

$$[m]\left[\ddot{x}_g(t)\{I\} + \{\ddot{x}(t)\}\right] + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\} \qquad (7)$$

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = -[m]\{I\}\ddot{x}_g(t) = \{P_{eff}(t)\} \qquad (8)$$

$$\{I\} = \begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}_{n\times 1}$$

دو عامل مهم در ارتباط با نیروی زلزله شتاب زمین و جرم ساختمان است.

$$\{P_{eff}(t)\} = -[m]\{I\}\ddot{x}_g(t) \qquad (9)$$

از نتیجه‌ای که در قسمت پیش درخصوص پاسخ دینامیکی سیستم N درجه آزادی با استهلاک انجام گرفت، درخصوص رابطه 8 نیز بکار برده شود خواهیم داشت:

$$\{x(t)\} = [A]\{Y(t)\} \qquad (10)$$

پس از جایگزین کردن رابطه 10 در رابطه 8 و پیش ضرب نمودن آن در ماتریس $[A]^T$ و در نتیجه آوردن سطر k ام آن خواهیم داشت:

$$M_k\ddot{Y}_k + C_k\dot{Y}_k + \omega_k^2 M_k Y_k = X_k^T\{P_{eff}(t)\} = f_{ke}(t) \qquad (11)$$

$$\ddot{Y}_k + 2\xi_k\omega_k\dot{Y}_k + \omega_k^2 Y_k = \frac{1}{M_k} f_{ke}(t) \qquad (12)$$

$$M_k = X_k^T m_k X_k \qquad (13)$$

$$f_{ke}(t) = X_k^T\{P_{eff}(t)\} = -X_k^T[m]\{I\}\ddot{x}_g(t)$$

$$\bar{K}_k = X_k^T[m]\{I\} \qquad (15)$$ ضریب تحریک مودی زلزله

$$\Longrightarrow f_{ke}(t) = \bar{K}_k\cdot\ddot{x}_g(t) \qquad (16)$$

* $\bar{K}_k$ اسکالر است.

با استفاده از روابط مربوط به شبه سرعت تاریخچه زمانی $Y(t)$ برابر خواهد بود با:

$$\begin{cases} Y_k(t) = \dfrac{\bar{K}_k}{M_k\omega_k}V_k(t) & (17)\\[2ex] V_k(t) = \displaystyle\int_0^t \ddot{x}_g(\tau)\, e^{-\xi\omega_k(t-\tau)}\sin\omega_{dk}(t-\tau)\,d\tau & (18)\end{cases}$$

در رابطه (18)، ξ_k نسبت استهلاکی مود k ام، ω_k، فرکانس مود k ام ارتعاش می‌باشد. بدین ترتیب بردار تغییر مکان نسبی ایجاد شده در

این مود برابر است با:

$$\{x_k(t)\} = \Phi_k Y_k(t) = \Phi_k \frac{\bar{K}_k}{M_k \omega_k} V_k(t) \quad (19)$$

برای تمام بردار تغییر مکان نسبی ناشی از تمام واکنش های مودی با استفاده از رابطه (10) برابر است با:

$$\{x(t)\} = [A]\{Y(t)\} = [A]\left\{\frac{\bar{K}_k}{M_k \omega_k} V_k\right\} \quad (20)$$

عبارت داخل $\{\ \}$ یک بردار است که شامل عبارات مربوط به تمام مودهای در نظر گرفته شده در تحلیل می باشد.

تعیین نیروهای الاستیک در تراز طبقات:

$$\{f_s(t)\} = [K]\{x(t)\} = [K][A]\{Y(t)\} \quad (21)$$

از آن جایی که اغلب بسیار مفید خواهد بود که این نیروها برحسب نیروهای اینرسی معادل ایجاد شده بیان گردد می توان با استفاده از روابط مقابل نوشت:

$$[K]\Phi_k = \omega_k^2 [m]\Phi_k \xrightarrow{(22)} [K][A] = [M][A][\Omega^2] \quad (23)$$

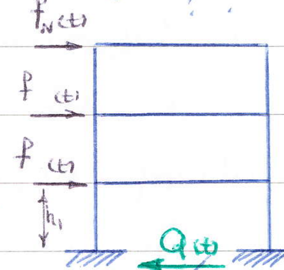
$$[\Omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_N^2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

پس از جایگزین کردن رابطه (23) در (21) خواهیم داشت:

$$\{f_s(t)\} = [m][A][\Omega^2]\{Y(t)\}$$

$$\Rightarrow f_s(t) = [m][A]\left\{\frac{\bar{K}_k}{M_k}\omega_k V_k(t)\right\} \quad (25)$$

برای این است با استفاده از رابطه (13) بردار رابطه الاستیک مربوط به k امین مود برابر است با:



$$\{f_{s_k}(t)\} = [m]\Phi_k \cdot \frac{\bar{K}_k}{M_k}\omega_k \cdot V_k(t) \qquad (26)$$

$\{f_{s_k}(t)\}$ مربوط به طبقه iام نیست، بلکه مربوط به مد kام است که نیروی تمام طبقات در آن مد را در بردارد.

پس از اینکه توزیع نیروهای الاستیک موثر بر از زمان t در طول وقوع زلزله تعیین گردید به کمک روش های متداول استاتیکی می توان مقدار نیروی نتیجه را در هر زمان معین کرد. به عنوان مثال نیروی برش تکیه گاهی $Q(t)$ برابر است با مجموع تمام نیروهای طبقات یعنی:

$$Q(t) = \sum_{i}^{N} f_i(t) = [I]^T\{f_s(t)\} \qquad (27)$$

$\{I\}^T$ در این رابطه بیانگر بردار افقی از اعداد واحد است. با جایگزین کردن رابطه (25) در (27) خواهیم داشت. $[I]^T = \langle 1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \rangle$

$$Q(t) = \sum \frac{\bar{K}_k^2}{M_k}\omega_k V_k(t) \qquad (28)$$

برای بدست آوردن رابطه (28) از تساوی زیر استفاده شده است.

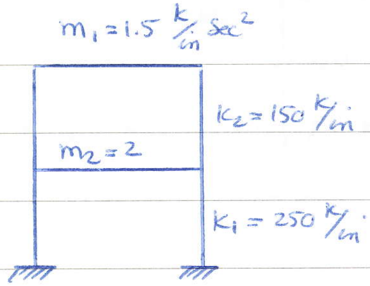
$$[I]^T[m][A] = [\bar{K}_1 \ \ \bar{K}_2 \ \dots \ \bar{K}_N] \qquad (29)$$

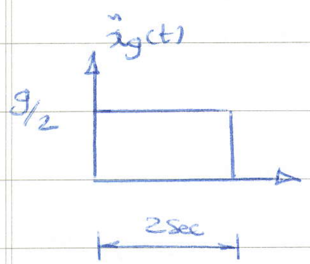
همچنین واژگونی در تکیه گاه برابر است با:

$$M(t) = \sum h_k f_i(t) = [h]\{f_s(t)\} \qquad (30)$$

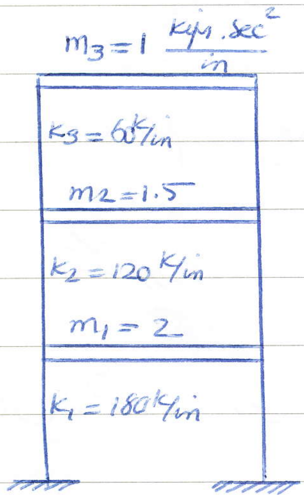
در این حالت $[h]$ بردار افقی از نوع حرکت از طبقات تا تراز پایه می باشد.
با جایگزین کردن رابطه (25) در رابطه (30) خواهیم داشت:

$$M(t) = [h][m][A][-\Omega^2-]\{Y(t)\} = [h][m][A]\left\{\frac{\bar{K}_k}{M_k}\omega_k V_k(t)\right\}$$





تمرین ۲۴: قاب دو طبقه شکل تحت اثر شتاب زمین بصورت دیاگرام ب داده شده در شکل الف قرار گرفته است. مطلوبست تعیین فرکانس های مودی، جرم های مودی، بردار تغییر مکان در هر یک از مودها، بردار تغییر مکان کل، بردار نیروهای الاستیک در هر یک از مودها و بردار نیروی الاستیک کل، برش پایه و ممان واژگونی و رسم تغییر مکان طبقات.



مثال: ساختمان سه طبقه شکل مقابل مفروض است. اولاً مشخصه های ارتعاش، جرم های مودی، ضرایب تحریک مودی را محاسبه نمایید. مقدار استهلاک در هر مود را ٪5 استهلاک بحرانی بگیرید. درصورتی که این ساختمان تحت اثر زلزله ای قرار بگیرد که در زمان $t_1 = 3.08$ sec مقدار تابع شبه سرعت $V_1(t)$ به حد ماکزیمم خود برسد و در این زمان مقادیر تابع شبه سرعت برای مودهای مختلف بصورت زیر باشد مطلوبست تعیین بردار

تغییر مکان و مقدار تغییر مکان در هر تراز، هم چنین بردار نیروی الاستیک را دارد در تراز طبقات و مقدار برش کلیه گام ها در این لحظه:

$$V(t_1) = \begin{Bmatrix} 1.74 \\ 1.22 \\ 0.77 \end{Bmatrix} \; ft/sec$$

$$\det |k - \omega^2 m| = 0 \longrightarrow \{\omega_n\} = \begin{Bmatrix} 4.58 \\ 9.82 \\ 14.59 \end{Bmatrix}$$

$$[k - \omega_n^2 m] X_n = \{0\}$$

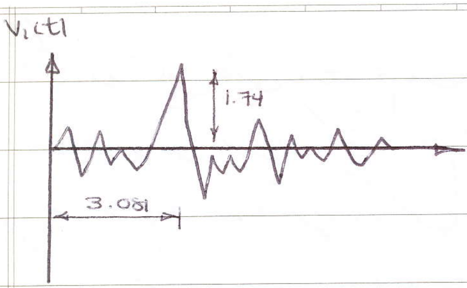
$$\longrightarrow [A] = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.644 & -0.601 & -2.57 \\ 0.3 & -0.676 & 2.47 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{طبقه } 3 \\ \text{طبقه } 2 \\ \text{طبقه } 1 \end{array} \end{array}$$

$$X_k^T m X_k = M_k \longrightarrow \{M_n\} = \begin{bmatrix} 1.801 \\ 2.455 \\ 23.1 \end{bmatrix}$$ جرم های مودی

مد اول محور قائم را یک جا قطع می کند. مد دوم دو جا را قطع می کند. مد n ام n جا را قطع می کند

$$\bar{K}_k = X_k^T m \{I\} \longrightarrow \{\bar{K}_n\} = \begin{bmatrix} 2.56 \\ -1.254 \\ 2.08 \end{bmatrix}$$ ضریب تحریک زلزله

این ها مشخصات ذاتی سیستم است (مشخصات دینامیکی) که به نیرو کاری ندارد.



تعداد رسمی $V_3(t)$, $V_2(t)$: $t_1 = 3.081$ را هم رسم کرده اند. در همین زمان مقادیر خواسته شده را بر اساس شبه سرعت‌ها می‌خواهیم.

$$\{Y_k(t_1)\} = \left\{ \frac{\bar{k}_k}{M_k \omega_k} V_k(t_1) \right\} = \begin{bmatrix} 0.541 \\ 0.0635 \\ 0.00475 \end{bmatrix} ft$$

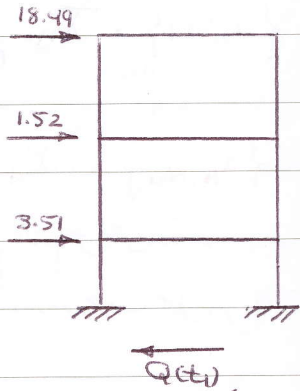
$$\{x(t_1)\} = [A]\{Y(t_1)\}$$

$$\longrightarrow \{x(t_1)\} = \begin{bmatrix} 0.541 + 0.0635 + 0.00475 \\ 0.348 - 0.038 - 0.018 \\ 0.163 - 0.043 + 0.012 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.61 \\ 0.298 \\ 0.131 \end{bmatrix} ft$$

چون $V_1(t_1)$ طیف سرعت در جدول است پس تغییر مکان هم طیف تغییر مکان در جدول است.

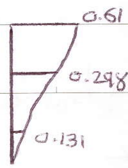
$$\{f_s(t_1)\} = \underbrace{[m][A]}_{3\times3} \underbrace{\left\{ \frac{\bar{k}_n}{M_n} \omega_n V_n(t_1) \right\}}_{3\times1} = \begin{bmatrix} 11.35 + 6.13 + 1.01 \\ 10.95 - 5.53 - 3.90 \\ 6.8 - 8.29 + 5.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18.49 \\ 1.52 \\ 3.51 \end{bmatrix} kips$$

معمولاً اینگونه بدست می‌آید که از پایین به بالا f_s هر طبقه زیاد می‌شود. علت این است که در لحظات مختلف که یکی بیشتر مقادیر Max در هر مود را حساب می‌کند. اما اینجا در زمان t_1 کشش شده.



نیروی برشی پایه که حاصل از جمع جبری نیروهای طبقات بدست می‌آید.

$$Q(t_1) = 18.49 + 1.52 + 3.51 = 23.52 \text{ kips}$$



کاربرد تحلیل طیفی در سیستم های n درجه آزادی

محاسبه واکنش سازه‌ای یک سیستم چند درجه آزادی با جرم متمرکز برای حوزه‌های مانند t مستلزم محاسبه انتگرال واکنش زلزله در آن زمان برای حرکت از مودهای مهم واکنش می‌باشد. بنابراین محاسبه واکنش Max مستلزم آن است که واکنش هر مود برای هر زمان در طول زلزله محاسبه گردد تا بتوان مقدار Max را تعیین نمود. واضح است که این کار نیازمند عملیات محاسباتی بسیار زیاد بوده و همچنین جهت وقتگیر می‌باشد. لذا توجه به روشی که بر اساس طیف واکنش حرکت زمین استوار باشد بیشتر مورد تأکید قرار گرفته است.

با استفاده از مشخصات طیف که اساسی می‌توانیم برای حرکت از مودهای سازه واکنش Max را مانند آنچه که برای سیستم های تک درجه آزادی شرح داده شد به کمک طیف واکنش بدست آورد.

با استفاده از مشخصات طیف مقدار Max بردار تغییر مکان در مود K را می‌توان از رابطه زیر بدست آورد.

$$\{x_k(t)\}_{n\times1} = \Phi_k \frac{\bar{K}_k}{M_k \omega_k} V_k(t) \qquad (1)$$

$$\{x_{k,Max}\} = \Phi_k \frac{\bar{K}_k}{M_k} S_{d_k} \qquad (2)$$

که در این رابطه S_{d_k} تغییر مکان طیفی مربوط به استهلاک و دوره تناوب مود k ام ارتعاش می‌باشد.

همچنین مقدار Max بردار نیروی الاستیک در مود k ام با استفاده از مشخصات طیف برابر است با:

$$\{F_{S_k}(t)\}_{n\times1} = [M] \Phi_k \frac{\bar{K}_k}{M_k} \omega_k V_k(t) \qquad (3)$$

$$\{F_{S_k,Max}\}_{n\times1} = [M] \Phi_k \frac{\bar{K}_k}{M_k} S_{a_k} \qquad (4)$$

در این رابطه S_a شتاب طیفی مود iK ام مربوط به استهلاک و دوره تناوب مود iK ام ارتعاش است.

(در حالت کلی Max واکنش کل را نمی‌توان صرفاً از جمع کردن ماکزیمم‌های مودی بدست آورد. زیرا این مقادیر Max معمولاً در یک زمان اتفاق نمی‌افتند. در اغلب حالات هرگاه که یک مود در حد Max خودش باشد دیگر واکنش‌های مودی در حدی کمتر از Max های مربوطه خودشان باشند. بنابراین اگرچه ترکیب کردن مقادیر طیفی مودها حد بالایی از واکنش کل را بدست می‌دهد، لکن معمولاً از حد Max واکنش کل بسیار بیشتر است)

ساده‌ترین و متداول‌ترین فرمول‌ها برای این منظور جذر مجموع مربعات واکنش‌های مودی است. بنابراین اگر Max تغییر مکان‌های مودی داده شده باشد، Max تغییر مکان کل را به طور تقریب بسیار خوبی می‌توان با رابطه زیر برابر دانست:

بردار

$$\underset{N\times 1}{\underset{\sim}{x}_{Max}} = \left[(x_1)^2_{Max} + (x_2)^2_{Max} + (x_3)^2_{Max} + \cdots + (x_N)^2_{Max}\right]^{1/2} \quad (5)$$

در جملات زیر رادیکال بیانگر بردارهای تغییر مکان‌های مودی است که به توان 2 رسیده است.

در صورتیکه ماکزیمم نیروی الاستیک را بتوان بصورت ترکیبی از Max های مودی بدست آورد.

$$\underset{N\times 1}{\underset{\sim}{f_S}_{Max}} = \left[(f_{S_1})^2_{Max} + (f_{S_2})^2_{Max} + (f_{S_3})^2_{Max} + \cdots + (f_{S_N})^2_{Max}\right]^{1/2} \quad (6)$$

مثال: یک ساختمان ۳ طبقه مثال قبل را در نظر بگیرید (کلیه مشخصات دینامیکی همان است) در صورتیکه با فرض ۵٪ استهلاک بحرانی برای کلیه مودها و اشکال مودی

$$Q_{Max} = \sqrt{\sum \left(\frac{K_k^2}{M_k} \cdot \omega_k \cdot S_{v_k}\right)^2}$$

دوره‌های تناوب داده شده در قسمت قبل از طیف سرعتی استفاده نموده که در آن منطقه تکراری می‌شود و مقدار سرعت طیفی برای حرکت از مودها به صورت زیر باشد ، مطلوبست تعیین : Max تغییرمکان مودی حرکت از مودها ، Max مقدار تغییرمکان کل ، Max نیروهای طبقات در حرکت از مودها و Max نیروی کل وارد بر طبقات و سهم حقیقی Max نیروی برشی مودی و Max برش تکیه‌گاهی کل .

$$\{S_v\} = \begin{bmatrix} 1.73 \\ 1.41 \\ 1.2 \end{bmatrix} ft/s \qquad T_n = \begin{bmatrix} 1.37 \\ 0.64 \\ 0.431 \end{bmatrix} \qquad \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 5\%$$

با توجه به T_n و ξ طیف S_v بدست می‌آید (البته قبلاً به عنوان مفروض خواسته S_v را داده)

- تعیین تغییرمکان Max :

$$\{x_{n,Max}\} = \Gamma_n \frac{\bar{k}_n}{M_n} \frac{S_{vn}}{\omega_n}$$

$$\{x_{1,Max}\} = \begin{bmatrix} 0.541 \\ 0.348 \\ 0.169 \end{bmatrix} \qquad \{x_{2,Max}\} = \begin{bmatrix} 0.074 \\ 0.044 \\ 0.05 \end{bmatrix} \qquad \{x_{3,Max}\} = \begin{bmatrix} 0.008 \\ 0.019 \\ 0.018 \end{bmatrix}$$

با ترکیب کردن Max های مودی به روش جذر مجموع مربعات ، Max تغییرمکان کل به طور تقریبی بدست می‌آید .

$$\{x_{Max}\} \cong \begin{bmatrix} ((0.541)^2 + (0.074)^2 + (0.008)^2)^{1/2} \\ ((0.348)^2 + (0.044)^2 + (0.019)^2)^{1/2} \\ ((0.169)^2 + (0.05)^2 + (0.018)^2)^{1/2} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0.546 \\ 0.351 \\ 0.17 \end{bmatrix} ft$$

همانطور که ملاحظه می‌شود، مودهای بالاتر سهم اندکی در مقدار Max دارند و مود اول بیشترین سهم را در مقدار تغییرمکان دارا است .

- تعیین نیروهای الاستیک

$$\{f_{s_n,Max}\} = [M]\{X_n\}\frac{\bar{K}_n}{M_n}\omega_n S_{v_n}$$

$$\{f_{s_1,Max}\} = \begin{bmatrix} 11.35 \\ 10.95 \\ 6.8 \end{bmatrix} kips \quad \{f_{s_2,Max}\} = \begin{bmatrix} 7.08 \\ 6.39 \\ 9.58 \end{bmatrix} kips \quad \{f_{s_3,Max}\} = \begin{bmatrix} 1.57 \\ 6.08 \\ 7.79 \end{bmatrix} kips$$

با ترکیب کردن بردارهای فوق به روش جذر مجموع مربعات مقدار تقریبی نیروی کل زلزله در طبقات بدست می آید.

$$\{f_{s,Max}\} = \begin{bmatrix} 13.47 \\ 14.06 \\ 14.1 \end{bmatrix}$$

برای نیروی برشی پایه (برش پایه) با استفاده از رابطه زیر بدست می آید.

$$Q_{0n}\Big|_{Max} = \frac{\bar{K}_n^2}{M_n}\cdot\omega_n S_{v_n} \quad \begin{cases} Q_{01,Max} = 29.13\ kips \\ Q_{02,Max} = 8.77\ '' \\ Q_{03,Max} = 3.28\ '' \end{cases} \quad \text{(الف)}$$

با استفاده جذر مجموع مربعات آن را مقدار تقریبی Max برش پایه کل بدست می آید.

$$Q_{0,Max} = (29.13^2 + 8.77^2 + 3.28^2)^{1/2} = 30.6\ kips$$

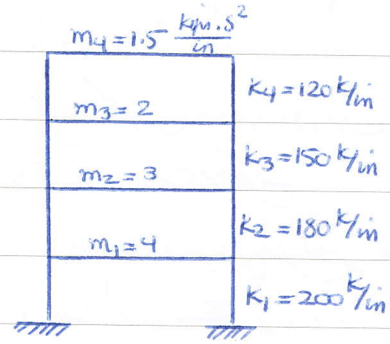
این اختلاف کم نشان می دهد که Max برش پایه را می توان از جمع کردن برش های Max طبقات (الف) بدست آورد. زیرا این برش ها هم زمان نمی باشند.

$$M_n^* = \frac{\bar{K}_n^2}{M_n}$$ — جرم موثر مود n ام

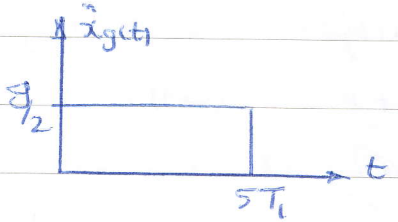
$M_1^* = 3.656 \qquad M_2^* = 0.641 \qquad M_3^* = 0.187$

مجموع جرم های موثر $M_1^* + M_2^* + M_3^*$ برابر است با عدد 4.48 که برابر جمع جرم کل سازه است.

اگر سازه ۵۰ طبقه بود آیین نامه اشاره دارد که مودهایی را بررسی کنید که جمع جرم‌های مؤثر مودی کمتر از ۹۰٪ وزن کل سازه نباشد.



تمرین ۲۵: ساختمان چهار طبقه شکل مقابل مفروض است. اولاً فرکانس‌ها و مودهای متعلق به آن را بدست آورید. ثانیاً جرم‌های مودی و ضریب مشارکت زلزله را بدست آورید. ثالثاً در صورتیکه این ساختمان تحت اثر زلزله‌ای قرار گیرد که نمودار شتاب آن بصورت مقابل باشد مطلوبست تعیین: $(\xi = 0)$



۱) تابع تغییر مکان در هر یک از طبقات.

۲) مقدار Max تغییر مکان در مود اول.

۳) بردار نیروهای الاستیک برای هر یک از مودها و برای ترکیب آنها

۴) تابع برش پایه برای هر یک از مودها و مقدار Max برش پایه در مود اول.

تمرین ۲۶: اگر برای طراحی ساختمان تمرین ۲۵ سوال از نمودار شکل A استفاده کرد و نسبت استهلاک بحرانی را برای کلیه مودها ۵٪ در نظر گرفت بردار تغییر مکان Max را برای هر یک از مودها بدست آورید و تغییر مکان کل را محاسبه کنید. همچنین نیروهای الاستیک در هر از طبقات و برش پایه را در هر یک از مودها و مقدار کل آنها را بدست آورید.

حمید کاظم

مبانی تئوری آیین نامه را توضیح دهید؟ با هم مقایسه کنید؟

فصل پنجم:

مبانی تئوری آیین نامه های زلزله:

مقایسه روابطی که در مباحث قبلی برای نیروهای ایجاد شده بر اثر زلزله بدست آمد با ضوابط طراحی یک نمونه از آیین نامه های ساختمانی می تواند مبانی علمی و تئوری آیین نامه ها را روشن سازد.

(به عنوان مثال در آیین نامه عمومی ساختمان UBC نیروی موثر زلزله طراحی به صورت Max نیروی برشی حاصل از زلزله در تکیه گاه ساختمان بیان می شود.

رابطه نیروی برشی تکیه گاه (Q) مطابق این آیین نامه برابر است با:

$$Q_{Max} = K \hat{C} W \quad (1)$$

در این رابطه W وزن ساختمان، $\hat{C}$ ضریب برش تکیه گاهی و K ضریبی است که بستگی به نوع سیستم سازه ای دارد. این ضریب به ظرفیت نسبی جذب انرژی سیستم سازه ای وابسته است.

ضریب برش تکیه گاهی ($\hat{C}$) به صورت تابعی از دوره تناوب اصلی ارتعاش سازه (T) به صورت زیر بیان می گردد.

$$\hat{C} = \frac{0.05}{\sqrt[3]{T}} \quad (2)$$

البته آیین نامه های ساختمانی من جمله UBC دارای ضریب منطقه است که این ضریب بستگی به مناطق لرزه خیزی از نظر شدت آن دارد. در این رابطه ضریب منطقه واحد در نظر گرفته شده است که برای مناطقی است که دارای بیشترین خطر زلزله خیزی می باشد.

رابطه تحلیلی متناظر با فرمول (1) را می توان با استفاده از روابط قبل به صورت زیر نوشت.

$$Q(t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\bar{K}_n^2}{M_n} \omega_n V_n(t) \quad (3)$$

$$Q_1(t) = \frac{\bar{K}_1^2}{M_1} W_1 \cdot V_1(t) \longrightarrow Q_{1(t)Max} = \frac{\bar{K}_1^2}{M_1} \cdot Sa_1$$

$$\rightarrow Q_{1Max} = \frac{\bar{K}_1^2}{M_1} g \cdot \frac{Sa_1}{g} \qquad (4)$$

مقایسه رابطه (۴) و (۱) معادل بودن جملات زیر را نمایان می سازد :

$\hat{C}$ —— $\bar{W}$

$\frac{Sa_1}{g}$ —— $\frac{\bar{K}_1^2}{M_1} g$

بنابراین ضریب برش پایه کاهشی معادل شتاب طیفی است که بصورت نسبتی از شتاب زمین بیان شده است و وزن کل بصورت معادل با وزن موثر مود اول درنظر گرفته شده است. که معمولاً وزن موثر مود اول کمتر از وزن کل می باشد.

از مقایسه دو رابطه به سادگی ملاحظه می شود که نیروی زلزله ای که توسط آیین نامه تعیین می شود شکل اساسی به رابطه ضریب برش پایه کاهشی (رابطه (2)) دارد.

* مهم ترین عامل در بدست آمدن نیروی برشی پریود طبیعی است.

* اگر در جهت تئوری پیش برویم چون شتاب های طیفی را می سنجیم پس پریود سازه بیشتر از حالت واقعی اش می باشد. پس برش پایه کمتر می شود و این در جهت اطمینان نیست

دیگر مقررات آیین نامه عمومی ساختمان چگونگی توزیع نیروی برشی پایه کاهشی کل را در ارتفاع ساختمان تعیین می نمایند.

$$f'_{si,Max} = \frac{W_i x_i}{\sum W_i x_i} Q_{Max} \qquad (5)$$

f'_{si} : نیروی جانبی در طبقه i (با مسائل مطرح شده در فصل قبل فرق دارد)

W_i : وزن طبقه i

x_i : ارتفاع طبقه i از تکیه گاه ساختمان

سازه n طبقه $\quad X_1 = \begin{bmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{12} \\ \vdots \\ \psi_{1n} \end{bmatrix}$

رابطه کلی نیروی متناظر را می توان از روابط بخش قبل بصورت زیر نوشت.

$$\{f_{s_n}(t)\} = [m]\, X_n \frac{\bar{K}_n}{M_n}\, \omega_n \cdot V_n(t) \qquad (6)$$

با جایگزین کردن $n=1$ برای مود اول خواهیم داشت:

$$\{f_{s_1,Max}\} = [m]\, X_1 \cdot \frac{\bar{K}_1}{M_1} \cdot S_{a_1} \qquad (7)$$

رابطه (7) برای تراز i برابر است با:

نیروی طبقه iام از مود اول

$$f_{s_i,Max} = m_i\, \psi_{1i} \times \frac{\bar{K}_1^2}{K_1} \cdot \frac{S_{a_1}}{M_1} \qquad (8)$$

عنصر iام بردار X_1

$$\rightarrow f_{s_i,Max} = m_i \cdot \psi_{1i} \cdot \frac{1}{K_1} \cdot Q_{Max} \qquad (9)$$

$$\rightarrow f_{s_i,Max} = \frac{m_i \psi_{1i}}{\sum m_i \psi_{1i}}\, Q_{Max} \qquad (10)$$

با مقایسه روابط 10 و 5 مشخص می شود که رابطه آیین نامه بر اساس واکنش یک سیستم جرم متمرکز قرار دارد که مقید به تغییر مکانی بصورت خط مستقیم است یعنی:

$$\psi_{1i} = \frac{x_i}{L}$$

این شکل فرضی بدین دلیل در آیین نامه بکار رفته است که بررسی های انجام شده روی ارتعاش بسیاری از ساختمان ها نشان داده است که معمولاً شکل مود اول به خط مستقیم تقریباً نزدیک است.

بطور خلاصه ملاحظه می شود که ضوابط تعیین شده در آیین نامه های ساختمانی من جمله در آیین نامه UBC برای تعیین نیروی زلزله مشابه با نتایج حاصل از آنالیز مود اول طیف واکنش که شکل مود اول آن بصورت خط مستقیم فرض شده است و ضریب برش پایه که بصورت شتاب طیفی مود اول اصلاح شده باشد در نظر گرفته است.

برای منظور کردن تأثیر واکنش مودهای بالاتر، آیین نامه UBC دارای ضوابطی است که مطابق آن در ساختمان های بلند مقدار بیشتری از نیروهای جانبی در بالاترین تراز ساختمان اعمال می گردد. (نیروی شلاقی)

واکنش خطی و غیر خطی سازه ها در مقابل زلزله

در مبحث قبل در خصوص آنالیز واکنش زلزله، سازه بصورت یک سیستم خطی فرض شده بود. ولی هنگامی که سازه تحت اثر زلزله های متوسط تا شدید قرار گیرد، می توان انتظار داشت که چنین حرکات شدیدی باعث ایجاد آسیب هایی شود. واضح است که چنین شرائطی واکنش غیر خطی زلزله را موجب می گردد. هم چنین به سادگی می توان نشان داد که حتی زلزله های با شدت های متوسط می توانند باعث ایجاد تنش های اضافی ای در سازه هایی که بر اساس ضوابط طراحی زلزله یک آیین نامه طراحی شده باشند، گردند.

همانطور که در شکل «نک» ملاحظه می شود، مقایسه بین ضریب برش پایه که گاهی تعیین شده توسط آیین نامه و طیف های واکنش که برای سه زلزله محاسبه شده اند نشان دهنده این واقعیت هستند که حتی یک زلزله متوسط می تواند باعث ایجاد نیروهای در سازه شوند که چندین بار بزرگتر از ضوابط طراحی آیین نامه هستند. مقایسه کاملتری بین اثرات نیروی آیین نامه با واکنش نسبت به یک زلزله متوسط برای یک ساختمان 20 طبقه مطابق شکل "د" بعمل آمده است. تنش ها و تغییر مکان های این سازه هم اثر نیروهای جانبی زلزله مطابق آیین نامه UBC توسط یک برنامه کامپیوتری آنالیز استاتیکی قاب محاسبه شده است. و واکنش این سازه نسبت به نمودار شتاب زلزله ال سنترو، که در شکل "ه" نشان داده شده است توسط یک برنامه آنالیز دینامیکی قاب بر طبق ترکیب مودهای نرمال محاسبه گردیده است.

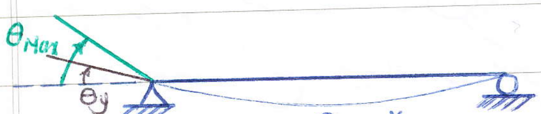
دقت روش های غیرخطی و خطی در کجا کم است؟

نتایج مقایسه واکنش دینامیکی غیرخطی چه چیزی را در تیر و ستون نشان می دهد؟

تغییرمکان های طبقات رفتار های تیرها و ستون های مشخص از سازه که توسط دو روش فوق بدست آمده اند در شکل "چهار" نشان داده شده است. شایان یادآوری است که نتایج واکنش دینامیکی حاصل مقادیر پوش هستند، یعنی مقادیر بدست آمده در هر زمان در طول واکنش دینامیکی مقادیر Max می باشند بنابراین مقادیر منحنی مذکور کاملاً متوافق نمی باشند.

(تغییرمکان های Max سیستم غیرخطی اساساً همانند تغییرمکان های Max سیستم خطی بوده و فقط درصد اندکی از آن بیشتر است. اما تغییر شکل ستون ها و تیرها در مکانیسم تسلیم غیرالاستیک بسیار متفاوت است.) این نتایج به صورت نسبت شکل پذیری بیان می شود. که تعریف آن در خصوص تیرها نسبت Max چرخش انتهایی به چرخش انتهایی در حالت اولیه تسلیم می باشد

DR → Ductivity Ratio



نسبت شکل پذیری $DR = \frac{\theta_{Max}}{\theta_y}$

$$\rightarrow DR = \frac{\theta_y + \gamma_{Max}}{\theta_y} \Rightarrow DR = 1 + \frac{\gamma_{Max}}{\theta_y}$$

* اگر از حالت تسلیم عبور کنیم نسبت شکل پذیری از یک بیشتر می شود.

قابل توجه است که نسبت شکل پذیری کمتر از یک به معنی آن است که عضو به حالت تسلیم نرسیده است.

(نتایج آنالیز واکنش الاستیکی نیز در شکل "پنج" به صورت نسبت Max چرخش انتهایی به چرخش تسلیم عضوشان داده شده است.

شکل "پنج" نشان می دهد که حالت تسلیم به طور عمده در تیرها مخصوصاً در طبقات پایین و بالا توسعه پیدا کرده است. در حالی که ستون ها به جز طبقات بالا همه همچنان الاستیک باقی مانده اند. وقوع حالت تسلیم در طبقات پایین نتیجه مستقیم شدت زیاد حرکت

مشخصات طرح ستون قوی و تیر ضعیف چیست؟

تکیه گاهی است. در صورتیکه وقوع مفصل پلاستیک در طبقات بالا ناشی از اثر مودهای دیگر یا به عبارت دیگر بازتاب موجی (اثر شلاقی) می باشد.

تأثیر تغییرات مقاومت تیر و ستون را در رفتار سازه تشریح کنید؟

تأثیر تغییرات مقاومت:

این واقعیت که در بیشتر حالات مورد بحث تقریباً تمام تیرها به حالت تسلیم می رسند لکن ستونها عمدتاً الاستیک باقی می مانند ناشی از توزیع نسبی مقاومت اعضا است. (در واقع انرژی جذب شده توسط تیرها در هنگام حالت تسلیم آنها باعث جلوگیری از ازدیاد تنش در ستونها می گردد) هرگونه تغییری در مقاومت نسبی ستونها و تیرها می تواند باعث انتقال حالت تسلیم از یک عضو به عضو دیگر شود. نتایج حاصل از آنالیزهای انجام شده برای مقاومتهای مختلف در تیرها در شکل "هفت" نشان داده شده است. در این حالت کلیه ستونها دارای مقاومت شکل "پنج" می باشند. لکن تیرها علاوه بر حالت ضریب مقاومت استاندارد 2 برای حالتهای 1.5 و 4 برابر مقادیر حالتهای طراحی نیز در نظر گرفته شده اند. همانطور که انتظار می رفت مشاهده می شود که نسبتهای شکل پذیری تیر دارای تغییراتی معکوس با مقاومت هستند. به همین صورت تغییر مکانهای جانبی طبقات بالا با افزایش مقاومت تیرها افزایش می یابد.

این نتیجه نسبتاً غیر منتظره را می توان بر اساس رفتار حالت تسلیم توضیح داد. واضح است که هر افزایشی در نیروی مقاوم تیر باعث ایجاد تسلیم بیشتر در ستونهای طبقات بالاتر می گردد و این افزایش در تغییر شکل ستونها باعث تأثیر مستقیم در تغییر مکانهای طبقات می شود.

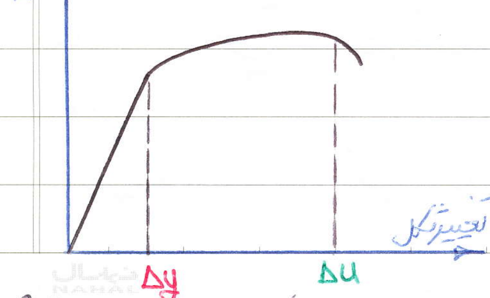
در شکل "هشت" مقاومت تیرها همانند حالت شکل پنج است لکن مقاومت ستونها علاوه بر حالت ضریب مقاومت استاندارد 6 برای حالتهای 2 و 10 برابر مقادیر

از نتایج حاصله از آنالیزهای غیرخطی چه دستاوردهای مفیدی بدست می آید؟

همان‌های طراحی نیز در نظر گرفته شده اند.
از این شکل ملاحظه می شود که افزایش مقاومت ستون اثر اندکی بر رفتار ساختمان دارد، زیرا ستون‌های ساختمان مذکور، قدر قوی هستند که فقط به میزان کمی دچار افزایش تسلیم می شوند.
از سوی دیگر در حالت کاهش مقاومت ستون (ب ۲) حالت تسلیم در تیرها نیز به دلیل افزایش شدید تسلیم ستون‌ها به میزان زیادی کاهش می یابد.
(از نتایج حاصله از این آنالیزهای غیرخطی می توان چند دستاورد مفید را مطرح کرد:

اولاً واضح است که بایستی یک تعادل معقول بین مقاومت ستون‌ها و تیرها برقرار باشد. به همین جهت اتخاذ تصمیم بر مبنای تیر ضعیف و ستون قوی توصیه می گردد.
در حالیکه تسلیم موضعی تیرها تأثیر شدیدی بر ظرفیت باربری قائم سازه ندارد، لیکن تسلیم موضعی ستون به راحتی می تواند باعث خرابی سازه گردد (مفصل ایجاد می گردد که در ستون باعث تخریب می گردد)

ثانیاً می توان چنین ادعا کرد که بایستی از ایجاد نواحی ضعیف موضعی در قاب سازه احتراز کرد، زیرا انرژی که باعث خرابی می شود به آن نواحی سوق داده شده و در نتیجه بقیه قسمت‌های سازه با ظرفیت‌های کمتری کار خواهند کرد.
کارآمدترین طرح دارای حالت تعادل مقاومت‌ها می باشد به طوریکه حالت تسلیم به طور یکنواخت توزیع شده و هیچ نقطه سازه تحت تأثیر تنش اضافی نباشد)



« شکل ۱۱ »

تعریف شکل پذیری:

منحنی نمونه نیرو ـ تغییر شکل برای یک عضو شکل پذیر در شکل (۱۱) رسم شده است. Δy در این شکل تغییر شکل نظیر

در تسلیم فولاد در یک مقطع با تغییر شکل نقطه‌ای می‌باشد که در آن منحنی نیرو - تغییر شکل از حالت خطی به غیر خطی در می‌آید. Δu تغییر شکل اضافی می‌باشد که بعد از آن منحنی نیرو - تغییر شکل دارای شیب منفی می‌گردد.

متداول‌ترین روش سنجش شکل پذیری $\mu = \frac{\Delta u}{\Delta y}$ تعریف می‌شود.

در مورد تیرها و عناصر خمشی نسبت شکل پذیری برحسب انحنا تعریف می‌شود.

$$\mu = \frac{\theta u}{\theta y}$$

شکل پذیری ممکن است به تمام و یا فقط قسمتی از آن اشاره کند، به همین جهت مقدار شکل پذیری در هر حالت فرق دارد.

تقسیم بندی ضرایب شکل پذیری:

ضرایب شکل پذیری بر چند دسته اند؟ توضیح دهید؟

شکل پذیری (ضرایب شکل پذیری) را می‌توان به ۳ دسته زیر تقسیم نمود.

۱) ضریب شکل پذیری برای عضو مانند ظرفیت دورانی یک گره در اتصال عضو خمشی

۲) ضریب شکل پذیری برای طبقه و یا کف از یک ساختمان

۳) ضریب شکل پذیری کلی ساختمان

ضریب شکل پذیری برای هر ۳ دسته از قسمت‌های فوق توسط رابطه نیرو - تغییر مکان تعیین می‌گردد. این تغییر مکان برای عضو می‌تواند تغییر طول محوری عضو، دوران یک اتصال در عضو خمشی و یا تغییر شکل برشی از دیوار برشی باشد.

تغییر مکان برای طبقه، تغییر مکان نسبی بین دو طبقه در نظر گرفته می‌شود و تغییر مکان برای ساختمان یک نوع متوسط گیری شکل پذیری طبقات با استفاده از تابع وزنی تعیین می‌گردد.

بدین ترتیب ضریب شکل پذیری عضو معمولاً بزرگتر از ضریب شکل پذیری طبقه است.

و ضریب شکل پذیری طبقه بزرگتر از ضریب شکل پذیری کلی ساختمان است به طور مثال ضریب شکل پذیری عضو از 5 تا 15 تغییر می کند و ضریب شکل پذیری طبقه از 3 تا 8 تغییر نموده است. در صورتیکه ضریب شکل پذیری کل ساختمان از 3 تا 5 در نظر گرفته می شود.)

(با توجه به تقسیم بندی فوق، تعریف ضریب شکل پذیری نسبت تغییر شکل مجاز حداکثر به تغییر شکل در تغییر مکان تسلیم موثر می باشد)

(ضریب شکل پذیری فولاد نسبت به بتن مسلح معمولاً بیشتر است و ضرایب شکل پذیری برای فولاد در تغییر شکل کششی بزرگتر از تغییر شکل خمشی و تغییر شکل خمشی بیشتر از تغییر شکل فشاری می باشد و ضرایب برای برش مقادیری بین خمش و فشار است)

(برای بتن ضریب شکل پذیری تابع ترتیب و مقدار بتن آرماتورها می باشد. با در نظر گرفتن آرماتور فشاری شکل پذیری 15 نیز قابل حصول است. برای ستون های بتنی با استفاده از فولادگذاری مارپیچ ضرایب بین 4 تا 6 امکان پذیر است و برای دیوارهای برشی با آرماتورهای افقی، عمودی و مایل ضرایب بین 4 تا 6 تغییر می کند.)

تعریف ضریب شکل پذیری به طور دقیق چیست؟
شکل پذیری را تعریف کرده اساس آن را معرفی کنید.

به چه علت آنالیز غیرخطی کمتر انجام می‌شود؟
فرض اصلی روش ضریب شکل پذیری چیست؟

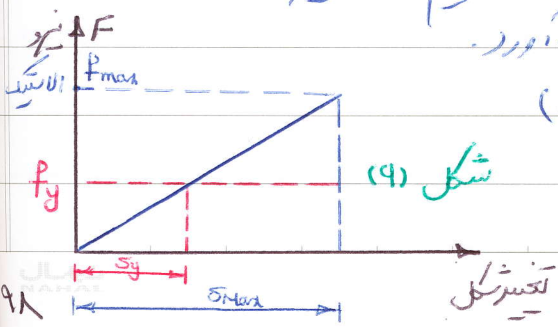
روش ضریب شکل پذیری را تعریف کرده معنا آن را بیان کنید؟

روش ضریب شکل پذیری :

(اگرچه آنالیز غیرخطی که در این فصل از آن بکار برده شده است از نظر مفهوم مشکل نمی‌باشد ولی کار بردن آن حتی برای سازه‌های خیلی ساده نیز مستلزم عملیات محاسباتی بسیار زیاد است زیرا ماتریس سختی در هر مرحله از این فرآیند متوالی بایستی اصلاح و تجزیه شود. انتخاب تناسب سختی و مقاومت اعضا مستلزم یک روش تکراری است به طوری که لازم است چندین طرح مختلف متوالیاً آنالیز شوند تا بتوان به طرح ایمنی و قابل قبول دست یافت. به همین جهت آنالیز غیرخطی کامل به ندرت انجام می‌شود مگر در مواردی که برای کنترل نهایی دقت یک طرح تکمیل شده انجام گردد.

* در هر مرحله سختی را ثابت گرفته آنالیز خطی می‌کنند.
سپس برای مرحله بعد شرایط اولیه را شرایط مرحله قبل می‌گیرند و سختی را عوض می‌کنند.)

به منظور دستیابی به اندازه معقولی از رفتار غیرخطی سازه در هنگام زلزله بدون انجام یک آنالیز غیرخطی واقعی روش ضریب شکل پذیری ارائه شده است.
(فرض اصلی در این روش این است که تغییر مکان‌های ایجاد شده در اثر یک زلزله مشخص چه سازه به صورت الاستیک عمل کند و یا اینکه به میزان زیادی تسلیم شود تقریباً یکسان هستند.) این رفتار در شکل پنج نشان داده شده است که تغییر مکان‌های غیرالاستیک مشابه تغییر مکان‌های الاستیک می‌باشند. بنابراین اگر تغییر شکل‌های غیرخطی عضو راجع به تغییر شکل‌های واکنش الاستیک فرض کنیم رفتار غیرالاستیک آن را می‌توان مستقیماً از آنالیز واکنش الاستیکی بدست آورد.



شکل (۹)

در شکل (۹) اگر Max تغییر مکان (δ_{Max}) بدون توجه به مشخصات مقاومت آن با تغییر مکان غیرخطی یکسان باشد است

تغییر شکل Max (δ_{Max}) به تغییر شکل حدی الاستیک (δ_y) برابر خواهد بود با نیروی ایجاد شده در واکنش الاستیکی متناظر به نیروی تسلیم عضو.

$$\frac{\delta_{Max}}{\delta_y} = \frac{f_{Max}}{f_y} \quad (1)$$

از طرف دیگر ضریب شکل پذیری برابر است با:

$$\mu = \frac{\delta_{Max}}{\delta_y} \quad (2)$$

بنابراین مقاومت طراحی مورد نیاز برای هر عضو را می توان بر حسب نیروی واکنش الاستیکی را در صورت زیر بدست آورد.

مقاومت طراحی $f_y = \frac{1}{\mu} f_{Max}$ (3)

بنابراین به سادگی می توان تصور واکنش غیرخطی را در طراحی در نظر گرفت. در ابتدا یک آنالیز واکنش خطی را انجام شده سپس مقاومت های طراحی با تقسیم نیروهای الاستیکی به دست آمده و با اعمال کاهش توسط ضریب شکل پذیری تعیین می گردد.

از سوی دیگر چنانچه عضو غیرالاستیک یک طرح داده شده را می توان از ضرایب شکل پذیری اعضا توسط نسبت Max نیروی الاستیک عضو به مقاومت معلوم عضو تعیین می شود.

$$\mu = \frac{f_{Max}}{f_y} \quad (4)$$

این روش آنالیز تقریبی واکنش غیرالاستیک را می توان با استفاده از نتایج حاصل از واکنش الاستیک ساختمان 20 طبقه در شکل "چهار" نشان داده شده است تشریح کرد.

روش های تعیین طیف های طراحی :

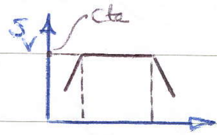
(برای زلزله های متوسط که احتمال وقوع آن ها در طول عمر مفید سازه چندین بار می باشد، سازه باید به گونه ای طراحی شود که ارتعاشات ناشی از این زلزله ها در حد الاستیک تا الاستو پلاستیک قابل قبول بوده و هیچ گونه صدمه دائمی به سازه وارد نگردد. در خصوص زلزله های شدید رفتار سازه می تواند پلاستیک باشد به شرطی که سازه ویران نگردد و باعث صدمات جانی نشود.)

طیف های طرح اساس و پایه ای برای طراحی مناسب و منطقی سازه های مقاوم در برابر زلزله می باشند. اگرچه طیف های مربوط به زلزله های مختلف با یکدیگر کاملا متفاوت می باشند ولی تکیه بر رفتار استاندارد در تمام آن ها حاکم است که می توان به صورت زیر آن ها را دسته بندی نمود.

$\omega \to \infty \; (T \to 0) \Rightarrow S_a = PGA$

$\omega \to 0 \; (T \to$ زیاد$) \Rightarrow S_d = PGD$

$\omega , T \to$ متوسط $\Rightarrow S_v \simeq cte$



در روابط بالا ω فرکانس، T پریود، PGD و PGV و PGA به ترتیب حداکثر تغییر مکان، حداکثر سرعت و حداکثر شتاب زمین می باشد.

روش نیومارک :

این روش بر اساس ۳ پارامتر حداکثر تغییر مکان، سرعت و شتاب زمین تدوین شده است. نیومارک نیز از شکل کلی طیف پاسخ زلزله ها نتیجه گرفت که:

۱) در محدوده فرکانس کوچک پاسخ سازه ها برای تمام ضرایب میرایی به مقدار ثابتی که برابر با حداکثر تغییر مکان زمین است می رسند.

$\lim_{\omega \to 0} S_D(\omega) = PGD$

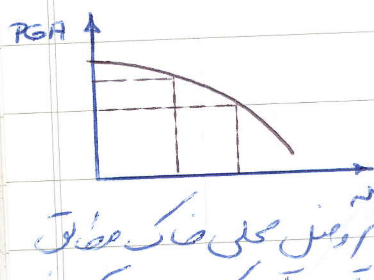
۲) در محدوده‌ی میانی فرکانس طیف پاسخ در مقایسه با حداکثر شتاب، سرعت و تغییر مکان زمین بزرگ‌تر شده و این بزرگ‌شدن برای شتاب بیشتر از سرعت و برای سرعت بیشتر از تغییر مکان می‌باشد.

۳) در محدوده‌ی فرکانس بالا (سازه صلب) شتاب پاسخ به حداکثر شتاب زمین نزدیک می‌شود.

$$\lim_{\omega \to \text{بزرگ}} S_a(\omega) = PGA$$

بنابراین روش بدست آوردن طیف واکنش طراحی به ترتیب ذیل خواهد بود.

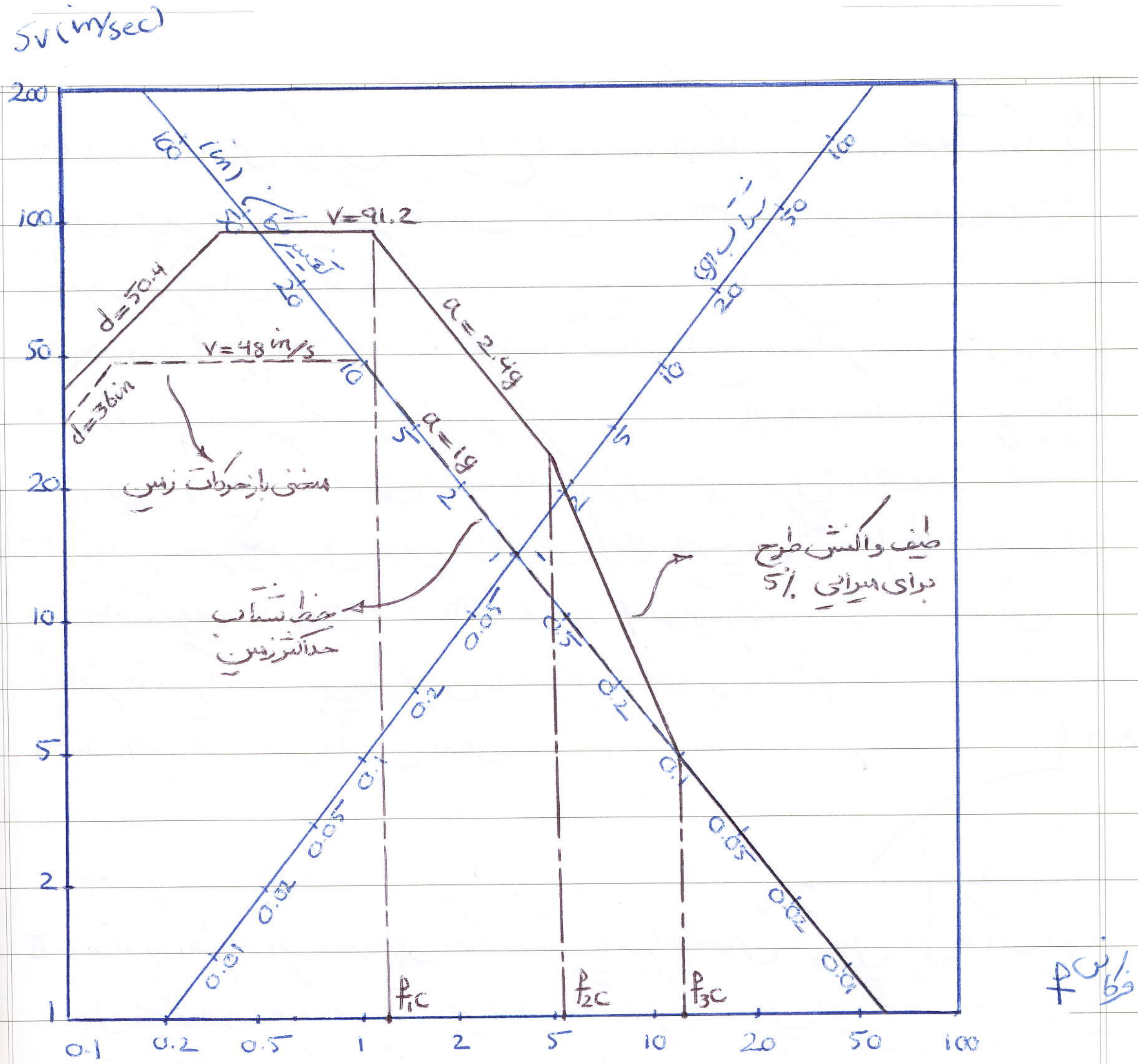
I) مقادیر حداکثر تغییر مکان زمین و بطور کلی حرکت زمین در سنگ پایه (Base Rock) را انتخاب کرده. (PGD، PGV، PGA) این حرکت حداکثر پس از کاهش حداکثر مقادیر حرکت زمین در گسل با استفاده از قوانین کاهش و با در نظر گرفتن فاصله ناحیه مورد نظر تا گسل فعال بدست می‌آید.



II) مقادیر حداکثر انتخاب شده برای حرکت سنگ پایه را براساس خواص محلی خاک مطابق جدول پیشنهادی نیومارک تشدید نموده و حداکثر حرکت زمین در سطح خاک بدست می‌آید.

III) مقادیر تشدید شده حداکثر حرکت زمین در سطح خاک را روی کاغذ لگاریتمی سه‌جانبه رسم نموده بطوریکه برای بزرگترین محدوده فرکانس خط مستقیمی برای مقدار ثابت S_a برابر PGA بوجود آمده و برای کوچکترین محدوده فرکانس خط مستقیمی برای مقدار ثابت $S_d = PGD$ بوجود آید.

با رسم نمودن خط مستقیمی برای مقدار ثابت $S_v = PGV$ در محدوده‌ی متوسط فرکانس و به هم متصل کردن خطوط رسم شده، یک منحنی پایه‌ای نمایان می‌شود که Max حرکت زمین را نشان می‌دهد.



برای تعیین طیف واکنش طراحی که مشابه طیف Max حرکت زمین است را با یک ضرایب مناسب تشدید نمود. این ضرایب به میرایی و میزان تغییر شکل های مجاز سازه که در آن ایجاد می‌شود بستگی دارد

ضرایب تشدید مناسب برای سازه‌های که روی خاک سخت و یا سنگ بنا شده‌اند برای مقادیر مختلف میرایی سازه مطابق جدول زیر می‌باشد.

با انتخاب ضرایب تشدید، اینک می توان طیف واکنش طرح را با دنبال کردن گام های زیر بدست آورد

نسبت میرایی ٪	ضرایب تشدید		
	شتاب	سرعت	تغییر مکان
0	6.4	4	2.5
0.5	5.8	3.6	2.2
1	5.2	3.2	2
2	4.3	2.8	1.8
5	2.6	1.9	1.4
7	1.9	1.5	1.2
10	1.5	1.3	1.1
20	1.2	1.1	1

۱) برای مقادیر کوچک فرکانس که خط موازی با تغییر مکان حرکت زمین رسم کنید.

۲) برای مقادیر کوچک فرکانس کوچکتر از ۰.۱، دامنه طیف واکنش به حرکت زمین نزدیک می شود.

۳) برای محدوده متوسط فرکانس، محدوده طیف واکنش به موازات سرعت Max حرکت زمین منحنی دیگری رسم نمایید.

٤) برای مقادیر فرکانس بالا که دارای ۳ قسمت می باشد به شرح زیر عمل نمایید.

الف) فرکانس نقطه تقاطع خط شتاب Max با سرعت Max را f_{1c} بنامید

ب) خط شتاب حداکثر را تا f_{2c} که $f_{2c}=4f_{1c}$ است ادامه دهید

ج) برای فرکانس های $f_c>4f_{1c}$ خط مستقیمی از f_{2c} رسم نمایید تا خط شتاب حداکثر زمین را در فرکانس f_{3c} که $f_{3c}=10f_{1c}$ است قطع کند

د) برای فرکانس های $f_c>10f_{1c}$ حد طیف واکنش همان خط شتاب زمین است.

مثال: مطلوبست رسم دیاگرام طیف طرح برای منطقه‌ای که مقادیر حرکات حداکثر زمین بشرح زیر بوده

$PGA = 1g \quad PGV = 48\ \frac{in}{s} \quad PGD = 36\ in$

برای سازه‌ای که میرایی آن ٪5 می‌باشد.

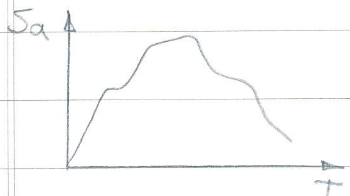
$a = 2.6 \times (1g) = 2.6g$

$\bar{V} = 1.9 \times (48) = 91.2$

$\bar{d} = 1.4 \times (36) = 50.4$

$f_{1c} = 1.3 \qquad f_{2c} = 4 \times 1.3 = 5.2 \qquad f_{3c} = 10 \times 1.3 = 13$

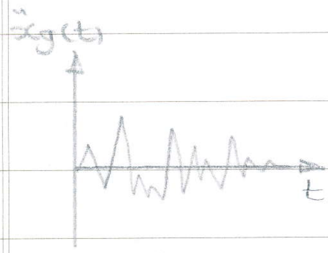
در روش تحلیل طیفی بر اساس ساختگاه و فاصله از گسل طیف شتاب مربوط به سازه را بدست می آوریم. در سازه مورد نظر (فرض 3 طبقه) پریودهای مربوط به ۳ مد را بدست آورده شتاب های طیفی متناظر را از نمودار پیدا می کنیم. سپس از طریق روش SRSS طیف شتاب سازه را بیان می نماییم.



$$S_a = (S_{a_1}^2 + S_{a_2}^2 + S_{a_3}^2)^{1/2}$$

بر اساس این S_a، برش طبقات را محاسبه کرده طراحی را انجام می دهیم

در روش تاریخچه زمانی شتاب را که مربوط به زلزله اتفاق افتاده است برحسب زمان به ما می دهند. این شتاب را به سازه اعمال می کنیم و برش طبقات را در تاریخچه زمانی (در زمان های مختلف) بدست می آوریم.



بر این اساس نیروها و تغییر شکل های اعضا برحسب زمان قابل محاسبه است.

روش طیفی دقیق تر می باشد چون احتمال شتاب منطقه را با تقریب بالایی بدست آورده ایم در صورتیکه در تاریخچه زمانی یک زلزله اتفاق افتاده را بررسی می کنیم (که ممکن است هیچ وقت دیگر دوباره اتفاق نیفتد)

در واقع تحلیل تاریخچه زمانی نوعی تحلیل برای کنترل سازه و اثر شتاب های مختلف و بررسی پاسخ آن در برابر این شتاب هاست.

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست

حل تمرین درس :

اصول مهندسی زلزله

استاد :

جناب آقای دکتر تهرانی زاده

نگارش:

حمید کاظم

(کارشناس عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

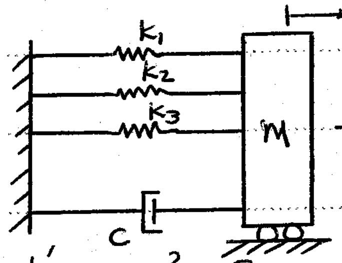
(دانشجوی کارشناسی ارشد گرایش سازه دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

تابستان ۱۳۸۹

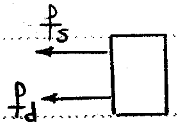
حمید کاظم ۸۴۲۴۰۴۱

«اصول مهندسی زلزله»

۱) درصورتی که مدل یک درجه آزادی سیستم سازه‌ای بصورت زیر باشد، مطلوبست تعیین معادله حرکت و هم چنین تابع تغییر مکان اگر $P(t)=0$ ، $k_1=k_2=k_3=k$ و $c=0$ باشد.



$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow -f_s - f_d + P(t) = m\ddot{x}_{(t)}$$



$$\Rightarrow -k'x - c\dot{x} + P(t) = m\ddot{x}_{(t)}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}_{(t)} + c\dot{x}_{(t)} + k'x_{(t)} = 0$$

$k'/m = \omega_n^2 \quad c/m = 2\xi\omega_n \Rightarrow \ddot{x}_{(t)} + 2\xi\omega_n\dot{x}_{(t)} + 3\omega_n^2 x_{(t)} = 0$

فرض: $x(t) = Xe^{\lambda t} \Rightarrow Xe^{\lambda t}(\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2) = 0$

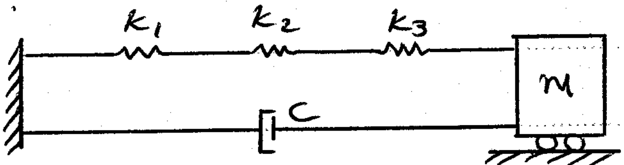
$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2-1} \xRightarrow{c=0} \lambda_{1,2} = \pm i\omega_n$$

$$\Rightarrow x(t) = C\cos\omega_n t + D\sin\omega_n t \qquad \omega_n = \sqrt{k'/m} = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

$$x_{(0)} = X_0 = C \qquad \dot{x}_{(0)} = \dot{X}_0 = D\omega_n \Rightarrow D = \frac{\dot{X}_0}{\omega_n}$$

$$\Rightarrow x(t) = X_0\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\right)t + \frac{\dot{X}_0\sqrt{m}}{\sqrt{3k}}\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\right)t$$

۲) مدل مکانیکی سیستم یک درجه آزادی بصورت شکل مقابل می باشد. مطلوبست تعیین معادله حرکت و هم چنین تابع تغییر مکان درصورتیکه $P(t)=0$ ، $k_1=k_2=k_3=k$ ، $c=0$ باشد.



حل این مثال کاملاً شبیه بالایی باشد با این تفاوت که $k' = k/3$ است پس:

$$x(t) = X_0\cos\left(\sqrt{\frac{k}{3m}}\right)t + \frac{\dot{X}_0\sqrt{3m}}{\sqrt{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{3m}}\right)t$$

(تمارین ۸-۱)

این تمرین ها را یک مرتبه تحویل داده ام. اما برای تکمیل و تصحیح بعضی از اشتباهات که در مرتبه اول رخ داده بود تصمیم به حل دوباره آن ها گرفتم. *

کامل

۳) قاب یک طبقه شکل زیر مفروض است. درصورتیکه وزن قاب $W=200 kips$ $(1kips = 10^3 lb)$ و پریود سازه $T=0.2^s$ باشد مطلوبست تعیین تابع تغییرمکان درحالتیکه تغییرمکان اولیه بصورت $X_0 = 2in$ و سرعت اولیه $\dot{X}_0 = 1.5 \frac{in}{sec}$ باشد. مقدار حداکثر برش پایه را محاسبه کنید. حداکثر شتاب کف را بدست آورید.

$W = 200,000 lb \qquad T = 0.2 s \qquad$ فرض $\xi = 0$

تابع تغییرمکان $x(t) = X_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{X}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t = X \cos(\omega_n t - \varphi)$

$T = \frac{2\pi}{\omega_n} \Rightarrow \omega_n = \frac{2\pi}{0.2} = 10\pi$

$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{Kg}{mg}} \Rightarrow kg = W \cdot \omega_n^2 \Rightarrow K\,(386.06)^{(\frac{in}{s^2})} = 2\times10^5 {}^{(lb)} \times (10\pi)^2 {}^{(\frac{rad}{s})^2}$

$\Rightarrow K = 511299 \ lb/in$

$$\begin{cases} X = \sqrt{X_0^2 + (\frac{\dot{X}_0}{\omega_n})^2} = \sqrt{2^2 + (\frac{1.5}{10\pi})^2} = 2.001 \\ \varphi = tg^{-1}(\frac{\dot{X}_0}{\omega_n X_0}) = tg^{-1}(\frac{1.5}{10\pi \times 2}) = 1.368^\circ \end{cases} \Rightarrow x(t) = 2.001 \cos(10\pi t - 7.6\times10^{-3}\pi)$$

حداکثر برش $F = KX_0 = 511299 \times 2 = 1022.598 \times 10^3 lb$

$x(t) = 2.001 \cos(10\pi t - 7.6\times10^{-3}\pi) \rightarrow \dot{x}(t) = -2.001(10\pi) \sin(10\pi t - 7.6\times10^{3}\pi)$

$\Rightarrow \ddot{x}(t) = -2.001(10\pi)^2 \cos(10\pi t - 7.6\times10^{3}\pi)$

$\Rightarrow (\ddot{x}(t))_{Max} = 2.001 \times (10\pi)^2 = 1974.91 \ in/s^2$

۴) در تمرین ۳ درصورتیکه مقدار نسبت استهلاک بحرانی ٪2 و تغییرمکان اولیه 5in و سرعت اولیه صفر باشد، مطلوبست تعیین تابع تغییرمکان و رسم تابع و دامنهٔ تغییرمکان بعد از دو سیکل کامل.

$\xi = 2\% \qquad X_0 = 5 in \qquad \dot{X}_0 = 0 \qquad T = 0.2 s \qquad W = 200,000 lb$

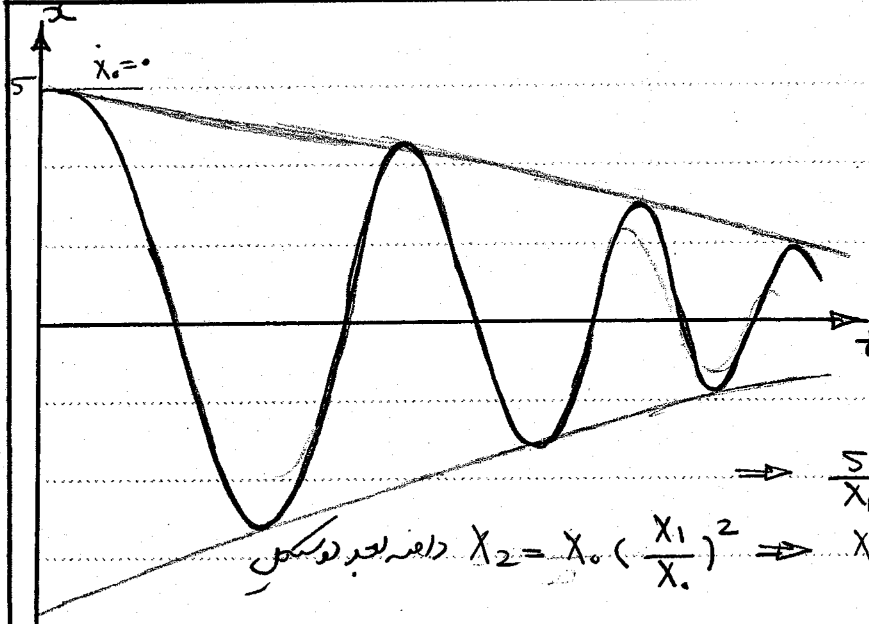
تابع تغییرمکان $x(t) = X e^{-\xi \omega_n t} \cos(\omega_d t - \varphi)$

$\omega_n = \frac{2\pi}{T} = 10\pi \qquad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 10\pi\sqrt{1-0.02^2} = 9.998\pi$

$$\begin{cases} X = \left[(\frac{\dot{X}_0 + \xi\omega_n X_0}{\omega_d})^2 + X_0^2\right]^{1/2} = \left[(\frac{0 + 0.02\times10\pi\times5}{9.998\pi})^2 + 5^2\right]^{1/2} = 5.001 \\ \varphi = tg^{-1}(\frac{\dot{X}_0 + \xi\omega_n X_0}{\omega_d X_0}) = tg^{-1}(\frac{0 + 0.02\times10\pi\times5}{9.998\pi\times5}) = \overset{0.02^\circ}{\cancel{5.712}} \cong \overset{0.0064\pi}{\cancel{0.0317\pi}} \end{cases}$$

$\Rightarrow x(t) = 5 e^{-0.2t} \cos(9.998\pi t - \overset{0.0064\pi}{\cancel{0.0317\pi}})$

حمید کاظم ۸۴۲۴۰۴۱



$t = 0 \rightarrow x(0) = 5$

$t \rightarrow \infty \Rightarrow x \rightarrow 0$

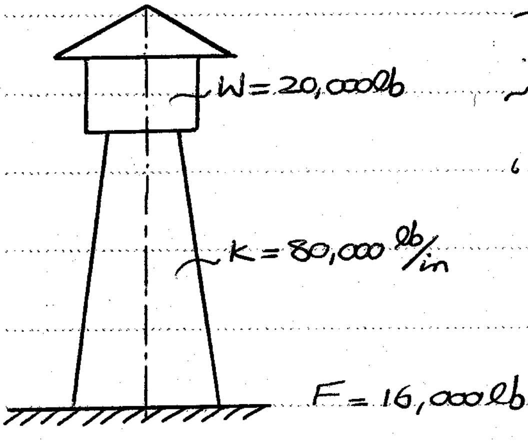
$\xi = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{X_0}{X_1}\right)$

$\Rightarrow 0.02 = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{5}{X_1}\right)$

$\Rightarrow \frac{5}{X_1} = e^{0.04\pi} \Rightarrow X_1 = 4.4096 \text{ in}$

دامنه بعد دو سیکل $X_2 = X_0 \left(\frac{X_1}{X_0}\right)^2 \Rightarrow X_2 = 5\left(\frac{4.4096}{5}\right)^2 = 3.889 \text{ in}$

۵) منبع آبی مطابق شکل موجود است. اگر وزن این منبع 20,000 lb و سختی پایه‌های منبع 80,000 lb/in فرض شود و این منبع تحت اثر نیرویی قرار گیرد که مقدار آن F=16,000 lb باشد، مطلوبست تعیین دامنه حرکت پس از 3، 5 و 10 سیکل، نسبت استهلاک بحرانی، ضریب استهلاک، فرکانس طبیعی و فرکانس استهلاکی. (دامنه نوسان پس از یک رفت و برگشت به 2/3 حالت اولیه کاهش می‌یابد)



$F = kX_0 \Rightarrow 16{,}000 = 80{,}000\, X_0 \Rightarrow X_0 = 0.2 \text{ in} \quad , \quad X_1 = 0.133 \text{ in}$

$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{kg}{mg}} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{80{,}000 \times 386.06}{20{,}000}} = 39.297 \text{ rad/s}$ فرکانس طبیعی

$\xi = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{X_0}{X_1}\right) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{0.2}{0.133}\right) = 0.0649 = 6.49\%$ نسبت استهلاک بحرانی

$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} = 39.297\sqrt{1-0.0649^2} = 39.214 \text{ rad/s}$ فرکانس استهلاکی

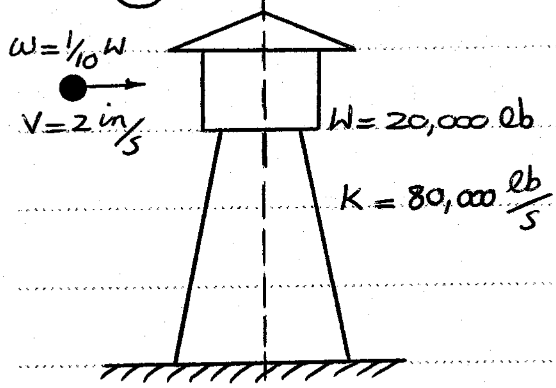
$c = 2\xi\omega_n m = 2 \times \frac{6.49}{100} \times 39.297 \times \frac{20{,}000}{386.06} = 264.25 \text{ lb/(in/s)}$ ضریب استهلاک

$n = 3 \rightarrow X_3 = X_0\left(\frac{X_1}{X_0}\right)^3 = 0.2\left(\frac{0.133}{0.2}\right)^3 = 0.0588$ تعیین دامنه پس از n سیکل

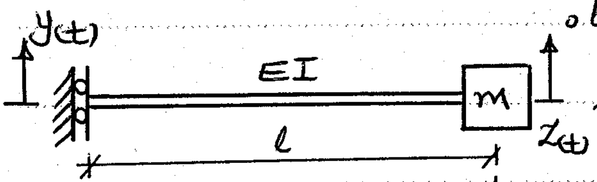
$n = 5 \rightarrow X_5 = 0.2\left(\frac{0.133}{0.2}\right)^5 = 0.026 \quad , \quad n = 10 \rightarrow X_{10} = 0.2\left(\frac{0.133}{0.2}\right)^{10} = 3.38 \times 10^{-3}$

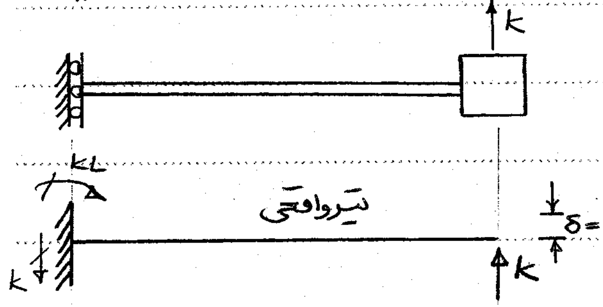
حمید کاظم ۸۴۲۴۰۴۱

۶) درصورتیکه در تمرین ۵ گلوله ای به وزن $w=0.1W$ با سرعت $V=2\,in/s$ به منبع اصابت کند و نوع تصادم الاستیک فرض شود، مطلوبست تعیین تابع تغییر مکان، مقدار Max برش پایه و رسم منحنی در صورتیکه $\xi=5\%$ درنظر گرفته شود.



۷) تیر یکسر گیردار شکل زیر مفروض است. درصورتیکه تکیه‌گاه این تیر تحت اثر حرکت $y(t)$ قرار گیرد، مطلوبست معادله حرکت جرم m برحسب $z(t)$.



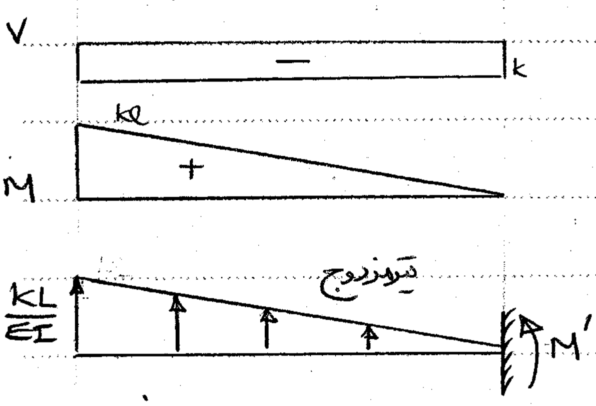


$M' = 1 = \delta$

$\to \left(\frac{1}{2}\frac{kL}{EI}\times L\right)\left(\frac{2}{3}L\right) = 1$

$\Rightarrow \frac{kL^3}{3EI} = 1 \Rightarrow k = \frac{3EI}{L^3}$

* برای بدست آوردن سختی k یک تغییر مکان واحد اعمال می‌کنیم نیروی متناظر آن را بدست آورده سختی می‌نامیم.



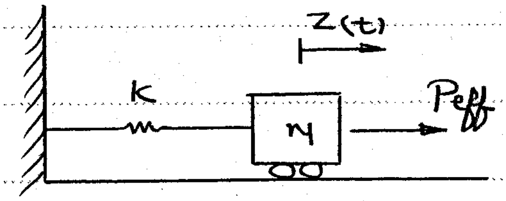
$m\ddot{x}_t + c\dot{z} + kz = P(z)$

$x_t = z(t) + y(t)$

$\to \ddot{x}_t = \ddot{z}(t) + \ddot{y}(t)$

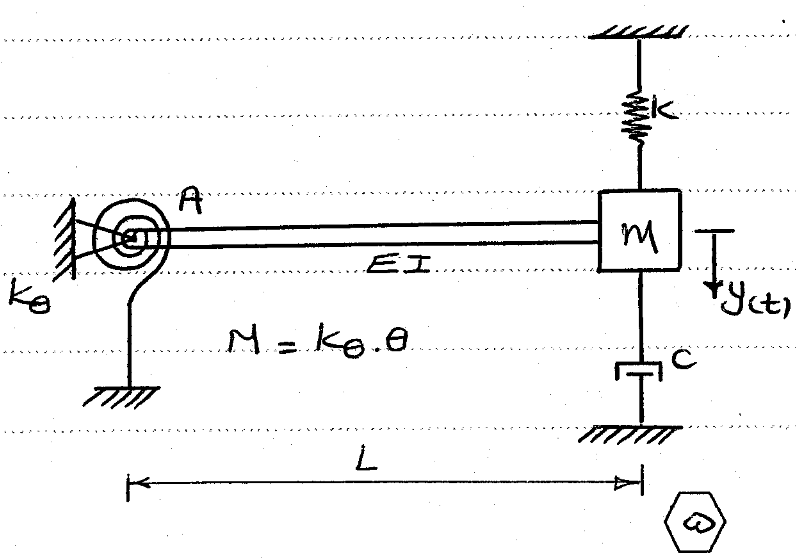
$m\ddot{z}(t) + c\dot{z}(t) + kz(t) = -m\ddot{y}(t)$

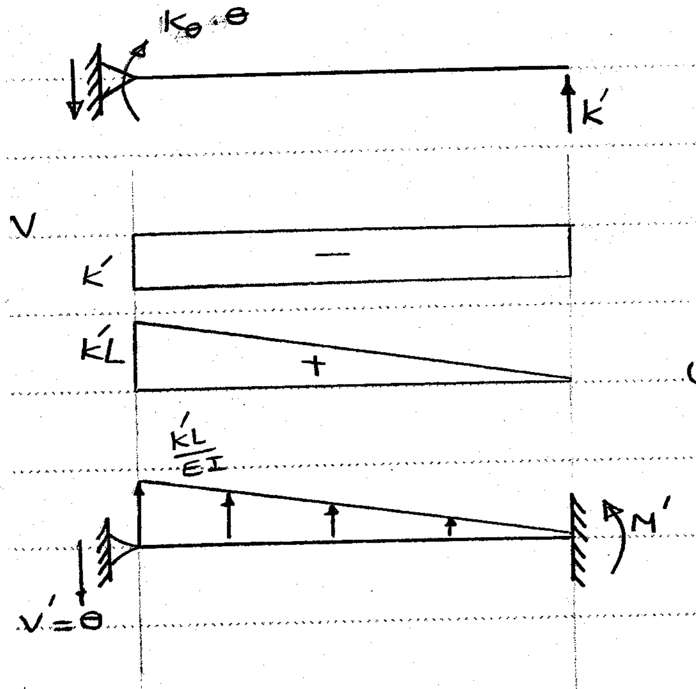
$c\dot{z}(t) = 0 \qquad P_{eff} = -m\ddot{y}(t)$



$m\ddot{z}(t) + \frac{3EI}{L^3}z(t) = -m\ddot{y}(t) + mg$

۸) سازه شکل مقابل مفروض است. درصورتیکه تیر AB بی وزن بوده و در تکیه‌گاه A علاوه بر لولا توسط فنر پیچشی مقید شده باشد، معادله حرکت جرم m را برحسب $y(t)$ بدست آورید. (سختی فنر k_θ می‌باشد.)





$$k'L = k_\theta \cdot \theta \quad (1)$$

$$M' = \delta = 1$$

$$M' - \frac{1}{2} L \frac{k'L}{EI}\left(\frac{2}{3}L\right) + \theta L = 0$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{k'L^3}{3EI} + \theta L \quad (2)$$

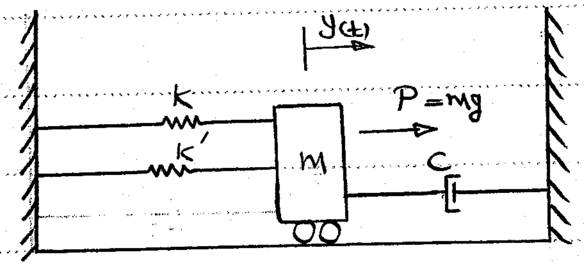
(1) , (2) :

$$1 = \frac{k'L^3}{3EI} + \frac{k'L^2}{k_\theta}$$

$$\Rightarrow k'\left(\frac{L^3}{3EI} + \frac{L^2}{k_\theta}\right) = 1$$

$$\Rightarrow k'\left(L^2\left(\frac{Lk_\theta + 3EI}{3EI\,k_\theta}\right)\right) = 1$$

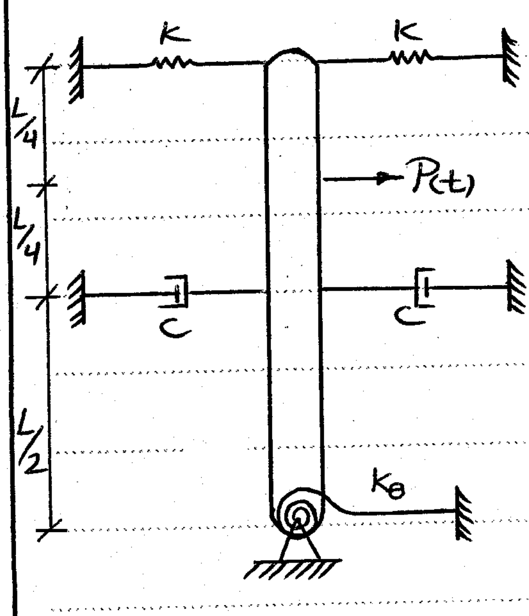
$$\Rightarrow k' = \frac{3EI\,k_\theta}{L^2(Lk_\theta + 3EI)}$$



سیستم معادل بصورت مقابل می باشد :

$$m\ddot{y}_{(t)} + c\dot{y}_{(t)} + (k+k')\,y_{(t)} = mg$$

۹) ستون صلبی دارای تکیه گاه نیمه صلب می باشد که توسط فنرهایی که در انتهای آزاد آن قرار دارند مهار شده است. مطلوبست تعیین معادله حرکت این سیستم درصورتیکه $\mu(x)$ جرم در واحد طول این ستون صلب باشد، درحالتی که $\mu(x) = \mu$ باشد معادله حرکت را بدست آورید و سیستم یک درجه آزادی آن را نشان دهید.



روش دوم (سئوال ۹)

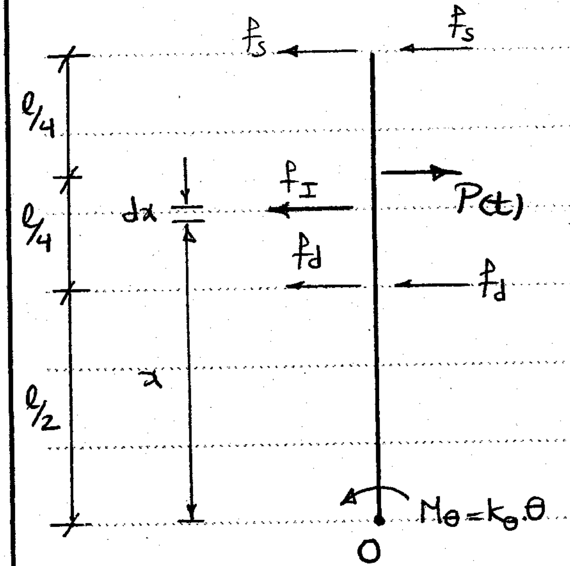
$$M^* = \int_0^L \mu \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx = \mu \int_0^L (x/L)^2 dx = 1/3 L\mu$$

$$C^* = \sum c_i \psi_i^2 = 2c\left(\frac{L/2}{L}\right)^2 = c/2$$

$$K^* = \sum k_i \psi_i + \sum k_\theta (\psi_i')^2 = 2k + k_\theta / L^2$$

$$P^* = \sum P_i \cdot \psi_i = P_{(t)} \frac{3L/4}{L} = 3/4 P_{(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} L\mu \ddot{Y}(t) + \frac{c}{2} \dot{Y}(t) + \left(2k + \frac{k_\theta}{L^2}\right) Y(t) = \frac{3}{4} P(t)$$



$$V(x,t) = \psi(x) . Y(t)$$

$$\Rightarrow V(x,t) = x/L . Y(t)$$

$\Sigma M_0 = 0$ رابطه زیر برقرار است:

$$M_I + M_D + M_S + M_\theta = M_{P(t)} \qquad (1)$$

$$dM_I = df_I . x$$

$$df_I = dm . \ddot{V}(x,t)$$

$$dm = \mu(x)\, dx \Rightarrow df_I = \mu(x) . \ddot{V}(x,t)\, dx$$

$$\Rightarrow dM_I = \mu(x) . \ddot{V}(x,t) . x . dx$$

$$\Rightarrow M_I = \ddot{Y}(t) \int_0^L \mu(x) \frac{x^2}{L} dx = \ddot{Y}(t) . \mu \int_0^L \frac{x^2}{L} dx$$

$$\Rightarrow M_I = \frac{1}{3} L^2 \mu . \ddot{Y}(t) \qquad (2)$$

$$M_D = 2 f_d \frac{L}{2} = \cancel{2} c \dot{V}(L/2, t) . \cancel{L/2} = c \left(\frac{L/2}{L}\right) \dot{Y}(t) . L = \frac{1}{2} L c . \dot{Y}(t) \qquad (3)$$

$$M_S = 2 f_s . L = 2 k V(L,t) . L = 2Lk\, Y(t) \qquad (4)$$

$$M_{P(t)} = \frac{3}{4} L P(t) \qquad (5)$$

$$M_\theta = k_\theta . \theta \qquad \theta = \frac{V(L,t)}{L} = \frac{L/L . Y(t)}{L} = \frac{1}{L} . Y(t)$$

$$\Rightarrow M_\theta = \frac{k_\theta}{L} . Y(t) \qquad (6)$$

با قرار دادن روابط 2 ، 3 ، 4 ، 5 و 6 در رابطه (1) خواهیم داشت:

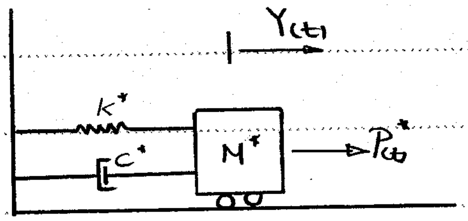
$$\frac{1}{3} L^2 \mu . \ddot{Y}(t) + \frac{1}{2} L c . \dot{Y}(t) + 2Lk\, Y(t) + \frac{k_\theta}{L} . Y(t) = \frac{3}{4} L P(t)$$

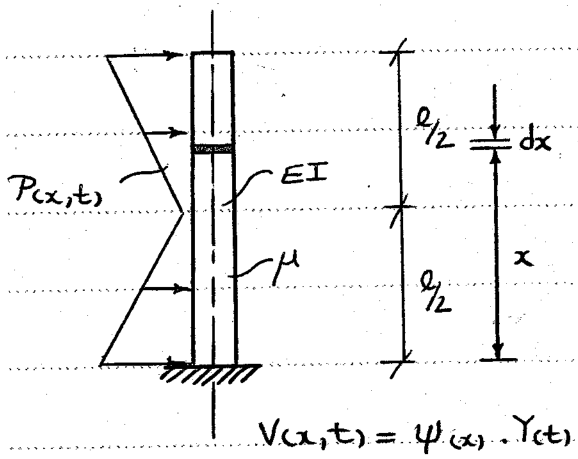
طرفین را بر L تقسیم می‌کنیم پس:

$$\left(\frac{1}{3} L \mu\right) \ddot{Y}(t) + \left(\frac{1}{2} c\right) \dot{Y}(t) + \left(2k + \frac{k_\theta}{L^2}\right) Y(t) = \frac{3}{4} P(t)$$

حمید کاظم ۸۴۲۴۰۴۱

$$\begin{cases} M^* = \frac{1}{3} L\mu & \text{جرم معادل} \\ c^* = \frac{1}{2} c & \text{ضریب استهلاک معادل} \\ k^* = 2k + \frac{k_\theta}{L^2} & \text{ضریب سختی معادل} \\ P^* = \frac{3}{4} P(t) & \text{نیروی معادل} \end{cases}$$





۱۰) ستون تیرگیردار شکل مقابل مفروض است. در صورتیکه EI و μ طول ستون ثابت فرض شوند، مطلوبست تعیین معادله حرکت، جرم، سختی و نیروی معادل. (تابع شکل را بصورت $\psi(x) = 1-\cos\frac{\pi x}{2L}$ در نظر بگیرید).

$V(x,t) = \psi(x) \cdot Y(t)$ $\qquad \delta V(x,t) = \psi(x) \cdot \delta Y(t)$

$$\begin{cases} \delta W_E = \int_0^L p(x,t)\, dx \; \delta V(x,t) & \\ \delta W_{I_1} = \int_0^L m(x)\; \delta d\theta & \text{حاصل از لنگر} \\ \delta W_{I_2} = \int_0^L f_I(x,t)\, dx \; \delta V(x,t) & \text{حاصل از اینرسی} \end{cases}$$

کار مجازی نیروی داخلی حاصل از لنگر:

$$\theta = \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} \longrightarrow d\theta = \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2}\, dx \longrightarrow \delta d\theta = \frac{\partial^2 \delta V(x,t)}{\partial x^2}\, dx$$

$$\frac{m(x)}{EI} = \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} \longrightarrow m(x) = \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} \cdot EI$$

$$\longrightarrow \delta W_{I_1} = \int_0^L m(x)\, \delta d\theta = \int_0^L \left(\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2}\right) \cdot EI \cdot \frac{\partial^2 \delta V(x,t)}{\partial x^2}\, dx$$

$$= \int_0^L Y(t) \left(\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\right) EI \cdot \delta Y(t) \left(\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\right) \cdot dx$$

سؤال ۱۰ (روش دوم ← راه‌حل ساده‌تر) B

$$M^* = \int_0^L \mu(x)\,(\psi(x))^2\,dx = \mu\int_0^L \left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = \mu\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{\pi}\right)L = 0.2268\,\mu L$$

$$K^* = \int_0^L EI\,(\psi''(x))^2\,dx = \int_0^L EI\left(\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 \cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = \frac{\pi^4}{16L^4}EI\int_0^L \left(\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx$$

$$= \frac{\pi^4 EI}{16L^4}\left(\frac{L}{2}\right) = 3.044\,\frac{EI}{L^3}$$

$$P^* = \int_0^L p(x,t)\,\psi(x)\,dx \qquad p(x,t) = \begin{cases} \dfrac{2P}{L}\left(\dfrac{L}{2}-x\right) & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{l}{2} \\[2ex] \dfrac{2P}{L}\left(x-\dfrac{L}{2}\right) & \dfrac{l}{2} \leqslant x \leqslant l \end{cases}$$

$$\Rightarrow P^* = 2\int_0^{L/2} \frac{2}{l}P\left(\frac{L}{2}-x\right)\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)dx = \frac{4P}{l}\left(\frac{L^2}{8}-\frac{4L^2}{\pi^2}+\frac{2\sqrt{2}}{\pi^2}L^2\right)$$
$$= 0.101\,pL$$

$$\Rightarrow \quad 0.2268\,\mu L\,\ddot{Y}(t) + 3.044\,\frac{EI}{L^3}\,Y(t) = 0.101\,PL$$

$$= Y(t) \, . \, \delta Y(t) \, . \, EI \int_0^l \left(\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\right)^2 dx$$

$$\psi(x) = 1 - \cos\frac{\pi}{2L}x \rightarrow \frac{d\psi(x)}{dx} = \frac{\pi}{2L}\sin\frac{\pi}{2L}x \rightarrow \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 \cos\frac{\pi}{2L}x$$

$$\Rightarrow \delta W_{I_1} = Y(t) \, . \, \delta Y(t) \, . \, EI \int_0^l \left(\frac{\pi}{2L}\right)^4 \cos^2\left(\frac{\pi}{2L}x\right) dx$$

$$\int_0^l \cos^2\left(\frac{\pi}{2L}x\right) dx = \int_0^l \left(\frac{1+\cos\frac{\pi}{l}x}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^l \left(1+\cos\left(\frac{\pi}{l}x\right)\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{l}{\pi}\sin\frac{\pi}{l}x\right)_0^l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{l}{\pi}\sin(\pi - 0)\right) = \frac{l}{2}$$

$$\Rightarrow \delta W_{I_1} = \frac{l}{2} \, . \, Y(t) \, . \, \delta Y(t) \, . \, EI$$

کار مجازی نیروی داخلی حاصل از نیروی اینرسی :

$$f_I(x,t) = \mu \, . \, \ddot{v}(x,t) = \mu \, . \, \psi(x) \, . \, \ddot{Y}(t)$$

$$\delta W_{I_2} = \int_0^L f_I(x,t)\, dx \; \delta v(x,t) = \int_0^L \mu \, . \, \psi(x) \, . \, \ddot{Y}(t)\, dx \, . \, \psi(x) \, . \, \delta Y(t)$$

$$= \mu \, . \, \ddot{Y}(t) \, . \, \delta Y(t) \int_0^L \left(1 - \cos\frac{\pi}{2L}x\right)^2 dx$$

$$\int_0^L \left(1 - \cos\frac{\pi}{2L}x\right)^2 dx = \int_0^L \left(1 - 2\cos\frac{\pi}{2L}x + \cos^2\frac{\pi}{2L}x\right) dx$$

$$= \int_0^L \left(1 - 2\cos\frac{\pi}{2L}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{L}x\right) dx$$

$$= \left[\frac{3}{2}x - 2\,\frac{2L}{\pi}\sin\frac{\pi}{2L}x + \frac{L}{2\pi}\sin\frac{\pi}{L}x\right]_0^L = \frac{3}{2}L - \frac{4L}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + \frac{L}{2\pi}\sin(\pi - 0)$$

$$= \frac{3}{2}L - \frac{4}{\pi}L = L\left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}\right)$$

$$\Rightarrow \delta W_{I_2} = \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}\right) L \, . \, \mu \, . \, \ddot{Y}(t) \, . \, \delta Y(t)$$

کار مجازی خارجی :

$$p(x,t) = \begin{cases} P(t)\left(\frac{l}{2} - x\right) & 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ P(t) \, . \, \left(x - \frac{l}{2}\right) & \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases}$$

$$\delta W_E = \int_0^L p(x,t)\, dx \; \delta v(x,t) = 2\int_0^{l/2} P(t)\left(\frac{l}{2} - x\right) . \, \delta Y(t) \, \psi(x) \, . \, dx$$

$$= 2P(t) \, . \, \delta Y(t) \, . \int_0^{l/2} \left(\frac{l}{2} - x\right)\left(1 - \cos\frac{\pi}{2L}x\right)$$

$$\int_0^{l/2} \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cos\frac{\pi}{2L}x - x + x\cos\left(\frac{\pi}{2L}x\right)\right) dx =$$

$$\int_0^{l/2} \left(\tfrac{l}{2} - \tfrac{l}{2}\cos\tfrac{\pi}{2l}x - x\right)dx + \int_0^{l/2} \left(x\cdot\cos\tfrac{2\pi}{l}x\right)dx$$

1) $$\int_0^{l/2} \left(\tfrac{l}{2} - \tfrac{l}{2}\cos\tfrac{\pi}{2l}x - x\right)dx = \tfrac{l}{2}x - \tfrac{l}{2}x\,\tfrac{2l}{\pi}\sin\tfrac{\pi}{2l}x - \tfrac{1}{2}x^2\Big]_0^{l/2}$$

$$= \frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}-0\right) - \frac{l^2}{8} = \frac{l^2}{8} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{l^2}{\pi} = l^2\left(\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\right)$$

2) $$\int_0^{l/2} x\cdot\cos\frac{2\pi}{l}x\cdot dx$$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$ ← روش جزء به جزء

$$dv = \cos\frac{2\pi}{l}x\cdot dx \Rightarrow v = \frac{l}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{l}x \qquad u = x \Rightarrow du = dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{l/2} x\cdot\cos\frac{2\pi}{l}x\cdot dx = \frac{l}{2\pi}\cdot x\sin\frac{2\pi}{l}x - \int\frac{l}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{l}x\cdot dx$$

$$= \frac{l}{2\pi}x\sin\frac{2\pi}{l}x - \frac{l}{2\pi}\cdot\frac{l}{2\pi}\left(-\cos\frac{2\pi}{l}x\right)\Big]_0^{l/2}$$

$$= \frac{l^2}{4\pi}\sin(\pi-0) + \frac{l^2}{4\pi^2}\cos(\pi-0) = -\frac{l^2}{4\pi^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{l/2}\left(\tfrac{l}{2}-x\right)\left(1-\cos\tfrac{\pi}{2l}x\right) = l^2\left(\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{2}}{2\pi} - \frac{1}{4\pi^2}\right)$$

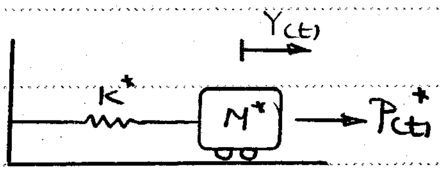
$$\Rightarrow \delta W_E = 2l^2\left(\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{2}}{2\pi} - \frac{1}{4\pi^2}\right)P(t)\;\delta Y(t)$$

$\delta W_{I_1} + \delta W_{I_2} = \delta W_E$ با استفاده از اصل کار مجازی داریم:

$$\left(\tfrac{3}{2}-\tfrac{4}{\pi}\right)L\cdot\mu\cdot\ddot{Y}(t)\cdot\delta Y(t) + \tfrac{l}{2}\cdot EI\cdot Y(t)\cdot\delta Y(t) = l^2\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{2}}{\pi}-\frac{1}{2\pi^2}\right)P(t)\cdot\delta Y(t)$$

دوطرف را بر $\delta Y(t)$ تقسیم می‌کنیم.

$$\underbrace{\left(\left(\tfrac{3}{2}-\tfrac{4}{\pi}\right)L\cdot\mu\right)}_{M^*}\ddot{Y}(t) + \underbrace{\left(\tfrac{l}{2}\cdot EI\right)}_{k^*}Y(t) = \underbrace{\left(l^2\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{2}}{\pi}-\frac{1}{2\pi^2}\right)P(t)\right)}_{P(t)^*}$$



تمرین ۱۱ (ادامه حل):

فرض $\psi(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2L}$

$$M^* = \int_0^L \mu\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx + M\left(1-\cos\frac{\pi L}{2L}\right)^2 = 0.2268\,\mu L + M$$

$$k^* = \int_0^L EI\left(\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 \cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = 3.044\,\frac{EI}{L^3}$$

$$\bar{k} = \int_0^L \mu\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right) dx + M\left(1-\cos\frac{\pi L}{2L}\right) = 0.3634\,\mu L + M$$

$$\Rightarrow (0.2268\,\mu L + M)\,\ddot{Y}(t) + 3.044\,\frac{EI}{L^3}\,Y(t) = -(0.3634\,\mu L + M)\,\ddot{x}_g(t)$$

حمید کاظم ۸۴۲۴۰۴۱

«اصول مهندسی زلزله»

تمرین ۱۱.۸: سازه برجی بصورت شکل مقابل مدل شده است. در صورتیکه EI و μ در طول برج ثابت در نظر گرفته شود، مطلوبست تعیین:

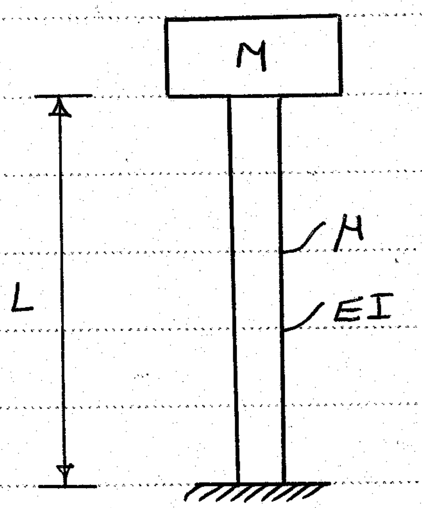
الف) معادله حرکت   ب) جرم معادل

ج) سختی معادل   د) نیروی مؤثر معادل

هـ) ضریب تحریک زلزله

اگر این برج تحت اثر حرکت زمین با شتاب $\ddot{x}_g(t)$ قرار گرفته باشد.

$M=\mu L$



$$V(x,t)=\psi(x)\cdot Y(t) \longrightarrow \delta V(x,t)=\psi(x)\cdot\delta Y(t)$$

$$\delta W_E=\delta W_I \longrightarrow 0=\delta W_{I_1}+\delta W_{I_2} \qquad (1)$$

۱) کارمجازی نیروهای داخلی:

$$\delta W_{I_1}=\int M(x)\,\delta d\theta$$

$$=\int EI\,\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 \delta V(x,t)}{\partial x^2}dx = Y(t)\cdot\delta Y(t)\cdot EI\int_0^L\left[\frac{d^2\psi}{dx^2}\right]^2 dx \qquad (2)$$

۲) کارمجازی نیروهای اینرسی:

$$\delta W_{I_2}=\int f_I(x,t)\cdot\delta V(x,t)\cdot dx + M\cdot\ddot{V}_t(L,t)\cdot\delta V(L,t)$$

$$f_I(x,t)=\mu(x)\cdot\ddot{V}_t(x,t)$$

$$V_t(x,t)=V(x,t)+x_g(t) \longrightarrow \begin{cases}\ddot{V}_t(x,t)=\ddot{V}(x,t)+\ddot{x}_g(t)\\ \ddot{V}_t(L,t)=\ddot{V}(L,t)+\ddot{x}_g(t)\end{cases}$$

$$\longrightarrow \delta W_{I_2}=\int\mu(x)\cdot\ddot{V}_t(x,t)\cdot\delta V(x,t)\,dx+M\cdot\ddot{V}_t(L,t)\cdot\delta V(L,t)$$

$$=\mu\int(\ddot{V}(x,t)+\ddot{x}_g(t))\cdot\psi(x)\cdot\delta Y(t)\,dx+M\,(\ddot{V}(L,t)+\ddot{x}_g(t))\cdot\psi(L)\cdot\delta Y(t)$$

$$=\mu\cdot\ddot{Y}(t)\cdot\delta Y(t)\cdot\int_0^L\psi^2(x)\cdot dx+\mu\cdot\delta Y(t)\cdot\ddot{x}_g(t)\int_0^L\psi(x)\cdot dx$$

$$+M\cdot\ddot{Y}(t)\cdot\delta Y(t)\cdot\psi^2(L)+M\cdot\delta Y(t)\cdot\ddot{x}_g(t)\cdot\psi(L)$$

$$=\ddot{Y}(t)\cdot\delta Y(t)\left[\mu\int_0^L\psi^2(x)\cdot dx+M\psi^2(L)\right]+\ddot{x}_g(t)\cdot\delta Y(t)\left[\mu\int_0^L\psi(x)\cdot dx+M\cdot\psi(L)\right] \qquad (3)$$

از قرار دادن روابط (2) و (3) در رابطه (1) خواهیم داشت:

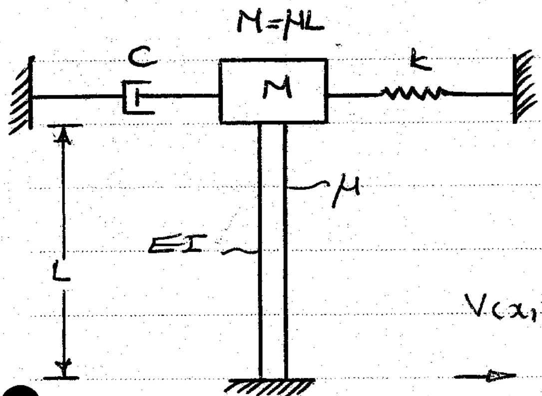
$$\ddot{Y}(t)\cdot\delta Y(t)\left[\mu\int_0^L \psi(x)^2\cdot dx + M\,\psi(L)^2\right] + Y(t)\cdot\delta Y(t)\cdot EI\int_0^L \left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)^2\cdot dx$$
$$= -\ddot{x}_g(t)\cdot\delta Y(t)\left[\mu\int_0^L \psi(x)\cdot dx + M\,\psi(L)\right]$$

$$\Rightarrow \ddot{Y}(t)\left[\mu\int_0^L \psi(x)^2\cdot dx + M\,\psi(L)^2\right] + Y(t)\cdot EI\int_0^L\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)^2\cdot dx = -\ddot{x}_g(t)\left[\mu\int_0^L\psi(x)\cdot dx + M\,\psi(L)\right]$$

جرم معادل $M^* = \mu\int_0^L \psi(x)^2\cdot dx + M\,\psi(L)^2$ سختی معادل $k^* = EI\int_0^L\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)^2$

ضریب تحریک $\bar{k} = \mu\int_0^L \psi(x)\cdot dx + M\,\psi(L)$ نیروی زلزله معادل $P^*_{eff} = -\bar{k}\cdot\ddot{x}_g(t)$

معادله حرکت $M^*\ddot{Y}(t) + k^*Y(t) = P^*_{eff}(t)$



تمرین ۱۲: سازه‌ی زیر به شکل مقابل مدل شده است. مطلوبست تعیین معادله حرکت، سختی معادل، جرم معادل، نیروی مؤثر معادل و ضریب استهلاک معادل در صورتیکه سازه تحت اثر حرکت زمین قرار گرفته باشد.

$$V(x,t) = \psi(x)\cdot Y(t)$$
$$\rightarrow \delta V(x,t) = \psi(x)\cdot\delta Y(t)$$

روش کار نیروی مجازی:

$$\delta W_E = \delta W_I \longrightarrow 0 = \delta W_{I_1} + \delta W_{I_2} \quad (1)$$

۱) کار نیروی داخلی:

$$\delta W_{I_1} = \int m(x)\cdot\delta d\theta + C\,\dot{V}(L,t)\cdot\delta V(L,t) + k\,V(L,t)\cdot\delta V(L,t)$$
$$= \int EI\,\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\delta V(x,t)}{\partial x^2}\cdot dx + \psi(L)^2\cdot\delta Y(t)\left(C\cdot\dot{Y}(t) + k\cdot Y(t)\right)$$
$$= Y(t)\cdot\delta Y(t)\cdot EI\int_0^L\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)^2 dx + \psi(L)^2\cdot\delta Y(t)\left(C\cdot\dot{Y}(t) + k\cdot Y(t)\right)$$
$$= Y(t)\cdot\delta Y(t)\left[EI\int_0^L\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)^2 dx + k\cdot\psi(L)^2\right] + \dot{Y}(t)\cdot\delta Y(t)\cdot C\cdot\psi(L)^2 \quad (2)$$

۲) کار نیروی اینرسی:

$$\delta W_{I_2} = \int f_I(x,t)\cdot\delta V(x,t)\cdot dx + M\,\ddot{V}(L,t)\,\delta V(L,t)$$

این رابطه در مثال قبل ساده شده است. از نوشتن مراحل آن خودداری می‌کنیم. جواب آخر بصورت

حمید کاظم ۸۴۲۴۰۴۱

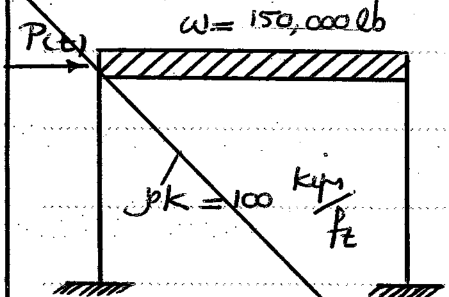
$$\Rightarrow X_{Max} = \left[X_0^2 + \left(\frac{\dot{X}_0}{\omega_n}\right)^2 \right]^{1/2} = 13.29$$

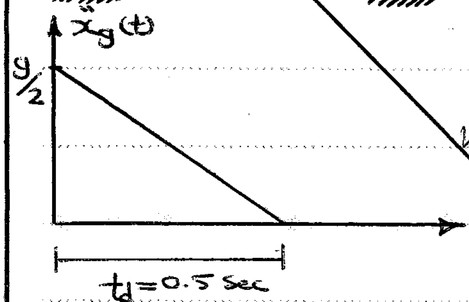
$$\Rightarrow \text{Max تغییرمکان} = 33.94 \text{ in}$$

$$\text{Max برش پایه } Q_{Max} = k\, x_{Max} = 150 \times 33.94 = 5091 \text{ kips}$$

غلط دارد

تمرین ۱۵) قاب یک طبقه شکل مقابل مفروض است.





درصورتیکه این قاب تحت اثر نیروی زلزله‌ای با منحنی شتاب زیر قرار گیرد، مطلوبست تعیین:

۱) تابع تغییرمکان ۲) رسم تابع تغییرمکان

۳) تعیین مقدار Max تغییرمکان و Max برش پایه.

$$W = 150{,}000 \text{ lb} = 150 \text{ kips}$$

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = P_{eff}(t) = -m\ddot{x}_g(t)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{kg}{mg}} = \sqrt{\frac{kg}{W}} = \sqrt{\frac{100 \times 32.17}{150}} = 4.631 \text{ rad/s}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 1.357 \text{ s}$$

چون $t_d > \frac{T}{5}$ پس بارگذاری انجام شده بارگذاری انفجاری می‌باشد.

قسمت اول ($0 < t \leq 0.5$) : تعیین تابع تغییرمکان به کمک انتگرال دوهامل

$$x_1(t) = \frac{1}{\omega} V(t) \qquad V(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \sin\omega(t-\tau)\, d\tau$$

$$\ddot{x}_g(\tau) = -g\tau + \frac{1}{2}g$$

$$\Rightarrow V(t) = \int_0^t (-32.17\tau + 16.085) \sin(4.631(t-\tau))\, d\tau$$

$$\Rightarrow V(t) = 6.947t - 3.473\cos(4.631t) + 1.5\sin(4.631t) + 3.473$$

$$\Rightarrow x_1(t) = 1.5t - 0.75\cos(4.631t) + 0.324\sin(4.631t) + 0.75$$

$$t = 0.5 \quad \rightarrow \quad x_{1Max}(0.5) = 2.247$$

قسمت دوم ($t > 0.5$) : حالت ارتعاش آزاد

$$x_2(t) = X_{Max}\cos(\omega_n t - \varphi)$$

$$X_0 = x(0.5) = 2.247$$

$$\dot{X}_0 = \dot{x}(0.5) \longrightarrow \dot{x}(t) = 1.5 + 3.473\sin(4.631t) + 1.5\cos(4.631t)$$

$$\longrightarrow \dot{X}_0 = 3.037$$

$$\longrightarrow \begin{cases} X_{Max} = \left[X_0^2 + \left(\frac{\dot{X}_0}{\omega}\right)^2\right]^{1/2} = \left[2.247^2 + \left(\frac{3.037}{4.631}\right)^2\right]^{1/2} = 2.341 \\ \varphi = tg^{-1}\left(\frac{\dot{X}_0}{\omega_n X_0}\right) = tg^{-1}\left(\frac{3.037}{4.631 \times 2.247}\right) = 0.284 \text{ rad} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x_2(t) = 2.341\cos(4.631t - 0.284)$$

در نتیجه:

Max تغییر مکان $= 2.341$ ft

Max برش پایه $= 100\,(\frac{kips}{ft}) \times 2.341\,(ft) = 234.1$ kips

ادامه تمرین ۱۲)

فرض $\psi(x) = \sin\frac{\pi x}{2L}$

$$M^* = \int_0^L \mu\left(\sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right)^2 dx + M\left(\sin\frac{\pi L}{2L}\right)^2 = \frac{L}{2}\mu + \mu L = 1.5\mu L$$

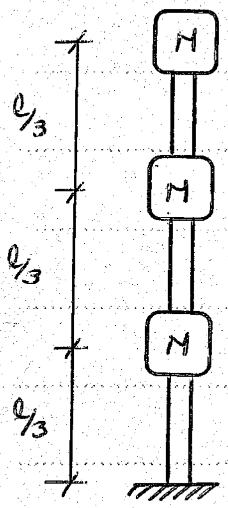
$$k^* = \int_0^L EI\left(-\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 \sin\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx + k = \frac{\pi^4}{16L^4} \times \frac{L}{2} EI = 3.044\frac{EI}{L^3} + k$$

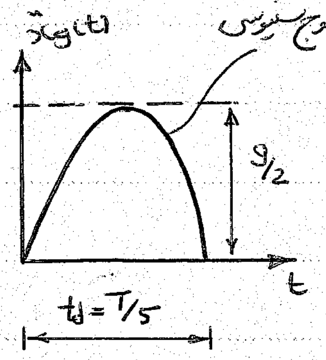
$$\bar{K} = \int_0^L \mu\left(\sin\frac{\pi x}{2L}\right) dx + M\left(\sin\frac{\pi L}{2L}\right)^2 = \frac{2}{\pi}L\mu + \mu L = 1.637L\mu$$

$$c^* = c\left(\sin\frac{\pi L}{2L}\right) = c$$

$$\Rightarrow 1.5\mu L\,\ddot{Y}(t) + c\dot{Y}(t) + \left(3.044\frac{EI}{L^3} + k\right)Y(t) = -1.637\mu L\,\ddot{x}_g(t)$$

حمید کاظم ۸۴۲۴۰۴۱





آیدیو سازه

حل مجدد و صحیح تمرین ۱۴)

برج مخابراتی شهری بصورت سازه مقابل مدل شده است. (در صورتیکه:

$W = Mg = 100\,kips \quad L = 100\,ft$

$EI = 3\times10^{8}\ lb.in^{2} \qquad \mu L = 3M$

و این سازه تحت اثر حرکت زمین بصورت شکل قرار گیرد، مطلوبست تعیین:

۱) Max تغییرمکان ۲) Max برش پایه

۳) محاسبه تابع تغییرمکان و رسم آن.

$$\begin{cases} L = 1200\ in \qquad Mg = 100\ kips \Rightarrow W = Mg = 10^{5}\ lb_{\text{وزنی}} \\ \Rightarrow M = \dfrac{10^{5}}{386.06} = 259.03\ lb_{\text{جرمی}} \\ \mu L = 3M \Rightarrow \mu = \dfrac{3M}{L} = \dfrac{3\times259.03}{1200} = 0.648\ \dfrac{lb_{\text{جرمی}}}{in} \end{cases}$$

$$\ddot{x}_g(t) = \frac{g}{2}\sin\left(\frac{5\pi}{T}\right)t = 193.03\sin\left(\frac{5\pi}{T}\right)t$$

$$\psi(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2L}$$

می‌توان از دو رابطه زیر که کاملا یکی هستند تابع تغییرمکان را بدست آورد.

1) $x(t) = \dfrac{\int P^{*}_{eff}(t)\,dt}{\omega m^{*}}\sin\omega(t) \qquad P^{*}_{eff}(t) = -\bar{k}\,\ddot{x}_g(t)$ بارگذاری ضربه‌ای

2) $Y(t) = \dfrac{\bar{k}}{\omega m^{*}}V(t) \qquad V(t) = \int_0^{t}\ddot{x}_g(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau$ بارگذاری اختیاری

حال چون $t_d = T/5$ می‌باشد و بارگذاری ضربه‌ای است پس از همین رابطه ۱ استفاده می‌کنیم

$$M^{*} = \int_0^{L}\mu(x)\,[\psi(x)]^{2}\,dx + \sum m_i\,\psi_i^{2}$$

$$= \int_0^{1200} 0.648\left(1-\cos\frac{\pi x}{2400}\right)^{2}dx + 259.03\left[\left(1-\cos\frac{\pi}{6}\right)^{2} + \left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right)^{2} + \left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right)^{2}\right] = 504.77\ lb_{\text{جرمی}}$$

$$k^{*} = \int_0^{L} EI\left[\frac{d^{2}\psi}{dx^{2}}\right]^{2}dx = \int_0^{1200} 3\times10^{8}\times\left(\frac{\pi}{2400}\right)^{4}\left(\cos\left(\frac{\pi x}{2400}\right)\right)^{2}dx = \cancel{5.85\times10^{-2}}\ 0.528\ \frac{lb_{\text{وزنی}}}{in}$$

$$\bar{K} = \int_0^L \mu_{(x)}\, \psi_{(x)}\, dx + \sum m_i\, \psi_i = \int_0^{1200} 0.648 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{\cancel{1200} \to 2400}\right) dx + 259.03 \Big[\left(1-\cos\frac{\pi}{6}\right) + \left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right) + \left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right) \Big] = \cancel{1200.85}\ \text{lb} \quad 682.21$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} = \sqrt{\frac{5.35\times10^{-2}}{504.77}} = 1.03\times10^{-2}\ \text{rad/s} \implies T = \frac{2\pi}{\omega} = 610.3\ \text{s}$$

$$\int_0^{t_d} P_{eff}(t)\, dt = \int_0^{T/5} -k\, \ddot{x}_g(t) = \int_0^{T/5} -k \left(193.03 \sin\left(\frac{5\pi}{T}\right) t\right) dt$$

$$= \int_0^{122.06} -1200.85 \times 193.03 \sin\left(\left(\frac{5\pi}{122.06}\right) t\right) dt = 3602442.5$$

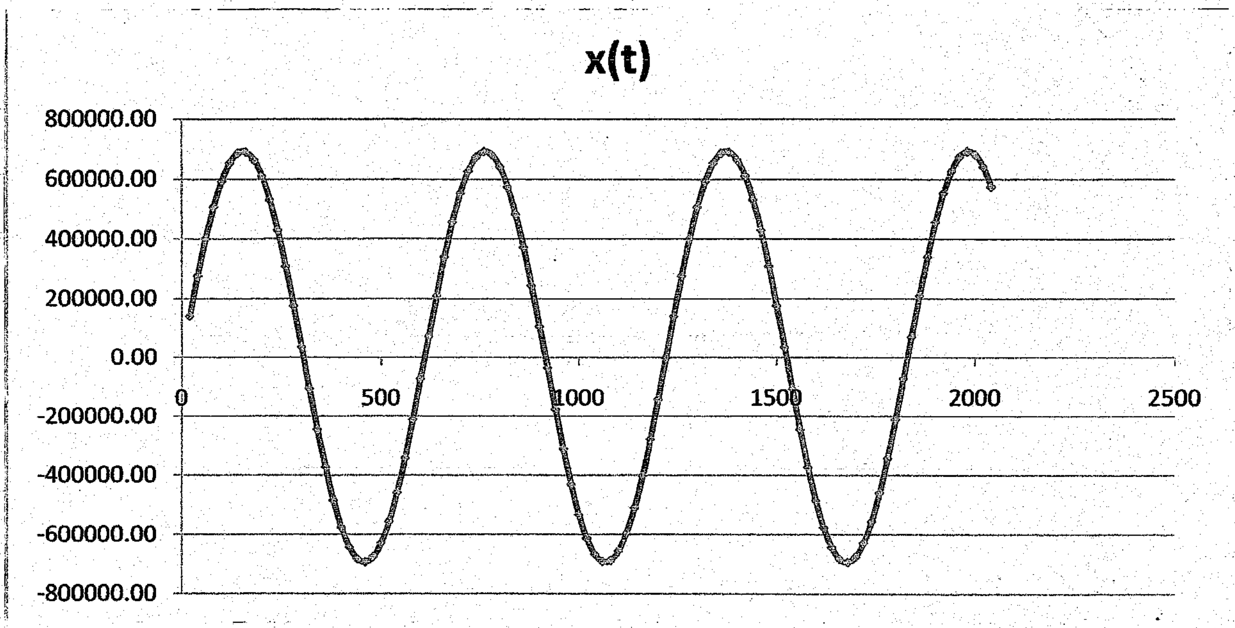
$$\implies x_{(t)} = \frac{3,602,442.5}{1.03\times10^{-2} \times 504.77} \sin(1.03\times10^{-2}\, t) = 692,893.2 \sin(0.0103\, t)$$

$(t - t_d)$

$$\longrightarrow x_{Max} = 692893.2\ \text{in}$$

$$Q_{(t)} = \frac{\bar{k}^2}{m^*}\, \omega\, V_{(t)} = \frac{\bar{k}}{m^* \omega} V_{(t)} \times \bar{k}\omega^2 = x_{(t)} \cdot \bar{k}\, \omega^2$$

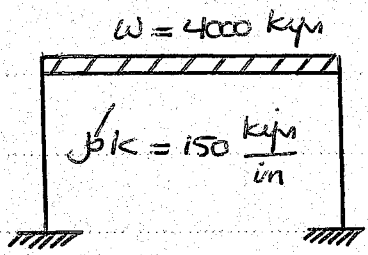
$$\longrightarrow Q_{Max} = 692893.2 \times 1200.85 \times (1.03\times10^{-2})^2 = 88273.3\ \text{lb}$$



تغییرمکان (in)

زمان (ثانیه)

حل محدود صحیح (تمرین ۱۴)

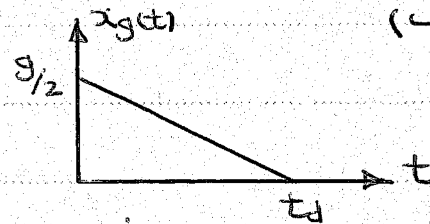


قاب شکل مقابل مفروض است. در صورتیکه این قاب تحت اثر شتاب زمین بصورت دیاگرام های الف و ب قرار گیرد، مطلوبست تعیین:

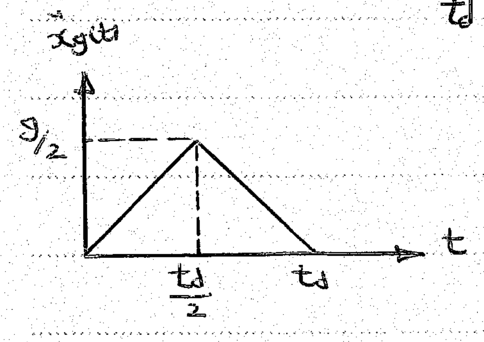
۱) تغییرمکان Max ۲) برش پایه Max

(t_d دو برابر پریود سازه است) $t_d = 2T$

الف)



ب)



بارگذاری اضطراری می باشد.

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = P_{eff} = -m\ddot{x}_g(t)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{kg}{mg}} = \sqrt{\frac{150 \times 386.06}{4000}} = 3.805 \ rad/s$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3.805} = 0.526\pi = 1.651 \ rad$$

حالت الف)

فاز اول ($0 < t \leq 2T$): تعیین تابع تغییرمکان به کمک انتگرال دوهامل.

$$x_1(t) = \frac{1}{\omega} V_1(t) \qquad V(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \sin\omega(t-\tau)\, d\tau$$

$$\ddot{x}_g(\tau) = \frac{-g}{4T}\tau + \frac{g}{2}$$

$$\Rightarrow V_1(t) = \int_0^t \left(\frac{-g}{4T}\tau + \frac{1}{2}g\right) \sin\omega(t-\tau)\, d\tau$$

$$V_1(t) = \int_0^t (-58.46\tau + 193.03) \sin(3.805(t-\tau))\, d\tau$$

$$V_1(t) = -15.36t - 50.73\cos(3.805t) + 4.04\sin(3.805t) + 50.7$$

$$\Rightarrow x_1(t) = -4.04t - 13.32\cos(3.805t) + 1.062\sin(3.805t) + 13.32$$

$$\Rightarrow t = 0.704 < 2T = 3.303 \longrightarrow x_{1\,Max} = 23.47$$

فاز دوم $(t>2T)$ و حالت ارتعاش آزاد

$$x_2(t) = X_{2Max}\cos(\omega_n(t-2T)-\phi) \qquad 2T = 3.303\ s$$

$$X_0 = x_1(3.303) = -13.36\ in$$

$$\dot{X}_0 = \dot{x}_1(3.303) \rightarrow \dot{x}_{(t)} = -4.04 + 50.6\sin(3.805t) + 4.03\cos(3.805t)$$

$$\Rightarrow \dot{X}_0 = \dot{x}(3.303) = 0.068\ in/s$$

$$\Rightarrow X_{2Max} = \left[X_0^2 + \left(\frac{\dot{X}_0}{\omega_n}\right)^2\right]^{1/2} = 13.36\ in$$

$$\Rightarrow \text{تغییر مکان ماکزیمم}\ x_{Max} = x_1(t=0.784) = 23.47$$

برش ماکزیمم را برای مقایسه از دو رابطه زیر بدست می آوریم.

1) $Q_{Max} = k\,x_{Max} = 150 \times 23.47 = 3520.5\ kips$

2) $Q_{Max} = m\omega V_{Max} = m\omega(x_{Max}\cdot\omega) = \frac{4000}{386.06} \times 3.805^2 \times 23.47 = 3520.7\ kips$

حالت ب)

$$x(t) = \frac{1}{\omega}V(t) \qquad V(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$$

$$\ddot{x}_g(\tau) = \begin{cases} \frac{g}{2T}\tau & 0 \leq t \leq T \\ \frac{-g}{2T}\tau + g & T < t \leq 2T \\ 0 & t > 2T \end{cases}$$

فاز اول $(0 < t \leq T)$

$$V_1(t) = \int_0^t \frac{g}{2T}\tau\sin\omega(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t 116.92\,\tau\sin(3.805(t-\tau))\,d\tau$$

$$= 30.73t - 8.076\sin(3.805t)$$

$$x_1(t) = 8.076t - 2.122\sin(3.805t)$$

$$\rightarrow t = T \Rightarrow x_{1\,Max} = 13.34\ in$$

فاز دوم $(T < t \leq 2T)$

$$V_2(t) = \int_0^T \frac{g}{2T}\tau\sin\omega(t-\tau)\,d\tau + \int_T^t \left(\frac{-g}{2T}\tau + g\right)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \int_0^{1.651} 116.92\,\tau\sin(3.805(t-\tau))\,d\tau + \int_{1.651}^t (-116.92\tau + 386.06)\sin(3.805(t-\tau))\,d\tau$$

$$= -30.73t + 101.46\cos(3.805t - 6.28) + 16.15\sin(3.805t - 6.28)$$

$$-101.46\cos(3.805(t-1.651)) - 8.08\sin(3.805t) + 101.46$$

$$\Rightarrow x_2(t) = -8.08\,t + 26.66\cos(3.805t - 6.28) + 4.24\sin(3.805t - 6.28)$$
$$- 26.66\cos(3.805(t - 1.651)) - 2.12\sin(3.805t) + 26.66$$

$$t = T \rightarrow x_{2\,Max} = 13.34 \text{ in}$$

فاز سوم ($t > 2T$) حالت ارتعاش آزاد

$$x_3(t) = X_{Max}\cos(\omega_n(t - 2T) + \varphi)$$

$$X_o = x_2(3.303) = -0.011$$

$$\dot{X}_o = \dot{x}_2(3.303)$$

$$\dot{x}_2(t) = -8.08 - 101.44\sin(3.805t - 6.28) + 16.13\cos(3.805t - 6.28)$$
$$+ 101.44\sin(3.805(t - 1.651)) - 8.07\cos(3.805t)$$

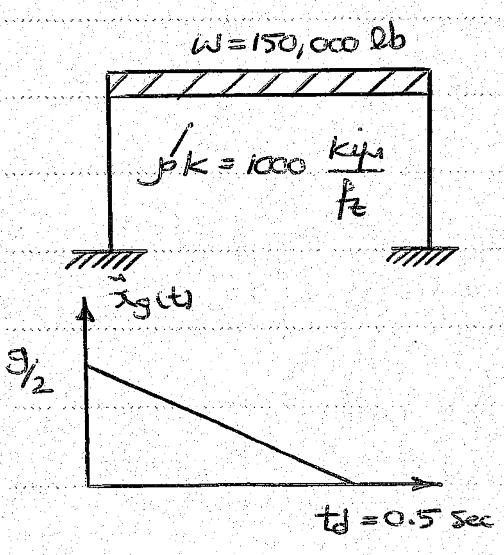
$$\dot{X}_o = \dot{x}_2(3.303) = 0.157$$

$$\Rightarrow x_{3\,Max} = \left[X_o^2 + \left(\frac{\dot{X}_o}{\omega_n}\right)^2\right]^{1/2} = 0.043$$

$\Rightarrow$ Max تغییر مکان $= 13.34$ in

$$Q_{Max} = K\,x_{Max} = 150 \times 13.34 = 2001 \text{ kips}$$

حل مجدد و صحیح (تمرین ۱۵)



قاب یک طبقه شکل مقابل مفروض است. در صورتیکه این قاب تحت اثر نیروی زلزله ای با منحنی زیر قرار گیرد، مطلوبست تعیین:

۱) تابع تغییر مکان ۲) رسم تابع تغییر مکان

۳) تعیین مقدار Max تغییر مکان و Max برش پایه.

$$W = 150{,}000\ lb = 150\ kips$$

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = P_{eff}(t) = -m\ddot{x}_g(t)$$

$$\omega = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} = \left(\frac{kg}{mg}\right)^{1/2} = \left(\frac{100 \times 32.17}{150}\right)^{1/2} = 4.631\ rad/s$$

$$\rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 1.357$$

چون $t_d > \frac{T}{4}$ $(0.5 > 0.34)$ پس بارگذاری انجام شده ضربه‌ای است.

فاز اول $(0 < t \leq 0.5)$:

$$x_1(t) = \frac{1}{\omega} V_1(t)$$

$$\ddot{x}_g(t) = -g\tau + \frac{1}{2}g$$

$$V_1(t) = \int_0^t (-32.17\tau + 16.085)\sin(4.631(t-\tau))\,d\tau$$

$$= 6.947t - 3.473\cos(4.631t) + 1.5\sin(4.631t) + 3.473$$

$$\Rightarrow x_1(t) = 1.5t - 0.75\cos(4.631t) + 0.324\sin(4.631t) + 0.75$$

$$t = 0.5 \rightarrow x_{1\,Max}(0.5) = 2.247\ ft$$

فاز دوم $(t > 0.5)$:

$$x_2(t) = X_{Max}\cos(\omega_n(t-0.5) - \varphi)$$

$$X_0 = x_1(0.5) = 2.247$$

$$\dot{X}_0 = \dot{x}_1(0.5) \rightarrow \dot{x}(t) = 1.5 + 3.473\sin(4.631t) + 1.5\cos(4.631t)$$

$$\rightarrow \dot{X}_0 = 3.037$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_{2\,Max} = \left[X_0^2 + \left(\frac{\dot{X}_0}{\omega_n}\right)^2\right]^{1/2} = \left[2.247^2 + \left(\frac{3.037}{4.631}\right)^2\right]^{1/2} = 2.341\ ft \\ \varphi = tg^{-1}\left(\frac{\dot{X}_0}{\omega_n X}\right) = tg^{-1}\left(\frac{3.037}{4.631 \times 2.247}\right) = 0.284\ rad \end{cases}$$

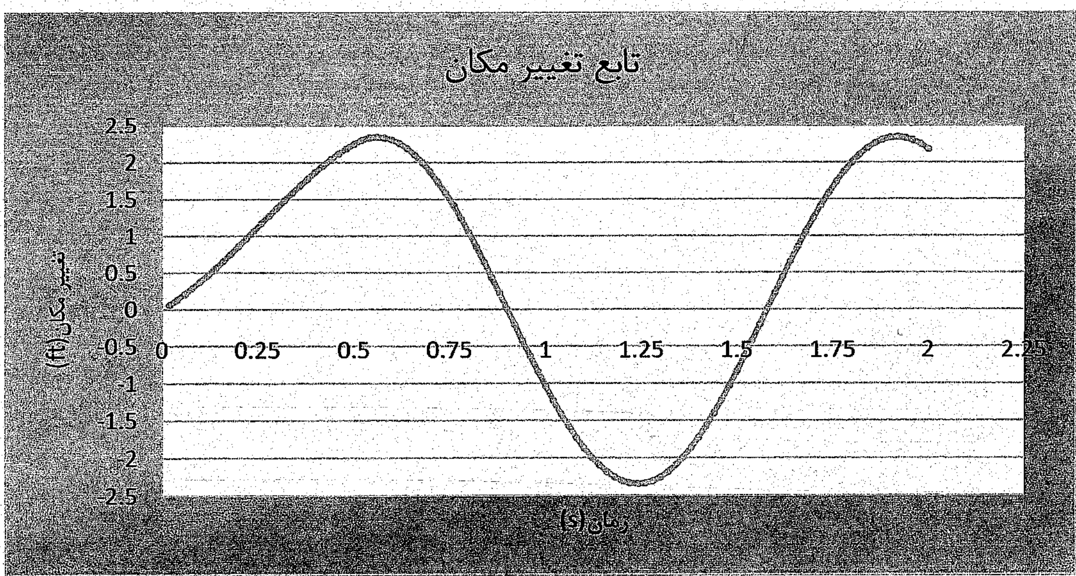
$$\rightarrow x_2(t) = 2.341\cos(4.631t - 0.284)$$

در نتیجه:

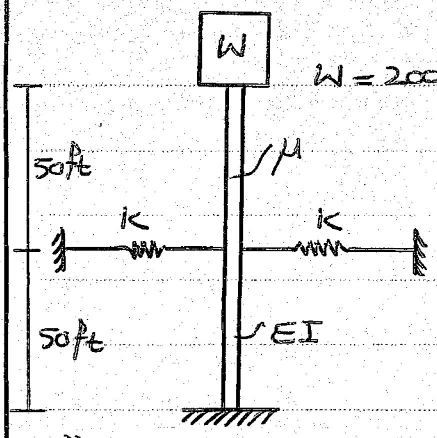
Max تغییر مکان $= 2.341\ ft$

Max برش پایه $= 2.341 \times 100 = 234.1\ kips$

t(s)	x(t)	t(s)	x(t)	t(s)	x(t)	t(s)	x(t)
0.02	0.06318	0.52	2.29826	1.02	-1.23024	1.52	-0.63066
0.04	0.13251	0.54	2.329593	1.04	-1.40917	1.54	-0.41945
0.06	0.20764	0.56	2.340956	1.06	-1.57602	1.56	-0.20464
0.08	0.28819	0.58	2.332252	1.08	-1.72937	1.58	0.011918
0.1	0.37373	0.6	2.303554	1.1	-1.86788	1.6	0.228378
0.12	0.46379	0.62	2.25511	1.12	-1.99039	1.62	0.44288
0.14	0.55784	0.64	2.187335	1.14	-2.09583	1.64	0.653585
0.16	0.65533	0.66	2.100809	1.16	-2.18331	1.66	0.858688
0.18	0.75570	0.68	1.996274	1.18	-2.25207	1.68	1.056429
0.2	0.85833	0.7	1.874626	1.2	-2.30153	1.7	1.245115
0.22	0.96260	0.72	1.736908	1.22	-2.33126	1.72	1.423127
0.24	1.06789	0.74	1.584301	1.24	-2.341	1.74	1.58894
0.26	1.17353	0.76	1.418113	1.26	-2.33067	1.76	1.74113[illegible]
0.28	1.27888	0.78	1.239769	1.28	-2.30037	1.78	1.878398
0.3	1.38330	0.8	1.050796	1.3	-2.25034	1.8	1.999561
0.32	1.48615	0.82	0.852816	1.32	-2.18103	1.82	2.103584
0.34	1.58681	0.84	0.647525	1.34	-2.09302	1.84	2.189575
0.36	1.68466	0.86	0.436684	1.36	-1.98706	1.86	2.256795
0.38	1.77913	0.88	0.222099	1.38	-1.86408	1.88	2.30467
0.4	1.86966	0.9	0.00561	1.4	-1.72511	1.9	2.332788
0.42	1.95574	0.92	-0.21093	1.42	-1.57135	1.92	2.340909
0.44	2.03688	0.94	-0.42566	1.44	-1.40413	1.94	2.328962
0.46	2.11265	0.96	-0.63674	1.46	-1.22487	1.96	2.297051
0.48	2.18265	0.98	-0.84236	1.48	-1.0351	1.98	2.245449
0.5	2.24655	1	-1.04076	1.5	-0.83647	2	2.174598

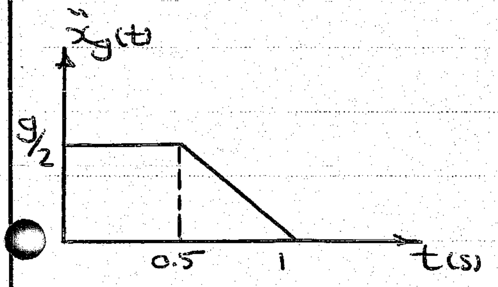


حل مجدد و صحیح (تمرین ۱۶)



برج مخابرات شهری بصورت شکل مقابل مدل شده است.
درصورتیکه این سازه تحت اثر شتاب نگاشت زیر قرار گیرد،
مطلوبست تعیین:

۱) تابع تغییر مکان ۲) مقدار Max تغییر مکان
۳) شدت نیروی برش ر ۴) Max برش پایه
(استهلاک را صفر در نظر بگیرید)



$\mu L g = 2W \qquad EI = 2.1\times10^{8}$ lb.in² وزنی

$K = 50 \text{ kip}/ft = \frac{50{,}000}{12} = 4166.7 \frac{lb}{in}$ وزنی

$L = 1200$ inch $\qquad W = 200{,}000$ lb وزنی

$\Rightarrow M = \frac{200{,}000}{386.06} = 518.1$ lb جرمی

$\mu L g = 2W \Rightarrow \mu L = 2\frac{W}{g} \Rightarrow \mu L = 2M \Rightarrow \mu = \frac{2\times518.1}{1200} = 0.863 \; lb/in$ جرمی

$V(x,t) = \psi(x)\cdot Y(t) \qquad \psi(x) = 1-\cos\frac{\pi x}{2L}$

$M^* = \int_0^L \mu(x)\,[\psi(x)]^2 dx + \sum m_i \psi_i^2$

$= \int_0^{1200} 0.863\times\left(1-\cos\frac{\pi x}{2400}\right)^2 dx + 518.1\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right)^2 = 752.9$ lb جرمی

$K^* = \int_0^L EI(x)\left[\frac{d^2\psi}{dx^2}\right]^2 dx + \sum k_i \psi_i^2$

$= \int_0^{1200} 2.1\times10^8\left(\frac{\pi}{2400}\right)^4\left(\cos\left(\frac{\pi x}{2400}\right)\right)^2 dx + 2\times4166.7\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)^2$

$= 715.26$ lb/in وزنی

$\omega = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}} = \sqrt{\frac{715.26}{752.9}} = 0.975 \longrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 6.45$

$\bar{K} = \int_0^L \mu(x)\cdot\psi(x)\cdot dx + \sum m_i\psi_i = \int_0^{1200} 0.863\left(1-\cos\frac{\pi x}{2400}\right)dx + 518.1\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right)$

$= 894.42$ lb جرمی

$$\ddot{x}_g(\tau) = \begin{cases} g/2 & 0 < t \leqslant 0.5 \\ -g(t-1) & 0.5 < t \leqslant 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

فازاول $(0 < t \leqslant 0.5)$:

$$Y(t) = \frac{\bar{k}}{M^* \omega} V(t) \rightarrow V_1(x,t) = \varphi(x) \cdot \frac{\bar{k}}{M^* \omega} V_1(t)$$

$$V_1(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \sin\omega(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t 193.03 \sin(0.975(t-\tau))\, d\tau$$

$$= -197.98 \cos(0.975t) + 197.98$$

$$Y_1(t) = \frac{894.42}{752.9 \times 0.975} (-197.98 \cos(0.975t) + 197.98)$$

$$= -241.22 \cos(0.975t) + 241.22$$

$$t = 0.5 \qquad Y_{1\,Max} = 28.1 \text{ in}$$

فازدوم $(0.5 < t \leqslant 1)$:

$$V_2(t) = \int_0^{0.5} \frac{g}{2} \sin\omega(t-\tau)\, d\tau + \int_{0.5}^{t} -g(\cancel{t}^{\,\tau}-1) \sin\omega(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^{0.5} 193.03 \sin 0.975(t-\tau)\, d\tau + \int_{0.5}^{t} -386.06(\cancel{t}^{\,\tau}-1) \sin 0.975(t-\tau)\, d\tau$$

$$= -395.96t + 395.96t \cos(0.975(t-0.5)) - 197.98 \cos(0.975(t-0.5))$$

$$-197.98 \cos(0.975t) + 395.96 \leftarrow (\text{غلط})$$

$$Y_2(t) = -482.45t + 482.45t \cos(0.975(t-0.5)) - 241.22 \cos(0.975(t-0.5))$$

$$-241.22 \cos(0.975t) + 482.45$$

$$t = 1 \rightarrow Y_{2\,Max} = \cancel{77.76} \rightarrow 96.38 \text{ in}$$

فازسوم $(t \geqslant 1)$

$$Y_3(t) = Y_{Max} (\cos(t-1) - \varphi)$$

$$Y_0 = Y_2(1) = 77.76 \text{ in}$$

$$\dot{Y}_0 = \dot{Y}_2(1) \rightarrow \dot{Y}_2(t) = -482.45 + 482.45 \cos(0.975(t-0.5))$$

$$-482.45\, t \sin(0.975(t-0.5)) + 241.22 \sin(0.975(t-0.5)) + 241.22 \sin(0.975t)$$

$$\Rightarrow \dot{Y}_0 = \dot{Y}_2(1) = 30.46 \ \text{in/s}$$

$$\rightarrow Y_{3\,Max} = \left[Y_0^2 + \left(\frac{\dot{Y}_0}{\omega} \right)^2 \right]^{1/2} = \left[77.76^2 + \left(\frac{30.46}{0.975} \right)^2 \right]^{1/2} = \cancel{83.8} \ 171.59 \ \text{in}$$

$$\varphi = tg^{-1}\left(\frac{30.46}{0.975 \times 77.76} \right) = 0.38$$

ـ تابع تغییر مکان :

$$V(x,t) = \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2400}\right) \times \begin{cases} -241.22 \cos(0.975t) + 241.22 & 0 < t \leq 0.5 \\ -482.45t + 482.45t \cos(0.975(t-0.5)) - 241.22 \cos(0.975 \times (t-0.5)) - 241.22 \cos(0.975t) + 482.45 & 0.5 < t \leq 1 \\ 83.8 \cos(0.975(t-1) + 0.38) & t > 1 \end{cases}$$

ـ مقدار Max تغییر مکان :

$$Y_{Max} = \cancel{83.8} \ 171.59 \ \text{in}$$

ـ شدت نیروی برشی :

$$Q = \frac{\bar{K}^2}{M^*} \omega V(t) = \left(\frac{\bar{K}}{M^* \omega} \right) \bar{K} . \omega^2 V(t)$$

$$\rightarrow Q = \bar{K} . \omega^2 . Y(t) = 850.26 \, Y(t)$$

$$Q(t) = 850.26 \times \begin{cases} -241.22 \cos(0.975t) + 241.22 & 0 < t \leq 0.5 \\ -482.45t + 482.48t \cos(0.975(t-0.5)) - 241.22 \cos(0.975 \times (t-0.5)) - 241.22 \cos(0.975t) + 482.45 & 0.5 < t \leq 1 \\ 83.8 \cos(0.975(t-1) + 0.38) & t > 1 \end{cases}$$

ـ Max برش پایه

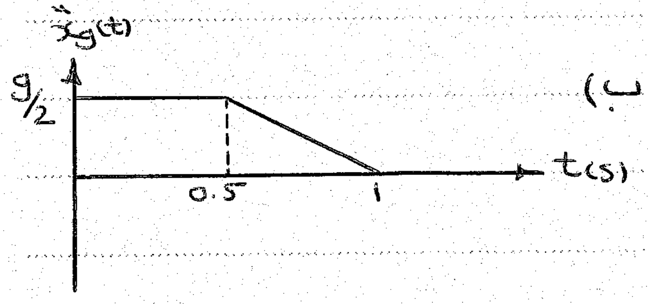
$$Q_{Max} = 850.26 \times 83.8 = 71251.79 \ \text{lb}$$

حمید کاظم ۸۴۲۴۰۴۱

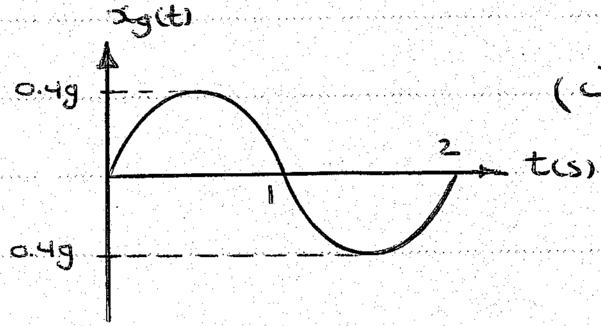
تمرین ۱۷) در صورتیکه شتاب ثبت شده زمین در دو زلزله مختلف مطابق اشکال الف و ب باشد، مطلوبست تعیین طیف پاسخ این دو زلزله برای تغییرمکان، سرعت و شتاب. طیف های مزبور را برای ۳ میرایی زیر بدست آورید. (برای رسم تا 4s پیش بروید)

$\xi_1 = 0\%$ $\quad\quad$ $\xi_2 = 5\%$ $\quad\quad$ $\xi_3 = 10\%$

ب)



الف)



قسمت الف)

$$\ddot{x}_g(\tau) = \begin{cases} 0.4g \sin \pi\tau & 0<\tau\leq 2 \\ 0 & \tau>2 \end{cases}$$

$$0<t\leq 2 \rightarrow V(t) = \int_0^t 0.4g \sin\pi\tau \,.\, e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_d (t-\tau)\, d\tau$$

با فرض $(T\leq 4)$ همواره $t_d > T/4$ می باشد پس پاسخ سازه اجباری است، و چون $t_d > T/2$ می باشد حداکثر پاسخ سازه در ارتعاش اجباری است.

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} \qquad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = \frac{2\pi}{T}\sqrt{1-\xi^2} \qquad g = 32.17\ ft/s^2$$

$$V(t) = \int_0^t 12.868 \sin\pi\tau \,.\, e^{-\xi(\frac{2\pi}{T})(t-\tau)} \sin\left(\frac{2\pi}{T}\sqrt{1-\xi^2}(t-\tau)\right) d\tau$$

به ازای $\xi = 0$ داریم:

$$V(t) = \int_0^t 12.868 \sin\pi\tau \,.\, \sin\left(\frac{2\pi}{T}(t-\tau)\right) d\tau$$
$$= 12.868\left(\frac{\sin(\pi t) + \sin(\frac{2\pi t}{T})}{2(\frac{2\pi}{T}+\pi)} + \frac{\sin(\pi t) - \sin(\frac{2\pi t}{T})}{2(\frac{2\pi}{T}-\pi)} \right)$$

برای $\xi = 5\%$ داریم:

$$A = \frac{9.873}{100T^2} + \left(\frac{6.274}{T} + \pi\right)^2 \qquad B = \frac{9.873}{100T^2} + \left(\frac{6.274}{T} - \pi\right)^2$$

$$V(t) = \Bigg[\frac{1}{A}\Bigg[\frac{0.1571\cos(\pi t)}{T} + \frac{1}{2}\left(\frac{6.274}{T} + \pi\right)\sin(\pi t) - \frac{0.1571}{T}e^{-\frac{0.3142t}{T}}\cos\left(\frac{6.274}{T}t\right)$$

$$+ \frac{1}{2}e^{-\frac{0.3142t}{T}}\left(\frac{6.274}{T} + \pi\right)\sin\left(\frac{6.274t}{T}\right)\Bigg] + \frac{1}{B}\Bigg[-\frac{0.1571\cos(\pi t)}{T}$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{6.274}{T} - \pi\right)\sin(\pi t) + \frac{0.1571}{T}e^{-\frac{0.3142t}{T}}\cos\left(\frac{6.274t}{T}\right)$$

$$- \frac{1}{2}e^{-\frac{0.3142t}{T}}\left(\frac{6.274}{T} - \pi\right)\sin\left(\frac{6.274t}{T}\right)\Bigg]\Bigg] \times 12.868$$

برای $\xi = 10\%$ داریم:

$$C = \frac{0.394}{100T^2} + \left(\frac{6.283}{T} + \pi\right)^2 \qquad D = \frac{0.394}{100T^2} + \left(\frac{6.283}{T} - \pi\right)^2$$

$$V(t) = \Bigg[\frac{1}{C}\Bigg[\frac{+0.314\cos(\pi t)}{10T} + \frac{1}{2}\left(\frac{6.283}{T} + \pi\right)\sin(\pi t) - \frac{0.314}{10T}e^{-0.628\frac{t}{10T}}\cos\left(\frac{6.283t}{T}\right)$$

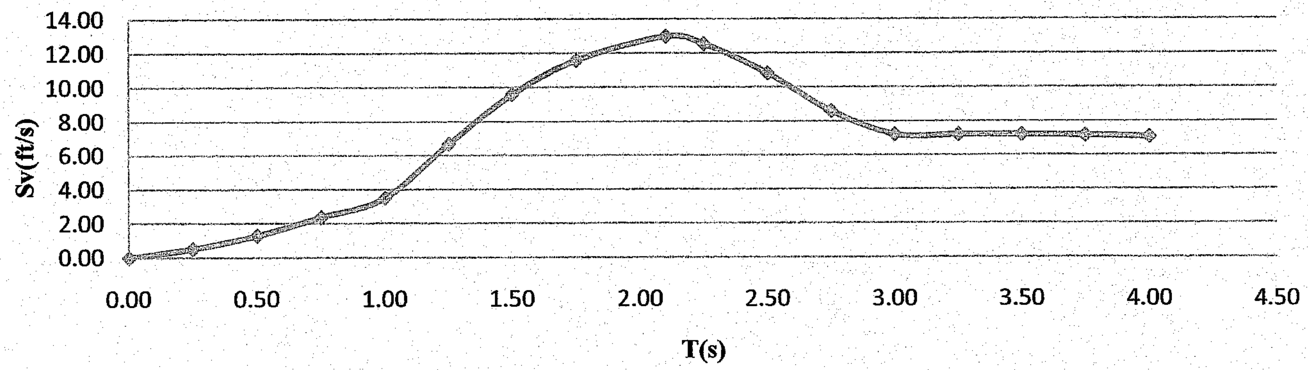
$$+ \frac{1}{2}e^{-0.628\frac{t}{10T}}\left(\frac{6.283}{T} + \pi\right)\sin\left(\frac{6.283t}{T}\right)\Bigg] + \frac{1}{D}\Bigg[\frac{1}{2}\left(\frac{6.283}{T} - \pi\right)\sin(\pi t)$$

$$+ \frac{0.314}{10T}e^{-0.628\frac{t}{10T}}\cos\left(\frac{6.283t}{T}\right) - \frac{1}{2}e^{-0.628\frac{t}{10T}}\left(\frac{6.283}{T} - \pi\right)\sin\left(\frac{6.283t}{T}\right)$$

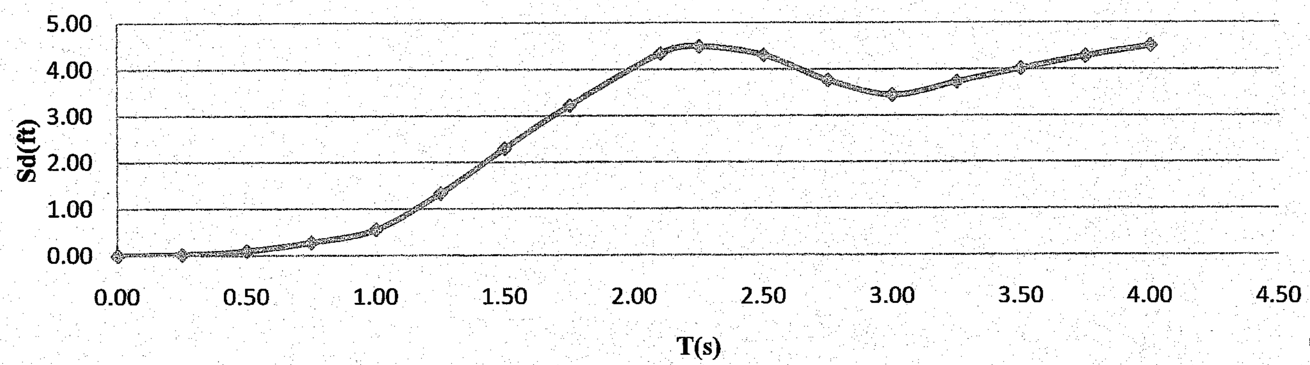
$$- \frac{0.314\cos(\pi t)}{10T}\Bigg]\Bigg] 12.868$$

ζ=0																
T	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.10	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00
S_v	0.00	0.53	1.30	2.37	3.51	6.70	9.59	11.59	12.99	12.54	10.82	8.61	7.22	7.21	7.21	7.17	7.08
S_d	0.00	0.02	0.10	0.28	0.56	1.33	2.29	3.23	4.34	4.49	4.31	3.77	3.45	3.73	4.01	4.28	4.50
S_a	12.87	13.39	16.32	19.84	22.04	33.67	40.19	41.61	38.85	35.03	27.20	19.66	15.13	13.94	12.94	12.01	11.11

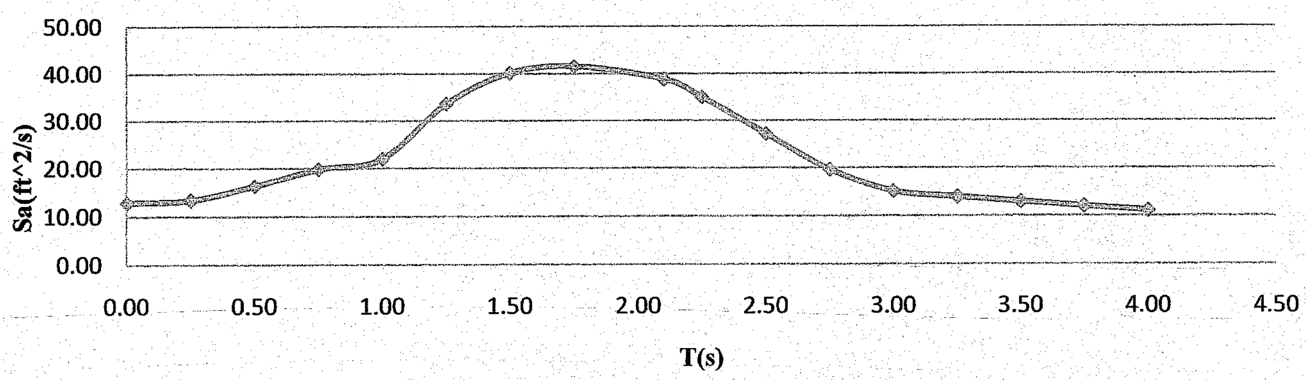
طيف سرعت (ζ=0)



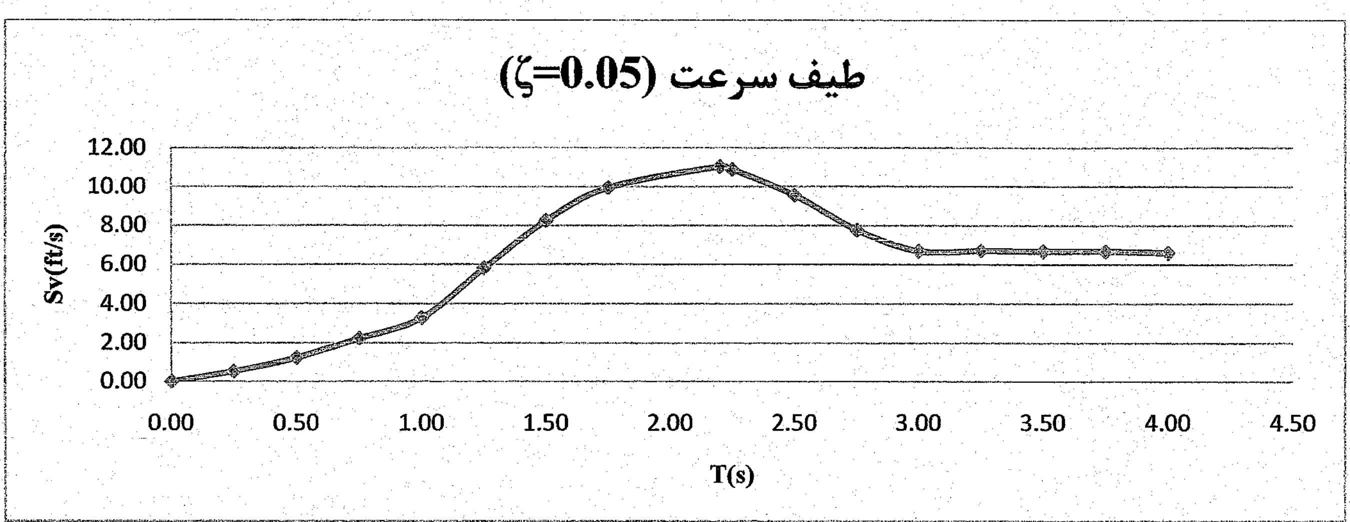
طيف تغيير مكان (ζ=0)

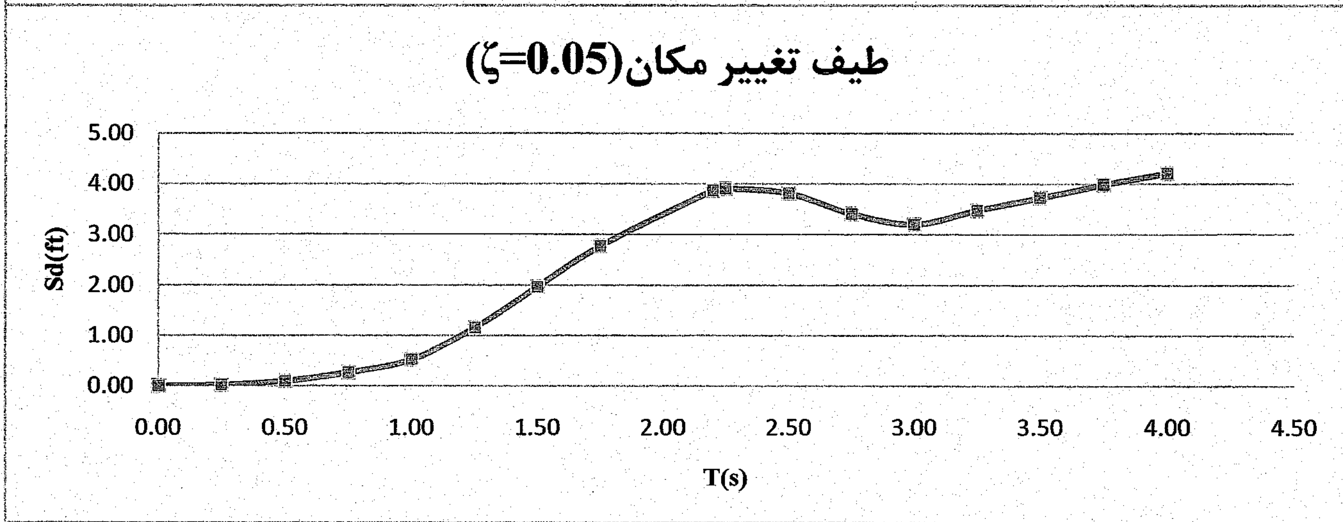


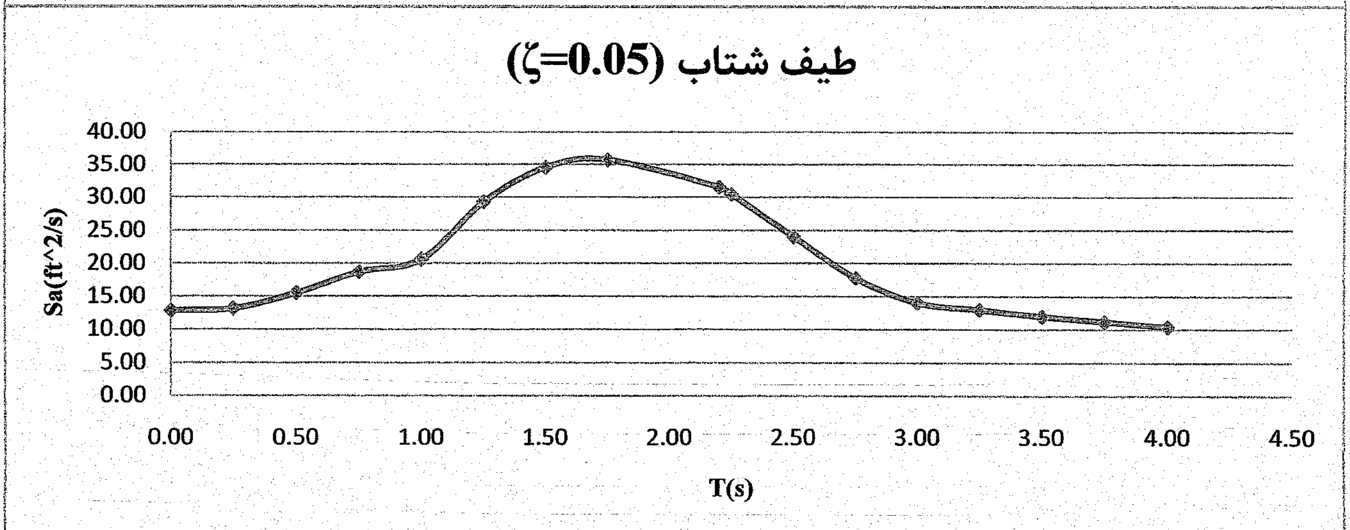
طيف شتاب (ζ=0)



$\zeta=0.05$																	
T	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.20	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00
S_v	0.00	0.52	1.24	2.23	3.29	5.83	8.26	9.96	11.05	10.90	9.58	7.78	6.70	6.72	6.68	6.68	6.62
S_d	0.00	0.02	0.10	0.27	0.52	1.16	1.97	2.78	3.87	3.90	3.81	3.41	3.20	3.48	3.72	3.99	4.21
S_a	12.85	13.16	15.53	18.69	20.65	29.31	34.59	35.78	31.57	30.44	24.07	17.78	14.03	12.99	12.00	11.19	10.39

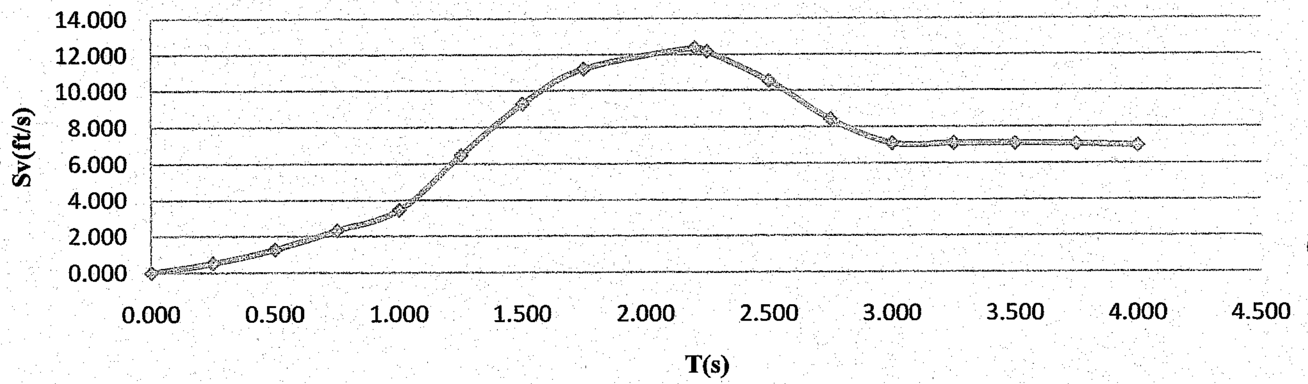




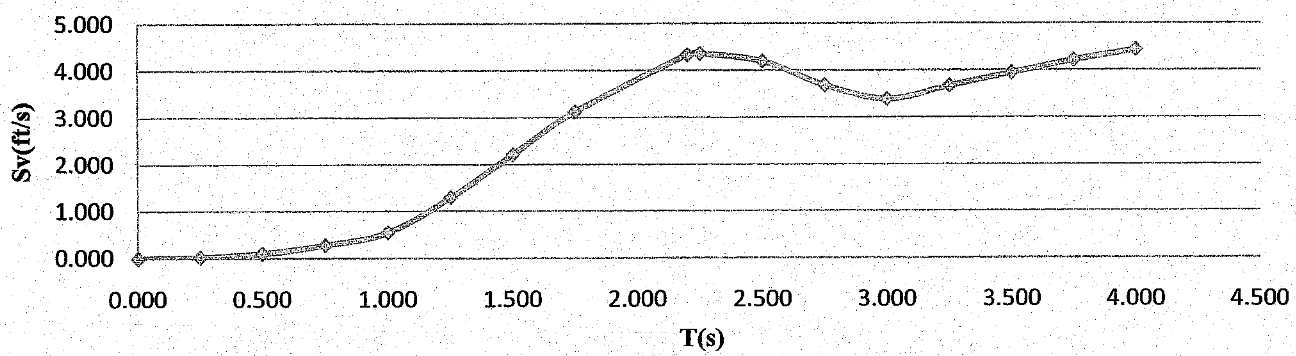


ζ=0.10																	
T	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.20	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00
S_v	0.00	0.53	1.29	2.34	3.46	6.49	9.30	11.23	12.39	12.19	10.56	8.44	7.11	7.11	7.10	7.07	6.98
S_d	0.00	0.02	0.10	0.28	0.55	1.29	2.22	3.13	4.34	4.37	4.20	3.69	3.40	3.68	3.95	4.22	4.44
S_a	12.87	13.27	16.15	19.57	21.75	32.61	38.97	40.33	35.40	34.05	26.54	19.28	14.90	13.75	12.75	11.85	10.97

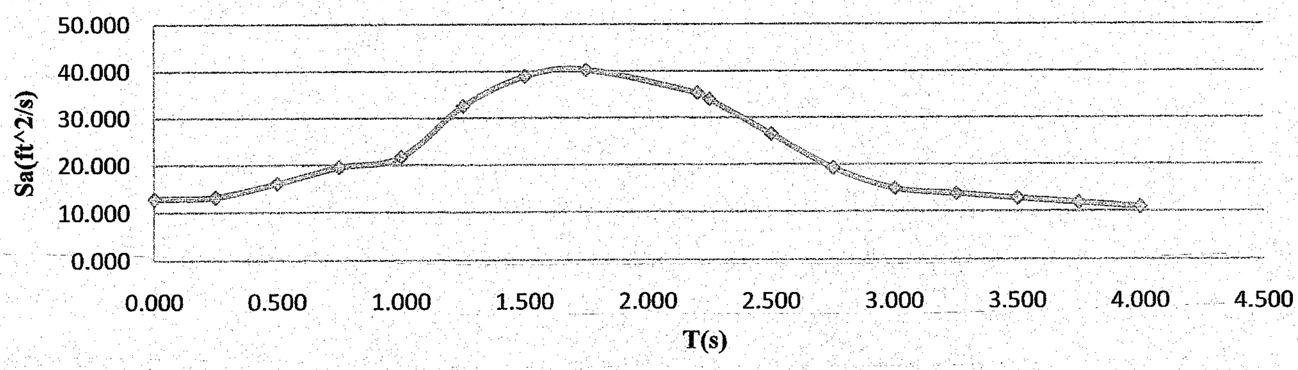
طيف سرعت (ζ=0.10)

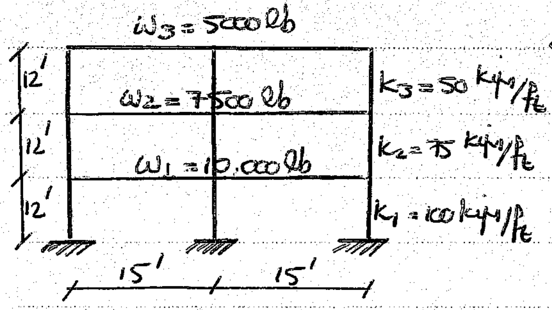


طيف تغيير مكان (ζ=0.10)



طيف شتاب (ζ=0.10)





تمرین ۱۸) قاب ۳ طبقه شکل مفروض است. مطلوبست تعیین:

۱) جرم معادل ۲) سختی معادل ۳) فرکانس پایه قاب

درصورتیکه قاب دارای نسبت استهلاک بحرانی $\xi = 2\%$ باشد و در منطقه تهران که شتاب Max زمین $0.35g$ می باشد قرار داشته باشد و برای طراحی آن در مقابل زلزله بتوان از نمودارهای شکل "A" استفاده کرد. هم چنین مطلوبست تعیین: ۴) تغییرمکان Max ۵) برش پایه Max

$M_1 = \frac{10000}{386.06} = 25.9\ lb$ جرم

$M_2 = \frac{7500}{386.06} = 19.43\ lb$

$M_3 = \frac{5000}{386.06} = 12.95\ lb$

$K_1 = 100\ \frac{kips}{ft} \times \frac{10^3\ lb}{kips} \times \frac{1\ ft}{12\ in} = 8333.3\ \frac{lb}{in}$ وزنی

$K_2 = 75 \times \frac{10^3}{12} = 6250\ lb/in$

$K_3 = 50 \times \frac{10^3}{12} = 4166.7\ lb/in$

$12\ ft = 144\ in \qquad 15\ ft = 180\ in$

$\frac{H}{D} = \frac{3 \times 144}{2 \times 180} = 1.2 < 1.5 \Rightarrow \psi(x) = \sin\frac{\pi x}{2H} = \sin\frac{\pi x}{864}$

تراز	$K\ (\frac{lb}{in})$	جرم M (lb جرم)	ψ_i	$\Delta\psi_i$	$M\psi_i^2$	$K\Delta\psi_i^2$
3		12.56	1		12.56	
2	4166.7	19.43	0.866	0.134	14.57	74.817
1	6250	25.9	0.5	0.366	6.475	837.225
0	8333.3			0.5		2083.333
Σ					$M^* = 33.605$	$K^* = 2995.375$

$\omega = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}} = \sqrt{\frac{2995.375}{33.605}} = 9.44 \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.666\ s$

$S_d = \frac{0.35}{0.2} \times 1.4 = 2.45\ in$

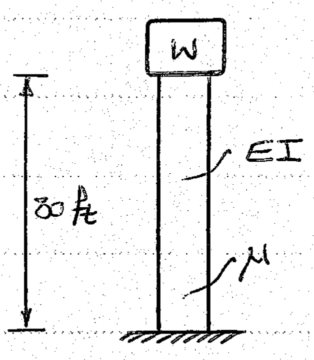
$\bar{K} = \Sigma m_i \psi_i = 42.73\ lb$ جرم

$Q_{Max} = \frac{\bar{K}^2}{M^*} S_a$

$S_a = 0.3 \times \frac{0.35}{0.2} g = 0.525g$

$Q_{Max} = \frac{42.73^2}{33.605} \times 0.525g = 11012.2\ lb$ وزنی

حمید کاظم ۸۴۲۴۰۴۱



تمرین ۱۹) برج مخابرات شهری بصورت شکل مقابل مدل شده است. درصورتیکه $W = 100$ kips وزن پایه برابر 150kips و صلبیت خمشی $EI = 9.1\times10^{8}\ lb.in^2$ باشد، مطلوبست تعیین جرم معادل، سختی معادل و فرکانس پایه برج.
هم چنین تعیین کنید مقدار Max تغییرمکان، شدت نیروی برشی و برش پایه Max درصورتیکه این برج در منطقه ای قرار دارد که شتاب Max آن $0.35g$ باشد و بتوان از طیف طرح های شکل A برای طراحی آن استفاده کرد.

$\xi = 7\%$ $\quad$ $MLg = 150kips$

$$M = \frac{100\times10^3}{32.17} = 3108.5\ lb$$ $$\mu = \frac{150\times10^3}{80\times32.17} = 58.28\ \frac{lb}{ft}$$

$$\psi(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{160}$$

$$M^* = \int_0^{80} 58.28\left(1-\cos\frac{\pi x}{160}\right)^2 + 3108.5 = 4165.7\ lb$$

$$K^* = \int_0^{80} 9.1\times10^{8}\left(\frac{1}{12}\right)^2\left(\left(\frac{\pi}{160}\right)^2\cos\frac{\pi x}{160}\right)^2 dx = 37.57\ \frac{lb}{ft}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}} = \sqrt{\frac{37.57}{4165.7}} = 0.095 \longrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 66$$

تمرین ۱۷ :
قسمت ب)

$$\ddot{x}_g(\tau) = \begin{cases} g/2 & 0 < \tau \leq 0.5 \\ -g\tau + g & 0.5 < \tau \leq 1 \\ 0 & \tau > 1 \end{cases}$$

$0 < t \leq 0.5$:

$$V(t) = \int_0^t 16.085\, e^{-\xi(\frac{2\pi}{T})(t-\tau)} \sin\left(\frac{2\pi}{T}\sqrt{1-\xi^2}(t-\tau)\right) d\tau$$

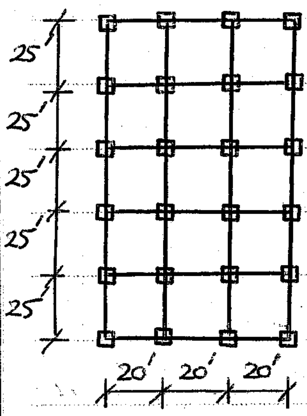
$0.5 < t \leq 1$:

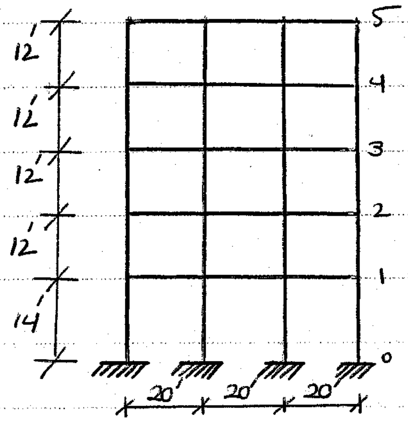
$$V(t) = \int_0^{0.5} 16.085\, e^{-\xi(\frac{2\pi}{T})(t-\tau)} \sin\left(\frac{2\pi}{T}\sqrt{1-\xi^2}(t-\tau)\right) d\tau + \int_{0.5}^t (-32.17\tau + 32.17) \times$$

$$e^{-\xi(\frac{2\pi}{T})(t-\tau)} \sin\left(\frac{2\pi}{T}\sqrt{1-\xi^2}(t-\tau)\right) d\tau$$

تمرین ۲۰) ساختمان ۵ طبقه شکل زیر مفروض است. درصورتیکه ابعاد مقاطع کلیه ستون ها یکسان و برابر $16\times16\ in^2$ باشد، مدول الاستیسیته بتن به صورت $E=3.6\times10^6\,psi$ ، شدت بار مرده در طبقات $90\ lb/ft^2$ و در بام $60\ lb/ft^2$ و هم چنین شدت بار زنده در طبقات $70\ lb/ft^2$ و در بام $30\ lb/ft^2$ در نظر گرفته شود، مطلوبست تعیین جرم معادل، سختی معادل برای سه حالت.

الف) $\psi_a(x)=\sin\frac{\pi x}{2L}$ ب) $\psi_b(x)=\frac{x}{L}$ ج) $\psi_c(x)=1-\cos\frac{\pi x}{2L}$





* مشارکت بار زنده در طبقات 35% و در بام 65% می باشد.

$E=3.6\times10^6\ \frac{lb}{in^2}$ وزنی

هر ستون $k_a=\frac{12EI}{L^3}$ $\qquad I=\frac{16^4}{12}=5461.33\ in^4$

طبقه $k_{story}=\sum_1^4 k_i=4k_a$

$k_{1-2}=k_{2-3}=k_{3-4}=k_{4-5}=4\times\frac{12\times3.6\times10^6\times5461.33}{(12\times12)^3}=316049.2\ \frac{lb}{in}$ وزنی

$k_{0-1}=4\times\frac{12\times3.6\times10^6\times5461.33}{(14\times12)^3}=199028.1\ lb/in$

جرم هر قاب در طبقه $M=\frac{A}{g}(DL+0.35LL)=\frac{25\times60}{386.06}(90+0.35(70))=444.88\ lb$ جرمی

جرم هر قاب در بام $M=\frac{A}{g}(DL+0.65LL)=\frac{25\times60}{386.06}(60+0.65(30))=308.89\ lb$ جرمی

$A \longrightarrow$ سطح بارگیر قاب میانی

الف) $\psi_a(x)=\sin\frac{\pi x}{2L}$

$\Rightarrow \psi_a(x)=\sin\frac{\pi}{2\times62}x=\sin\frac{\pi}{124}x$

تراز	$K(lb/in)$	$M(lb)$	ψ_i	$\Delta\psi_i$	$M\psi_i^2$	$K\Delta\psi_i^2$
5		308.89	1		308.89	
4	316049.2	444.88	0.954	0.046	404.89	668.76
3	316049.2	444.88	0.821	0.133	299.88	5590.59
2	316049.2	444.88	0.612	0.209	166.63	13805.35
1	316049.2	444.88	0.347	0.265	53.57	22194.56
0	199028.1		0	0.347		23964.77
Σ					$M^*=1233.86$	$K^*=66224.03$

$$\Rightarrow \omega_a=\sqrt{\frac{K^*}{M^*}}=\sqrt{\frac{66224.03}{1233.86}}=7.326\ \frac{rad}{s} \rightarrow T_a=0.858\ s$$

ب) $\psi_b(x)=\frac{x}{L}$

تراز	$K(lb/in)$	$M(lb)$	ψ_i	$\Delta\psi_i$	$M\psi_i^2$	$K\Delta\psi_i^2$
5		308.89	1		308.89	
4	316049.2	444.88	0.806	0.194	289.01	11894.83
3	316049.2	444.88	0.613	0.193	167.17	11772.52
2	316049.2	444.88	0.419	0.194	78.1	11894.83
1	316049.2	444.88	0.226	0.193	22.72	11772.52
0	199028.1		0	0.226		10165.56
Σ					$M^*=865.89$	$K^*=57500.26$

$$\Rightarrow \omega_b=\sqrt{\frac{K^*}{M^*}}=\sqrt{\frac{57500.26}{865.89}}=8.149\ \frac{rad}{s} \rightarrow T_b=0.771\ s$$

ج) $\psi_c(x)=1-\cos\frac{\pi x}{2L}$

$$\Rightarrow \psi_c(x)=1-\cos\frac{\pi}{2\times 62}x=1-\cos\frac{\pi}{124}x$$

تراز	$K(lb/in)$	$M(lb)$	ψ_i	$\Delta\psi_i$	$M\psi_i^2$	$K\Delta\psi_i^2$
5		308.89	1		308.89	
4	316049.2	444.88	0.701	0.299	218.61	28255.11
3	316049.2	444.88	0.429	0.272	81.88	23382.58
2	316049.2	444.88	0.209	0.22	19.43	15296.78
1	316049.2	444.88	0.062	0.147	1.71	6829.51
0	199028.1		0	0.062		765.06
Σ					$M^*=630.52$	$K^*=74529.04$

$$\Rightarrow W_c=\sqrt{\frac{K^*}{M^*}}=\sqrt{\frac{74529.04}{630.52}}=10.87 \rightarrow T=0.578$$

بنابراین تابع شکلی $\sin\frac{\pi x}{2L}$ به این علت که فرکانس طبیعی کمتری می‌دهد مناسب‌تر است.

تمرین ۲۱) درصورتیکه در تمرین 20 بتوان فرض نمود که برای طراحی سازه می‌توان از دیاگرام طیف شکل A با شتاب Max 0.35g استفاده کرد، مطلوبست تعیین Max تغییرمکان، Max برش پایه و Max نیروهای جانبی تراز طبقات ازسوی نیروی زلزله.
(فرض $\xi=10\%$)

الف) $\psi_a(x)=\sin\frac{\pi x}{2L}$

$M^*=1233.86\ lb$

$\bar{K}=\sum M_i\psi_i=308.89+444.88(0.954+0.821+0.612+0.347)=1525.2\ lb$

$T=0.858\ ,\ \xi=10\% \rightarrow S_d=1.7\ in \quad S_v=7.6\ \frac{in}{sec} \quad S_a=0.14g\ \frac{in}{sec^2}$

۱) تغییرمکان Max :

$$V(x,t)=\psi(x)\ \frac{\bar{K}}{M^*}\ S_d=\frac{1525.2}{1233.86}\times 1.7\ \psi_i=2.1\psi_i$$

$V_{Max}(x,t)=2.1\ in$

۲) برش پایه Max :

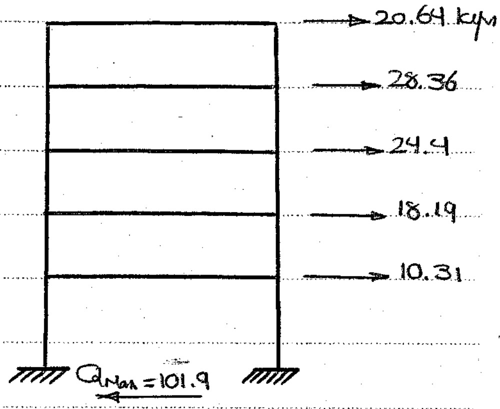
$$Q_{Max}=\frac{\bar{K}^2}{M^*}S_a=\frac{1525.2^2}{1233.86}(0.14g)=263.95g=101900.54\ \frac{lb.in}{sec^2}$$

$=101900.54\ lb_{وزنی}=101.9\ kip$

۳) نیروهای جانبی Max در تراز طبقات :

$$\underset{\text{تراز بام}}{q_{Max}} = \frac{\bar{K}}{M^*} S_a \, \mu(x) \, \psi(x) \longrightarrow \underset{\text{تراز طبقه}}{q_{i}(x)} = \frac{\bar{K}}{M^*} S_a \, M_i \, \psi(x) = \frac{Q_{Max}}{\bar{K}} M_i \psi_i$$

$$\longrightarrow q_{i\,Max} = \frac{101900.54}{1525.2} M_i \psi_i = 66.81 \, M_i \psi_i$$



ب) $\psi_b(x) = \frac{x}{L}$

$M^* = 865.89 \; lb$

$\bar{K} = \sum M_i \psi_i = 308.89 + 444.88(0.806 + 0.613 + 0.419 + 0.226) = 1227.12 \; lb$

$T = 0.771 s$, $\xi = 10\%$ $\longrightarrow$ $S_d = 0.9 \; in$ $\quad S_v = 7.3 \; in/sec$ $\quad S_a = 0.15g \; \frac{in}{sec^2}$

۱) تغییرمکان Max :

$$V(x,t) = \psi(x) \frac{\bar{K}}{M^*} S_d = \frac{1227.12}{865.89} \times 0.9 \times \psi_i = 1.275 \, \psi_i$$

$$V_{Max}(x,t) = 1.275 \; in$$

۲) برش پایه Max :

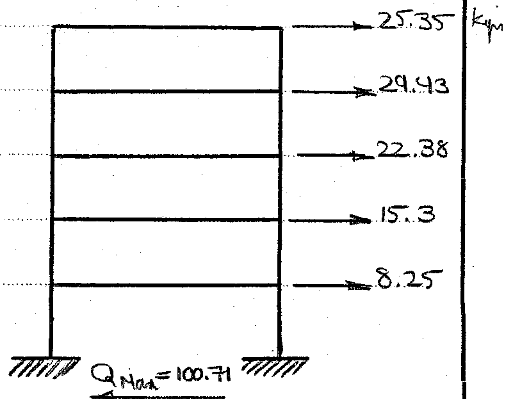
$$Q_{Max} = \frac{\bar{K}^2}{M^*} S_a = \frac{1227.12^2}{865.89} (0.15g) = 260.86 \, g = 100706.5 \; \frac{lb \; in}{sec^2}$$

$$= 100706.5 \; \underset{\text{نیرو}}{lb} = 100.71 \; kips$$

۳) نیروهای جانبی Max در تراز طبقات :

$$q_{i\,Max} = \frac{Q_{Max}}{\bar{K}} M_i \psi_i = \frac{100706.5}{1227.12} M_i \psi_i$$

$$= 82.07 \, M_i \, \psi_i$$



$M^* = 630.52\ lb$ $\qquad$ ج) $\psi_c(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2L}$

$\bar{K} = \sum M_i \psi_i = 308.89 + 444.88(0.701 + 0.429 + 0.209 + 0.062) = 932.17\ lb$

$T = 0.578 \quad \xi = 10\% \rightarrow S_d = 0.62\ in \qquad S_v = 6.7\ \frac{in}{sec} \qquad S_a = 0.185g\ \frac{in}{sec^2}$

۱) تغییر مکان Max :

$V(x,t) = \psi(x) \cdot \frac{\bar{K}}{M^*} S_d = \frac{932.17}{630.52} \cdot 0.62\ \psi_i = 0.917\ \psi_i$

$V_{Max}(x,t) = 0.917\ in$

۲) برش پایه Max :

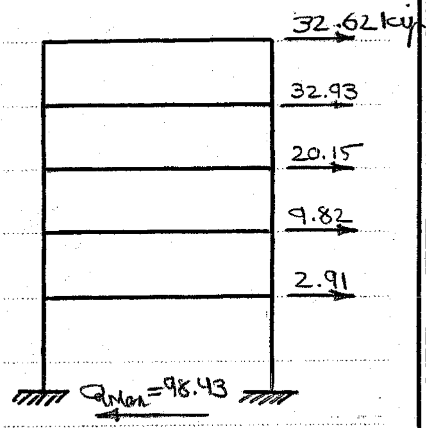
$Q_{Max} = \frac{\bar{K}^2}{M^*} S_a = \frac{932.17^2}{630.52}(0.185g) = 254.95g = 98427.8\ \frac{lb.in}{sec^2}$

$= 98427.8\ lb = 98.43\ kip$

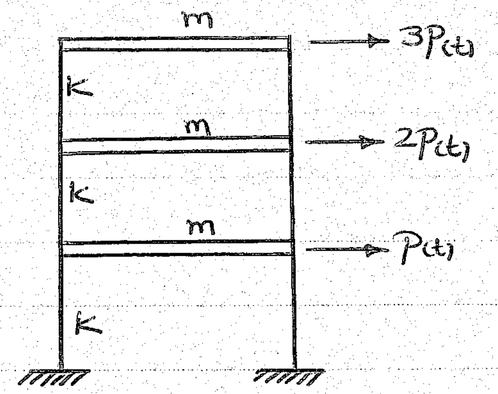
۳) نیروهای جانبی Max در تراز طبقات :

$q_i\ Max = \frac{Q_{Max}}{\bar{K}} M_i \psi_i = \frac{98427.8}{932.17} M_i \psi_i$

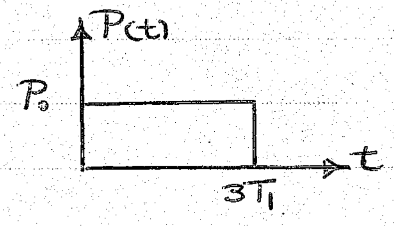
$= 105.59\ M_i \psi_i$



* در روابط ضریب $\frac{0.35}{0.2}$ فراموش شده است. تمام نیروها و تغییر مکان باید در این ضریب ضرب گردند

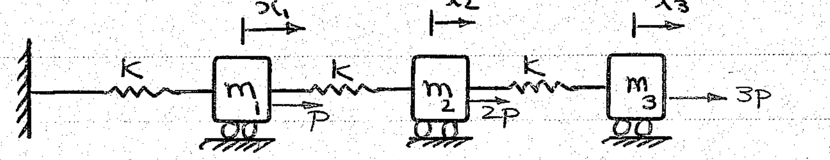


تمرین ۲۲ : ساختمان سه طبقه شکل تحت اثر نیروهای نشان داده شده در شکل قرار گرفته است. اولاً سیستم معادلات حرکت را بدست آورید، ثانیاً فرکانس‌ها و بردارهای مُدی متعلق به آن‌ها را محاسبه کنید.
توابع تغییرمکان را در هر یک از طبقات بدست آورید.
(T_1 پریود مد اول ساختمان می‌باشد).

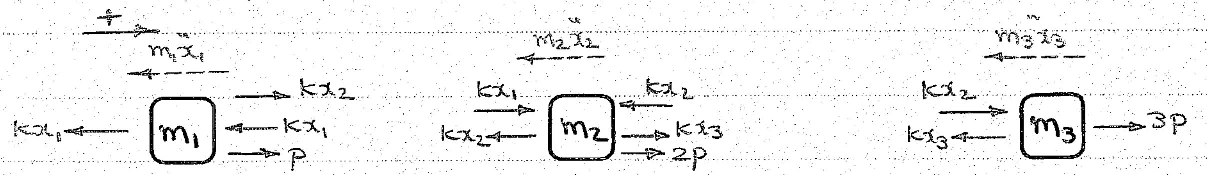


$f(\tau) = P_{(t)}$

تعیین مدل دینامیکی :



$m_1 = m_2 = m_3 = m$



$m_1 : \sum F_x = 0 \Rightarrow -m\ddot{x}_1 - 2kx_1 + kx_2 + P = 0$

$m_2 : \sum F_x = 0 \Rightarrow -m\ddot{x}_2 + kx_1 - 2kx_2 + kx_3 + 2P = 0$

$m_3 : \sum F_x = 0 \Rightarrow -m\ddot{x}_3 + kx_2 - kx_3 + 3P = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = P \\ m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 - kx_3 = 2P \\ m\ddot{x}_3 - kx_2 + kx_3 = 3P \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 2P \\ 3P \end{bmatrix}$$

$[M][\ddot{x}] + [K][x] = [F]$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 - kx_3 = 0 \\ m\ddot{x}_3 - kx_2 + kx_3 = 0 \end{cases}$$

فرض : $\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \sin\omega t$

$$\begin{cases} (-m\omega^2 X_1 + 2kX_1 - kX_2)\sin\omega t = 0 \\ (-m\omega^2 X_2 - kX_1 + 2kX_2 - kX_3)\sin\omega t = 0 \\ (-m\omega^2 X_3 - kX_2 + kX_3)\sin\omega t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -m\omega^2+2k & -k & 0 \\ -k & -m\omega^2+2k & -k \\ 0 & -k & -m\omega^2+k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = 0 \longrightarrow \begin{vmatrix} -m\omega^2+2k & -k & 0 \\ -k & -m\omega^2+2k & -k \\ 0 & -k & -m\omega^2+k \end{vmatrix} = 0$$

$$(-m\omega^2+2k)\left((-m\omega^2+2k)(-m\omega^2+k) - k^2\right) + (-1)(-k)\left(-k(-m\omega^2+k)\right) = 0$$

$$\Rightarrow (-m\omega^2+2k)^2(-m\omega^2+k) - k^2(-m\omega^2+2k) - k^2(-m\omega^2+k) = 0$$

$$\Rightarrow m^3\omega^6 - 5km^2\omega^4 + 6k^2m\omega^2 - k^3 = 0$$

$$\begin{cases} m\omega_1^2 = 3.25k \\ m\omega_2^2 = 1.55k \\ m\omega_3^2 = 0.198k \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \omega_1 &= 1.8\sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_2 &= 1.24\sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_3 &= 0.445\sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

$$\omega = \omega_1 \rightarrow \begin{bmatrix} -1.25 & -1 & 0 \\ -1 & -1.25 & -1 \\ 0 & -1 & -2.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow X^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.25 \\ 0.56 \end{bmatrix}$$

$$\omega = \omega_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 0.45 & -1 & 0 \\ -1 & 0.45 & -1 \\ 0 & -1 & -0.55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow X^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.45 \\ -0.82 \end{bmatrix}$$

$$\omega = \omega_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 1.802 & -1 & 0 \\ -1 & 1.802 & -1 \\ 0 & -1 & 0.802 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow X^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.802 \\ 2.247 \end{bmatrix}$$

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\} \rightarrow [A]^T[M][A]\{\ddot{Y}(t)\} + [A]^T[K][A]\{Y(t)\} = [A]^T\{F(t)\}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1.25 & 0.45 & 1.802 \\ 0.56 & -0.82 & 2.247 \end{bmatrix} \quad [M] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} = m\,[I]_{3\times3}$$

$$[K] = K\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad [F(t)] = P\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$[A]^T[M][A] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \qquad [A]^T[K][A] = \begin{bmatrix} 3.25k & 0 & 0 \\ 0 & 1.55k & 0 \\ 0 & 0 & 0.198k \end{bmatrix}$$

$$[A]^T\{F(t)\} = \begin{bmatrix} 0.058p \\ -0.277p \\ 1.219p \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{Y}_1 \\ \ddot{Y}_2 \\ \ddot{Y}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3.25k & 0 & 0 \\ 0 & 1.55k & 0 \\ 0 & 0 & 0.198k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.058p \\ -0.277p \\ 1.219p \end{bmatrix}$$

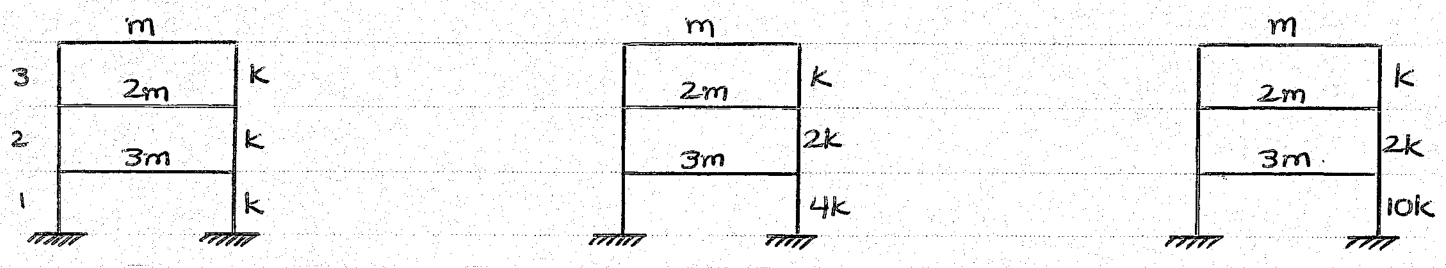
تابع تغییر مکان هر طبقه :

$$Y_1(t) = \frac{1}{1.8\sqrt{km}} \int_0^t P_0 \sin\left(1.8\sqrt{\frac{k}{m}}(t-\tau)\right) d\tau$$

$$Y_2(t) = \frac{1}{1.24\sqrt{km}} \int_0^t 2P_0 \sin\left(1.24\sqrt{\frac{k}{m}}(t-\tau)\right) d\tau$$

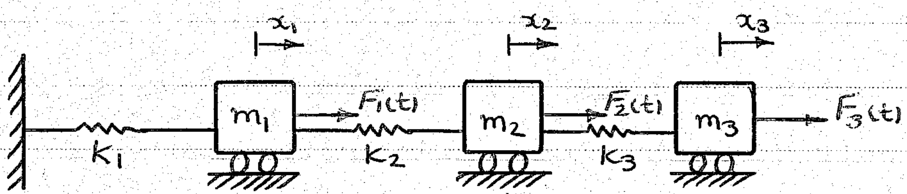
$$Y_3(t) = \frac{1}{0.445\sqrt{km}} \int_0^t 3P_0 \sin\left(0.445\sqrt{\frac{k}{m}}(t-\tau)\right) d\tau$$

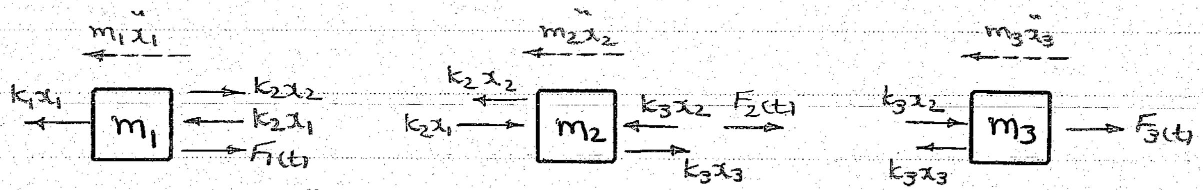
تمرین ۲۳: در حرکت ارتعاش های سه طبقه سیستم معادلات حرکت را نوشته و فرکانس های طبیعی و بردارهای مودی را بدست آورده با هم مقایسه کنید.



(الف) (ب) (ج)

تعیین مدل دینامیکی (حالت کلی):





m_1 : $\sum F_x=0 \rightarrow +m_1\ddot{x}_1 + x_1(k_1+k_2) - x_2(k_2) - F_1(t)=0$

m_2 : $\sum F_x=0 \rightarrow +m_2\ddot{x}_2 + x_1(-k_2) + x_2(k_2+k_3) + x_3(-k_3) - F_2(t)=0$

m_3 : $\sum F_x=0 \rightarrow +m_3\ddot{x}_3 + x_2(-k_3) + x_3(k_3) - F_3(t)=0$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{bmatrix}$$

فرض : $\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \sin\omega t$

$$\begin{cases} 3m\ddot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0 \\ 2m\ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2+k_3)x_2 - k_3 x_3 = 0 \\ m\ddot{x}_3 - k_3 x_2 + k_3 x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-3m\omega^2 X_1 + (k_1+k_2) X_1 - k_2 X_2)\ \sin\omega t = 0 \\ (-2m\omega^2 X_2 - k_2 X_1 + (k_2+k_3) X_2 - k_3 X_3)\ \sin\omega t = 0 \\ (-m\omega^2 X_3 - k_3 X_2 + k_3 X_3)\ \sin\omega t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -3m\omega^2+k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & -2m\omega^2+k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & -m\omega^2+k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = 0$$

دترمینان ماتریس چپ باید صفر باشد:

$$(-3m\omega^2+k_1+k_2)\left[(-2m\omega^2+k_2+k_3)(-m\omega^2+k_3)-k_3^2\right] + k_2\,(k_2(m\omega^2-k_3)) = 0$$

الف)

$$k_1 = k_2 = k_3 = k$$

$$\rightarrow (-3m\omega^2+2k)\left[(-2m\omega^2+2k)(-m\omega^2+k)-k^2\right] + k^2(m\omega^2-k) = 0$$

$$+6m^3\omega^6 - 16\,k m^2\omega^4 + 10\,k^2 m\omega^2 - k^3 = 0$$

$$\begin{cases} m\omega_1^2 = 0.123\,k \\ m\omega_2^2 = 0.758\,k \\ m\omega_3^2 = 1.786\,k \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} \omega_1 &= 0.351\sqrt{\tfrac{k}{m}} \\ \omega_2 &= 0.871\sqrt{\tfrac{k}{m}} \\ \omega_3 &= 1.336\sqrt{\tfrac{k}{m}} \end{aligned}$$

$$\omega = \omega_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1.631 & -1 & 0 \\ -1 & 1.754 & -1 \\ 0 & -1 & 0.877 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \overset{(1)}{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.631 \\ 1.86 \end{bmatrix}$$

$$\omega = \omega_2 \rightarrow \begin{bmatrix} -0.274 & -1 & 0 \\ -1 & 0.484 & -1 \\ 0 & -1 & 0.242 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \overset{(2)}{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.274 \\ -1.132 \end{bmatrix}$$

$$\omega = \omega_3 \rightarrow \begin{bmatrix} -3.358 & -1 & 0 \\ -1 & -1.572 & -1 \\ 0 & -1 & -0.786 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \overset{(3)}{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3.358 \\ 4.272 \end{bmatrix}$$

ب)

$k_1 = 4k \qquad k_2 = 2k \qquad k_3 = k$

$$(-3m\omega^2 + 6k)\left[(-2m\omega^2 + 3k)(-m\omega^2 + k) - k^2\right] + 4k^2(m\omega^2 - k) = 0$$

$$6m^3\omega^6 - 27km^2\omega^4 + 32k^2m\omega^2 - 8k^3 = 0$$

$$\begin{cases} m\omega_1^2 = 0.34k \\ m\omega_2^2 = 1.441k \\ m\omega_3^2 = 2.719k \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \omega_1 = 0.583\sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_2 = 1.2\sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_3 = 1.649\sqrt{\frac{k}{m}} \end{array}$$

$$\omega = \omega_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 4.98 & -2 & 0 \\ -2 & 2.32 & -1 \\ 0 & -1 & 0.66 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \overset{(1)}{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.49 \\ 3.773 \end{bmatrix}$$

$$\omega = \omega_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1.677 & -2 & 0 \\ -2 & 0.118 & -1 \\ 0 & -1 & -0.441 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \overset{(2)}{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.839 \\ -1.901 \end{bmatrix}$$

$$\omega = \omega_3 \rightarrow \begin{bmatrix} -2.157 & -2 & 0 \\ -2 & -2.438 & -1 \\ 0 & -1 & -1.719 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \overset{(3)}{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.079 \\ 0.627 \end{bmatrix}$$

ج)

$k_1 = 10k \qquad k_2 = 2k \qquad k_3 = k$

$$(-3m\omega^2 + 12k)\left[(-2m\omega^2 + 3k)(-m\omega^2 + k) - k^2\right] + 4k^2(m\omega^2 - k) = 0$$

$$6m^3\omega^6 - 39km^2\omega^4 + 62k^2m\omega^2 - 20k^3 = 0$$

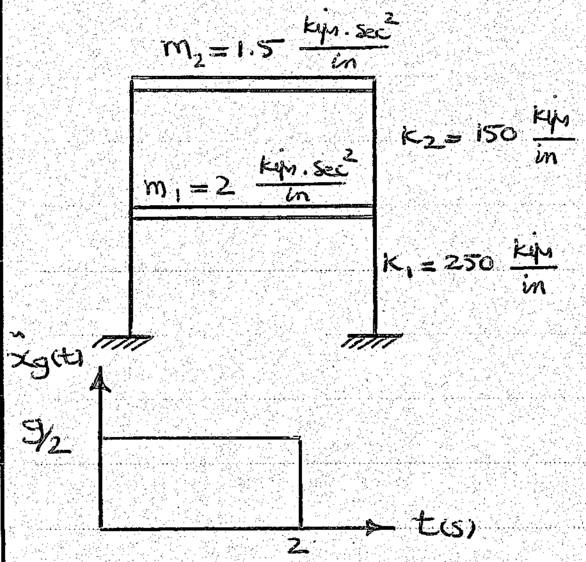
$$\begin{cases} m\omega_1^2 = 0.432k \\ m\omega_2^2 = 1.812k \\ m\omega_3^2 = 4.256k \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \omega_1 = 0.657\sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_2 = 1.346\sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_3 = 2.063\sqrt{\frac{k}{m}} \end{array}$$

$$\omega = \omega_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 10.704 & -2 & 0 \\ -2 & 2.136 & -1 \\ 0 & -1 & 0.568 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = 0 \Rightarrow \overset{(1)}{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5.352 \\ 9.422 \end{bmatrix}$$

$$\omega = \omega_2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 6.564 & -2 & 0 \\ -2 & -0.624 & -1 \\ 0 & -1 & -0.812 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = 0 \Rightarrow \overset{(2)}{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3.282 \\ -4.042 \end{bmatrix}$$

$$\omega = \omega_3 \longrightarrow \begin{bmatrix} -0.765 & -2 & 0 \\ -2 & -5.512 & -1 \\ 0 & -1 & -3.256 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = 0 \Rightarrow \overset{(3)}{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.38 \\ 0.117 \end{bmatrix}$$

تمرین ۲۴ : قاب دو طبقه شکل تحت اثر شتاب زمین بصورت دیاگرام نشان داده شده می باشد.
مطلوبست تعیین :



۱) فرکانس ها ۲) مودها
۳) جرم های مودی ۴) بردار تغییرمکان در هر مود
۵) بردار تغییرمکان کل ۶) بردار نیروی الاستیک در هر مود
۷) بردار نیروی الاستیک کل ۸) برش پایه
۹) ممان واژگونی ۱۰) رسم تغییرمکان طبقات

حل :

۱) فرکانس ها :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

با فرض $\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \sin \omega t$

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 m_1 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -\omega^2 m_2 + k_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow (-\omega^2 m_1 + k_1 + k_2)(-\omega^2 m_2 + k_2) - k_2^2 = 0$$

$$\Rightarrow (-2\omega^2 + 400)(-1.5\omega^2 + 150) - 150^2 = 0 \rightarrow 3(\omega^2)^2 - 900\,\omega^2 + 37500 = 0$$

$$\begin{cases} \omega_1^2 = 50 \rightarrow \omega_1 = 7.071 \ rad/s \rightarrow T_1 = 0.89\,s \\ \omega_2^2 = 250 \rightarrow \omega_2 = 15.811 \ rad/s \rightarrow T_2 = 0.4\,s \end{cases}$$

۲) مودها :

$$\omega = \omega_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 300 & -150 \\ -150 & 75 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = 0 \longrightarrow \overset{(1)}{X} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$\omega = \omega_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -100 & -150 \\ -150 & -225 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = 0 \longrightarrow \overset{(2)}{X} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2/3 \end{Bmatrix}$$

۳) جرم های موری :

$$M_k = X_k^T [m] X_k$$

$$M_1 = X_1^T [m] X_1 = [1 \quad 2]\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = [1 \quad 2]\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 8 \ \frac{kip.sec^2}{in}$$

$$M_2 = X_2^T [m] X_2 = [1 \quad -2/3]\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2/3 \end{bmatrix} = [1 \quad -2/3]\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 2.67 \ \frac{kip.sec^2}{in}$$

٤) بردار تغییر مکان هر مود :

$$\{x_k(t)\} = X_k \cdot \frac{\bar{k}_k}{M_k \ \omega_k} \ V_k(t)$$

الف) بردار تغییر مکان مود اول : $(k=1)$

$$V_1(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \sin\omega_1(t-\tau)d\tau = \int_0^t \frac{g}{2} \sin(7.071(t-\tau))d\tau$$
$$= -27.3\ C_1(7.071t) + 27.3$$

$$\bar{k}_1 = X_1^T [m][I] = [1 \quad 2]\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 2]\begin{bmatrix} 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} = 5$$

$$\{x_1(t)\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} 5 \times \frac{1}{8 \times 7.071} (-27.3\ C_1(7.071t) + 27.3)$$

$$\{x_1(t)\} = \begin{bmatrix} -2.41\ C_1(7.071t) + 2.41 \\ -4.825\ C_1(7.071t) + 4.825 \end{bmatrix}$$

ب) بردار تغییر مکان مود دوم : $(k=2)$

$$V_2(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \sin\omega_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t \frac{g}{2} \sin(15.811(t-\tau))d\tau$$
$$= -12.21\ C_1(15.811t) + 12.21$$

$$\bar{k}_2 = X_2^T [m][I] = [1 \quad -\tfrac{2}{3}]\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [1 \quad -2/3]\begin{bmatrix} 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} = 1$$

$$\{x_2(t)\} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2/3 \end{bmatrix} 1 \times \frac{1}{2.66 \times 15.811} (-12.21\ C_1(15.811t) + 12.21)$$

$$\{x_2(t)\} = \begin{bmatrix} -0.29\ C_1(15.811t) + 0.29 \\ +0.194\ C_1(15.811t) - 0.194 \end{bmatrix}$$

۵) بردار تغییر مکان کل :

$$\{x(t)\} = X_1 Y_1(t) + X_2 Y_2(t) = \{x_1(t)\} + \{x_2(t)\}$$

$$\Rightarrow \{x(t)\} = \begin{bmatrix} -2.41\, C_1(7.071t) - 0.29\, C_1(15.811t) + 2.7 \\ -4.825\, C_1(7.071t) + 0.194\, C_1(15.811t) + 4.631 \end{bmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \text{تغییر مکان طبقه اول} \\ \longrightarrow \text{تغییر مکان طبقه دوم} \end{matrix}$$

۶) بردار نیروهای الاستیک در هر مود :

$$\{f_{s_k}\} = [m]\, X_k \cdot \frac{\bar{K}_k}{M_k}\, \omega_k \cdot V_k(t)$$

الف) بردار نیروی الاستیک مود اول :

$$\{f_{s_1}\} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{5}{8}\; 7.071\; (-27.3\, C_1(7.071t) + 27.3)$$

$$= \begin{bmatrix} -241.3\; C_1(7.071t) + 241.3 \\ -361.95\; C_1(7.071t) + 361.95 \end{bmatrix}$$

ب) بردار نیروی الاستیک مود دوم :

$$\{f_{s_2}\} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2/3 \end{bmatrix} \frac{1}{2.67}\; 15.811\; (-12.21\, C_1(15.811t) + 12.21)$$

$$= \begin{bmatrix} -144.61\; C_1(15.811t) + 144.61 \\ 72.304\; C_1(15.811t) - 72.304 \end{bmatrix}$$

۷) بردار نیروی الاستیک کل :

$$\{f_s\} = \{f_{s_1}\} + \{f_{s_2}\} = \begin{bmatrix} -241.3\; C_1(7.071t) - 144.61\, C_1(15.811t) + 385.91 \\ -361.95\, C_1(7.071t) + 72.3\; C_1(15.811t) + 289.65 \end{bmatrix}$$

۸) برش پایه :

$$Q(t) = \sum \frac{\bar{K}_k^2}{M_k}\, \omega_k\, V_k(t)$$

$$Q(t) = \frac{5^2}{8} \times 7.071\; (-27.3\, C_1(7.071t) + 27.3) + \frac{1^2}{2.67} \times 15.811\, (-12.21\, C_1(15.811)$$
$$+12.21) = -603.24\, C_1(7.071t) - 72.39\, C_1(15.811) + 675.55$$

۹) لنگر واژگونی :

بافرض ارتفاع طابق 3m يعني 118.11 in دائم ؛

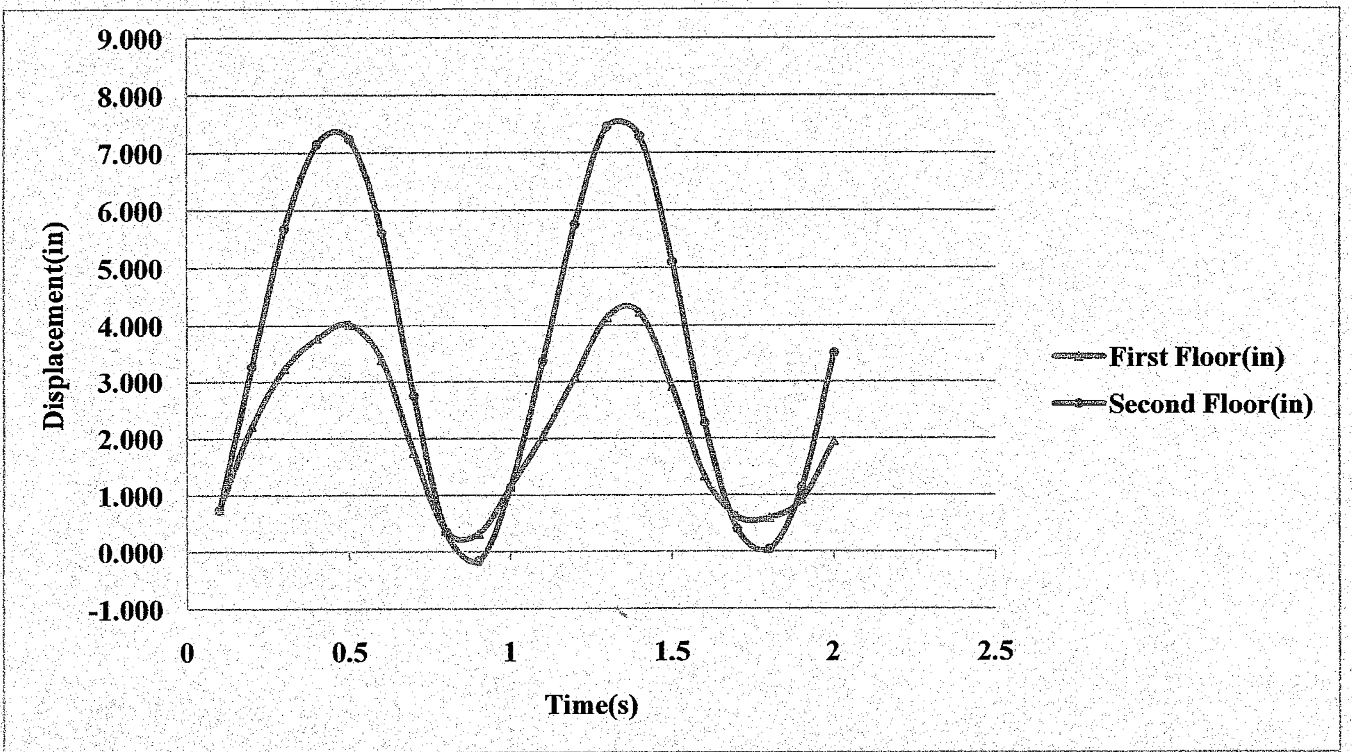
$$M(t) = \sum h_k \cdot f_{s_k}(t) = [h]\{f_s(t)\}$$

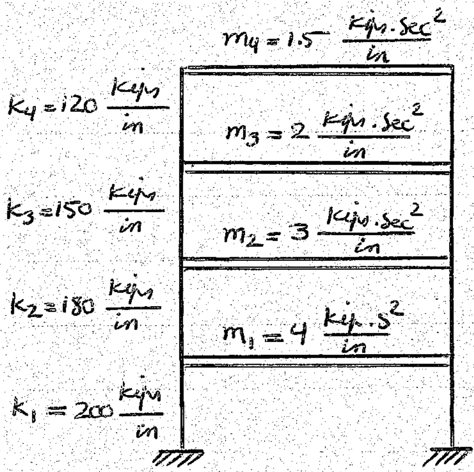
$$= \begin{bmatrix} 118.11 & 236.22 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -241.3\, C_1(7.071t) - 144.61\, C_1(15.811t) + 385.91 \\ -361.95\, C_1(7.071t) + 72.3\, C_1(15.811t) + 289.65 \end{bmatrix}$$

$$= -113999.77\, C_1(7.071t) - 1.18\, C_1(15.811t) + 114000.95 \text{ kip.in}$$

١٠) رسم تغير مكان طبقات ؛

t(s)	First Floor(in)	Second Floor(in)
0.1	0.756	0.737
0.2	2.209	3.262
0.3	3.221	5.683
0.4	3.766	7.148
0.5	4.017	7.244
0.6	3.383	5.611
0.7	1.745	2.749
0.8	0.367	0.349
0.9	0.323	-0.159
1	1.147	1.140
1.1	2.041	3.355
1.2	3.071	5.755
1.3	4.137	7.452
1.4	4.224	7.295
1.5	2.907	5.104
1.6	1.330	2.272
1.7	0.621	0.404
1.8	0.600	0.051
1.9	0.917	1.139
2	1.945	3.499





تمرین ۲۵: ساختمان چهار طبقه شکل مقابل مفروض است. اولاً فرکانس‌ها و مودهای متعلق به آن را محاسبه کنید. ثانیاً جرم‌های مودی و ضرایب مشارکت را بدست آورید. ثالثاً درصورتیکه این ساختمان تحت اثر زلزله‌ای قرار گیرد که نمودار شتاب آن بصورت زیر باشد مطلوبست:

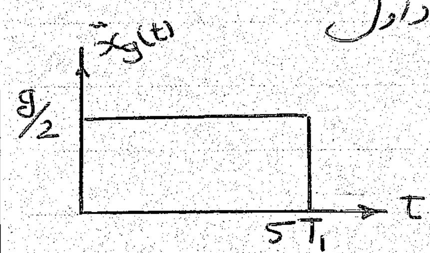
$(\xi = 0)$

الف) تابع تغییر مکان در هر یک از طبقات

ب) مقدار Max تغییر مکان در مود اول

ج) بردار نیروهای الاستیک برای هر یک از مودها و برای ترکیب آنها (انواع ترکیب مودها)

د) تابع برش پایه برای هر یک از مودها و مقدار Max برش پایه در مود اول



فرکانس‌ها

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2+k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & -m_2\omega^2+k_2+k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & -m_3\omega^2+k_3+k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & -m_4\omega^2+k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -4\omega^2+380 & -180 & 0 & 0 \\ -180 & -3\omega^2+330 & -150 & 0 \\ 0 & -150 & -2\omega^2+270 & -120 \\ 0 & 0 & -120 & -1.5\omega^2+120 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 36(\omega^2)^4 - 15120(\omega^2)^3 + 1946700(\omega^2)^2 - 80640000\,\omega^2 + 648\times10^6 = 0$$

$\omega_1^2 = 10.47 \rightarrow \omega_1 = 3.236 \ rad/s \rightarrow T_1 = 1.94 \ s$

$\omega_2^2 = 59.12 \rightarrow \omega_2 = 7.689 \ rad/s \rightarrow T_2 = 0.82 \ s$

$\omega_3^2 = 134.88 \rightarrow \omega_3 = 11.614 \ rad/s \rightarrow T_3 = 0.54 \ s$

$\omega_4^2 = 215.53 \rightarrow \omega_4 = 14.681 \ rad/s \rightarrow T_4 = 0.43 \ s$

مودها :

$$\omega = \omega_1 = 3.236 \rightarrow \begin{bmatrix} 338.11 & -180 & 0 & 0 \\ -180 & 298.58 & -150 & 0 \\ 0 & -150 & 249.06 & -120 \\ 0 & 0 & -120 & 104.29 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = 0 \qquad \underline{X}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.878 \\ 2.538 \\ 2.92 \end{Bmatrix}$$

$$\omega = \omega_2 = 7.689 \rightarrow \begin{bmatrix} +143.52 & -180 & 0 & 0 \\ -180 & 152.64 & -150 & 0 \\ 0 & -150 & 151.76 & -120 \\ 0 & 0 & -120 & 31.32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = 0 \qquad \underline{X}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ +0.797 \\ -0.389 \\ -1.49 \end{Bmatrix}$$

$$\omega = \omega_3 = 11.614 \rightarrow \begin{bmatrix} -159.54 & -180 & 0 & 0 \\ -180 & -74.65 & -150 & 0 \\ 0 & -150 & 0.23 & -120 \\ 0 & 0 & -120 & -82.33 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = 0 \qquad \underline{X}_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.886 \\ -0.759 \\ 1.106 \end{Bmatrix}$$

$$\omega = \omega_4 = 14.681 \rightarrow \begin{bmatrix} -482.13 & -180 & 0 & 0 \\ -180 & -316.6 & -150 & 0 \\ 0 & -150 & -161.06 & -120 \\ 0 & 0 & -120 & -203.3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = 0 \qquad \underline{X}_4 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2.679 \\ 4.454 \\ -2.629 \end{Bmatrix}$$

جرم های مودی :

$$M_k = \underline{X}_k^T [m] \underline{X}_k$$

$M_1 = 40.253$ $M_2 = 9.538$ $M_3 = 9.342$ $M_4 = 75.575$

ضرایب تحریک زلزله :

$$\bar{k}_k = X_k^T [m][I]$$

$k_1 = 19.09$ $k_2 = 3.378$ $k_3 = 1.483$ $k_4 = 0.928$

الف) تابع تغییر مکان در هر طبقه :

$$\{x_k(t)\} = X_k \cdot \frac{\bar{k}_k}{M_k \omega_k} V_k(t)$$

الف-۱) بردار تغییر مکان مود اول :

$$V_1(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \sin\omega_1(t-\tau)d\tau = \int_0^t g/2 \sin(3.236(t-\tau))d\tau$$
$$= 59.65(-\cos(3.236t)+1)$$

$$\Rightarrow \{x_1(t)\} = \begin{bmatrix} 8.742 \\ 16.417 \\ 22.187 \\ 25.527 \end{bmatrix} (-\cos(3.236t)+1)$$

الف-۲) بردار تغییر مکان مود دوم :

$$V_2(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \sin\omega_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t g/2 \sin(7.689(t-\tau))d\tau$$
$$= 25.1(-\cos(7.689t)+1)$$

$$\Rightarrow \{x_2(t)\} = \begin{bmatrix} 1.156 \\ 0.921 \\ -0.45 \\ -1.723 \end{bmatrix} (-\cos(7.689t)+1)$$

الف-۳) بردار تغییر مکان مود سوم :

$$V_3(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \sin\omega_3(t-\tau)d\tau = \int_0^t g/2 \sin(11.614(t-\tau))d\tau$$
$$= +16.62(-\cos(11.614t)+1)$$

$$\Rightarrow \{x_3(t)\} = \begin{bmatrix} 0.227 \\ -0.201 \\ -0.172 \\ 0.251 \end{bmatrix} (-\cos(11.614t)+1)$$

الف – ٤) بردار تغییر مکان مود چهارم:

$$V_4(t)=\int_0^t \ddot{x}_g(\tau)\,\sin\omega_4(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t g/2\ \sin(14.681(t-\tau))\,d\tau$$

$$=13.15\,(-\cos(14.681t)+1)$$

$$\{x_4(t)\}=\begin{bmatrix}0.011\\-0.029\\0.049\\-0.029\end{bmatrix}(-\cos(14.681t)+1)$$

ب) Max تغییر مکان در مود اول:

$$\{x_1(t)\}=\begin{bmatrix}8.742\\16.417\\22.187\\25.527\end{bmatrix}(-\cos(3.236t)+1)\qquad 0<t<5\times1.94$$

$$t=0.971\ \rightarrow\ -\cos(3.236\times0.971)+1=2\ \Rightarrow\ \{x_{1,Max}\}=\begin{bmatrix}17.484\\32.834\\44.374\\51.054\end{bmatrix}\ in$$

ج) بردار نیروهای الاستیک برای هر مود و برای ترکیب آن ها:

$$\{f_{s_k}\}=[m]\,X_k\,\frac{\bar{k}_k}{M_k}\cdot\omega_k\cdot V_k(t)$$

ج–۱) مود اول:

$$\{f_{s_1}\}=\begin{bmatrix}4\\5.634\\5.076\\4.38\end{bmatrix}\times\frac{19.09}{40.253}\times3.236\times59.65\,(-\cos(3.236t)+1)$$

$$\Rightarrow\{f_{s_1}\}=\begin{bmatrix}366.17\\515.76\\464.67\\400.96\end{bmatrix}(-\cos(3.236t)+1)\quad(kip)$$

ج-۲) مود دوم :

$$\{f_{s_2}\} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2.391 \\ -0.778 \\ -2.235 \end{bmatrix} \frac{3.378}{9.538} \times 7.689 \times 25.1 \left(-C_1(7.689t) + 1\right)$$

$$\Longrightarrow \{f_{s_2}\} = \begin{bmatrix} 273.4 \\ 163.43 \\ -53.18 \\ -152.76 \end{bmatrix} \left(-C_1(7.689t) + 1\right)$$

ج-۳) مود سوم :

$$\{f_{s_3}\} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2.658 \\ -1.518 \\ 1.659 \end{bmatrix} \frac{1.483}{9.342} \times 11.614 \times 16.62 \left(-C_1(11.614t) + 1\right)$$

$$\Longrightarrow \{f_{s_3}\} = \begin{bmatrix} 122.57 \\ -81.45 \\ -46.51 \\ 50.83 \end{bmatrix} \left(-C_1(11.614t) + 1\right)$$

ج-٤) مود چهارم :

$$\{f_{s_4}\} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8.037 \\ 8.908 \\ -3.944 \end{bmatrix} \frac{0.928}{75.575} \times 14.681 \times 13.15 \left(-C_1(14.681t) + 1\right)$$

$$\Longrightarrow \{f_{s_4}\} = \begin{bmatrix} 9.48 \\ -19.05 \\ 21.12 \\ -9.35 \end{bmatrix} \left(-C_1(14.681t) + 1\right)$$

ج-ه) ترکیب مودها :

$$\{f_s\} = \{f_{s_1}\} + \{f_{s_2}\} + \{f_{s_3}\} + \{f_{s_4}\}$$

$$\{f_s\} = \begin{bmatrix} -366.17C_1(3.236t) - 273.4C_1(7.689t) - 122.57C_1(11.614t) - 9.48C_1(14.681t) + 771.62 \\ -515.76C_1(3.236t) - 163.43C_1(7.689t) + 81.45C_1(11.614t) + 19.05C_1(14.681t) + 578.69 \\ 464.67C_1(3.236t) + 53.18C_1(7.689t) + 46.51C_1(11.614t) - 21.12C_1(14.681t) + 386.1 \\ -400.96C_1(3.236t) + 152.76C_1(7.689t) - 50.83C_1(11.614t) + 9.35C_1(14.681t) + 289.68 \end{bmatrix}$$

د) تابع برش پایه هر مود – Max برش پایه مود اول.

$$Q_{(t)} = \sum \frac{\bar{K}_k^2}{M_k} \omega_k V_k(t)$$

د – ۱) مود اول:

$$Q_1(t) = \frac{19.09^2}{40.253} \times 3.236 \times 59.65 \left(-C_1(3.236t)+1\right)$$

$$= 1747.56 \left(-C_1(3.236)+1\right) \text{ (kips)}$$

د – ۲) مود دوم:

$$Q_2(t) = \frac{3.378^2}{9.538} \times 7.689 \times 25.1 \left(-C_1(7.689t)+1\right)$$

$$= 230.89 \left(-C_1(7.689t)+1\right) \text{ (kips)}$$

د – ۳) مود سوم:

$$Q_3(t) = \frac{1.488^2}{9.342} \times 11.614 \times 16.62 \left(-C_1(11.614t)+1\right)$$

$$= 45.44 \left(-C_1(11.614t)+1\right) \text{ (kips)}$$

د – ٤) مود چهارم:

$$Q_4(t) = \frac{0.928^2}{75.575} \times 14.681 \times 13.15 \left(-C_1(14.681t)+1\right)$$

$$= 2.2 \left(-C_1(14.681t)+1\right) \text{ (kips)}$$

د – ص) Max برش پایه مود اول:

$$Q_{1,Max} = 1747.56 \times 2 = 3495.12 \text{ (kips)}$$

تمرین ۲۶ : اگر برای طراحی ساختمان تمرین 25 بتوان از نمودار شکل A استفاده کرد، نسبت بحرانی را برای کلیه مودها 5% در نظر گرفت، مطلوبست تعیین:

الف) بردار تغییر مکان Max برای هر یک از مودها و بردار تغییر مکان کل.

ب) نیروهای الاستیک در هر از طبقات و مقدار کل نیروی الاستیک

ج) برش پایه در هر مود و مقدار کل آن.

$$\omega_1 = 3.236 \ \text{rad/s} \longrightarrow T_1 = 1.94\,s$$
$$\omega_2 = 7.689 \ \text{rad/s} \longrightarrow T_2 = 0.82\,s$$
$$\omega_3 = 11.614 \ \text{rad/s} \longrightarrow T_3 = 0.54\,s$$
$$\omega_4 = 14.681 \ \text{rad/s} \longrightarrow T_4 = 0.43\,s$$

$$\Longrightarrow \{S_V\} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 8.7 \\ 7.6 \end{bmatrix} \ \text{in/s}$$

الف)

$$\{x_{k,Max}\} = \underline{X}_k \frac{\overline{k_k}}{M_k \omega_k} S_{V_k}$$

$$\{x_{1,Max}\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.878 \\ 2.538 \\ 2.92 \end{bmatrix} \frac{19.09}{40.253 \times 3.236} \times 12 = \begin{bmatrix} 1.759 \\ 3.303 \\ 4.463 \\ 5.135 \end{bmatrix} \ \text{in}$$

$$\{x_{2,Max}\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.797 \\ -0.389 \\ -1.49 \end{bmatrix} \frac{3.378}{9.538 \times 7.689} \times 10 = \begin{bmatrix} 0.461 \\ 0.367 \\ -0.179 \\ -0.686 \end{bmatrix} \ \text{in}$$

$$\{x_{3,Max}\} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.866 \\ -0.759 \\ 1.106 \end{bmatrix} \frac{1.483}{9.342 \times 11.614} \times 8.7 = \begin{bmatrix} 0.119 \\ -0.103 \\ -0.09 \\ 0.132 \end{bmatrix} \ \text{in}$$

$$\{x_{4,Max}\} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2.679 \\ 4.454 \\ -2.629 \end{bmatrix} \frac{0.928}{75.575 \times 14.681} \times 7.6 = \begin{bmatrix} 0.006 \\ -0.017 \\ 0.028 \\ -0.017 \end{bmatrix}$$

$$\{x_{Max}\} = \begin{bmatrix} (1.759^2 + 0.461^2 + 0.119^2 + 0.006^2)^{1/2} \\ (3.303^2 + 0.367^2 + 0.103^2 + 0.017^2)^{1/2} \\ (4.463^2 + 0.179^2 + 0.09^2 + 0.028^2)^{1/2} \\ (5.135^2 + 0.686^2 + 0.132^2 + 0.017^2)^{1/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.822 \\ 3.325 \\ 4.468 \\ 5.182 \end{bmatrix} (in)$$

(ب

$$\{f_{sk}\} = [m]\, \Phi_k \, \frac{\bar{L}_k}{M_k} \, \omega_k \cdot S_v$$

$$\{f_{s_1,Max}\} = \begin{bmatrix} 73.66 \\ 103.76 \\ 93.48 \\ 80.66 \end{bmatrix} \qquad \{f_{s_2,Max}\} = \begin{bmatrix} 108.96 \\ 65.13 \\ -21.19 \\ -60.88 \end{bmatrix}$$

$$\{f_{s_3,Max}\} = \begin{bmatrix} 64.16 \\ -42.63 \\ -24.35 \\ 26.61 \end{bmatrix} \qquad \{f_{s_4,Max}\} = \begin{bmatrix} 5.48 \\ -11.01 \\ 12.2 \\ -5.4 \end{bmatrix}$$

$$\{f_{s\,Max}\} = \begin{bmatrix} (73.66^2 + 108.96^2 + 64.16^2 + 5.48^2)^{1/2} \\ (103.76^2 + 65.13^2 + 42.63^2 + 11.01^2)^{1/2} \\ (93.48^2 + 21.19^2 + 24.35^2 + 12.2^2)^{1/2} \\ (80.66^2 + 60.88^2 + 26.61^2 + 5.4^2)^{1/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 146.44 \\ 130.18 \\ 99.65 \\ 104.64 \end{bmatrix} \text{kips}$$

$$Q(t) = \sum \frac{\overline{K_k}^2}{M_k} \omega_k V_k(t)$$ (ج

$$Q_{1\,Max}(t) = \frac{19.09^2}{40.253} \times 3.236 \times 12 = 351.56 \text{ kips}$$

$$Q_{2\,Max}(t) = \frac{3.378^2}{9.538} \times 7.689 \times 10 = 91.99 \text{ kips}$$

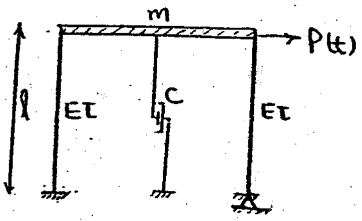
$$Q_{3\,Max}(t) = \frac{1.483^2}{9.342} \times 11.614 \times 8.7 = 23.79 \text{ kips}$$

$$Q_{4\,Max}(t) = \frac{0.928^2}{75.575} \times 14.681 \times 7.6 = 1.27 \text{ kips}$$

$$Q_{Max}(t) = (351.56^2 + 91.99^2 + 23.79^2 + 1.27^2)^{1/2} = 364.18 \text{ kips}$$

مریم شاکیبا ۸۱۲۴۰۲۰ سری ①

- معادله حرکت تابع شکل زیر را بدست آورید. در صورتیکه نیروی P(t) و نیز استهلاک مساوی صفر باشد.
مطلوبست تعیین تابع تغییرمکان و اگر در لحظه صفر $x = X_0$ و $\dot{X}_0 = 0$ باشد تابع تغییرمکان را رسم نمائید.



$$k_1 = \frac{3EI}{L^3} \qquad k_2 = \frac{12EI}{L^3}$$

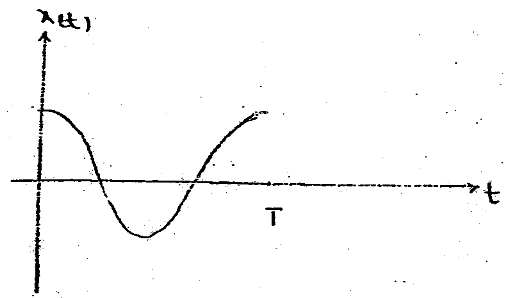
$$\Rightarrow k = \frac{15EI}{L} = k_1 + k_2$$

$$\xi = 0 \quad P(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x(t) = X\cos(\omega_n t - \phi) \\ X = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{\dot{X}_0}{\omega_n}\right)^2} \quad , \phi = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{X}_0}{\omega_n X_0}\right) \end{cases}$$

$$\dot{X}_0 = 0 \quad \phi = 0$$

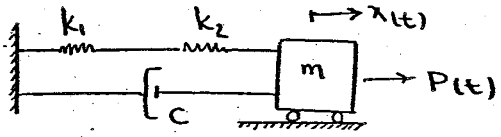
$$X_0 = x \quad X = x \Rightarrow x(t) = x\cos\omega_n t$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{15EI}{mL^3}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_n}$$



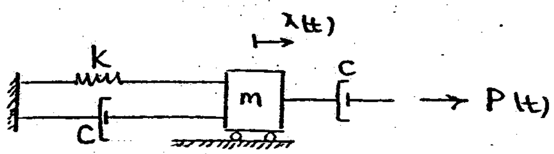
1

ـ معادله حرکت سیستم های زیر را بدست آورید.



$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \Rightarrow k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \quad , \quad x = x_1 + x_2$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p(t) \Rightarrow m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + c(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}(x_1 + x_2) = p(t)$$

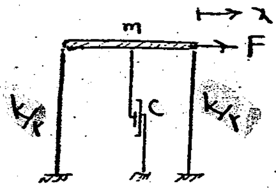


در حالت موازی $\quad C = C_1 + C_2 = 2C$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + 2c\dot{x} + kx = p(t)$$

مریم شکیبا ۸۱۲۴۰۳۰ سری ۲

- قاب نشان داده شده در شکل تحت تاثیر نیروی افقی 1000 kgf تغییر مکان استاتیکی ۱٫۵ cm را می‌دهد اگر نیرو یکباره برداشته شود قاب با پریود ۰٫۸ s ارتعاش کرده و بعد از ۵ سیکل کامل تغییر مکان به ۱ cm می‌رسد بعد از این آزمایش مطلوبست تعیین وزن موثر قاب، استهلاک بنسبت استهلاک بحرانی ξ و ضریب استهلاک همچنین دامنه پس از ۱۰ سیکل کامل.



$$k = \frac{F}{x_0} = \frac{1000}{1.5} = 666.67 \ \mathrm{kgf/cm} \times 10^2 \ \mathrm{kgf/m}$$

فرض $\omega_D \simeq \omega_n$ $\quad T = \frac{2\pi}{\omega_D} \simeq \frac{2\pi}{\omega_n} \Rightarrow 0.8 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{666.67\times10^2\times10}{W}}}$

$$\Rightarrow W = 10807.59 \ \mathrm{kgf}$$

$$\Rightarrow \omega_D = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.8} = 7.85 \ \mathrm{rad/s}$$

$$\frac{x_k}{x_{k+5}} = \frac{xe^{-\xi\omega_n k\left(\frac{2\pi}{\omega_D}\right)}}{xe^{-\xi\omega_n(k+5)\left(\frac{2\pi}{\omega_D}\right)}} = e^{5\xi\omega_n\frac{2\pi}{\omega_D}} = e^{10\pi\xi\frac{\omega_n}{\omega_D}}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Ln}\left(\frac{x_k}{x_{k+5}}\right) = 10\pi\xi\frac{\omega_n}{\omega_D} = 10\pi\xi\frac{\cancel{\omega_n}}{\cancel{\omega_n}\underbrace{\sqrt{1-\xi^2}}_{\to 1}} \simeq 10\pi\xi$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{1}{10\pi}\mathrm{Ln}\left(\frac{x_k}{x_{k+5}}\right) = \frac{1}{10\pi}\mathrm{Ln}\left(\frac{1.5}{1}\right) = 0.0129 = 1.29\%$$

$$C = 2\xi m\omega_n = 2\times0.0129\times\frac{10807.59}{10}\times7.85 = 218.89 \ \mathrm{kg.s/m}$$

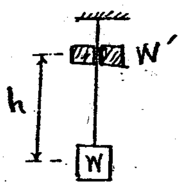
$$\omega_D = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = \omega_n\times\sqrt{1-0.0129^2} = 0.99992\,\omega_n \simeq \omega_n$$

$$\frac{1}{5\times2\pi}\mathrm{Ln}\left(\frac{x_0}{x_5}\right) = \frac{1}{2\pi\times10}\mathrm{Ln}\left(\frac{x_0}{x_{10}}\right) \Rightarrow 2\mathrm{Ln}\left(\frac{x_0}{x_5}\right) = \mathrm{Ln}\left(\frac{x_0}{x_{10}}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x_0}{x_5}\right)^2 = \left(\frac{x_0}{x_{10}}\right) \Rightarrow \left(\frac{1.5}{1}\right)^2 = \frac{1.5}{x_{10}} \Rightarrow x_{10} = \frac{1}{1.5} = 0.667 \ \mathrm{cm}$$

$1\ CPM = 0.033\pi\ \frac{rad}{s}$

- وزنه W به کابلی متصل است فرکانس طبیعی سیستم در این حالت ۹۴ cpm اندازه گیری شده است هرگاه وزنه W' = ۱ lb به W افزوده شود فرکانس سیستم به ۷۶,۷۵ cpm تقلیل می یابد ۱) مقدار W و k را تعیین نمائید ۲) هرگاه وزنه W' از ارتفاع h = 6 in رها گردیده و به وزنه W متصل باند مقدار max و min نیروی کابل را محاسبه نمائید در این حالت ξ = ۱۰٪ فرض گردد توجه شود کابل تنها نیروی کششی را تحمل می کند.



$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\begin{cases} ۹۴\ cpm = ۳,۱۳۳\pi\ rad/s \\ ۷۶,۷۵\ cpm = ۲,۵۵۸\pi\ rad/s \end{cases}$$

حالت اول $\Rightarrow \omega_n = ۳,۱۳۳\pi = \sqrt{\frac{k \times g}{W}} \Rightarrow \frac{k}{W} = ۳,۰۲۸$

حالت دوم $\Rightarrow \omega_n = ۲,۵۵۸\pi = \sqrt{\frac{k \times g}{W + W'}} \Rightarrow \frac{k}{W+1} = ۲,۰۱۸۷$

$\Rightarrow \frac{۳,۰۲۸W}{W+1} = ۲,۰۱۸۷ \Rightarrow W = ۲\ lb \quad , \quad k = ۶,۰۵۶\ lb/ft$

$m'gh = \frac{1}{۲}(m+m')v^۲ \Rightarrow \frac{1}{\cancel{۳۲}} \times \cancel{۳۲} \times \frac{\cancel{۶}}{\cancel{۱۲}} = \frac{1}{\cancel{۲}}\left(\frac{۲+۱}{۳۲}\right)v^۲$

$\Rightarrow v_0 = ۳,۲۶۶\ ft/s \qquad \dot{X}_0 = ۳,۲۶۶\ ft/s \qquad \xi = ۱۰\%$

کابل تنها نیروی کششی تحمل می کند ← min نیروی کابل = ۰

$X = \left[\left(\frac{\dot{X}_0 + \xi\omega_n X_0}{\omega_D}\right)^۲ + X_0^۲\right]^{۱/۲}$ سیستم دارای استهلاک $\xi < 1$

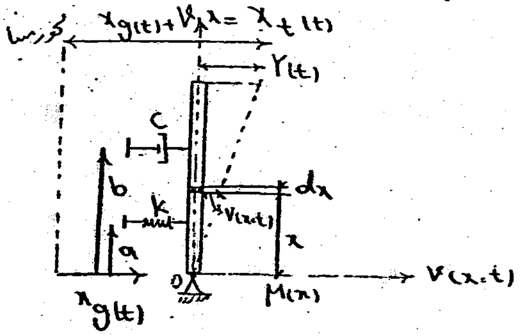
$\Rightarrow X = \left[\left(\frac{۳,۲۶۶ + ۰,۱ \times ۸,۰۳۶ \times ۰}{۷,۹۹۶}\right)^۲ + ۰\right]^{۱/۲} = ۰,۴۰۸\ ft$

$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = ۲,۵۵۸\pi \Rightarrow \omega_D = \omega_n\sqrt{1-\xi^۲} = ۷,۹۹۶$

$\Rightarrow F_{max} = kX = ۶,۰۵۶ \times ۰,۴۰۸ = ۲,۴۷\ lb$

مریم تسلیبا 8124030 سری ③

- در صورتیکه مثال فوق تحت اثر حرکت زمین $x_{g(t)}$ قرار گیرد مطلوبست تعیین معادله حرکت الف) بدون در نظر گرفتن $P(t)$ ب) با در نظر گرفتن $P(t)$.



الف) $\Sigma M_o = 0 \Rightarrow M_I + M_D + M_S = \cancel{M_{P(t)}}$

$V(x,t) = \psi(x)\cdot Y(t) \qquad \psi(L)=1 \Rightarrow \psi(x) = \frac{x}{L}$

$\Rightarrow V(x,t) = \frac{x}{L}\cdot Y(t)$

$M_S = f_S\cdot a \quad , \quad f_S = k\cdot\frac{a}{L}Y(t) \qquad M_D = f_D\cdot b \quad , \quad f_D = c\cdot\frac{b}{L}\dot{Y}(t)$

$M_I = \int_0^L M(x)x\cdot\ddot{x}_t(t)\cdot dx \qquad x_t(t) = x_g(t) + V(x,t)$

$\Rightarrow \ddot{x}_t(t) = \ddot{x}_g(t) + \ddot{V}(x,t) = \ddot{x}_g(t) + \frac{x}{L}\ddot{Y}(t)$

$\Rightarrow M_I = \int_0^L M(x)x\left(\ddot{x}_g(t) + \frac{x}{L}\ddot{Y}(t)\right)dx = \ddot{x}_g(t)\cancel{\int_0^L M(x)x\,dx} + \ddot{Y}\int_0^L M(x)\frac{x^2}{L}dx$

$M_I = \ddot{x}_g(t)\int_0^L M\cdot x\,dx + \ddot{Y}\int_0^L M(x)\frac{x^2}{L}dx$

$\ddot{x}_g(t)\int_0^L Mx\,dx + \ddot{Y}\int_0^L M(x)\frac{x}{L}dx + c\cdot\frac{b^2}{L}\dot{Y} + k\frac{a^2}{L}Y = 0$

$\rightarrow \ddot{Y}\int_0^L M(x)\left(\frac{x}{L}\right)^2dx + \dot{Y}c\left(\frac{b}{L}\right)^2 + Y\cdot k\left(\frac{a}{L}\right)^2 = -\ddot{x}_g(t)\int_0^L M(x)\frac{x}{L}dx$

$\Rightarrow M^*\ddot{Y} + C^*\dot{Y} + K^*Y = -M^*\ddot{x}_g(t)$

ب) $V(x,t) = \frac{x}{L}Y(t) \qquad \Sigma M_o = 0 \Rightarrow M_I + M_D + M_S = M_{P(t)}$

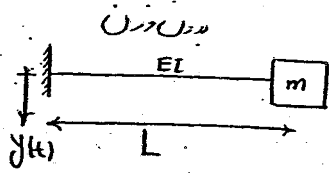
$M_I = \ddot{x}_g(t)\int_0^L M(x)x\,dx + \ddot{Y}\int_0^L M(x)\frac{x}{L}dx \qquad M_D = c\frac{b^2}{L}\dot{Y}(t) \qquad M_S = k\frac{a^2}{L}Y(t)$

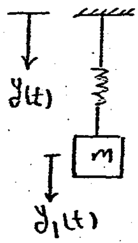
$, \ M_{P(t)} = P(t)\cdot d$

$\Rightarrow \overset{*}{M}\ddot{x}_g(t) + \ddot{Y}\int_0^L M(x)\frac{x}{L}dx + \dot{Y}c\frac{b^2}{L} + Yk\frac{a^2}{L} = P(t)\cdot d$

$\Rightarrow \ddot{Y}\int_0^L M(x)\left(\frac{x}{L}\right)^2dx + \dot{Y}c\left(\frac{b}{L}\right)^2 + Yk\left(\frac{a}{L}\right)^2 = P(t)\cdot\frac{d}{L} - \overset{*}{M}\ddot{x}_g(t)$

- تیرک سرگیردار بدون وزن که انتهای آن جرم m متصل است دارای تکیه‌گاهی است که مطابق شکل می‌تواند حرکت کند مطلوبست تعیین معادله حرکت سیستم.





$$y_t(t) = y_1(t) + y(t)$$

$$f_I + f_D + f_S = 0$$

$$f_S = k\,y_1(t) \qquad f_D = c\,\dot{y}_1(t) \quad , f_I = m\,\ddot{y}_t(t)$$

$$\ddot{y}_t(t) = \ddot{y}_1(t) + \ddot{y}(t) \quad \Rightarrow \quad f_I = m\ddot{y}_1(t) + m\ddot{y}(t)$$

$$\Rightarrow m\ddot{y}_1(t) + m\ddot{y}(t) + c\,\dot{y}_1(t) + k\,y_1(t) = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{y}_1 + \underset{0}{\cancel{c\dot{y}_1}} + k y_1 = -m\ddot{y}(t)$$

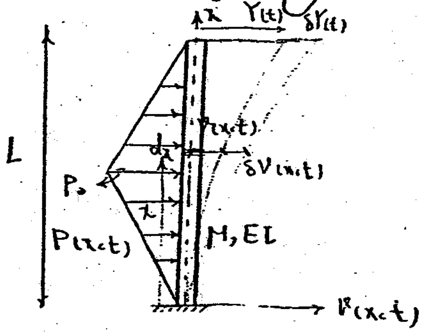
$$mg = k.\Delta \qquad \Delta = \frac{PL^3}{3EI}$$

$$\Rightarrow k = \frac{mg}{\Delta} = \frac{3\cancel{mg}.EI}{\cancel{P}L^3} = \boxed{\frac{3EI}{L^3}}$$

$$c = 0 \quad \rightarrow \quad m\ddot{y}_1 + \frac{3EI}{L^3}y_1 = -m\ddot{y}(t)$$

مریم شکیبا ۸۱۲۴۰۳۰ سری ④

ـ سازه شکل زیر مفروض است مطلوبست تعیین معادله حرکت برای سه حالت از تابع شکلی.



جسم غیرصلب

$$V(x,t) = \psi(x) \cdot Y(t)$$

اصل تغییر مکان مجازی $\delta W_t = 0 \Rightarrow \delta W_E = \delta W_I$

$$\delta V(x,t) = \psi(x) \cdot \delta Y(t)$$

$$\delta W_E = \int_0^L P(x,t) \cdot \delta V(x,t) \cdot dx$$ کار مجازی نیروهای خارجی

$$\delta W_I = \int m(x)\, \delta d\theta + \int_0^L f_I(x)\, \delta V(x,t)\, dx$$

$$f_I(x) = M(x)\ddot{V}(x,t) \quad , \quad \theta = \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} \quad , \quad d\theta = \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} dx \quad , \quad m(x) = EI \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \delta W_I = \int_0^L EI \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} \cdot \delta \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} dx + \int_0^L M(x)\ddot{V}(x,t) \cdot \delta V(x,t)\, dx$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{d^2\psi}{dx^2} \cdot Y(t) \qquad \delta \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{d^2\psi}{dx^2} \cdot \delta Y(t)$$

$$\Rightarrow \delta W_I = \int_0^L EI \left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)^2 \cdot Y(t) \cdot \delta Y(t) \cdot dx + \int_0^L M(x)\psi(x)^2 \frac{d^2Y}{dt^2} \cdot \delta Y(t)\, dx$$

$$\delta W_I = \delta W_E \Rightarrow Y(t) \cdot \cancel{\delta Y(t)} \int_0^L EI \left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)^2 dx + \frac{d^2Y}{dt^2} \cdot \cancel{\delta Y(t)} \int_0^L M(x)\psi(x)^2 dx = \cancel{\delta Y(t)} \int_0^L P(x,t)\psi(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \ddot{Y} \int_0^L M(x)\psi(x)^2 dx + Y \int_0^L EI \left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)^2 dx = \int_0^L P(x,t)\psi(x)\, dx$$

$$\Rightarrow M^* \ddot{Y} + K^* Y = P^*(t)$$

$$P(x,t) = \begin{cases} \frac{2P_0}{L}x & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ -\frac{2P_0}{L}x + 2P_0 & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$$

الف) $\psi(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2L}$ $\qquad \frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}$

$$\Rightarrow M^* = \int_0^L M\left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = M_0\left(-\frac{4L}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2L} + \frac{L}{2\pi}\sin\frac{\pi x}{L} + \frac{3\pi x L}{2\pi L}\Big]_0^L\right) = 0.227\, ML$$

$$K^* = \int_0^L EI\left(\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = EI \times \frac{\pi^4}{16L^4} \times \left(\frac{L}{2\pi}\sin\frac{\pi x}{L} + \frac{x}{2}\Big]_0^L\right) = EI \cdot \frac{\pi^4}{32L^3}$$

$$P^*(t) = \int_0^{L/2} \frac{2P_0}{L} x \left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)dx + \int_{L/2}^{L}\left(-\frac{2P_0}{L}x + 2P_0\right)\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)dx$$

$$\Rightarrow P^*(t) = \frac{2P_0}{L}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2Lx}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2L} - \frac{4L^2}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\Big]_0^{L/2}\right) + 2P_0\left(x - \frac{x^2}{2L} + \frac{2x}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2L} - \frac{2L}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2L} + \frac{4L}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\Big]_{L/2}^{L}\right) = 2P_0 L\left(\frac{1}{4} - \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2}\right) = 0/164\,P_0 L$$

$$\Rightarrow 0/227\,ML\ddot{Y} + 3/04\,\frac{EI}{L^3}Y = 0/164\,P_0 L$$

ب) $\psi(x) = \frac{x^2}{L^2} \qquad \frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2}{L^2}$

$$\Rightarrow M^* = \int_0^L M\left(\frac{x^2}{L^2}\right)^2 dx = \frac{M}{L^4}\times\frac{L^5}{5} = \frac{1}{5}ML$$

$$K^* = \int_0^L EI\left(\frac{2}{L^2}\right)^2 dx = \frac{4EI}{L^3}$$

$$P^*(t) = \int_0^{L/2}\frac{2P_0}{L}x\cdot\frac{x^2}{L^2}dx + \int_{L/2}^{L}\left(-\frac{2P_0}{L}x + 2P_0\right)\cdot\frac{x^2}{L^2}dx = 0/146\,P_0 L$$

$$\Rightarrow 0/2\,ML\ddot{Y} + \frac{4EI}{L^3}Y = 0/146\,P_0 L$$

ج) $\psi(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \qquad \frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{\pi^2}{4L^2}\sin\frac{\pi x}{2L}$

$$\Rightarrow M^* = \int_0^L M\left(\sin\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = M\times\left(-\frac{L}{2\pi}\sin\frac{\pi x}{L} + \frac{x}{2}\Big]_0^L\right) = 0/5\,ML$$

$$K^* = \int_0^L EI\left(-\frac{\pi^2}{4L^2}\sin\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = \frac{\pi^4 EI}{16L^4}\left(-\frac{L}{2\pi}\sin\frac{\pi x}{L} + \frac{x}{2}\Big]_0^L\right) = \frac{\pi^4 EI}{32L^3}$$

$$P^*(t) = \int_0^{L/2}\frac{2P_0}{L}x\cdot\sin\frac{\pi x}{2L}dx + \int_{L/2}^{L}\left(-\frac{2P_0}{L}x + 2P_0\right)\cdot\sin\frac{\pi x}{2L}dx =$$

$$\Rightarrow P^*(t) = \frac{2P_0}{L}\left(-\frac{2Lx}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2L} + \frac{4L^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{2L}\Big]_0^{L/2}\right) + 2P_0\left(\frac{2x}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2L} - \frac{2L}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2L} - \frac{4L}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{2L}\Big]_{L/2}^{L}\right.$$

$$\Rightarrow P^*(t) = -0/114\,P_0 L$$

$$\Rightarrow 0/5\,ML\ddot{Y} + \frac{\pi^4 EI}{32L^3}Y = -0/114\,P_0 L$$

۸۱۲۴۰۳۰ مریم سلیما

- روابط سیستم دارای استهلاک $\zeta < 1$ را اثبات نمائید.

$$x_{(t)} = e^{-\zeta \omega_n t}\left(C \cos \omega_D t + D \sin \omega_D t\right) \qquad x_{(0)} = X_0 \quad , \quad \dot{x}_{(0)} = \dot{X}_0$$

$$\Rightarrow x_{(0)} = e^{0} \times \left(C \times \cos 0 + D \sin 0\right) = 1 \times C = X_0 \quad \Rightarrow \quad C = X_0$$

$$\dot{x}_{(t)} = -\zeta \omega_n e^{-\zeta \omega_n t}\left(C \cos \omega_D t + D \sin \omega_D t\right) + e^{-\zeta \omega_n t}\left(-\overset{X_0}{\cancel{C}} \cdot \omega_D \sin \omega_D t - D \omega_D \cos \omega_D t\right)$$

$$\Rightarrow \dot{x}_{(0)} = -\zeta \omega_n \times 1 \times \left(X_0 + 0\right) + 1 \times \left(-X_0 \cdot \omega_D \times 0 + D \cdot \omega_D \times 1\right)$$

$$\Rightarrow -\zeta X_0 \omega_n + D \omega_D = \dot{X}_0 \quad \Rightarrow \quad D \omega_D = +\zeta X_0 \omega_n + \dot{X}_0$$

$$\Rightarrow D = + \frac{\zeta \omega_n X_0 + \dot{X}_0}{\omega_D}$$

$$\Rightarrow x_{(t)} = e^{-\zeta \omega_n t}\left(X_0 \cos \omega_D t + \frac{\zeta \omega_n X_0 + \dot{X}_0}{\omega_D} \sin \omega_D t\right)$$

$۲)\ \psi(x) = \sin \frac{\pi x}{۲L}$

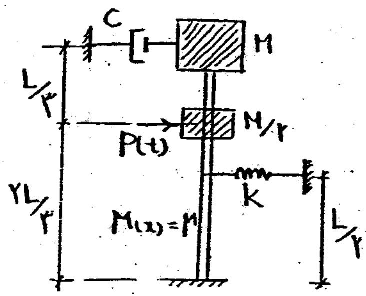
$\Rightarrow M^* = ۰/۵\,\mu L \qquad k^* = \frac{\pi^۴ EI}{۳۲ L^۳}$

$P = -۰/۱۱۴\, P_0 L \quad , \qquad \int_0^L \mu x \sin\frac{\pi x}{۲L}\, dx = \frac{۲L}{\pi}\mu$

$\Rightarrow ۰/۵\,\mu L\, \ddot{Y} + \frac{\pi^۴ EI}{۳۲ L^۳} Y = -۰/۱۱۴\, P_0 L - \frac{۲}{\pi}\mu L\, \ddot{x}_g(t)$

مریم سلیمانی   ۸۱۲۴۰۳۰   سری ⑤

ـ سازه مربوط به برج مخابراتی شهری را به صورت شکل با مدل کرده ایم مطلوبست تعیین معادله حرکت.



$$M^*\ddot{Y} + C^*\dot{Y} + K^*Y = P^*(t)$$

$$v(x,t) = \psi(x)\cdot Y(t) \qquad \psi(x) = 1-\cos\frac{\pi x}{2L}$$

$$M^* = \int_0^L \mu(\psi(x))^2dx + \sum_i m_i\psi_i^2 + \sum I_{o_i}(\psi_i')^2$$

$$\Rightarrow M^* = \int_0^L \mu\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2dx + \frac{M}{2}\times\left(1-\cos\frac{\pi\times 4L/3}{2L}\right)^2 + M\times\left(1-\cos\frac{\pi L}{2L}\right)^2 + \frac{ML^2}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{M}{2}\,\frac{L^2}{4}$$

$$\Rightarrow M^* = 0,228\mu L + \frac{M}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + M = 0,228\mu L + 1,009M + \frac{ML^2}{2}\left(\frac{\pi}{2L}\sin\frac{\pi\times L}{2L}\right)^2 + \frac{1}{2}\,\frac{M}{2}\times\frac{4L^2}{9}\times\left(\frac{\pi}{2L}\sin\frac{\pi\times 4L/3}{2L}\right)^2 = 0,228\mu L + 1,009M + \frac{\pi^2M}{8} + \frac{1}{2}\times\frac{M}{2}\times\cancel{\frac{4L^2}{9}}\times\cancel{\frac{\pi^2}{4L^2}}\times\frac{3}{4} = \frac{\pi^2M}{48}$$

$$C^* = \int_0^L c(x)[\psi(x)]^2dx + \sum_i c_i\psi_i^2 = c\left(1-\cos\frac{\pi L}{2L}\right)^2 = c$$

$$K^* = \int_0^L EI(\psi''(x))^2dx + \int_0^L k(x)(\psi(x))^2dx + \sum k_i\psi_i^2 =$$

$$K^* = \int_0^L EI\left(\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2dx + \int_0^L k(x)(\psi(x))^2dx + \sum k_i\psi_i^2$$

$$K^* = \frac{\pi^4}{32}\frac{EI}{L^3} + k\left(1-\cos\frac{\pi\times L/2}{2L}\right)^2 = \frac{\pi^4}{32}\frac{EI}{L^3} + 0,086k$$

$$P^*(t) = P(t)\left[1-\cos\frac{\pi}{3}\right] = 0,5P(t)$$

1

$\int y\,dA \qquad \int y^2\,dA$

$\int x\,dA$

$\frac{\pi}{2l}\sin\frac{\pi x}{2l}$

$\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2$

$\frac{\pi^2}{l}$

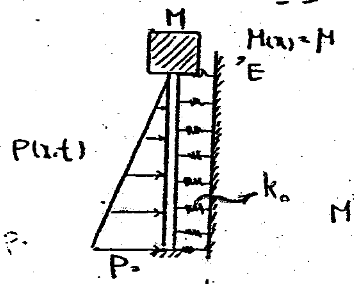
$I_o \quad \frac{1}{2}M(\text{شعاع})^2$

3

$l \qquad \frac{1}{3}ml^2$

$I_o = \frac{1}{3}ml^2$

۷. در صورتیکه ستون نشان داده شده در شکل دارای صلبیت خمشی EI و جرم در واحد طول M تحت اثر بارگذاری خطی مطابق شکل قرار گرفته و به علاوه روی تکیه گاه الاستیک قرار داشته باشد مطلوبست تعیین معادله حرکت.



$$M^*\ddot{Y} + C^*\dot{Y} + K^*Y = P^*(t) \qquad \psi(x) = 1-\cos\frac{\pi x}{2L}$$

$$M^* = \int_0^L M(\psi(x))^2 dx + \sum_i m_i \psi_i^2 + \sum I_{0_i}(\psi_i')^2$$

$$\Rightarrow M^* = \int_0^L M\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx + M\left(1-\cos\frac{\pi \times L}{2L}\right)^2 = 0.228\,ML + M + \frac{1}{2}ML^2\left(+\frac{\pi}{2L}\sin\frac{\pi x}{2L}\right)^2$$

$$C^* = \int_0^L C(x)(\psi(x))^2 dx + \sum_i C_i \psi_i^2 = 0$$

$$K^* = \int_0^L EI(\psi''(x))^2 dx + \int_0^L k(x)(\psi(x))^2 dx + \sum K_i \psi_i^2$$

$$\Rightarrow K^* = \int_0^L EI\left(\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx + \int_0^L k_0\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = \frac{\pi^4}{32}\frac{EI}{L^3} + 0.228\,kL$$

$$P^*(t) = \int_0^L P(x,t)\psi(x)\,dx + \sum P_i \psi_i$$

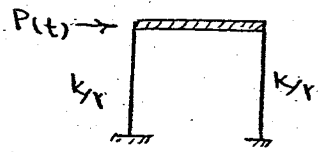
$$\Rightarrow P^*(t) = \int_0^L \left(P_0 - P_0\frac{x}{L}\right)\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)dx = P_0\int_0^L \left(1-\frac{x}{L}\right)\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)dx$$

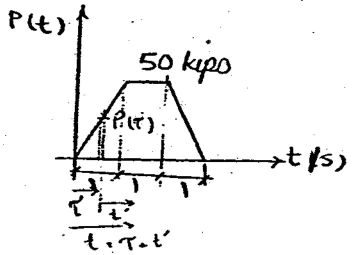
$$\Rightarrow P^*(t) = \frac{LP_0}{2} - \frac{4LP_0}{\pi^2}$$

$$\Rightarrow P^*(t) = 0.095\,P_0L$$

- در مثال حل شده اگر زمان اعمال نیرو به صورت شکل مقابل تغییر یافته باشد مطلوبست تعیین تاریخچه $x(t)$ و مقادیر آن در لحظات $t = 1s, 2s, 3s$

$W_t = 2000$ kips , $k = 51.1$ k/in





$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2000}{386\times 51.1}} = 2s < 4s = t_d$$

← اثر نیرو به صورت ضربه نبوده و تابع تحت یک بارگذاری اختیاری قرار دارد.

$$\Rightarrow x(t) = \int_0^t \frac{P(\tau)}{m\omega_n}\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{51.1\times 386}{2000}} = 3.14 \ \text{rad/s} \qquad m = \frac{W}{386} = \frac{2000}{386} = 5.18$$

$$\Rightarrow x(t) = \int_0^t \frac{P(\tau)}{\underset{16.27}{5.18\times 3.14}}\sin\pi(t-\tau)\,d\tau$$

$$\rightarrow x(t) = \int_0^t \frac{P(\tau)}{16.27}\sin\pi(t-\tau)\,d\tau$$

$$t = 1s \rightarrow x(1) = \int_0^1 \frac{50\tau}{16.27}\sin\pi(1-\tau)\,d\tau = \frac{50}{16.27}\times 0.318 = 0.977$$

$$t = 2s \rightarrow x(2) = \int_0^1 \frac{50\tau}{16.27}\sin\pi(1-\tau)\,d\tau + \int_1^2 \frac{50}{16.27}\sin\pi(2-\tau)\,d\tau = 2.93\ \text{in}$$

$$t = 3s \rightarrow x(3) = \int_0^1 \frac{50\tau}{16.27}\sin\pi(1-\tau)\,d\tau + \int_1^2 \frac{50}{16.27}\sin\pi(2-\tau)\,d\tau + \int_2^3 \frac{(-50\tau+50)}{16.27}\sin\pi(3-\tau)\,d\tau$$

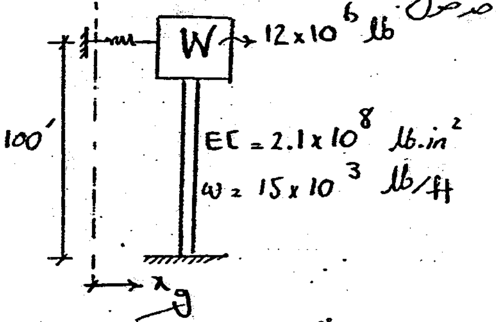
$$\Rightarrow x(3) = 2.91\ \text{in}$$

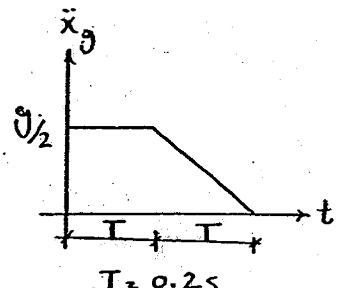
$$\frac{50}{2.27}\int_0^{0.5} \sin 2\pi\tau \ \sin\left(2.27 - 6.34\tau\right)$$

مریم شکیبا ۸۱۲۴۰۳۰ سری ⑥

- سازه شکل زیر مفروض است درصورتیکه این سازه تحت اثر حرکت زمین قرار بگیرد که دیاگرام شتاب زمین بصورت شکل دوم باشد مطلوبست تعیین: معادله حرکت، تابع تغییرمکان، مقدار تغییرمکان در لحظه $t=0.2s$ و نیروی وارده در همین لحظه، ماکزیمم تغییرمکان و برش پایه و برش در واحد طول

$k=9\times10^4$ lb/ft





$V_{(x,t)}=\psi_{(x)}\cdot Y_{(t)}$

$\psi_{(x)}=1-\cos\frac{\pi x}{2L}$

$\ddot{x}_{g(t)}=-2.5gt+g$

معادله حرکت $\quad M^*\ddot{Y}+C^*\dot{Y}+k^*Y=P^*_{(t)}$

$$M^*=\int_0^L M_{(x)}[\psi_{(x)}]^2dx+\sum_i m_i\psi_i^2+\sum I_{0i}\cdot\psi_i'^2=\int_0^L M\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2dx+\frac{W}{g}\times1+0$$

$$\rightarrow M^*=0.2267\mu L+\frac{W}{g}=0.2267\times\frac{15\times10^3\times100}{32.2}+\frac{12\times10^6}{32.2}=\cancel{712720.81}\ \text{۳۸۲۲۹۱,۹۳}\ lb/ft/s^2$$

$$k^*=\int_0^L EI(\psi''_{(x)})^2dx+\int_0^L k_{(x)}(\psi_{(x)})^2dx+\sum k_i\psi_i^2=\int_0^L EI\left(\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2+k\times1^2$$

$$\rightarrow k^*=EI\times\frac{\pi^4}{16L^4}\times\frac{L}{2}+k=\frac{2.1\times10^8}{12^2}\times\frac{\pi^4}{32\times L^3}+9\times10^4=40004.439$$

$$\bar{k}=\int_0^L M_{(x)}\psi_{(x)}dx+m=\int_0^L M\times\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)dx+\frac{W}{g}=0.363\mu L+\frac{W}{g}=\cancel{917741.15}\ \text{۳۸۹۵۸۰,۷۸}$$

$$\rightarrow P^*(t)=-\bar{k}\ddot{x}_{g(t)}$$

تعیین تابع تغییرمکان:

$$V_{(t)}=\int_0^t \ddot{x}_{g(\tau)}e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_D(t-\tau)\,d\tau$$

$$V_{(x,t)}=\frac{\psi_{(x)}\cdot\bar{k}}{M^*\cdot\omega_D}\cdot V_{(t)}\quad,\quad \omega=\sqrt{\frac{k^*}{M^*}}=\sqrt{\frac{40004.439}{712720.81}}=0.237s\rightarrow T=26.52s$$

$$V_{(t)_1}=\int_0^t\frac{g}{2}\times\sin\omega(t-\tau)\,d\tau=\frac{g}{2}\left(\frac{1}{\omega}-\frac{\cos\omega t}{\omega}\right)\qquad 0\leqslant t\leqslant0.2s$$

$$V(t=0.2)=\frac{32.2}{2}\left(\frac{1}{0.237}-\frac{\cos(0.237\times0.2)}{0.237}\right)=0.0763$$

$$\dot{V}_{(t)}=\frac{g}{2}\times\sin\omega t\quad\rightarrow\quad\dot{V}_{(t=0.2)}=0.763$$

$$V_{(t)_2} = V_{(t=0.2)} \cos\omega(t-0.2) + \frac{\dot{V}_{(t=0.2)}}{\omega} \sin\omega(t-0.2) + \int_{0.2}^{t} (-2.5g\tau + g) \sin\omega(t-\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow V_{(t)_2} = 0.0763 \cos\omega(t-0.2) + 3.22 \sin\omega(t-0.2) + g\left(-2.5\frac{t}{\omega} - \frac{\cos\omega(t-0.2)}{2\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{5\sin\omega(t-0.2)}{2\omega^2}\right.$$

$$0.2 \leq t \leq 0.4s$$

$$V_{(t=0.4)_2} = .0763\cos(0.237\times0.2) + 3.22\sin(0.237\times0.2) + 32.2\left(-2.5\times\frac{0.4}{0.237} - \right.$$

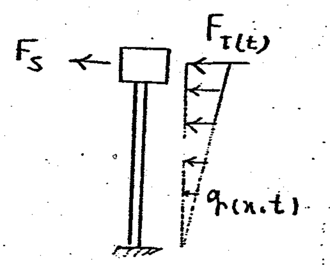
$$\left. - \frac{\cos(0.237\times0.2)}{2\times0.237} + \frac{1}{0.237} + \frac{5\sin(0.237\times0.2)}{2\times0.237^2}\right) = 0.28$$

$$\dot{V}_{(t)_2} = -0.0763\,\omega \sin\omega(t-0.2) + 3.22\,\omega\cos\omega(t-0.2) + g\left(\frac{-2.5}{\omega} + \frac{\sin\omega(t-0.2)}{2} + \frac{5\cos\omega(t-0.2)}{2\omega}\right)$$

$$\Rightarrow \dot{V}(t=0.4)_2 = 1.143$$

$$\Rightarrow V_{(t)_3} = V_{(t=0.4)} \cos\omega(t-0.4) + \frac{\dot{V}_{(t=0.4)}}{\omega} \sin\omega(t-0.4) \qquad t \geq 0.4s$$

$$\Rightarrow V_{(t)_3} = 0.28\cos\omega(t-0.4) + 4.823\sin\omega(t-0.4)$$



$$q_{(x,t)} = \mu\omega^2\varphi_{(x)} \cdot Y_{(t)} \qquad \ddot{Y}_{(t)} = \omega^2 Y_{(t)}$$

$$F_{I\,(H,t)} = M\omega^2\psi_{(L)}\, Y_{(t)}$$

$$F_{S\,(H,t)} = k_s \times \psi_{(L)} Y_{(t)}$$

$$Q_{B\,(x=0,t)} = \int_0^L q_{(x,t)}\, dx + F_I\,(L,t) + F_{S\,(L,t)}$$

$$\Rightarrow Q_{B\,(x=0,t)} = \int_0^L \mu\cdot\psi_{(x)}\cdot\ddot{Y}_{(t)} + M\psi_{(L)}^{1}\cdot\ddot{Y}_{(t)} + k_s\times\psi_{(L)}^{1}\cdot Y_{(t)}$$

$$\Rightarrow Q = \int_0^L \mu\times\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)\ddot{Y}_{(t)}\, dx + M\ddot{Y}_{(t)} + k_s Y_{(t)}$$

$$\Rightarrow Q_{B\,(x=0,t)} = \mu\ddot{Y}_{(t)} \underbrace{\int_0^L \left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)dx}_{0.363L} + M\ddot{Y}_{(t)} + k_s Y_{(t)}$$

$$\Rightarrow Q_{B\,(x=0,t)} = 0.363\mu L\,\ddot{Y}_{(t)} + M\ddot{Y}_{(t)} + k_s Y_{(t)} \qquad Y_{(t)} = \frac{\bar{E}}{M^*\omega_D} \cdot V_{(t)}$$

$$\Rightarrow Q_{B\,(x=0,\,t=0.2s)} = 0.363\times15\times10^3\times100\times\frac{32.2}{2} + 12\times10^6\times\frac{32.2}{2} + 9\times10^4\times\frac{917741.15\times.076}{712720.81\times0.237}$$

$$\Rightarrow Q_{B\,(0,\,0.2s)} = 2.0198\times10^8$$

$$\begin{cases} V_{(t)} = \frac{g}{2}\left(\frac{1}{\omega} - \frac{\cos\omega t}{\omega}\right) & 0 \leqslant t \leqslant 0.2s \\ V_{(t)} = .0763\cos\omega(t-0.2) + 3.22\sin\omega(t-0.2) + g\left(\frac{-2.5t}{\omega} - \frac{\cos\omega(t-0.2)}{2\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{5\sin\omega(t-0.2)}{2\omega^2}\right) & 0.2 \leqslant t \leqslant 0.4 \\ V_{(t)} = 0.28\cos\omega(t-0.4) + 4.823\sin\omega(t-0.4) & t \geqslant 0.4s \end{cases}$$

$$\dot V_{(t)_1} = \frac{g}{2}\sin\omega t = 0 \quad \omega t = k\pi \Rightarrow t = \frac{k\pi}{\omega} \xrightarrow{13.26s} V_{(t)} = \frac{g}{2}\left(\frac{1}{\omega} - \frac{\cos\pi}{\omega}\right) = \frac{g}{\omega} = 135.86'$$

$$\dot V_{(t)_2} = -.0763\omega\sin\omega(t-0.2) + 3.22\omega\cos\omega(t-0.2) + g\left(-\frac{2.5}{\omega} + \frac{\sin\omega(t-0.2)}{2} + \frac{5\cos\omega(t-0.2)}{2\omega}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \dot V_{(t)_2} = -.0181\sin\omega(t-0.2) + 0.763\cos\omega(t-0.2) + g\left(-10.55 + \frac{\sin\omega(t-0.2)}{2} + \frac{5\cos\omega(t-0.2)}{2\omega}\right) = 0$$

$$\rightarrow \dot V_{(t)_2} = 16.0819\sin\omega(t-0.2) + 340.426\cos\omega(t-0.2) - 339.662 = 0 \quad 10.55$$

$$\Rightarrow t = 0.72s \quad > 0.4s$$

$$\dot V_{(t)_3} = -0.28\omega\sin\omega(t-0.4) + 4.823\omega\cos\omega(t-0.4) = 0$$

$$\rightarrow \dot V_{(t)_3} = -0.06636\sin\omega(t-0.4) + 1.743\cos\omega(t-0.4) = 0$$

$$\rightarrow t = 6.58s \sim V_{max_3} = 4.83'$$

$$V_{(t)_2} = -67.256\cos\omega(t-0.2) + 1436.394\sin\omega(t-0.2) + 135.86 - 339.865t$$

$$Q_{(x,t)} = \int_0^L q(x,t)dx + F_I(L,t) + F_S(L,t)$$

$$q_{(x,t)} = \mu(x)\varphi(x)\cdot\frac{\bar k\omega}{m^*}V_{(t)} = \mu(x)\cdot\varphi(x)\cdot\frac{\int_0^L \mu(x)\varphi(x)dx\cdot\omega}{m^*}V_{(t)}$$

$$F_I(L,t) = M\cdot\omega^2\cdot\phi(H)\cdot Y_{(t)} = M\omega^{\cancel{2}}\cdot\phi(L)\cdot\frac{\overset{M\phi(L)}{\bar k}}{m^*\cancel{\omega}}V_{(t)} = M\omega\cdot\phi(L)\cdot\frac{M}{m^*}V_{(t)}$$

$$F_S(L,t) = k_{s_1}\cdot\phi(L)\cdot Y_{(t)} = k_S\cdot\cancel{\phi(L)}^{1}\cdot\frac{\bar k}{m^*\omega}V_{(t)}$$

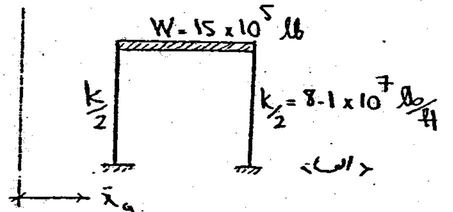
$$\Rightarrow Q_B(x=0,t) = \left[\int_0^L \mu(x)\varphi(x)dx + M\right]\underbrace{\ddot Y_{(t)}}_{\omega^2 Y_{(t)}} + k_S\cdot\phi(L)\cdot Y(t)$$

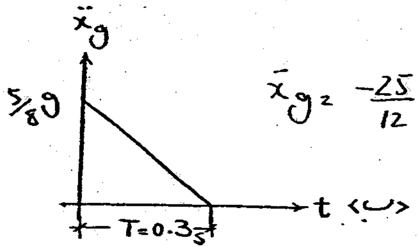
$$\Rightarrow Q_B(0,t) = \left[\left(\int_0^L \mu(x)\varphi(x)dx + M\right)\omega^2 + k_S\right]Y_{(t)}$$

$$\Rightarrow Q_B(0,t) = \left[\left(0.363\mu L + \frac{W}{g}\right)\omega^2 + k_S\right]\times\frac{\bar k}{M^*\omega_D}\cdot V_{(t)}$$

$$\Rightarrow Q_B(0,6.58s) = \left[917741.15\times0.237^2 + 4\times10^4\right]\times\frac{917741.15}{712720.81\times0.237}\times4.83' = 2.4\times10^6\ lb$$

۹ـ قاب یک طبقه شکل زیر تحت اثر زلزله‌ای با دیاگرام شتاب شکل ب قرار گرفته است مطلوبست تعیین معادله حرکت، تابع تغییرمکان، تابع برش پایه و هم چنین مقادیر ماکزیمم هریک از آنها.





$$\ddot{x}_g = \frac{-25}{12} g t + \frac{5}{8} g$$

$$x_{(t)} = \int_0^t \frac{P_{eff}(\tau)}{m\omega_D} e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_D (t-\tau)\, d\tau \qquad \xi = 0$$

$$\Rightarrow x_{(t)} = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t P_{eff}(\tau) \sin\omega_n (t-\tau)\, d\tau$$

$$P_{eff}(\tau) = -m\ddot{x}_g = -mg\left(\frac{-25}{12}t + \frac{5}{8}\right) \qquad 0 \leqslant t \leqslant 0.3s$$

$$\Rightarrow x_{(t)} = \frac{1}{\cancel{m}\omega_n} \int_0^{0.3} -\cancel{m}g\left(\frac{-25}{12}\tau + \frac{5}{8}\right) \sin\omega_n (0.3-\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow x_{(t)} = \frac{-g}{\omega_n} \int_0^t \left(\frac{-25}{12}\tau + \frac{5}{8}\right) \sin\omega_n (t-\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow x_{(t)} = \frac{-g}{\omega_n^2}\left(\frac{-25}{12}\tau \cos\omega(t-\tau) + \frac{5}{8}\cos\omega(t-\tau) - \frac{25}{12\omega}\sin\omega(t-\tau)\Big]_0^t\right)$$

$$\Rightarrow x_{(t)} = \frac{-g}{\omega_n^2}\left(\frac{5}{8}(1-\cos\omega t) - \frac{25}{12}\left(t - \frac{\sin\omega t}{\omega}\right)\right) \qquad 0 \leqslant t \leqslant 0.3s$$

$X_0 = x_{(T)}$, $\dot{X}_0 = \dot{x}_{(T)}$ بعد از صفر شدن شتاب ارتعاش آزاد خواهیم داشت.

$$x_{(t)} = x_{(T)} \cos\omega_n(t-T) + \frac{\dot{x}_{(T)}}{\omega_n} \sin\omega_n(t-T) \qquad t \geqslant 0.3s$$

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_n^2 x = -m\ddot{x}_{g(t)} & 0 \leqslant t \leqslant 0.3s \\ \ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 & 0.3 \leqslant t \end{cases}$$ معادله حرکت

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2\times 8.1\times 10^{7}\times 32.2}{15\times 10^{5}}} = 58.97 \ rad/s$$

تعیین تغییر مکان max x از حالت اول

$$\Rightarrow x(t) = \frac{-g}{\omega^2}\left(\frac{5}{8}(1-\cos\omega t) - \frac{25}{12}\left(t - \frac{\sin\omega t}{\omega}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{-g}{\omega^2}\left(-\frac{25}{12} + \frac{5}{8}\omega\sin\omega t + \frac{25}{12}\cos\omega t\right) = 0 \quad \rightarrow t = 0,\ 0.6s > 0.3$$

$\rightarrow$

$$x(t) = X(T)\cos\omega_n(t-T) + \frac{\dot{X}(T)}{\omega_n}\sin\omega_n(t-T)$$

$$X(0.3) = \frac{-g}{\omega^2}\left(\frac{5}{8}(1-\cos 0.3\times 58.97) - \frac{25}{12}\left(0.3 - \frac{\sin(0.3\times 58.97)}{58.97}\right)\right) = 2.618\times 10^{-3}$$

$$\dot{X}(T=0.3) = \frac{-g}{\omega^2}\left(-\frac{25}{12} + \frac{5}{8}\times 58.97\times\sin(0.3\times 58.97) + \frac{25}{12}\times\cos(0.3\times 58.97)\right) = 0.324$$

$$\Rightarrow x(t) = 2.618\times 10^{-3}\cos\omega(t-\overset{0.3}{T}) + \frac{0.324}{58.97}\times\sin\omega(t-\overset{0.3}{T}) \qquad t \geq 0.3s$$

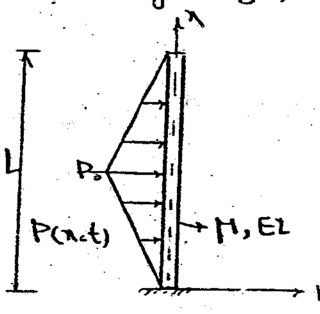
$$\rightarrow \dot{x}(t) = -2.618\times 10^{-3}\omega\sin\omega(t-0.3) + \frac{0.324\omega}{58.97}\cos\omega(t-0.3) = 0 \rightarrow t = 0.319s$$

$$\rightarrow x(0.319) = 6.0861\times 10^{-3}$$

$$Q_{max} = k\cdot x_{max} = 2\times 8.1\times 10^{7}\times 6.0861\times 10^{-3} = 1111{,}482\ lb = 1{,}11\times 10^{6}\ lb$$

- در صورتیکه سازه تمرین ۱ تحت اثر حرکت زمین قرار گیرد مطلوبست تعیین معادله حرکت برای دو حالت

الف) موجود بودن بارگذاری جانبی ب) با حذف بارگذاری جانبی برای سه تابع شکلی.



ب)

$$M^*\ddot{Y} + k^*Y = P^*_{eff}(t) \qquad M^* = \int_0^L m(x)\,\psi^2_{(x)}\,dx$$

$$k^* = \int_0^L EI\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)^2 dx \qquad P^*_{eff} = -\ddot{x}_{g(t)}\,\bar{k}$$

$$\bar{k} = \int_0^L m(x)\,\psi(x)\,dx$$

۱) $\psi(x) = 1-\cos\frac{\pi x}{2L}$

$$\Rightarrow M^* = \int_0^L m \times \left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = 0.227\,mL$$

$$k^* = \int_0^L EI\left(\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = EI \times \frac{\pi^4}{32L^3}$$

$$\bar{k} = \int_0^L m \times \left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)dx = m\left(-\frac{2L}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2L} + x\Big]_0^L\right) = 0.364\,mL$$

$$\Rightarrow 0.227\,mL\ddot{Y} + \frac{\pi^4 EI}{32L^3}Y = -0.363\,mL\,\ddot{x}_{g(t)}$$

۲) $\psi(x) = \frac{x^2}{L^2}$

$$M^* = \int_0^L m\left(\frac{x^2}{L^2}\right)^2 dx = \frac{1}{5}mL$$

$$k^* = \int_0^L EI\left(\frac{2}{L^2}\right)^2 dx = \frac{4EI}{L^3}$$

$$\bar{k} = \int_0^L m \times \frac{x^2}{L^2}dx = \frac{m}{L^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big]_0^L = \frac{1}{3}mL$$

$$\Rightarrow 0.2\,mL\ddot{Y} + \frac{4EI}{L^3}Y = -\frac{1}{3}mL\,\ddot{x}_{g(t)}$$

۳) $\psi(x) = \sin\frac{\pi x}{2L}$

$$M^* = \int_0^L m\left(\sin\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = 0.5\,mL$$

$$k^* = \int_0^L EI\left(\frac{-\pi^2}{4L^2}\sin\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = \frac{\pi^4 EI}{32L^3}$$

$$\bar{k} = \int_0^L m \times \sin\frac{\pi x}{2L}dx = m \times \frac{-2L}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2L}\Big]_0^L = m \times \frac{2L}{\pi}$$

$$\Rightarrow 0.5\,mL\ddot{Y} + \frac{\pi^4 EI}{32L^3}Y = -\frac{2}{\pi}mL\,\ddot{x}_{g(t)}$$

الف)

$$\delta W_E = \int_0^L P(x,t)\cdot\delta v(x,t)\,dx$$ کار مجازی نیروهای خارجی

$$\delta W_I = \int_0^L EI\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)^2 Y(t)\cdot\delta Y(t)\,dx + \ddot{Y}\cdot\delta Y\int_0^L M(x)\,\psi^2_{(x)}\,dx + \delta Y\,\ddot{x}_{g(t)}\int_0^L M(x)\,\psi(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \delta W_E = \int_0^L P(x,t)\cdot\psi(x)\,\delta Y(t)\,dx$$

$$\delta W_E = \delta W_I$$

$$\Rightarrow \ddot{Y}\int_0^L M(x)\,\psi^2_{(x)}\,dx + Y\int_0^L EI\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)^2 dx = \int_0^L P(x,t)\,\psi(x)\,dx - \ddot{x}_{g(t)}\int_0^L M(x)\,\psi(x)\,dx$$

۱) $\psi(x) = 1-\cos\frac{\pi x}{2L}$

$$\Rightarrow M^* = \int_0^L M\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = ۰٫۲۲۷\,ML$$

$$K^* = \int_0^L EI\left(\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = \frac{\pi^4 EI}{۳۲L^3}$$

$$\int_0^{L/2}\frac{2P_0}{L}x\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)dx + \int_{L/2}^{L}\left(-\frac{2P_0}{L}x+2P_0\right)\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)dx = ۰٫۱۶۴\,P_0L$$

$$\int_0^L M\times\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)dx = ۰٫۳۶۳۴\,ML$$

$$\Rightarrow ۰٫۲۲۷\,ML\ddot{Y} + \frac{\pi^4 EI}{۳۲L^3}Y = ۰٫۱۶۴\,P_0L - ۰٫۳۶۳۴\,ML\,\ddot{x}_{g(t)}$$

۲) $\psi(x) = \frac{x^2}{L^2}$

$$M^* = \int_0^L M\times\left(\frac{x^2}{L^2}\right)^2 dx = ۰٫۲\,ML$$

$$K^* = \int_0^L EI\left(\frac{2}{L^2}\right)^2 dx = \frac{4EI}{L^3}$$

$$\int_0^{L/2}\frac{2P_0}{L}x\left(\frac{x^2}{L^2}\right)dx + \int_{L/2}^{L}\left(-\frac{2P_0}{L}x+2P_0\right)\left(\frac{x^2}{L^2}\right)dx = ۰٫۱۴۶\,P_0L$$

$$\int_0^L M\left(\frac{x^2}{L^2}\right)dx = \frac{1}{3}ML$$

$$\Rightarrow ۰٫۲\,ML\ddot{Y} + \frac{4EI}{L^3}Y = ۰٫۱۴۶\,P_0L - \frac{1}{3}ML\,\ddot{x}_{g(t)}$$

مریم شکیبا   ۸۱۲۴۰۳۰   سری ۷

- سازه شکل زیر مفروض است درصورتیکه بتوان برای طراحی این سازه در مقابل زلزله از شکل A استفاده کرد و میرایی سازه ۵٪ میرایی آن را درنظر گرفته شود مطلوبست تعیین ماکزیمم تغییرمکان و برش و برش در واحد طول برای حالتی که ماکزیمم شتاب زمین 0.35g درنظر گرفته شود.

$\mu L = \frac{W}{g}$

$\xi = 5\%$

$T = 1s$ $\longrightarrow S_a = 0.17g \ , \ S_d = 1.7\ in \ , \ S_v = 105\ in/s$ $a = 0.2g$

شتاب زمین $= 0.35g \Rightarrow \times\frac{0.35}{0.2} \Rightarrow S_a = 0.2975g \ , \ S_d = 2.975\ in \ , \ S_v = 183.75\ in/s$

$$V(x,t) = \frac{\psi(x)\bar{k}}{m^* \omega_D} \cdot V(t) \Rightarrow V_{max}(x) = \psi(x) \cdot \frac{\bar{k}}{m^* \omega_D} \cdot S_v = \psi(x) \cdot \frac{\bar{k}}{m^*} S_d$$

$$\bar{k} = \int_0^L \mu(x)\psi(x)\,dx + m = \int_0^L \mu (1-\cos\frac{\pi x}{2L})\,dx + \frac{2W}{g} = 0.363\mu L + \frac{2W}{g}$$

$$M^* = \int_0^L \mu(x)(\psi(x))^2 dx + \sum m_i \psi_i^2 = \int_0^L \mu (1-\cos\frac{\pi x}{2L})^2 dx + \frac{2W}{g} \times 1 = 0.2267\mu L + \frac{2W}{g}$$

$$k^* = \int_0^L EI(\psi''(x))^2 dx = \int_0^L EI\left(\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = \frac{\pi^4 EI}{32L^3}$$

$$\Rightarrow V_{max}(x) = (1-\cos\frac{\pi x}{2L}) \times \frac{0.363\mu L + \frac{2W}{g}}{0.2267\mu L + \frac{2W}{g}} \times 2.975 = \frac{0.363 \times \frac{W}{g} + \frac{2W}{g}}{0.2267\frac{W}{g} + \frac{2W}{g}} \times 2.975$$

$$\Rightarrow V_{max} = 3.157''$$

$$q_{max}(x) = \mu(x)\psi(x)\frac{\bar{k}}{m^*} \cdot S_a = \mu(1-\cos\frac{\pi x}{2L}) \times \frac{\bar{k}}{M^*} \cdot 0.2975g$$

$$q_{max}(x) = \mu(1-\cos\frac{\pi x}{2L}) \cdot \frac{0.363\mu L + \frac{2W}{g}}{0.2267\mu L + \frac{2W}{g}} \cdot 0.2975g = 0.316\mu g$$

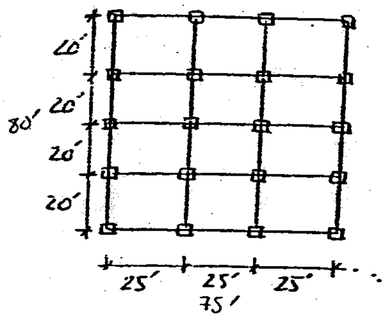
$$Q_{max} = \frac{\bar{k}^2}{m^*} S_a = \frac{(2.363\,W/g)^2}{2.2267\frac{W}{g}} \times 0.2975g = 0.746W$$

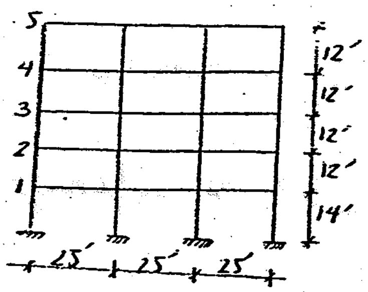
$$Q_B(x,t) = \int_0^L q(x,t)\,dx + F_I(L,t) = \frac{\bar{k}^2}{m^*} \cdot \omega V(t) + \mu \cdot \frac{\bar{k}}{m^*}\omega V(t)$$ ✓

مریم شکیبا ۸۱۲۴۰۳۰ سری ۸

- ساختمان ۵ طبقه بتنی شکل زیر مفروض است در صورتیکه بار مرده در بام 150 psf و در طبقات دیگر 250 psf و بار زنده در بام 30 psf و در طبقات دیگر 80 psf در نظر گرفته شود و ابعاد ستون ها $16'' \times 16''$ ، $E_c = 3.6\times 10^6$ psi فرض شود مطلوبست تعیین جرم معادل، سختی معادل، پریود اصلی سازه و معادله حرکت آن در مقابل زلزله

برای سه حالت تابع شکلی a) $\psi(x) = \sin\frac{\pi x}{2L}$ ، b) $\psi(x) = \frac{x}{L}$ ، c) $\psi(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2L}$





$k_i = \frac{12EI}{L^3}$

$k_{story} = \sum k_i = 20k_i$

$I = \frac{16^4}{12} = 5461.33\ in^4$

$$k_{2,3,4,5} = 20 \times \frac{12 \times (3.6\times10^3) \times 5461.33}{(12\times12)^3} = 1580.25\ kips/in$$

$$k_1 = 20 \times \frac{12 \times 3.6\times10^3 \times 5461.33}{(12\times14)^3} = 995.14\ kips/in$$

بام $M = 150 \times 3 \times 25 \times 4 \times 20 + 0.2 \times 30 \times 3 \times 25 \times 4 \times 20 = 936000\ lb = 936\ kips$

طبقات $M = 250 \times 75 \times 80 + 0.2 \times 80 \times 75 \times 80 = 1596000\ lb = 1596\ kips$

$L = 62'$ a) $\psi(x) = \sin\frac{\pi x}{2L}$

تراز	k	M	ψ_i	$\Delta\psi_i$	$M\psi_i^2$	$k\Delta\psi_i^2$
5		936	1		936	
	1580.25			.046		3.344
4		1596	0.959		1452.55	
	1580.25			0.133		27.953
3		1596	0.821		1075.77	
	1580.25			0.209		69.03
2		1596	0.612		597.77	
	1580.25			0.265		110.97
1		1596	0.397		192.17	
	995.14			0.397		119.824
0			0			
					4254.26	$k^* = 331.121$

$$m^* = \frac{4254.26}{12 \times 32.2} = 11.01$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} = \sqrt{\frac{331.121}{11.01}} = 5.48\ rad/s \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 1.146\ s$$

معادله حرکت $11.01\ddot{Y} + 331.121Y = 0$

$\psi_{(x)} = \frac{x}{L}$ (b

i	k	M	ψ_i	$\Delta\psi_i$	$M\psi_i^2$	$k\Delta\psi_i^2$
5		936	1		936	
	1580.25			0.194		59.47
4		1596	0.806		-1036.82	
	1580.25			0.193		58.86
3		1596	0.613		559.73	
	1580.25			0.194		59.47
2		1596	0.419		280.2	
	1580.25			0.193		58.86
1		1596	0.226		81.52	
	995.14			0.226		50.83
0					2894.27	$k^* =$ 287.49

$$\Rightarrow m^* = \frac{2899.27}{12 \times 32.2} = 7.49$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} = \sqrt{\frac{287.49}{7.49}} = 6.195 \ rad/s \Rightarrow T = 2\pi/\omega = 1.0145$$

$$\Rightarrow \quad 7.49\ddot{Y} + 287.49Y = 0$$

$\psi_{(x)} = 1 - \cos\frac{\pi x}{2L}$ (c

i	k	M	ψ_i	$\Delta\psi_i$	$M\psi_i^2$	$k\Delta\psi_i^2$
5		936	1		936	
	1580.25			0.299		141.276
4		1596	0.701		784.276	
	1580.25			0.272		116.913
3		1596	0.429		293.729	
	1580.25			0.22		76.489
2		1596	0.209		69.715	
	1580.25			0.147		34.148
1		1596	0.062		6.135	
	995.14			0.062		3.826
0					2089.86	$k^* =$ 372.646

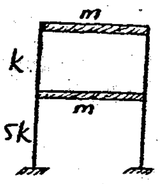
$$\Rightarrow m^* = \frac{2089.86}{12 \times 32.2} = 5.409$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} = \sqrt{\frac{372.646}{5.409}} = 8.3 \ rad/s \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.757 s$$

$$\rightarrow \quad 5.409\ddot{Y} + 372.646Y = 0$$

مریم شکیبا ۸۱۲۴۰۳۰ سری ⑨

سازه‌های در صفحه شکل زیر مفروض است مطلوبست تعیین فرکانس‌ها و مدهای متعلق به آنها و مقایسه فرکانس‌ها و مدهای مربوطه با جوابات مثال حل شده در کلاس.



$$[m]\{\ddot{x}\}+[k]\{x\}=\{0\} \quad (I)$$

$$\{x(t)\}=\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}\sin\omega t \Rightarrow \begin{bmatrix}-m_1\omega^2+k_1+k_2 & -k_2\\ -k_2 & -m_2\omega^2+k_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \quad (II)$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}-m_1\omega^2+k_1+k_2 & -k_2\\ -k_2 & -m_2\omega^2+k_2\end{vmatrix}=(-m_1\omega^2+k_1+k_2)(-m_2\omega^2+k_2)-k_2^2=0$$

$$m_1=m_2=m \qquad k_1=5k \qquad k_2=k$$

$$\Rightarrow (-m\omega^2+6k)(-m\omega^2+k)-k^2=0 \Rightarrow m^2\omega^4-km\omega^2-6mk\omega^2+6k^2-k^2=0$$

$$\Rightarrow m^2\omega^4-7km\omega^2+5k^2=0 \rightarrow \omega^2=\frac{7\pm\sqrt{29}}{2}\cdot\frac{k}{m} \Rightarrow \begin{cases}\omega_2=\left(\frac{7+\sqrt{29}}{2}\cdot\frac{k}{m}\right)^{1/2}\\ \omega_1=\left(\frac{7-\sqrt{29}}{2}\cdot\frac{k}{m}\right)^{1/2}\end{cases}$$

با قرار دادن $\omega=\omega_2$ در رابطه (II) خواهیم داشت

$$\begin{cases}\left(-m\times\frac{7+\sqrt{29}}{2}\cdot\frac{k}{m}+6k\right)X_1-kX_2=0\\ -kX_1+\left(-m\times\frac{7+\sqrt{29}}{2}\cdot\frac{k}{m}+k\right)X_2=0\end{cases}$$

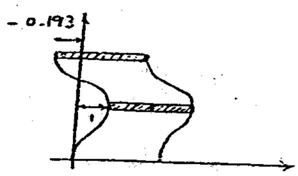
$$\Rightarrow \begin{cases}\left(-\frac{7+\sqrt{29}}{2}+6\right)kX_1-kX_2=0\\ -kX_1+\left(-\frac{7+\sqrt{29}}{2}+1\right)kX_2=0\end{cases} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1}=-0.193 < -0.62$$

با قرار دادن $\omega=\omega_1$ در رابطه II خواهیم داشت.

$$\begin{cases}\left(-m\times\frac{7-\sqrt{29}}{2}\cdot\frac{k}{m}+6k\right)X_1-kX_2=0\\ -kX_1+\left(-m\times\frac{7-\sqrt{29}}{2}\cdot\frac{k}{m}+k\right)X_2=0\end{cases}$$

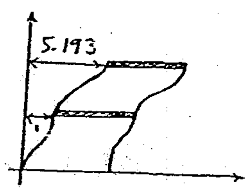
$$\rightarrow \begin{cases}\left(6-\frac{7-\sqrt{29}}{2}\right)kX_1-kX_2=0\\ -kX_1+\left(1-\frac{7-\sqrt{29}}{2}\right)kX_2=0\end{cases} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1}=5.193 > 1.62$$

$$\omega_2=2.488\sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \bar{X}_2=\begin{Bmatrix}1\\-0.193\end{Bmatrix}$$

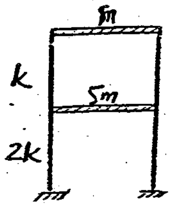


نمایش مود دوم ارتعاش

$$\omega_1=0.9\sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \bar{X}_1=\begin{Bmatrix}1\\5.193\end{Bmatrix}$$



نمایش مود اول ارتعاش



$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\} \quad (\mathrm{I})$$

$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \sin\omega t \rightarrow \begin{bmatrix} -m_1\omega^2+k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2+k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\mathrm{II})$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -m_1\omega^2+k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2+k_2 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad m_1 = 5m \quad k_1 = 2k \quad m_2 = m \quad k_2 = k$$

$$\Rightarrow (-m_1\omega^2 + k_1 + k_2)(-m_2\omega^2 + k_2) - k_2^2 = 0$$

$$\Rightarrow (-5m\omega^2 + 3k)(-m\omega^2 + k) - k^2 = 0 \Rightarrow 5m^2\omega^4 - 5mk\omega^2 - 3mk\omega^2 + 3k^2 - k^2 = 0$$

$$\Rightarrow 5m^2\omega^4 - 8mk\omega^2 + 2k^2 = 0 \rightarrow \omega^2 = \frac{4 \pm \sqrt{6}}{5}\cdot\frac{k}{m} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \left(\frac{4-\sqrt{6}}{5}\cdot\frac{k}{m}\right)^{1/2} \\ \omega_2 = \left(\frac{4+\sqrt{6}}{5}\cdot\frac{k}{m}\right)^{1/2} \end{cases}$$

با قرار دادن $\omega = \omega_1$ در رابطه II خواهیم داشت:

$$\rightarrow \begin{cases} \left(-5m \times \frac{4-\sqrt{6}}{5}\cdot\frac{k}{m} + 3k\right)X_1 - kX_2 = 0 \\ -kX_1 + \left(-m \times \frac{4-\sqrt{6}}{5}\cdot\frac{k}{m} + k\right)X_2 = 0 \end{cases}$$

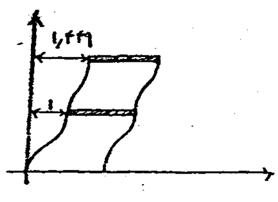
$$\Rightarrow \begin{cases} (\sqrt{6} - 4 + 3)kX_1 - kX_2 = 0 \\ -kX_1 + \left(1 - \frac{4-\sqrt{6}}{5}\right)kX_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1} = 1.449 \quad < 1.62$$

با قرار دادن $\omega = \omega_2$ در رابطه II خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \left(-5m \times \frac{4+\sqrt{6}}{5}\cdot\frac{k}{m} + 3k\right)X_1 - kX_2 = 0 \\ -kX_1 + \left(-m \times \frac{4+\sqrt{6}}{5}\cdot\frac{k}{m} + k\right)X_2 = 0 \end{cases}$$

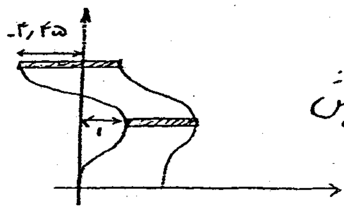
$$\Rightarrow \begin{cases} (-4 - \sqrt{6} + 3)kX_1 - kX_2 = 0 \\ -kX_1 + \left(1 - \frac{4+\sqrt{6}}{5}\right)kX_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1} = -3.449$$

$$\Rightarrow \omega_1 = 0.556\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \bar{X}^1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.449 \end{Bmatrix}$$

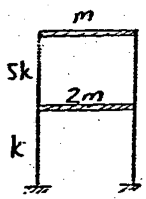


شکل اول مد ارتعاش

$$, \ \omega_2 = 1.135\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \bar{X}^2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -3.449 \end{Bmatrix}$$



شکل دوم مد ارتعاش



$$[m]\{\ddot{x}\}+[k]\{x\}=\{0\}$$

$$x(t)=\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}\sin\omega t \Rightarrow \begin{bmatrix}-m_1\omega^2+k_1+k_2 & -k_2\\ -k_2 & -m_2\omega^2+k_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \quad \text{II}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}-m_1\omega^2+k_1+k_2 & -k_2\\ -k_2 & -m_2\omega^2+k_2\end{vmatrix}=(-m_1\omega^2+k_1+k_2)(-m_2\omega^2+k_2)-k_2^2=0$$

$m_1=2m \ , \ k_1=k$

$m_2=m \ , \ k_2=5k \Rightarrow (-2m\omega^2+6k)(-m\omega^2+5k)-25k^2=0$

$$\Rightarrow 2m^2\omega^4-10mk\omega^2-6mk\omega^2+30k^2-25k^2=0$$

$$\Rightarrow 2m^2\omega^4-16mk\omega^2+5k^2=0 \rightarrow \omega^2=\frac{8\pm\sqrt{54}}{2}\cdot\frac{k}{m} \rightarrow \begin{cases}\omega_1=\left(\frac{8-\sqrt{54}}{2}\cdot\frac{k}{m}\right)^{1/2}\\ \omega_2=\left(\frac{8+\sqrt{54}}{2}\cdot\frac{k}{m}\right)^{1/2}\end{cases}$$

با قرار دادن $\omega=\omega_1$ در رابطه II خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\left(-2m\times\frac{8-\sqrt{54}}{2}\cdot\frac{k}{m}+6k\right)X_1-5kX_2=0\\ -5kX_1+\left(-m\times\frac{8-\sqrt{54}}{2}\cdot\frac{k}{m}+5k\right)X_2=0\end{cases}$$

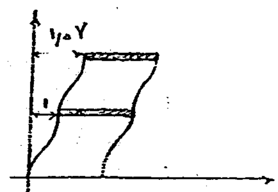
$$\rightarrow \begin{cases}(6-8+\sqrt{54})kX_1-5kX_2=0\\ -5kX_1+\left(5-\frac{8-\sqrt{54}}{2}\right)kX_2=0\end{cases} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1}=1.07<1.62$$

با قرار دادن $\omega=\omega_2$ در رابطه II خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\left(-2m\times\frac{8+\sqrt{54}}{2}\cdot\frac{k}{m}+6k\right)X_1-5kX_2=0\\ -5kX_1+\left(-m\times\frac{8+\sqrt{54}}{2}\cdot\frac{k}{m}+5k\right)X_2=0\end{cases}$$

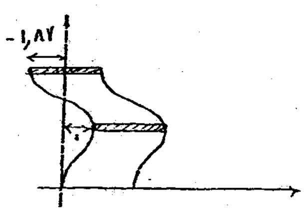
$$\rightarrow \begin{cases}(6-8-\sqrt{54})kX_1-5kX_2=0\\ -5kX_1+\left(5-\frac{8+\sqrt{54}}{2}\right)kX_2=0\end{cases} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1}=-1.87>-0.62$$

$$\omega_1=0.571\sqrt{\frac{k}{m}} \ , \quad X^1=\begin{Bmatrix}1\\1.07\end{Bmatrix}$$

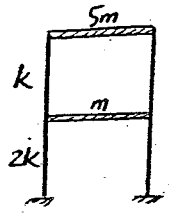


نمایش مد اول ارتعاش :

$$\omega_2=2.77\sqrt{\frac{k}{m}} \ , \quad X^2=\begin{Bmatrix}1\\-1.87\end{Bmatrix}$$



نمایش مد دوم ارتعاش



$$[m]\{\ddot{x}\}+[k]\{x\}=\{۰\}$$

$$\{x(t)\}=\begin{Bmatrix}X_۱\\X_۲\end{Bmatrix}\sin\omega t \Rightarrow \begin{bmatrix}-m_۱\omega^۲+k_۱+k_۲ & -k_۲\\ -k_۲ & -m_۲\omega^۲+k_۲\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_۱\\X_۲\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}۰\\۰\end{Bmatrix}$$

$$m_۱=m \quad , \quad m_۲=۵m \qquad k_۱=2k \quad , \quad k_۲=k$$

$$\Rightarrow (-m\omega^۲+۳k)(-۵m\omega^۲+k)-k^۲=۰ \rightarrow ۵m^۲\omega^۴-mk\omega^۲-۱۵mk\omega^۲+۳k^۲-k^۲=۰$$

$$\Rightarrow ۵m^۲\omega^۴-۱۶mk\omega^۲+۲k^۲=۰ \Rightarrow \omega^۲=\frac{۱۶\pm\sqrt{۲۱۶}}{۱۰}\cdot\frac{k}{m} \rightarrow \begin{cases}\omega_۱=\left(\frac{۸-\sqrt{۵۴}}{۲}\cdot\frac{k}{m}\right)^{\frac{۱}{۲}}\\ \omega_۲=\left(\frac{۸+\sqrt{۵۴}}{۲}\cdot\frac{k}{m}\right)^{۱/۲}\end{cases}$$

$$\rightarrow \omega=\omega_۱$$

$$\begin{cases}\left(-m\times\frac{۸-\sqrt{۵۴}}{۲}\cdot\frac{k}{m}+۳k\right)X_۱-kX_۲=۰\\ -kX_۱+\left(-۵m\times\frac{۸-\sqrt{۵۴}}{۲}\cdot\frac{k}{m}+k\right)X_۲=۰\end{cases}$$

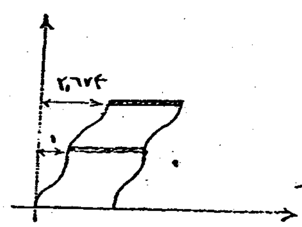
$$\rightarrow \begin{cases}\left(۳-\frac{۸-\sqrt{۵۴}}{۲}\right)kX_۱-kX_۲=۰\\ -kX_۱+\left(۱-\frac{۵}{۲}(۸-\sqrt{۵۴})\right)kX_۲=۰\end{cases} \Rightarrow \frac{X_۲}{X_۱}=۲,۶۷۴>۱,۶۲$$

$$\omega=\omega_۲$$

$$\begin{cases}\left(-m\times\frac{۸+\sqrt{۵۴}}{۲}\cdot\frac{k}{m}+۳k\right)X_۱-kX_۲=۰\\ -kX_۱+\left(-۵m\times\frac{۸+\sqrt{۵۴}}{۲}\cdot\frac{k}{m}+k\right)X_۲=۰\end{cases}$$

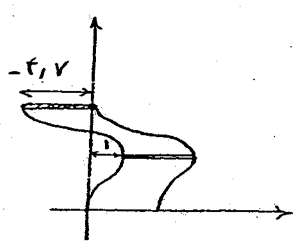
$$\Rightarrow \begin{cases}\left(۳-\frac{۸+\sqrt{۵۴}}{۲}\right)kX_۱-kX_۲=۰\\ -kX_۱+\left(۱-\frac{۵}{۲}(۸+\sqrt{۵۴})\right)kX_۲=۰\end{cases} \Rightarrow \frac{X_۲}{X_۱}=-۴,۶۷۴>-۰,۶۲$$

$$\Rightarrow \omega_۱=۰,۵۷۱\sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \bar{X}^۱=\begin{Bmatrix}۱\\۲,۶۷۴\end{Bmatrix}$$



مد اول ارتعاش

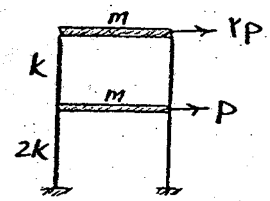
$$\omega_۲=۲,۷۷\sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \bar{X}^۱=\begin{Bmatrix}۱\\-۴,۶۷۴\end{Bmatrix}$$

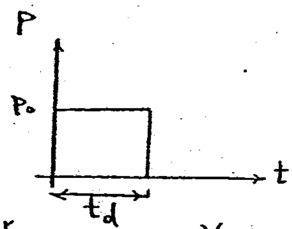


مد دوم ارتعاش

مریم شکیبا ۸۱۲۴۰۳۰ سری ۱۰

تمرین ساختمان دوطبقه شکل زیر مفروض است اگر این ساختمان تحت تاثیر نیروهای وارده قرار گیرد مطلوب است تعیین: تغییرمکان طبقات در هر یک از مدها و هم چنین تغییرمکان کل طبقات در صورتیکه t_d برابر با پریود مود اول ارتعاش باشد.





$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{Y}_1(t) \\ \ddot{Y}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 M_1 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 M_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 2P \end{bmatrix} \qquad M_1 = X_1^T m X_1, \quad M_2 = X_2^T m X_2$$

تعیین فرکانس های سیستم:

$$[m]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega_2^2 + k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -m\omega^2 + 3k & -k \\ -k & -m\omega^2 + k \end{vmatrix} = (-m\omega^2 + 3k)(-m\omega^2 + k) - k^2 = 0$$

$$\Rightarrow m^2\omega^4 - 4km\omega^2 + 2k^2 = 0 \quad \Rightarrow \omega^2 = (2 \pm \sqrt{2})\frac{k}{m} \quad \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{(2-\sqrt{2})\frac{k}{m}} \\ \omega_2 = \sqrt{(2+\sqrt{2})\frac{k}{m}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \omega = \omega_1 \quad \Rightarrow \begin{cases} \left[-m(2-\sqrt{2})\frac{k}{m} + 3k\right]X_1 - kX_2 = 0 \\ -kX_1 + \left[-m(2-\sqrt{2})\frac{k}{m} + k\right]X_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \frac{X_2}{X_1} = 2.4$$

$$\Rightarrow \omega_1 = 0.766\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad X^1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.4 \end{Bmatrix}, \quad T_1 = 8.2\sqrt{\frac{m}{k}} = t_d$$

$$, \quad \omega_2 = 1.848\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad X^2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.4 \end{Bmatrix}$$

$$\ddot{Y}_k(t) + \omega_k^2 Y_k = \frac{1}{M_k} f_k(t), \quad Y_k(t) = \frac{1}{M_k\omega_k}\int_0^t f_k(\tau)\sin\omega_k(t-\tau)\,d\tau$$

$$\{x(t)\} = \sum_{k=1}^{N} X_k Y_k(t) \overset{N=2}{=} [X_1 \,\vdots\, X_2]\begin{Bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{Bmatrix} = X_1 Y_1(t) + X_2 Y_2(t)$$

$$f_k(t) = X_k^T F(t) \qquad F(t) = \begin{Bmatrix} P \\ 2P \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow f_1(t) = \{1 \quad 2.4\}\begin{Bmatrix} P \\ 2P \end{Bmatrix} = P + 4.8P = 5.8P$$

$$f_2(t) = \{1 \quad -0.4\}\begin{Bmatrix} P \\ 2P \end{Bmatrix} = P - 0.8P = 0.2P$$

جرم مودی مود اول $\quad M_1 = \underline{X}_1^T m \underline{X}_1 = \{1 \quad 2.4\}\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2.4 \end{Bmatrix} = 6.76m$

جرم مودی مود دوم $\quad M_2 = \underline{X}_2^T m \underline{X}_2 = \{1 \quad -0.4\}\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ -0.4 \end{Bmatrix} = 1.16m$

$$\Rightarrow Y_1(t) = \frac{1}{M_1\omega_1}\int_0^{t_d} f_1(\tau)\sin\omega_1(t-\tau)d\tau = \frac{1}{6.76m \times 0.766\sqrt{\frac{k}{m}}}\int_0^{t_d} 5.8P\sin\omega_1(t-\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow Y_1(t) = \frac{5.8P}{5.17\sqrt{km}}\int_0^{t_d}\sin\omega(t-\tau)d\tau = \frac{5.8P}{5.17\sqrt{km}} \times \frac{1}{\omega_1}(1-\cos\omega_1 t_d) \qquad 0 \leq t \leq t_d$$

$$\Rightarrow Y_1(t) = \frac{5.8P}{5.17\sqrt{k\cancel{m}} \times 0.766 \times \sqrt{\frac{k}{\cancel{m}}}}(1-\cos\omega_1 t_d) = 1.46\frac{P}{k}(1-\cos 2\pi) = 1.46 P/k \times 0$$

$$\Rightarrow Y_1(t) = 0 \qquad 0 \leq t \leq t_d$$

$$Y_2(t) = \frac{1}{M_2\omega_2}\int_0^{t_d} f_2(\tau)\sin\omega_2(t-\tau)d\tau = \frac{1}{1.16m \times 1.848\sqrt{\frac{k}{m}}}\int_0^{t_d} 0.2P \times \sin\omega_2(t-\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow Y_2(t) = \frac{0.2P}{1.16m \times \omega_2}\int_0^{t_d}\sin\omega_2(t-\tau) = \frac{0.2P}{1.16m\,\omega_2} \times \frac{1}{\omega_2}(1-\cos\omega_2 t_d) \qquad 0 \leq t \leq t_d$$

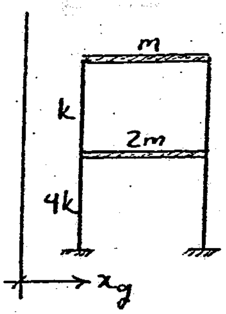
$$\Rightarrow Y_2(t) = \frac{0.2P}{1.16\cancel{m} \times 3.4 \times \frac{k}{\cancel{m}}}\left(1-\cos\left(1.848\sqrt{\frac{k}{m}} \times 8.2 \times \sqrt{\frac{m}{k}}\right)\right) =$$

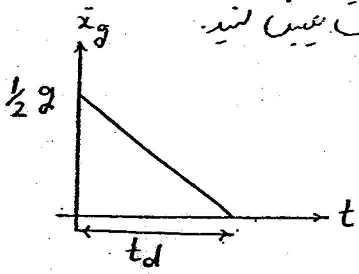
$$\rightarrow Y_2(t) = 0.0507\frac{P}{k}(1.85) = 0.0938\frac{P}{k} \qquad 0 \leq t \leq t_d$$

$$\{x(t)\} = [X_1 \,\vdots\, X_2]\begin{Bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2.4 & -0.4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.0938\frac{P}{k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0938 P/k \\ -0.0375\frac{P}{k} \end{Bmatrix}$$ برای

$$\{x(t)\} = [X_1]\{Y_1(t)\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.4 \end{bmatrix}\{0\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- ساختمان دو طبقه شکل زیر تحت اثر شتاب زمین مطابق با دیاگرام نشان داده شده می باشد در صورتیکه t_d مساوی با دو برابر پریود تناوب اول سازه باشد مطلوبست تعیین تغییر مکان ها در هریک از مدها و تغییر مکان کلی، نیروهای الاستیک در هریک از مدها، نیروی الاستیک کلی و مقدار برش پایه در هریک از مدها و برش پایه کلی ضمناً درصد مشارکت مدها را در هریک از محاسبات تعیین کنید.





$$\ddot{x}_g(t) = -\frac{g}{2t_d}t + \frac{g}{2} = \frac{g}{2}\left(\frac{-1}{t_d}\cdot t + 1\right)$$

تعیین فرکانس های سازه:

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = 0 \quad , \quad \{x(t)\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \sin\omega t$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2m\omega^2 + 5k & -k \\ -k & -m\omega^2 + k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow (-2m\omega^2 + 5k)(-m\omega^2 + k) - k^2 = 0 \rightarrow 2m^2\omega^4 - 2mk\omega^2 - 5mk\omega^2 + 5k^2 - k^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2m^2\omega^4 - 7mk\omega^2 + 4k^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{4}\frac{k}{m} \rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \left(\frac{7-\sqrt{17}}{4}\cdot\frac{k}{m}\right)^{1/2} \\ \omega_2 = \left(\frac{7+\sqrt{17}}{4}\cdot\frac{k}{m}\right)^{1/2} \end{cases}$$

$$\omega = \omega_1 \Rightarrow \begin{cases} \left(-2m \times \frac{7-\sqrt{17}}{4}\cdot\frac{k}{m} + 5k\right)X_1 - kX_2 = 0 \\ -kX_1 + \left(-m \times \frac{7-\sqrt{17}}{4}\cdot\frac{k}{m} + k\right)X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1} = \frac{3+\sqrt{17}}{2} = 3.562$$

$$\omega = \omega_2 \Rightarrow \begin{cases} \left(-2m \times \frac{7+\sqrt{17}}{4}\cdot\frac{k}{m} + 5k\right)X_1 - kX_2 = 0 \\ -kX_1 + \left(-m \times \frac{7+\sqrt{17}}{4}\cdot\frac{k}{m} + k\right)X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1} = \frac{3-\sqrt{17}}{2} = -0.562$$

$$\Rightarrow \omega_1 = 0.848\sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \bar{X}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3.562 \end{Bmatrix} \quad , \quad T_1 = 7.409\cdot\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{t_d}{2}$$

$$\omega_2 = 1.67\sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \bar{X}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.562 \end{Bmatrix}$$

$$[M]\{\ddot{x}\}+[k]\{x\}=-[M][\tau]\ddot{x}_g$$

$$\Rightarrow \ddot{Y}_k+\omega_k^۲ Y_k=\frac{1}{M_k} f_k(t) \qquad M_k=\Phi_k^T m\,\Phi_k$$

$$, f_k(t)=\bar{k}_k\,\ddot{x}_g(t) \qquad \bar{k}_k=-\Phi_k^T[m][\tau]$$ ضریب مشارکت مودی

$$Y_k(t)=\frac{\bar{k}_k}{M_k\,\omega_k}\cdot V_k(t) \qquad V_k(t)=\int_0^t \ddot{x}_g(\tau)\,\cancelto{1}{e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}}\,\sin\omega_k(t-\tau)\,d\tau$$

$$\Rightarrow V_1(t)=\int_0^{t_d}\left(\frac{-g}{۲t_d}\tau+\frac{g}{۲}\right)\times\sin\omega_1(t_d-\tau)\,d\tau=\frac{g}{۲}\int_0^{t_d}\left(-\frac{1}{t_d}\tau+1\right)\sin\omega_1(t_d-\tau)\,d\tau$$

$$\rightarrow V_1(t)=\frac{g}{۲}\left(\frac{\cancelto{0}{\sin(t_d\cdot\omega_1)}}{t_d\cdot\omega_1^۲}-\frac{\cancelto{1}{\cos(t_d\cdot\omega_1)}}{\omega_1}\right)=-\frac{g}{۲\omega_1}=-۰٫۵۹g\cdot\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad ۰\leqslant t\leqslant t_d$$

$$\rightarrow V_۲(t)=\int_0^{t_d}\left(\frac{-g}{۲t_d}\tau+\frac{g}{۲}\right)\sin\omega_۲(t_d-\tau)\,d\tau=\frac{g}{۲}\int_0^{t_d}\left(-\frac{1}{t_d}\tau+1\right)\sin\omega_۲(t_d-\tau)\,d\tau$$

$$\rightarrow V_۲(t)=\frac{g}{۲}\left(\frac{\sin(t_d\cdot\omega_۲)}{t_d\cdot\omega_۲^۲}-\frac{\cos(t_d\cdot\omega_1)}{\omega_۲}\right)=-۰٫۲۸۲g\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad ۰\leqslant t\leqslant t_d$$

$$\bar{k}_1=-\Phi_1^T[m][\tau]=-\langle 1 \quad ۳٫۵۶۲\rangle\begin{bmatrix}۲m & ۰\\ ۰ & m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=-\langle ۲m \quad ۳٫۵۶۲m\rangle\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{k}_1=-۵٫۵۶۲m$$

$$\bar{k}_1=-\Phi_۲^T[m][\tau]=-\langle 1 \quad -۰٫۵۶۲\rangle\begin{bmatrix}۲m & ۰\\ ۰ & m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=-\langle ۲m \quad -۰٫۵۶۲m\rangle\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{k}_۲=-۱٫۴۳۸m$$

$$M_1=\langle 1 \quad ۳٫۵۶۲\rangle\begin{bmatrix}۲m & ۰\\ ۰ & m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ ۳٫۵۶۲\end{Bmatrix}=\langle ۲m \quad ۳٫۵۶۲m\rangle\begin{Bmatrix}1\\ ۳٫۵۶۲\end{Bmatrix}=۱۴٫۶۹m$$

$$M_۲=\langle 1 \quad -۰٫۵۶۲\rangle\begin{bmatrix}۲m & ۰\\ ۰ & m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ -۰٫۵۶۲\end{Bmatrix}=\langle ۲m \quad -۰٫۵۶۲m\rangle\begin{Bmatrix}1\\ -۰٫۵۶۲\end{Bmatrix}=۲٫۳۱۶m$$

$$\Rightarrow Y_1(t)=\frac{\bar{k}_1}{M_1\omega_1}V_1(t)=\frac{-۵٫۵۶۲\cancel{m}}{۱۴٫۶۹\cancel{m}\times۰٫۸۴۸\times\sqrt{\frac{k}{m}}}\times-۰٫۵۹g\times\sqrt{\frac{m}{k}}=۰٫۲۶۴g\,\frac{m}{k}$$

$$Y_۲(t)=\frac{\bar{k}_۲}{M_۲\omega_۲}V_۲(t)=\frac{-۱٫۴۳۸\cancel{m}}{۲٫۳۱۶\cancel{m}\times۱٫۶۷۰\sqrt{\frac{k}{m}}}\times-۰٫۲۸۲g\times\sqrt{\frac{m}{k}}=۰٫۱۰۵g\cdot\frac{m}{k}$$

$$\{x_{(t)}\}_k = \bar{X}_k \cdot Y_{k(t)}$$

$$\Rightarrow \{x_{(t)}\}_1 = \begin{Bmatrix} ۱ \\ ۳٫۵۶۲ \end{Bmatrix} \times \left(۰٫۲۶۳ g \frac{m}{k}\right) = \begin{Bmatrix} ۰٫۲۶۳ g \frac{m}{k} \\ ۰٫۹۳۷ g \frac{m}{k} \end{Bmatrix}$$

$$\{x_{(t)}\}_2 = \begin{Bmatrix} ۱ \\ -۰٫۵۶۲ \end{Bmatrix} \times \left(۰٫۱۰۵ g \frac{m}{k}\right) = \begin{Bmatrix} ۰٫۱۰۵ g \frac{m}{k} \\ -۰٫۰۵۹ g \frac{m}{k} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{x_{(t)}\}_{\text{کل}} = \bar{X}_1 Y_{1(t)} + \bar{X}_2 Y_{2(t)} = \begin{Bmatrix} ۰٫۲۶۳ g \frac{m}{k} \\ ۰٫۹۳۷ g \frac{m}{k} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} ۰٫۱۰۵ g \frac{m}{k} \\ -۰٫۰۵۹ g \frac{m}{k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ۰٫۳۶۸ g \frac{m}{k} \\ ۰٫۸۷۸ g \frac{m}{k} \end{Bmatrix}$$

$$\{f_{s(t)}\}_k = [M]\{\bar{X}_k\} \cdot \frac{\bar{k}_k}{M_k} \cdot \omega_k \cdot V_{k(t)}$$

$$\Rightarrow \{f_{s(t)}\}_1 = \begin{bmatrix} ۲m & ۰ \\ ۰ & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ۱ \\ ۳٫۵۶۲ \end{Bmatrix} \cdot \frac{-۵٫۵۶۲ \cancel{m}}{۱۴٫۶۹ \cancel{m}} \cdot ۰٫۸۴۸ \times \sqrt{\frac{\cancel{k}}{\cancel{m}}} \times -۰٫۵۹ g \times \sqrt{\frac{\cancel{m}}{\cancel{k}}} =$$

$$\Rightarrow \{f_{s(t)}\}_1 = \begin{Bmatrix} ۲m \\ ۳٫۵۶۲m \end{Bmatrix} \cdot \frac{۲٫۷۸۳ g}{۱۴٫۶۹} = \begin{Bmatrix} ۲m \\ ۳٫۵۶۲m \end{Bmatrix} \times ۰٫۱۸۹ g = \begin{Bmatrix} ۰٫۳۷۹ mg \\ ۰٫۶۷۳ mg \end{Bmatrix}$$

$$, \{f_{s(t)}\}_2 = \begin{bmatrix} ۲m & ۰ \\ ۰ & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ۱ \\ -۰٫۵۶۲ \end{Bmatrix} \cdot \frac{-۱٫۴۳۸ \cancel{m}}{۲٫۳۱۶ \cancel{m}} \cdot ۱٫۶۷ \sqrt{\frac{\cancel{k}}{\cancel{m}}} \times -۰٫۲۸۲ g \times \sqrt{\frac{\cancel{m}}{\cancel{k}}}$$

$$\Rightarrow \{f_{s(t)}\}_2 = \begin{bmatrix} ۲m \\ -۰٫۵۶۲m \end{bmatrix} \times ۰٫۲۹۳ g = \begin{Bmatrix} ۰٫۵۸۵ mg \\ -۰٫۱۶۴ mg \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{f_{s(t)}\}_{\text{کل}} = \begin{Bmatrix} ۰٫۳۷۹ mg \\ ۰٫۶۷۳ mg \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} ۰٫۵۸۵ mg \\ -۰٫۱۶۴ mg \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ۰٫۹۶۴ mg \\ ۰٫۵۰۹ mg \end{Bmatrix}$$

$Q_{1(t)} = ۰٫۳۷۹ mg + ۰٫۶۷۳ mg = ۱٫۰۵۲ mg$ برش پایه در مد اول

$Q_{2(t)} = ۰٫۵۸۵ mg - ۰٫۱۶۴ mg = ۰٫۴۲۱ mg$ برش پایه در مد دوم

$\Rightarrow$ کل $Q_{(t)} = ۱٫۰۵۲ mg + ۰٫۴۲۱ mg = ۱٫۴۷۳ mg$ $\rightarrow$ درصد مشارکت مد اول : ۷۱٫۴۲٪

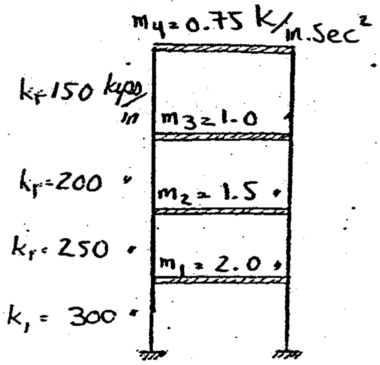
$$M^* = \frac{\bar{k}_k^2}{M_k} = \begin{Bmatrix} \frac{(-۵٫۵۶۲m)^2}{۱۴٫۶۹m} \\ \frac{(-۱٫۴۳۸m)^2}{۲٫۳۱۶} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ۲٫۱۰۶m \\ ۰٫۸۹۳m \end{Bmatrix}$$ $\rightarrow$ درصد مشارکت : ۷۰٪

۳۰٪

$\Sigma M = ۲٫۹۹۹$

مریم شلیب ۸۱۲۴۰۳۰ سری (11-1)

- ساختمان ۴ طبقه شکل زیر مفروض است در صورتیکه بردار تغییر مکان طبقه در لحظه $t_1 = 2s$ مقدار ماکزیمم خود را داشته باشد برای مد اول و این مقدار برای سایر مدها بصورت بردار نشان داده شده در زیر باشد مطلوب است تعیین تغییر مکان طبقات و هم چنین بردار نیروی الاستیک و نیروی برش پایه.



$$S_d = \begin{Bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \\ 0.4 \\ 0.3 \end{Bmatrix} ft \qquad \{x_k\}_{max} = \Phi_k \cdot \frac{\bar{K}_k}{M_k} \cdot S_{dk}$$

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & -m_3\omega^2 + k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & -m_4\omega^2 + k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2\omega^2 + 550 & -250 & 0 & 0 \\ -250 & -1.5\omega^2 + 450 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & -\omega^2 + 350 & -150 \\ 0 & 0 & -150 & -0.75\omega^2 + 150 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \omega_1 = 5.4 \qquad \omega_2 = 12.7 \qquad \omega_3 = 19.14 \qquad \omega_4 = 23.82 \ rad/s$$

$$\omega = \omega_1 \Rightarrow \begin{cases} (-2\omega_1^2 + k_1 + k_2)X_1 - k_2 X_2 = 0 \\ -k_2 X_1 + (-1.5\omega_1^2 + k_2 + k_3)X_2 - k_3 X_3 = 0 \\ -k_3 X_2 + (-\omega_1^2 + k_3 + k_4)X_3 - k_4 X_4 = 0 \\ -k_4 X_3 + (-0.75\omega_1^2 + k_4)X_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-2 \times 5.4^2 + 550)X_1 - 250 X_2 = 0 & \Rightarrow \frac{X_2}{X_1} = 1.967 \\ -250 X_1 + (-1.5 \times 5.4^2 + 450)X_2 - 200 X_3 = 0 & \Rightarrow \frac{X_3}{X_1} = 2.746 \\ -200 X_2 + (-5.4^2 + 350)X_3 - 150 X_4 = 0 & \Rightarrow \frac{X_4}{X_1} = 3.251 \end{cases}$$

$$\omega_1 = 5.4 \ rad/s \qquad \Phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.967 \\ 2.746 \\ 3.251 \end{Bmatrix}$$

$$\omega = \omega_۲ = ۱۲٫۷ \Rightarrow \begin{cases} (-۲\times ۱۲٫۷^۲ + ۵۵۰)X_1 - ۲۵۰\, X_2 = ۰ & \Rightarrow \dfrac{X_2}{X_1} = ۰٫۹۱ \\ -۲۵۰\, X_1 + (-۱٫۵\times ۱۲٫۷^۲ + ۴۵۰)X_2 - ۲۰۰\, X_3 = ۰ & \Rightarrow \dfrac{X_3}{X_1} = -۰٫۴ \\ -۲۰۰\, X_2 + (-۱\times ۱۲٫۷^۲ + ۳۵۰)X_3 - ۱۵۰\, X_4 = ۰ & \Rightarrow \dfrac{X_4}{X_1} = -۱٫۵۹ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \omega_۲ = ۱۲٫۷ \ rad/s \qquad \Rightarrow \underline{X}_۲ = \begin{Bmatrix} ۱ \\ ۰٫۹۱ \\ -۰٫۴ \\ -۱٫۵۹ \end{Bmatrix}$$

$$\omega = \omega_۳ = ۱۹٫۱۴ \ rad/s \Rightarrow \begin{cases} (-۲\times ۱۹٫۱۴^۲ + ۵۵۰)X_1 - ۲۵۰\, X_2 = ۰ & \Rightarrow \dfrac{X_2}{X_1} = -۰٫۷۳۱ \\ -۲۵۰\, X_1 + (-۱٫۵\times ۱۹٫۱۴^۲ + ۴۵۰)X_2 - ۲۰۰\, X_3 = ۰ & \Rightarrow \dfrac{X_3}{X_1} = -۰٫۸۸۷ \\ -۲۰۰\, X_2 + (-۱۹٫۱۴^۲ + ۳۵۰)X_3 - ۱۵۰\, X_4 = ۰ & \Rightarrow \dfrac{X_4}{X_1} = ۱٫۰۷ \end{cases}$$

$$\omega = \omega_۴ = ۲۳٫۸۲ \ rad/s \Rightarrow \begin{cases} (-۲\times ۲۳٫۸۲^۲ + ۵۵۰)X_1 - ۲۵۰\, X_2 = ۰ & \Rightarrow \dfrac{X_2}{X_1} = -۲٫۳۴ \\ -۲۵۰\, X_1 + (-۱٫۵\times ۲۳٫۸۲^۲ + ۴۵۰)X_2 - ۲۰۰\, X_3 = ۰ & \Rightarrow \dfrac{X_3}{X_1} = ۳٫۴۴۱ \\ -۲۰۰\, X_2 + (-۲۳٫۸۲^۲ + ۳۵۰)X_3 - ۱۵۰\, X_4 = ۰ & \Rightarrow \dfrac{X_4}{X_1} = -۱٫۸۶۸ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \omega_۳ = ۱۹٫۱۴ \ rad/s$$

$$\underline{X}_۳ = \begin{Bmatrix} ۱ \\ -۰٫۷۳۱ \\ -۰٫۸۸۷ \\ ۱٫۰۷ \end{Bmatrix}$$

$$\omega_۴ = ۲۳٫۸۲ \ rad/s$$

$$\underline{X}_۴ = \begin{Bmatrix} ۱ \\ -۲٫۳۴ \\ ۳٫۴۴۱ \\ -۱٫۸۶۸ \end{Bmatrix}$$

$$\bar{k}_k = -\underline{X}_k^T [m][1] \qquad m = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱٫۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰٫۷۵ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{k}_1 = -\langle ۱ \quad ۱٫۹۶۷ \quad ۲٫۷۴۶ \quad ۳٫۲۵۱ \rangle \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱٫۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰٫۷۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{k}_1 = -\{ ۲ \quad ۲٫۹۵۱ \quad ۲٫۷۴۶ \quad ۲٫۴۳۸ \} \begin{Bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{Bmatrix} = -۱۰٫۱۳۵$$

$$\bar{k}_{۲} = -\left\langle ۱ \quad ۰٫۹۱ \quad -۰٫۳ \quad -۱٫۵۹ \right\rangle \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱٫۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰٫۷۵ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{Bmatrix} = -۱٫۸۷۲۵$$

$$\bar{k}_{۳} = -\left\langle ۱ \quad -۰٫۷۳۱ \quad -۰٫۸۷۷ \quad ۱٫۰۷ \right\rangle \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱٫۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰٫۷۵ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{Bmatrix} = -۰٫۸۲۹$$

$$\bar{k}_{۴} = -\left\langle ۱ \quad -۲٫۳۴ \quad ۳٫۴۴۱ \quad -۱٫۸۶۸ \right\rangle \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱٫۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰٫۷۵ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{Bmatrix} = -۰٫۵۳$$

$$M_k = X^T_k \, m \, X_k$$

$$\Rightarrow M_۱ = \left\langle ۱ \quad ۱٫۹۶۷ \quad ۲٫۷۴۶ \quad -۳٫۲۵۱ \right\rangle \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱٫۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰٫۷۵ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ۱ \\ ۱٫۹۶۷ \\ ۲٫۷۴۶ \\ ۳٫۲۵۱ \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow M_۱ = \left\{ ۲ \quad ۲٫۹۵۱ \quad ۲٫۷۴۶ \quad ۲٫۴۳۸ \right\} \begin{Bmatrix} ۱ \\ ۱٫۹۶۷ \\ ۲٫۷۴۶ \\ ۳٫۲۵۱ \end{Bmatrix} = ۲۳٫۲۷$$

$$\Rightarrow M_۲ = \left\langle ۱ \quad ۰٫۹۱ \quad -۰٫۳ \quad -۱٫۵۹ \right\rangle \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱٫۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰٫۷۵ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ۱ \\ ۰٫۹۱ \\ -۰٫۳ \\ -۱٫۵۹ \end{Bmatrix} =$$

$$\Rightarrow M_۲ = \left\langle ۲ \quad ۱٫۳۶۵ \quad -۰٫۳ \quad -۱٫۱۹۲۵ \right\rangle \begin{Bmatrix} ۱ \\ ۰٫۹۱ \\ -۰٫۳ \\ -۱٫۵۹ \end{Bmatrix} = ۵٫۲۳$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow M_۳ = \left\langle ۱ \quad -۰٫۷۳۱ \quad -۰٫۸۷۷ \quad ۱٫۰۷ \right\rangle \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱٫۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰٫۷۵ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ۱ \\ -۰٫۷۳۱ \\ -۰٫۸۷۷ \\ ۱٫۰۷ \end{Bmatrix} =$$

$$\Rightarrow M_۳ = \left\langle ۲ \quad -۱٫۰۹۶۵ \quad -۰٫۸۷۷ \quad ۰٫۸۰۲۵ \right\rangle \begin{Bmatrix} ۱ \\ -۰٫۷۳۱ \\ -۰٫۸۷۷ \\ ۱٫۰۷ \end{Bmatrix} = ۴٫۴۳$$

$$M_4 = \langle 1 \quad -۲/۳۴ \quad ۳/۴۴۱ \quad -۱/۸۶۸ \rangle \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱/۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰/۷۵ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ۱ \\ -۲/۳۴ \\ ۳/۴۴۱ \\ -۱/۸۶۸ \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow M_4 = \langle ۲ \quad -۳/۵۱ \quad ۳/۴۴۱ \quad -۱/۴۰۱ \rangle \begin{Bmatrix} ۱ \\ -۲/۳۴ \\ ۳/۴۴۱ \\ -۱/۸۶۸ \end{Bmatrix} = ۲۴/۶۸$$

$$\{x_k\}_{max} = \bar{X}_k \cdot \frac{\bar{K}_k}{M_k} \cdot S_{dk}$$

$$\Rightarrow \{x_1\}_{max} = \begin{Bmatrix} ۱ \\ ۱/۹۶۷ \\ ۲/۷۴۶ \\ ۳/۲۵۱ \end{Bmatrix} \cdot \frac{-۱۰/۱۳۵}{۲۳/۲۷} \times ۰/۸ = \begin{Bmatrix} -۰/۳۴۸ \\ -۰/۶۸۵ \\ -۰/۹۵۶ \\ -۱/۱۳۱ \end{Bmatrix} \times ۱۲$$

$$\Rightarrow \{x_2\}_{max} = \begin{Bmatrix} ۱ \\ ۰/۹۱ \\ -۰/۳ \\ -۱/۵۹ \end{Bmatrix} \times \frac{-۱/۸۷۲۵}{۵/۲۳} \times ۰/۶ = \begin{Bmatrix} -۰/۲۱۵ \\ -۰/۱۹۶ \\ ۰/۰۶۴۵ \\ ۰/۳۴۲ \end{Bmatrix} \times ۱۲$$

$$\Rightarrow \{x_3\}_{max} = \begin{Bmatrix} ۱ \\ -۰/۷۴۱ \\ -۰/۸۷۷ \\ ۱/۰۷ \end{Bmatrix} \times \frac{-۰/۸۲۹}{۴/۴۳} \times ۰/۴ = \begin{Bmatrix} -۰/۰۷۴۹ \\ ۰/۰۵۴۷ \\ ۰/۰۶۶ \\ -۰/۰۸۰ \end{Bmatrix} \times ۱۲$$

$$\{x_4\}_{max} = \begin{Bmatrix} ۱ \\ -۲/۳۴ \\ ۳/۴۴۱ \\ -۱/۸۶۸ \end{Bmatrix} \times \frac{-۰/۵۳}{۲۴/۶۸} \times ۰/۳ = \begin{Bmatrix} -۶/۴۴ \times ۱۰^{-۳} \\ ۰/۰۱۵۱ \\ -۰/۰۲۲۲ \\ ۰/۰۱۲ \end{Bmatrix} \times ۱۲$$

نیروی الاستیک :

$$\{f_{sk}\}_{max} = [m][\bar{X}_k] \frac{\bar{K}_k}{M_k} \cdot S_{ak}$$

$$-۴/۱۸$$

$$\Rightarrow \{f_{s_1}\}_{max} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱/۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰/۷۵ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ۱ \\ ۱/۹۶۷ \\ ۲/۷۴۶ \\ ۳/۲۵۱ \end{Bmatrix} \cdot \frac{-۱۰/۱۳۵}{۲۳/۲۷} \times ۰/۸ \times ۱۲ = \begin{Bmatrix} -۸/۳۶ \\ -۱۲/۳۴ \\ -۱۱/۴۸ \\ -۱۰/۱۹ \end{Bmatrix}$$

$$\{f_{s_2}\}_{max} = [M]\begin{Bmatrix} 1 \\ 0.91 \\ -0.4 \\ -1.59 \end{Bmatrix} \times \frac{\overset{-2.578}{-1.8725}}{5.24} \times 0.6 \times 12 = \begin{Bmatrix} -5.156 \\ -3.52 \\ 0.77 \\ 3.024 \end{Bmatrix}$$

$$\{f_{s_3}\}_{max} = [M]\begin{Bmatrix} 1 \\ -0.741 \\ -0.887 \\ 1.07 \end{Bmatrix} \times \frac{\overset{-0.898}{-0.829}}{4.44} \times 0.4 \times 12 = \begin{Bmatrix} -1.796 \\ 0.985 \\ 0.797 \\ -0.741 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{f_{s_4}\}_{max} = [M]\begin{Bmatrix} 1 \\ -2.34 \\ 3.441 \\ -1.868 \end{Bmatrix} \times \frac{\overset{-0.077}{-0.53}}{24.68} \times 0.3 \times 12 = \begin{Bmatrix} -0.154 \\ 0.27 \\ -0.265 \\ 0.108 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{f_s\}_{max} = \begin{Bmatrix} \left(f_{s_{1m}}^2 + f_{s_{2m}}^2 + f_{s_{3m}}^2 + f_{s_{4m}}^2\right)^{1/2} \\ '' \\ '' \\ '' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9.986 \\ 12.86 \\ 11.54 \\ 10.67 \end{Bmatrix}$$

نیروی برش پایه :

$$Q_{k\,max} = \frac{\bar{L}_k^2}{M_k}\,\omega_k S_{vk} = \frac{\bar{L}_k^2}{M_k}\,\omega_k^2 S_{dk}$$

$$\Rightarrow Q_{1max} = \frac{(-10.135)^2}{23.27} \times 5.4^2 \times 0.8 = 102.97 \times 12$$

$$Q_{2max} = \frac{(-1.8725)^2}{5.24} \times 14.7^2 \times 0.6 = 64.89 \times 12$$

$$Q_{3max} = \frac{(-0.829)^2}{4.44} \times 19.14^2 \times 0.4 = 22.74 \times 12$$

$$Q_{4max} = \frac{(-0.53)^2}{24.68} \times 23.82^2 \times 0.3 = 1.94 \times 12$$

$$\Rightarrow Q_{max} = \sqrt{102.97^2 + 64.89^2 + 22.74^2 + 1.94^2} = 124.83 \times 12$$

مریم شلیبا ۸۱۲۴۰۳۰ سری (۲_۱۱)

- اگر سازه تمرین ۱ تحت اثر شتاب زمین لرزه قرار گیرد که در لحظه $t=2s$ بردار شتاب سرعت آن برای کلیه مودها به صورت زیر باشد مطلوبست تعیین تغییر مکان طبقات در این لحظه. نیروی الاستیک در این لحظه، و هم چنین برش پایه در لحظه یاد شده.

$$V(t_2)=\begin{Bmatrix}2\\1.7\\1.5\\1.2\end{Bmatrix}\ ft/s \qquad \omega_n=\begin{Bmatrix}5.4\\12.7\\19.14\\23.82\end{Bmatrix}\ rad/s$$

$$\bar{K}_n=\begin{Bmatrix}-10.135\\-1.8725\\-0.829\\-0.534\end{Bmatrix} \qquad M_n=\begin{Bmatrix}23.27\\5.23\\4.43\\24.68\end{Bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1.967&0.91&-0.731&-2.34\\2.746&-0.3&-0.887&3.441\\3.251&-1.59&1.07&-1.868\end{bmatrix}$$

$$\{x_k\}_{max}=X_k\frac{\bar{K}_k}{M_k}S_{dk}=X_k\cdot\frac{\bar{K}_k}{M_k}\cdot\frac{V_{(t)}}{\omega_k}$$

$$\Rightarrow \{x_1\}_{max}=\begin{Bmatrix}1\\1.967\\2.746\\3.251\end{Bmatrix}\times\overset{-0.161}{\cancel{\frac{-10.135}{23.27}}}\times\frac{2}{5.4}=\begin{Bmatrix}-0.161\\-0.317\\-0.442\\-0.524\end{Bmatrix}\times 12$$

$$\Rightarrow \{x_2\}_{max}=\begin{Bmatrix}1\\0.91\\-0.3\\-1.59\end{Bmatrix}\times\cancel{\frac{-1.8725}{5.23}}\times\frac{1.7}{12.7}=\begin{Bmatrix}-0.0479\\-0.0436\\0.0144\\0.0762\end{Bmatrix}\times 12$$

$$\Rightarrow \{x_3\}_{max}=\begin{Bmatrix}1\\-0.731\\-0.887\\1.07\end{Bmatrix}\times\frac{-0.829}{4.43}\times\frac{1.5}{19.14}=\begin{Bmatrix}-0.0147\\0.0107\\0.013\\-0.0157\end{Bmatrix}\times 12$$

$$\Rightarrow \{x_4\}_{max}=\begin{Bmatrix}1\\-2.34\\3.441\\-1.868\end{Bmatrix}\times\cancel{\frac{-0.534}{24.68}}\times\frac{1.2}{23.82}=\begin{Bmatrix}-1.082\times10^{-3}\\2.53\times10^{-3}\\-3.722\times10^{-3}\\2.021\times10^{-3}\end{Bmatrix}\times 12$$

$$\Rightarrow x_{max}=\begin{Bmatrix}0.169\\0.32\\0.442\\0.529\end{Bmatrix}\times 12$$

$$\{f_{s_k}\}_{max} = [M][X_k]\,\frac{\bar{k}_k}{M_k}\cdot S_{a_k} = [M][X_k]\cdot\frac{\bar{k}_k}{M_k}\cdot \omega \cdot V_{(t)}$$

$$\Rightarrow \{f_{s_1}\}_{max} = [M][X_k]\times \overbrace{\frac{-۱۰٫۱۳۵}{۲۴٫۱۷}\times ۵٫۴\times ۲}^{-۴٫۷۰۴} = \begin{Bmatrix} -۹٫۴۰۸ \\ -۱۳٫۸۸ \\ -۱۴٫۹۱۷ \\ -۱۱٫۴۶۹ \end{Bmatrix}\times ۱۲$$

$$,\ \{f_{s_2}\}_{max} = [M][X_2]\times \overbrace{\frac{-۱٫۸۷۲۵}{۵٫۳۲}\times ۱۴٫۷\times ۱٫۷}^{-۷٫۷۲} = \begin{Bmatrix} -۱۵٫۴۶ \\ -۱۰٫۵۵ \\ ۲٫۴۱۹ \\ ۹٫۲۲ \end{Bmatrix}\times ۱۲$$

$$,\ \{f_{s_3}\}_{max} = [M][X_3]\times \overbrace{\frac{-۰٫۸۲۹}{۴٫۴۴}\times ۱۹٫۱۴\times ۱٫۵}^{-۵٫۳۷} = \begin{Bmatrix} -۱۰٫۷۵ \\ ۵٫۸۹ \\ ۴٫۷۶ \\ -۴٫۳۱ \end{Bmatrix}\times ۱۲$$

$$,\ \{f_{s_4}\}_{max} = [M][X_4]\times \overbrace{\frac{-۰٫۵۳}{۲۴٫۶۸}\times ۲۳٫۸۲\times ۱٫۲}^{-۰٫۱۱۴} = \begin{Bmatrix} -۱٫۲۴ \\ ۲٫۱۶ \\ -۲٫۱۱ \\ ۰٫۸۶ \end{Bmatrix}\times ۱۲$$

$$\Rightarrow \{f_s\}_{max} = \begin{Bmatrix} ۲۱٫۰۸۵ \\ ۱۸٫۵۲ \\ ۱۴٫۱۱ \\ ۱۵٫۳۶ \end{Bmatrix}\times ۱۲$$

برش پایه:

$$Q_{k\,max} = \frac{\bar{k}_k^{\,2}}{M_k}\cdot \omega_k \cdot V_{(t)}$$

$$\rightarrow Q_{1\,max} = \frac{(-۱۰٫۱۳۵)^2}{۲۳٫۲۷}\times ۵٫۴\times ۲ = ۴۷٫۶۷\times ۱۲$$

$$Q_{1\,max} = \frac{(-۱٫۸۷۲۵)^2}{۵٫۳۲}\times ۱۴٫۷\times ۱٫۷ = ۱۴٫۴۷\times ۱۲$$

$$Q_{3\,max} = \frac{(-۰٫۸۲۹)^2}{۴٫۴۴}\times ۱۹٫۱۴\times ۱٫۵ = ۴٫۴۵\times ۱۲$$

$$Q_{4\,max} = \frac{(-۰٫۵۳)^2}{۲۴٫۶۸}\times ۲۳٫۸۲\times ۱٫۲ = ۰٫۳۳\times ۱۲$$

$$\Rightarrow Q_{max} = ۵۰٫۰۲\times ۱۲$$

○ ماکزیمم برش پایه :

$$\left\{ Q_{k,max} \right\} = \frac{\bar{k}_k^{\,۲}}{m_k} \cdot S_{ak}$$ برش پایه ماکزیمم در مد k ام

$$\begin{cases} Q_{1,max} = \dfrac{۱۱٫۲۹۲^{۲}}{۲۴٫۵۸۵} \times ۱۲۱٫۰۱ = ۶۲۷٫۶۱۴ \\ Q_{۲,max} = \dfrac{۲^{۲}}{۶} \times ۲۴۹٫۱۱ = ۱۶۶٫۰۷۳ \\ Q_{۳,max} = \dfrac{۰٫۷۰۸^{۲}}{۳٫۴۱۷} \times ۲۸۹٫۹۶ = ۴۲٫۵۳۶ \end{cases}$$

$$Q_{max} = \left(۶۲۷٫۶۱۴^{۲} + ۱۶۶٫۰۷۳^{۲} + ۴۲٫۵۳۶^{۲} \right)^{۱/۲} = ۶۵۰٫۶۰۷ \quad kips$$

○ جرم موثر :

$$m_k^{*} = \frac{\bar{k}_k^{\,۲}}{m_k}$$

$$\begin{cases} m_1^{*} = \dfrac{۱۱٫۲۹۲^{۲}}{۲۴٫۵۸۵} = ۵٫۱۸۶ \\ m_۲^{*} = \dfrac{۲^{۲}}{۶} = ۰٫۶۶۷ \\ m_۳^{*} = \dfrac{۰٫۷۰۸^{۲}}{۳٫۴۱۷} = ۰٫۱۴۷ \end{cases}$$

$$m_1^{*} + m_۲^{*} + m_۳^{*} = ۶ = m_1 + m_۲ + m_۳ \longrightarrow ok$$

تهیه و تنظیم: A. Dayani

A. Dayani

نمونه سوال امتحان اصول مهندسی زلزله / جناب آقای دکتر تهرانی زاده

* یک تیر طره‌ای صلب با شرایط مربوطه مطابق شکل مفروض است.

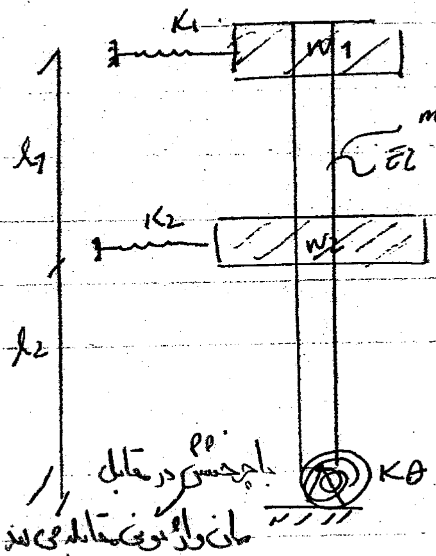
چنانچه این تیر در انتها دارای یک فنر پیچشی با سختی K_θ باشد و تحت بارگذاری زلزله با نمودار شتاب نگاشت زیر قرار گیرد مطلوبست تعیین:

1. K^* ، M^* و $\bar{K}$ دینامیکی — جرم در واحد طول: ۱٫۳

2. معادله حرکت ، ماکزیمم تغییر مکان در نقطه مربوط به آن

3. معادله برش پایه در واحد طول و ماکزیمم آن

4. ماکزیمم برش پایه و ممان مقاوم پایه (یا ممان واژگونی)



$l_1 = 40'$ (ft) = ۴۸۰ in

$l_2 = 60'$ (ft) = ۷۲۰ in

$K_1 = 200$ Kips/in

$K_2 = 400$ Kips/in

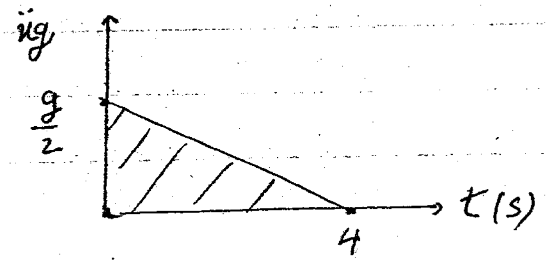
$w_1 = 50$ Kips ⇒ m = ۰٫۱۳ lb

$w_2 = 100$ Kips ⇒ m = ۰٫۲۶ lb

$m = 500$ lb/in — وزن فرض می‌کنیم

$EI = 2\times10^5$ lb.in^2 = ۲×۱۰² kips.in²

$K_\theta = 1000$ Kips.in/Rad



نمودار شتاب نگاشت زلزله

$g = ۳۸۶\ in/s^2 = ۳۲٫۲\ ft/s^2$

$1\ ft = ۱۲\ in$

تبدیل می‌کنیم به: سختی $k = \frac{kips}{ft}$

حل) برای حل ابتدا می‌بایستی تابع شکل مناسب را تعیین کرد. تعیین این تابع مستلزم یک راه حل طولانی است اما

با توجه به شرایط سازه بین توابع زیر، $\psi_1(x)$ را انتخاب می‌کنیم چرا که مقدار $\psi_1'(0) = 0$ اثر سختی را که ابهام دارد را ابتدا خنثی می‌کند. چون سازه طره است $\psi = \frac{\pi}{2}$ جواب می‌دهد

$$\begin{cases} \psi_1(x) = 1 - \cos \pi x/2l \ \checkmark \\ \psi_2(x) = \sin \pi x/2l \end{cases}$$

تابع شکل مناسب تر است که ترم k_θ حذف شود l

یعنی مشتق آن در $(x=0)$ باید صفر باشد $k^* = \dots + k_\theta \psi'^2$

در مرحله بعد جدول تشکیل داده و مقادیر ψ و ψ' را برای اجرام فرعی مشخص می‌کنیم. توجه شود که اوزان (w_1 و w_2)

حتما می‌بایستی به جرم تبدیل شود و واحد فرعی آنها ابتدا معلوم شوند، این موضوع فوق العاده حیاتی است!

Item	x (ft)	ψ	ψ'
w_1	100	1	$(200/\pi)^{-1} (63.7)^{-1}$
w_2	60	0.4	$(250/\pi)^{-1} (50.9)$
K_1	100	1	$200/\pi$
K_2	60	0.4	$(250/\pi)^{-1}$

حل واحد → $K_1 = 200 \times 12 = 2400\ kips/ft$

$K_2 = 400 \times 12 = 480\ kips/ft$

جرم در واحد طول $m = \frac{0.500}{\cancel{9.81}\ ۳۲٫۲} \times 12 = 0.63\ \frac{kips \cdot s^2}{m \cdot ft} \cong 0.21\ kips \cdot \frac{s^2}{ft^2}$.

$3ft$

$$\begin{cases} m_1 = \frac{50}{\cancel{9.81}\ ۳۲} = 5.2 \\ m_2 = \frac{100}{\cancel{9.81}\ ۳۲} = 9.2 \end{cases}$$

$(EI = 2 \times 10^6 \times 10^{-3}) \times \frac{1}{12}^2 = ۱۴$ (kips.ft)

تعیین $\bar{K}, m^*, K^*$

$$m^* = \int_0^L \mu(x)\,[\psi(x)]^2 + \sum m_i \psi_i^2$$

$$m^* = \int_0^L 0.21\left[1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right]^2 dx + m_1\psi_1^2 + m_2\psi_2^2$$

از ضمیمه دوم $m^* = 0.21 \times 0.228\,(100) + 5.2\times 1^2 + 9.2\times 0.4^2 = 11.2\ \frac{\text{Kips}.s^2}{ft^2}$

$$K^* = \int_0^L EI\,\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\,dx + \sum K_i\psi_i^2 + \cancel{K_\theta.\theta^2} \to 0$$

$$K^* = \frac{\pi^4}{32}\times 14/100^3 + 2400\times\left(\frac{1}{63.7}\right)^2 + 4800\times\left(\frac{1}{80}\right)^2 \simeq 1.34$$

$$\omega^* = \sqrt{\frac{K^*}{m^*}} = \sqrt{\frac{1.34}{11.2}} = 0.35\ \frac{rad}{sec} \to T \simeq 12\ s$$

$$\bar{K} = \int_0^L \mu(x)\,\psi(x) + \sum m_i\psi_i$$

$$\bar{K} = 0.21\times 0.364\times 100 + 5.1\times 1 + 9.2\times 0.4 \simeq 8$$

$$\frac{\bar{K}}{m^*} = \frac{8}{11.2} \simeq 0.73$$ ضریب تحریک زلزله

g

قسمت اول حل شد!

اگر $t_d \le \frac{T}{5}$ ← اجرمیزانی ← ساده است ← احتمالاً نمی‌دهد
داشتن انتگرال دوهامل نمی‌خواهد

2. معادله حرکت

$T \simeq 12^s \quad , \tau = 4^s \quad , \tau > T/10 \rightarrow$ No Impulse Loading

. آری باید برای چیدمان حل نیست .

$V(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(t) \sin \omega_d (t-\tau)\, d\tau \qquad , \xi \simeq 0$ فرض

$\omega_d = \omega_n = \omega^* = 0.35$

$\ddot{x}_g(t) = -g/8\, t + g/2 = g/2(-t/4+1)$

$V(t) = g/2 \int_0^t (-t/4+1) \sin 0.25 (t-\tau)\, d\tau$

$V(t) = g/2 \times \frac{1}{0.35} \cos(t-\tau)\, d\tau \Big]_0^t - g/8 \int_0^t t \sin 0.35 (t-\tau) d\tau$

انتگرال گیری با ماشین حساب $\rightarrow V(t) = g\,(1 - \cos t + 2\sin t)$

* دقت برای انتگرال گیری حد را بدهید، فرض کنید طولی برود !

$V'(t) = 0 \rightarrow t = 2.4s \rightarrow V_{max}(2.4) \simeq 2$

$x(t) = \psi(x) \frac{K}{m\omega} V(t) \rightarrow x(t) = 2(1 - \cos \pi x/2L)\, g\, (1 - \cos t + 2\sin t)$

← معادله تغییر مکان

$x_{max}(t) = 2 \times 1 \times 2 \simeq 4$ inch → ماکزیمم تغییر مکان

* زمان تغییر مکان : 2.4^s *

نمونه سوال امتحان اصول مهندسی زلزله / جناب آقای دکتر تهرانی زاده

تهیه و تنظیم: A. Dayani

A. Dayani

* یک تیر طره‌ای نیمه صلب با شرایط مربوطه مطابق شکل مفروض است.

چنانچه این تیر در انتها دارای یک فنر پیچشی با سختی $K\theta$ باشد و تحت بارگذاری زلزله با نمودار شتاب نگاشت

زیر قرار گیرد مطلوبست تعیین:

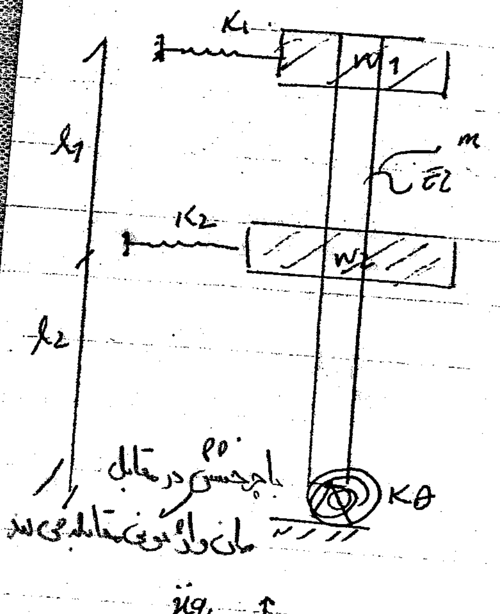
جرم در واحد طول: ۱٫۳

1. K^* ، M^* و $\bar{K}$ و فرکانس

2. معادله حرکت، ماکزیمم تغییر مکان در نقطه مربوطه آن

3. معادله برش پایه در واحد طول و ماکزیمم آن

4. ماکزیمم برش پایه و ممان مقاوم پایه (یا ممان واژگونی)



$l_1 = 40'$ (ft) = ۴۸۰ in

$l_2 = 60'$ (ft) = ۷۲۰ in

$K_1 = 200$ Kips/in

$K_2 = 400$ Kips/in

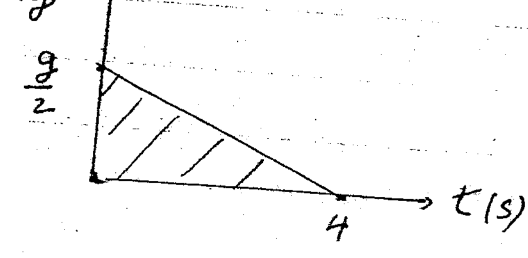
$W_1 = 50$ Kips $\Rightarrow m = ۰٫۱۳$ lb

$W_2 = 100$ Kips $\Rightarrow m = ۰٫۲۶$ lb

$m = 500$ lb/in (ثابت فرض می‌کنیم)

$EI = 2\times10^5$ lb.in^2 = ۲×۱۰^۲ kips.in^2

$K\theta = 1000$ Kips.in/Rad



نمودار شتاب نگاشت زلزله

(۶)

$M = k\theta$

$Q_m = Q_{m1} + Q_{m2}$

$Q_m = \frac{\bar{K}}{M^*} \omega^2 S_d \sum m_i \varphi_i$

$Q_m = 0.73 \times 0.35^2 \times 0.04 \left[5.2 \times 1 + 9.2 \times 0.4 \right] = 0.03$ ③

$Q_{Total} = Q_B + Q_S + Q_m$

$Q_T = ① + ② + ③ = 0.02 + 173 + 0.03 = \underline{173.05 \text{ Kips}}$

* تعیین لنگر واژگونی

دو راه حل وجود دارد ① روش مستقیم (عامل محدود کننده روش داریم: ابعاد وفنداسیون و تیرها)
روش راه حل است

② روش لنگر مقاوم، یعنی استفاده از لنگر قابل تحمل در سطح پیچشی $K\theta$

روش مستقیم بسیار طولانی تر است.
روش دوم برگزیده می شود

②

$\underset{\text{واژگونی}}{M_{OT}} = \underset{\text{مقاوم}}{M_R} = \overset{\text{خمش}}{M_s} = K\theta \; , \; \theta = v(x,t)'$

$v(x,t) = \psi(x)\, v(t)$, $v(t)$: تابع تعریف شده است

$M_{R_{max}} = ? \rightarrow \theta' = 0 \rightarrow v''(x,t) = 0 \rightarrow v'(t) = 0$

کافی است از معادله مشتق دوم $v''(t) = 0$ ، t را حساب می کنیم ← θ متناظر را حساب و جایگذاری می کنیم.

والسلام
A. Dayani

A. Dayani

$$\{f_{s2}\}_{max} = [M]\begin{Bmatrix} 1 \\ 0.91 \\ -0.3 \\ -1.59 \end{Bmatrix} \times \overset{-2.578}{\frac{-1.8725}{5.223}} \times 0.6 \times 12 = \begin{Bmatrix} -5.156 \\ -3.52 \\ 0.77 \\ 3.074 \end{Bmatrix}$$

$$\{f_{s3}\}_{max} = [M]\begin{Bmatrix} 1 \\ -0.721 \\ -0.887 \\ 1.07 \end{Bmatrix} \times \overset{-0.898}{\frac{-0.829}{4.43}} \times 0.4 \times 12 = \begin{Bmatrix} -1.796 \\ 0.985 \\ 0.797 \\ -0.721 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{f_{s4}\}_{max} = [M]\begin{Bmatrix} 1 \\ -2.24 \\ 3.441 \\ -1.868 \end{Bmatrix} \times \overset{-0.077}{\frac{-0.53}{24.68}} \times 0.3 \times 12 = \begin{Bmatrix} -0.154 \\ 0.27 \\ -0.265 \\ 0.108 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{f_s\}_{max} = \begin{Bmatrix} (f_{s1m}^2 + f_{s2m}^2 + f_{s3m}^2 + f_{s4m}^2)^{1/2} \\ '' \\ '' \\ '' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9.986 \\ 12.86 \\ 11.54 \\ 10.67 \end{Bmatrix}$$

نیروی برش پایه :

$$Q_{k\,max} = \frac{\bar{L}_k^2}{M_k}\,\omega_k S_{vk} = \frac{\bar{L}_k^2}{M_k}\,\omega_k^2 S_{dk}$$

$$\Rightarrow Q_{1max} = \frac{(-10.1345)^2}{24.27} \times 5.4^2 \times 0.8 = 102.97 \times 12$$

$$Q_{2max} = \frac{(-1.8725)^2}{5.223} \times 12.7^2 \times 0.6 = 64.89 \times 12$$

$$Q_{3max} = \frac{(-0.829)^2}{4.43} \times 19.14^2 \times 0.4 = 22.74 \times 12$$

$$Q_{4max} = \frac{(-0.53)^2}{24.68} \times 23.82^2 \times 0.3 = 1.94 \times 12$$

$$\Rightarrow Q_{max} = \sqrt{102.97^2 + 64.89^2 + 22.74^2 + 1.94^2} = 124.83 \times 12$$

مریم شلیا ۸۱۲۴۰۳۰ سری (۲_۱۱)

- اگر سازه تمرین ۱ تحت اثر شتاب زمین مزبور قرار گیرد و در لحظه $t=2s$ بردار سرعت آن برای کلیه مودها به صورت زیر باشد مطلوبست تعیین تغییر مکان طبقات در این لحظه. نیروی الاستیک در این لحظه و هم چنین برش پایه در لحظه یاد شده.

$$V(t_2)=\begin{Bmatrix}2\\1.7\\1.5\\1.2\end{Bmatrix}\ ft/s \qquad \omega_n=\begin{Bmatrix}5.4\\12.7\\19.14\\24.82\end{Bmatrix}\ rad/s$$

$$\bar{K}_n=\begin{Bmatrix}-10.135\\-1.8725\\-0.829\\-0.534\end{Bmatrix} \qquad M_n=\begin{Bmatrix}23.27\\5.24\\4.43\\24.68\end{Bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1.967&0.91&-0.731&-2.44\\2.746&-0.3&-0.887&3.441\\3.251&-1.59&1.07&-1.868\end{bmatrix}$$

$$\{x_k\}_{max}=\Phi_k\frac{\bar{K}_k}{M_k}\cdot S_{dk}=\Phi_k\cdot\frac{\bar{K}_k}{M_k}\cdot\frac{V_{(t)}}{\omega_k}$$

$$\Rightarrow \{x_1\}_{max}=\begin{Bmatrix}1\\1.967\\2.746\\3.251\end{Bmatrix}\times\underbrace{\frac{-10.135}{23.27}\times\frac{2}{5.4}}_{-0.161}=\begin{Bmatrix}-0.161\\-0.317\\-0.442\\-0.524\end{Bmatrix}\times 12$$

$$\Rightarrow \{x_2\}_{max}=\begin{Bmatrix}1\\0.91\\-0.3\\-1.59\end{Bmatrix}\times\frac{-1.8725}{5.24}\times\frac{1.7}{12.7}=\begin{Bmatrix}-0.0479\\-0.0436\\0.0144\\0.0762\end{Bmatrix}\times 12$$

$$\Rightarrow \{x_3\}_{max}=\begin{Bmatrix}1\\-0.731\\-0.887\\1.07\end{Bmatrix}\times\frac{-0.829}{4.43}\times\frac{1.5}{19.14}=\begin{Bmatrix}-0.0147\\0.0107\\0.013\\-0.0157\end{Bmatrix}\times 12$$

$$\Rightarrow \{x_4\}_{max}=\begin{Bmatrix}1\\-2.44\\3.441\\-1.868\end{Bmatrix}\times\frac{-0.534}{24.68}\times\frac{1.2}{24.82}=\begin{Bmatrix}-1.082\times10^{-3}\\2.53\times10^{-3}\\-3.722\times10^{-3}\\2.021\times10^{-3}\end{Bmatrix}\times 12$$

$$\Rightarrow x_{max}=\begin{Bmatrix}0.169\\0.32\\0.442\\0.529\end{Bmatrix}\times 12$$

$$\{f_{s_k}\}_{max} = [M][\Phi_k]\,\frac{\bar{k}_k}{M_k}\cdot S_{a_k} = [M][\Phi_k]\cdot\frac{\bar{k}_k}{M_k}\cdot\omega\cdot V_{(t)}$$

$$\Rightarrow \{f_{s_1}\}_{max} = [M][\Phi_1]\times \overset{-۴٫۷۰۴}{\frac{-۱۰٫۱۳۵}{۲۳٫۱۷}}\times ۵٫۴\times ۲ = \begin{Bmatrix} -۹٫۴۰۸ \\ -۱۳٫۸۸ \\ -۱۲٫۹۱۷ \\ -۱۱٫۴۶۹ \end{Bmatrix}\times ۱۲$$

$$,\ \{f_{s_2}\}_{max} = [M][\Phi_2]\times \overset{-۷٫۷۴}{\frac{-۱٫۸۷۲۵}{۵٫۲۴}}\times ۱۲٫۷\times ۱٫۷ = \begin{Bmatrix} -۱۵٫۴۶ \\ -۱۰٫۵۵ \\ ۲٫۴۱۹ \\ ۹٫۲۲ \end{Bmatrix}\times ۱۲$$

$$,\ \{f_{s_3}\}_{max} = [M][\Phi_3]\times \overset{-۵٫۳۷}{\frac{-۰٫۸۲۹}{۴٫۴۴}}\times ۱۹٫۱۴\times ۱٫۵ = \begin{Bmatrix} -۱۰٫۷۵ \\ ۵٫۸۹ \\ ۴٫۷۶ \\ -۴٫۳۱ \end{Bmatrix}\times ۱۲$$

$$,\ \{f_{s_4}\}_{max} = [M][\Phi_4]\times \overset{-۰٫۶۱۴}{\frac{-۰٫۵۲}{۲۴٫۶۸}}\times ۲۳٫۸۲\times ۱٫۲ = \begin{Bmatrix} -۱٫۲۳ \\ ۲٫۱۶ \\ -۲٫۱۱ \\ ۰٫۸۶ \end{Bmatrix}\times ۱۲$$

$$\Rightarrow \{f_s\}_{max} = \begin{Bmatrix} ۲۱٫۰۸۵ \\ ۱۸٫۵۴ \\ ۱۴٫۱۲ \\ ۱۵٫۳۶ \end{Bmatrix}\times ۱۲$$

$$Q_{k\,max} = \frac{\bar{k}_k^{۲}}{M_k}\cdot\omega_k\cdot V_{(t)}$$ برش پایه:

$$\rightarrow Q_{۱\,max} = \frac{(-۱۰٫۱۳۵)^۲}{۲۳٫۲۷}\times ۵٫۴\times ۲ = ۴۷٫۶۷\times ۱۲$$

$$Q_{۱\,max} = \frac{(-۱٫۸۷۲۵)^۲}{۵٫۲۴}\times ۱۲٫۷\times ۱٫۷ = ۱۴٫۴۷\times ۱۲$$

$$Q_{۳\,max} = \frac{(-۰٫۸۲۹)^۲}{۴٫۴۴}\times ۱۹٫۱۴\times ۱٫۵ = ۴٫۴۵\times ۱۲$$

$$Q_{۴\,max} = \frac{(-۰٫۵۲)^۲}{۲۴٫۶۸}\times ۲۳٫۸۲\times ۱٫۲ = ۰٫۳۳\times ۱۲$$

$$\Rightarrow Q_{max} = ۵۰٫۰۲\times ۱۲$$

○ ماکزیمم برش پایه :

$$\left\{ Q_{k,max} \right\} = \frac{\bar{k}_k^{\,۲}}{m_k} \cdot S_{ak}$$ برش پایه ماکزیمم در مد k ام

$$\begin{cases} Q_{۱,max} = \dfrac{۱۱٫۲۹۲^{۲}}{۲۴٫۵۸۵} \times ۱۲۱٫۰۱ = ۶۲۷٫۶۱۴ \\[2ex] Q_{۲,max} = \dfrac{۲^{۲}}{۶} \times ۲۴۹٫۱۱ = ۱۶۶٫۰۷۳ \\[2ex] Q_{۳,max} = \dfrac{۰٫۷۰۸^{۲}}{۳٫۴۱۷} \times ۲۸۹٫۹۶ = ۴۲٫۵۳۶ \end{cases}$$

$$Q_{max} = \left(۶۲۷٫۶۱۴^{۲} + ۱۶۶٫۰۷۳^{۲} + ۴۲٫۵۳۶^{۲} \right)^{۱/۲} = ۶۵۰٫۶۰۷ \quad \text{kips}$$

○ جرم موثر :

$$m_k^* = \frac{\bar{k}_k^{\,۲}}{m_k}$$

$$\begin{cases} m_۱^* = \dfrac{۱۱٫۲۹۲^{۲}}{۲۴٫۵۸۵} = ۵٫۱۸۶ \\[2ex] m_۲^* = \dfrac{۲^{۲}}{۶} = ۰٫۶۶۷ \\[2ex] m_۳^* = \dfrac{۰٫۷۰۸^{۲}}{۳٫۴۱۷} = ۰٫۱۴۷ \end{cases}$$

$$m_۱^* + m_۲^* + m_۳^* = ۶ = m_۱ + m_۲ + m_۳ \longrightarrow \text{ok}$$

تشکر :

در انتها لازم میدانم از آقای محمدرضا سیفی (کارشناس عمران دانشگاه صنعتی امیر کبیر- دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه صنعتی امیر کبیر) که بنده را در تهیه این فایل کمک نموده اند کمال تشکر را داشته باشم .

در صورت لزوم می توانید با آدرس پست الکترونیکی زیر انتقادات و پیشنهادات خود را ارائه فرمائید .

hamid_kazem041@yahoo.com