Dastnameh.ir

Dastnameh.ir
پایگاه علمی سازه های دریایی فراساحل و مهندسی زلزله

دانشکده مهندسی مکانیک

جزوه

استاتیک

نیمسال دوم ۹۳-۹۴

دانشجو : حنانه اولیایی

اسکن: علی رئوفی‌فر

مدرس : تابش‌پور

ممکن است در این نوشتار، اشکالات املایی، فرمولی و شکلی وجود داشته‌باشد که مسئولیت آن با دانشجو و یا مدرس این کلاس نیست.

نشر این جزوه صرفاً جنبه راهنمایی و ترویج داشته و استفاده از آن در کارهای حرفه‌ای و تحقیقاتی مستلزم بررسی بیشتر و اطمینان از صحت نوشتار می‌باشد.

۹۳/۱۱/۱۲

Subject: استاتیک - جلسه اول
Year. Month. Date. ( )

خانم اولیایی

روش تدریس : مشارکت همه در تمرین

اعلام + سؤال + جواب + جزوه

میان ترم ۶ و ۷ نمره   پایان ترم ۱۳ و ۱۴ نمره   تمرین ۳ نمره   ۳ + ①

تمرین اضافی و کوییز
طرح و حل مسئله مشابه امتحان
تمارین جدول

جدول

مریام ← تمرین هفتگی   ابتدای ش ب ۹۰   حل تمرین

بیرجانسون ← ب ۹۵   شنبه‌ها ۱۲ تا ۱۳

کلاس ۲۲۱

ساختمان ۲

بهترین تجلی مکانیک در زندگی بشر ← حرکت

فرایند آشنایی با واژگان هر بحث ← واژه‌شناسی (terminology)

مفاهیم و ابزار ↗

عامه   واژه‌شناسی   فنی

حرکت { سرعت، شتاب، زمان

* برای بررسی حرکت اولین قدم واژه‌شناسی و دومین قدم تفسیر مفاهیم علمی و ورود به حوزه‌ی فنی است

جرم

نیرو

ساعت

ترازو

خط‌کش

انرژی، قدرت، توان

بررسی کار در حوزه‌ی فنی : تمام مثال‌ها از همان ادبیات عامه بهره می‌گیریم.

مثال عامه : کسی که یک بار m kg را 2d متر می‌برد نسبت به کسی که همان بار را d متر می‌برد مزد بیشتری می‌طلبد.

Subject: ریاضی (بیان ما از طبیعت) ⟵   فیزیک ⟶

Year. Month. Date. ( )

مقدار وزن F

مسافت d

زمان t

شناخت تمام پارامترها و عوامل ⟵

$W = Fd$

+ اگر برای دو شخص F و d برابر باشد اما $t_1 < t_2$ باشد، فرد 1 تواناتر، قوی‌تر، قدرتمندتر و زورمندتر است.

+ آنچه که خروجی بیان ما از طبیعت است، یک سری فرمول‌های ریاضی است.

+ در بین این سه مورد، زمان بیشتر از بقیه ذهن بشر را به خود مشغول کرده چه در مفاهیم تجربی و چه مفاهیم غیرتجربی. دلیل ⟵ بشر می‌تواند به همه‌ی پارامترها و عوامل دسترسی و غلبه پیدا کند الا زمان.

(در جلسه‌ی دوم

+ نیرو تجسمی ندارد و دیدنی نیست اما وجود دارد و از اثر و کارکردش به وجود آن پی می‌بریم.

غذا (ماده، جسم فیزیکی) تبدیل به ⟵ نیرو

?

زمینی

فیزیک قابل جدا شدن از ماوراء فیزیک نیست (مرز مشخصی بین آنها نیست)

اگر هم مرزی بین این دو وجود داشته باشد، این مرز از نوع زمان و انرژی است.

مهندسی
- فهم فیزیک مسئله
  - ادبیات
  - حس و لمس
    - با ابزار
    - بدون ابزار
- ریاضی
- کاربرد (و مصادیق)

لازمه‌ی درک سرعت ⟵ چشم   لازمه‌ی درک تغییر سرعت ⟵ چشم نیست بلکه سنسورهای مغزی آن را تشخیص می‌دهند.

از زمانی درک فیزیک در وجود همه نهادینه شده است.

لازمه‌ی پیشرفت در گام سوم (مهندسی و کاربرد) ؟!

حل تمرین ← زیاد
حل تمرین ← متفکرانه
حل تمرین ← فیلسوفانه

+ چیزی که در حل تمرین مهم است، رسیدن به جواب نیست بلکه تفکر لازم برای رسیدن به جواب است.

فلسفه = شناخت روابط

مسئله حل کنیم به تعداد زیاد با تفکر

اصرار در رسیدن به جواب ✗ تلاش در رسیدن به جواب ✓

آزمایشگاه دینامیک ← با همه‌ی واژگانی که در ذهن داریم و همه‌ی ادراکمان به آزمایشگاه می‌رویم و آنها را پیاده‌سازی می‌کنیم.

بشر ← نطق و تفکر ← جست و جوگری ÷ ← بیان قوانین حاکم بر طبیعت

+ یک و فقط یک قانون همواره در تمام طبیعت حاکم است: تعادل

در آزمایشگاه ← تعادل حرکت (قانون حرکت)، معادله حرکت، معادله‌ی تعادلی حرکت

+ سرعت (شتاب) تعریف نیست بلکه ادراک بشر است. نه شتاب ، نه سرعت

ورودی → بشر (فیلتر) → خروجی (حاصل تفکر بشر)

قانون تعادل $\Sigma F = ma$ اگر $m=0$ یا $a=0$ $\Rightarrow$ $\Sigma F=0$ سکون استاتیک

شروع استاتیک

۹۳/۱۱/۱۴

Subject: جلسه دوم

Year. Month. Date. ( )

خلاصه جلسه قبل : استخراج قانون تعادل حرکت بر مبنای { واژگان رایج در ادبیات بر اساس فرهنگ
ابزارهای ساخته شده توسط بشر
ادراکات و احساس بشر } { معنا
متن

$\Sigma F = ma$

این جلسه { بردار
تعادل استاتیکی $\vec{\Sigma F} = \vec{0}$
فلسفه سیستم مختصات
درک فیزیکی کار و انرژی ← چیستی ضرب داخلی
" " توان
" " اندازه حرکت
" " گشتاور ← ضرب خارجی

تعریف بردار : خطی است فلش دار مثال : $\{2\}$ و $\begin{Bmatrix}2\\3\end{Bmatrix}$

تنها توانمندی بشر در ریاضیات = شمارش

فلسفه سیستم مختصات این است که ① توانمندی شمارش را تعمیم کنیم. (امکان کدینه کردن محاسبات)
② تبدیل یک سیستم n بعدی پیچیده به n سیستم ۱ بعدی مساوی

نکته مهم : تعاریف (ریاضی) { مبتنی بر محاسبات فیزیک
ساده سازی نوشتار

۳ گام مواجهه با طبیعت : ① درک، حس، بیان (فیزیک) ② اثبات، تأیید، توجیه (ریاضی)
③ کاربردها و مصادیق آن برای رفع نیاز بشر (مهندسی)

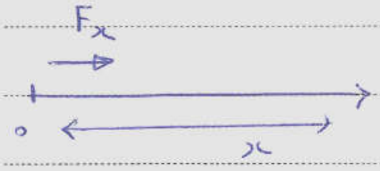
تنها توانایی بشر در ریاضیات = شمارش!

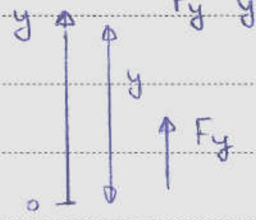
قانونمند کردن تنها توانایی بشر که همان شمارش است. (اما بدون درگیر کردن محاسبات (در ریاضیات)

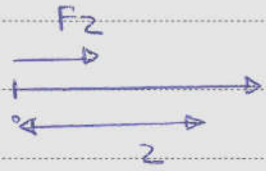
تبدیل یک سیستم n بعدی به n تا سیستم یک بعدی بیان.

فلسفه سیستم مختصات

مثال: کار $= F_z z$ کار $= F_y y$ کار $= F_x x$







کل کار $= F_x x + F_y y + F_z z$

نکته مهم، تعاریف ریاضی

مبتنی است بر محاسبات فیزیکی
ساده سازی نوشتار

۳ گام مواجهه با طبیعت:
① درک، حس، بیان ← فیزیک
② اثبات، تأیید، توجیه ← ریاضی
③ کاربردها و مصادیق آن برای رفع نیاز بشر ← مهندسی

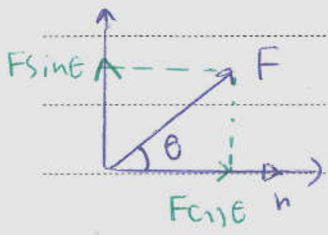
$$W = \vec{F}\cdot\vec{r} = F_x x + F_y y + F_z z.$$

ادامه بحث ضرب داخلی.

$$W = F_x x + F_y y + F_z z \qquad (1)$$

$$W = F r \cos\theta \qquad (2)$$

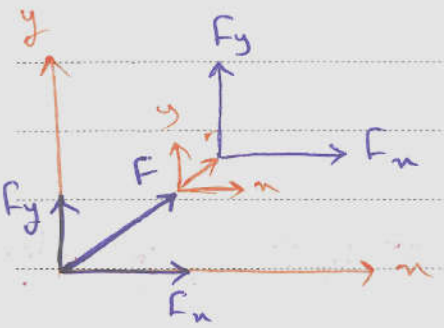
اثبات رابطه ۲.



مؤلفه‌ی $F\sin\theta$ کاری انجام نمی‌دهد.

چرخش $= FL\sin\theta$ مانع دوران چرخش : ممان، لنگر، گشتاور

$M = Fr\sin\theta$

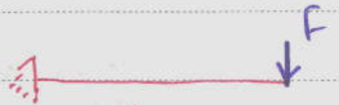


$$M_z = -F_x y + F_y x$$

دترمینان ماتریس A

$$M_z = (xF_y - yF_x)\hat{k} = \begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} = xF_y - yF_x$$

جلسه سوم – ۹۳/۱۱/۱۹



تکیه‌گاه گیردار

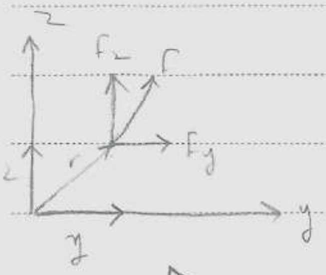
ریاضی
- نمادها
- قراردادها $xf_x + yf_y + zf_z$
- تعاریف ضرب داخلی

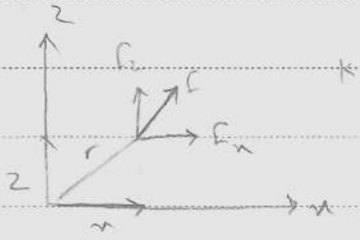
نمادها

قرارداد : $\begin{vmatrix} x & y \\ f_x & f_y \end{vmatrix} = xf_y - yf_x$ تعریف دترمینان

$$\begin{vmatrix} x & y \\ f_x & f_y \end{vmatrix}\hat{k} = (xf_y - yf_x)\hat{k}$$

* عین جهت را هم برای آن قائل شده‌ام.





$$\vec{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} yf_z - zf_y \\ -xf_z + zf_x \\ xf_y - yf_x \end{Bmatrix}$$

yf_z ↺ + zf_x ↻ +

zf_y ↻ − xf_z ↺ −

$(-zf_y + yf_z)\hat{i}$ $(-xf_z + zf_x)\hat{j}$

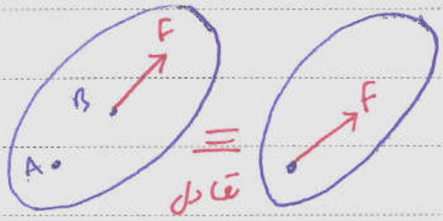
$$(yF_z - zF_y)\hat{i} + (-xF_z + zF_x)\hat{j} + (xF_y - yF_x)\hat{i}$$

$$\begin{vmatrix} y & z \\ F_y & F_z \end{vmatrix}\hat{i} - \begin{vmatrix} x & z \\ F_x & F_z \end{vmatrix}\hat{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix}\hat{k}$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{r} \times \vec{F}$$

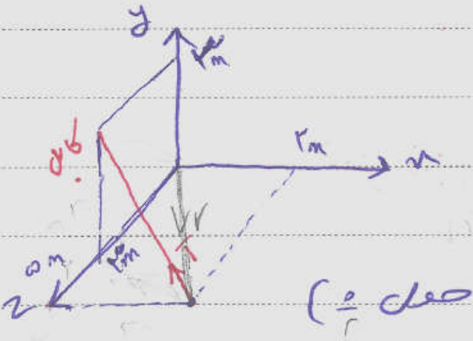
جلسه چهارم - ۹۳،۱۱،۲۱

اصل انتقال پذیری :



نکته مهم:
ماشین ← مختصات نقاط ← بردارها
انسان (دست) ← حس و مسیریابی

تمرین :



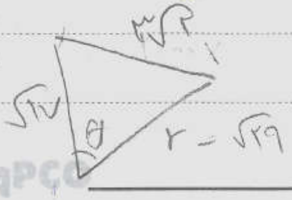
در وسط ورق اعمال می‌شود ← $W = 1000\,N$

مختصات آن ← $= 1\hat{i} + 0\hat{j} + 2.5\hat{k}$

ممان ناشی از وزن ≡ ممان ناشی از کشش کابل (حول $\frac{o}{۲}$)

$T = ?$ حول $z = 1000 \times 0.5\sqrt{29} = \sqrt{29} \times T \times \frac{14}{\sqrt{17} \times \sqrt{29}}$

یک مثال از کتاب جانسون را که مشابه این تمرین است پیدا و حل کنید.



$\rightarrow 18 = 17 + 29 - 2 \times \sqrt{17} \times \sqrt{29} \times \cos\theta \rightarrow$

$\rightarrow \cos\theta = \frac{14}{\sqrt{17} \times \sqrt{29}}$

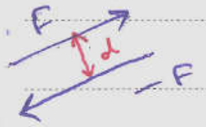
شروع اسلاید

کوپل : (couple) در ادبیات: جفت، دو، زوج در ادبیات فنی: دو نیرو که مساوی و موازی و هم مقدار اما مختلف الجهت هستند کوپل می نامیم.

فلسفه کوپل { خودش مسئله است.
ابزار حل بسیاری از مسائل

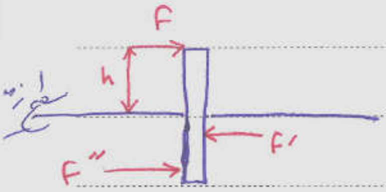
نکات مهم کوپل : $\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$

$\Sigma M = Fd \circlearrowright$



گشتاور کوپل : Fd

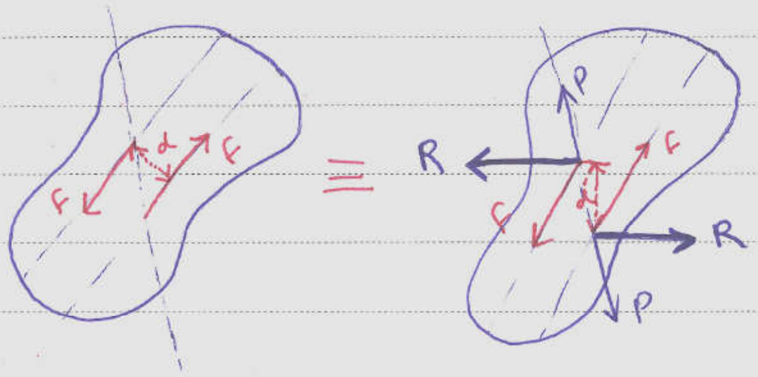
گشتاور ← عین نیرو و مستقل از پایه ی کوپل



مثال: چرا میله تکان نمی خورد و $\Sigma M = 0$

توضیح: F خاک را به سمت جلو می راند و خاک نیرو ی F' و در خلاف جهت F وارد می کند که مقداری از آن با F کوپل تشکیل می دهد و باقی مانده ی آن یک نیرو در عکس العمل خواهد داشت (F'') که این دو نیرو هم یک کوپل را تشکیل می دهند که اند گشتاور این دو کوپل در خلاف جهت هم و مساوی است.

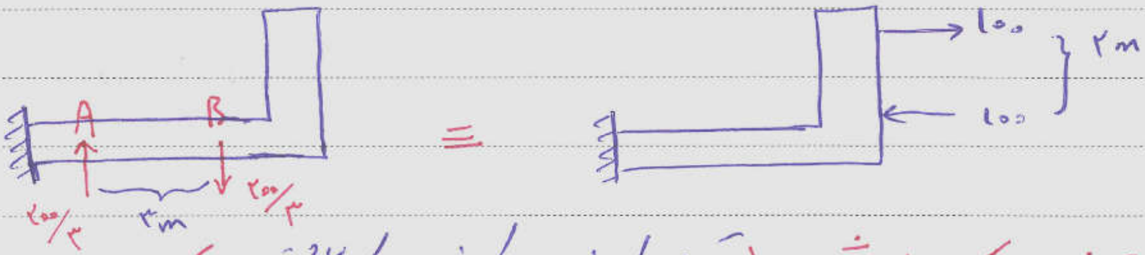
کوپل معادل:


F
d
F
≡
R
P
F
d'
F
R
P

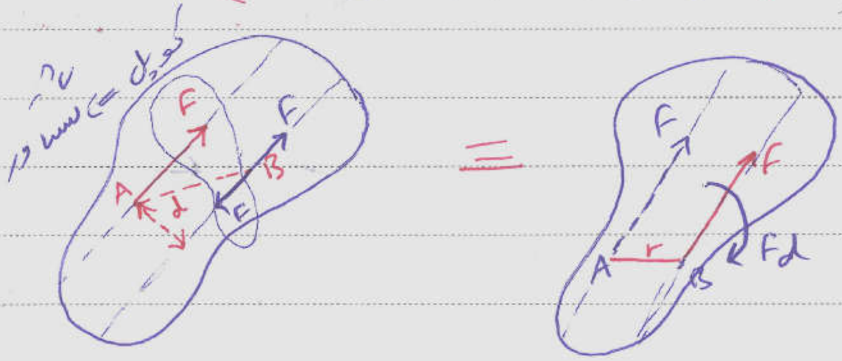
(برآیند P و F)

$$Fd \equiv Rd'$$

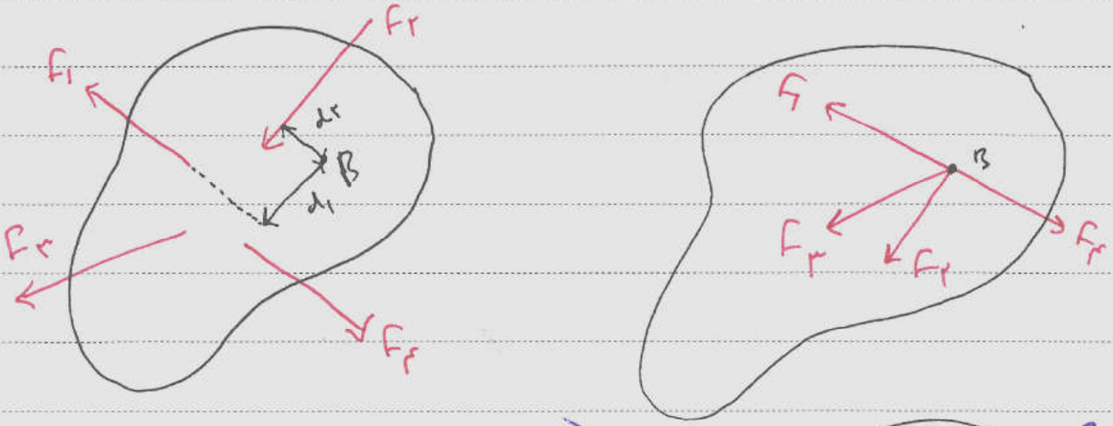
مثال:


A
B
۲۰۰/۳
۳m
۲۰۰/۳
≡
۱۰۰
۲m
۱۰۰

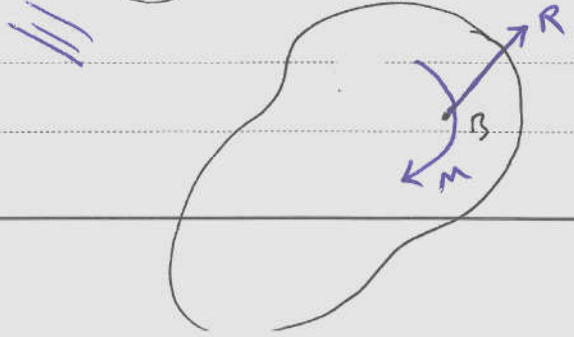
انتقال نیرو در جهتی غیر از امتداد خودش: (تبدیل یک نیرو به یک نیرو و یک گشتاور)


کوپل ساعتگرد
F
F
A
d
B
F
≡
F
F
A
r
B
Fd

اثبات: به نقطه‌ی B مطابق شکل اول دو نیروی مساوی و مختلف الجهت اضافه می‌کنیم.

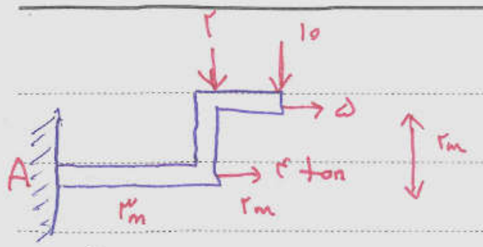

F۱
F۲
d۲
B
d۱
F۳
F۴
F۱
B
F۳
F۲
F۴

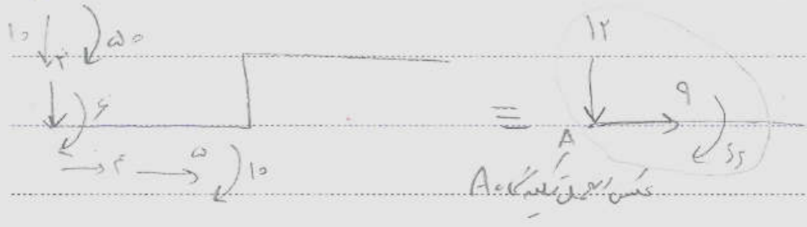
$$M = M_1 + M_2 + M_3 + M_4$$



Subject: جلسه پنجم – ۹۳/۱۱/۲۶
Year. Month. Date. ( )

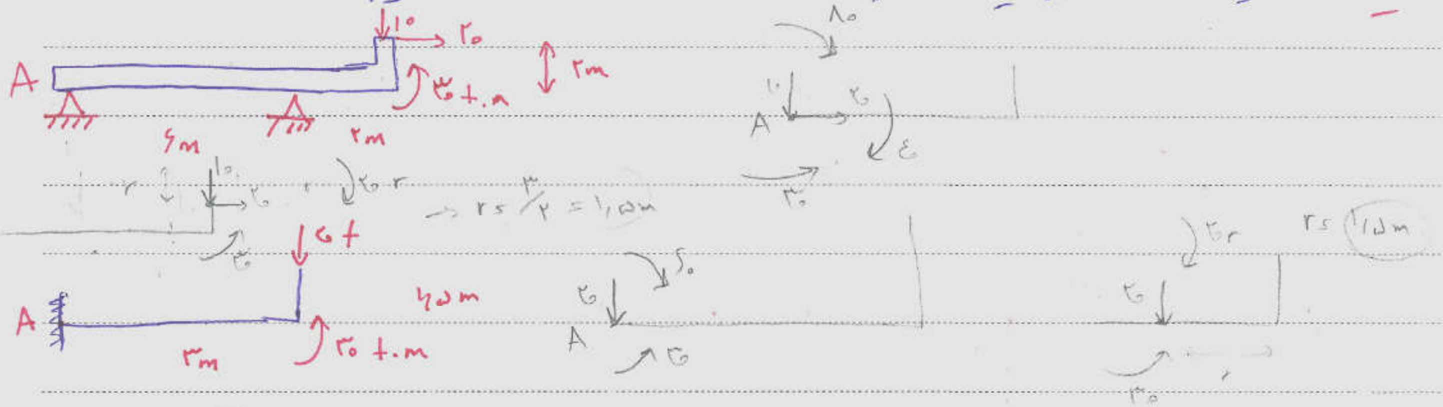
مثال: تمام نیروها را به نقطه A منتقل کنید.


۲
۱۰
۵
۴ ton
۲m
A
۳m
۲m


۱۰
۵۰
۲
۶
۴
۵
۱۰
=
۱۲
۹
۶۶
A
عکس العمل تکیه گاه A

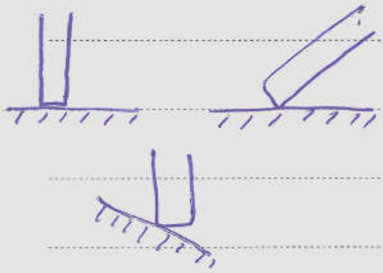
کاربردهای انتقال تمام نیروها به یک نقطه ← تکیه گاه ← عکس العمل از تکیه گاه ← طراحی تکیه گاه

تمرین: تمام نیروها را به A ببرید. اگر تمام نیروها به کدام نقطه بروند فقط نیرو ایجاد می‌شود؟


۱۰
۲۰
A
۳۰ t.m
۲m
۶m
۲m
۸۰
۱۰
۲۰
A
۴۰
۳۰
۲۵ / ۲ = ۱٫۲۵m
۵ t
A
۳m
۳۵ t.m
۲۵m
۵
۵۰
A
۳۵
۳۲
۲۵
۱٫۲۵m
۵
۳۰

انواع تکیه گاه

ساده‌ترین تکیه گاه: نشستن یک جسم روی زمین (بدون اصطکاک)

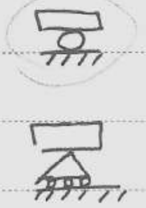


تکیه گاه ساده

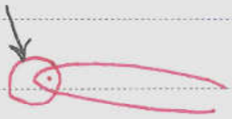
=

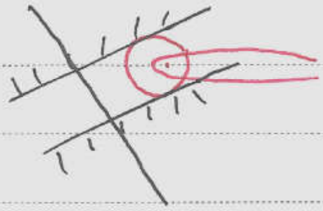
(در یک نیرو داریم) عکس العمل ← عمود بر سطح تکیه گاه

نمایش تکیه‌گاه { ساده / غلتکی } در کتب استاتیک

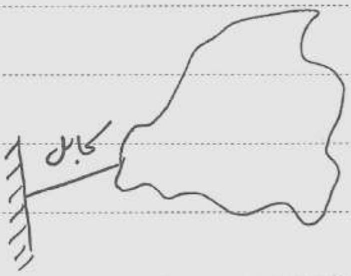


ریل بدون اصطکاک :

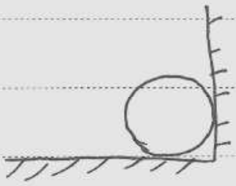


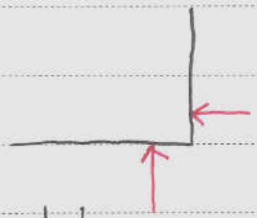


اتصال با کابل :

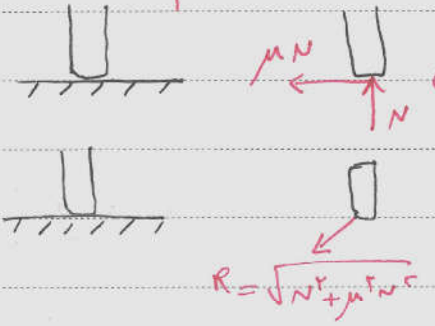


تکیه‌گاه دونیرویی :





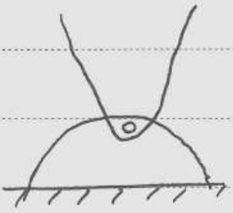
مثال: نشیمن دارای اصطکاک

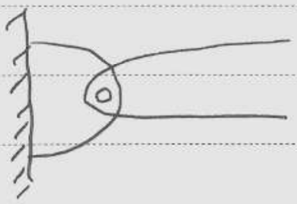


یک تکیه‌گاه دونیرویی ولی یک مجهولی

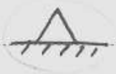
باز هم یک تکیه‌گاه دونیرویی باقی می‌ماند و یک نیرویی
نیست چون در صورتی یک نیرویی است که نیرو
عمود بر سطح تکیه‌گاه باشد.

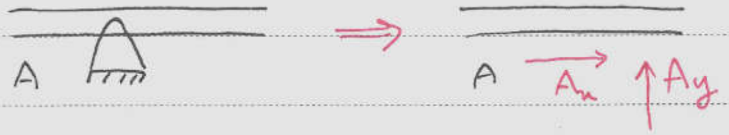
مثال دیگر :





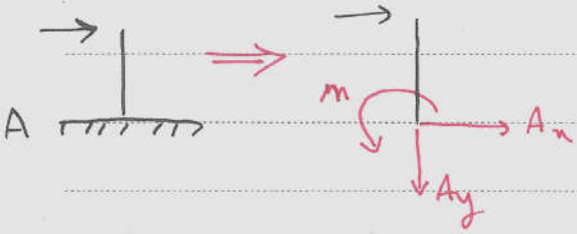
نمایش در استاتیک :





تکیه‌گاه گیردار : (تکیه‌گاه Fix)

منظور این است که علاوه بر نیروهای x و y امکان تحمل چرخش روی محور z را هم دارد.



نیروهای x و y

چرخش z — ممان

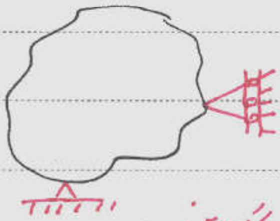
۳ تا معادله

$$\left.\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0\\ \Sigma F_y &= 0\\ \Sigma M &= 0\end{aligned}\right\}$$ در صفحه

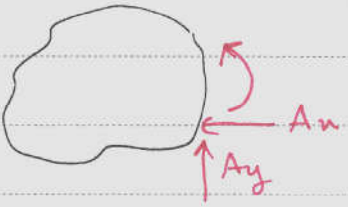
مثالی از ۳ معادله : ۳ مجهول

↓

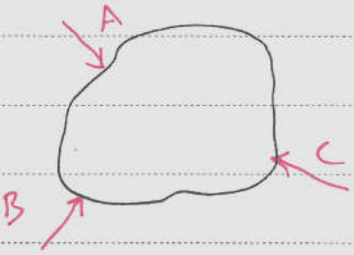
۳ حالت دارد



۲ تکیه‌گاه : یک تکیه‌گاه یک نیرویی و یک تکیه‌گاه ۲ نیرویی



۱ تکیه‌گاه : یک تکیه‌گاه گیردار



۳ تکیه‌گاه : سه تکیه‌گاه یک نیرویی

دیاگرام آزاد : جسم با تمام نیروهای وارده بر آن
- وزن
- نیروهای خارجی
- عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه‌ها

(Free body diagram)

روش عمومی حل تمام مسائل استاتیک :

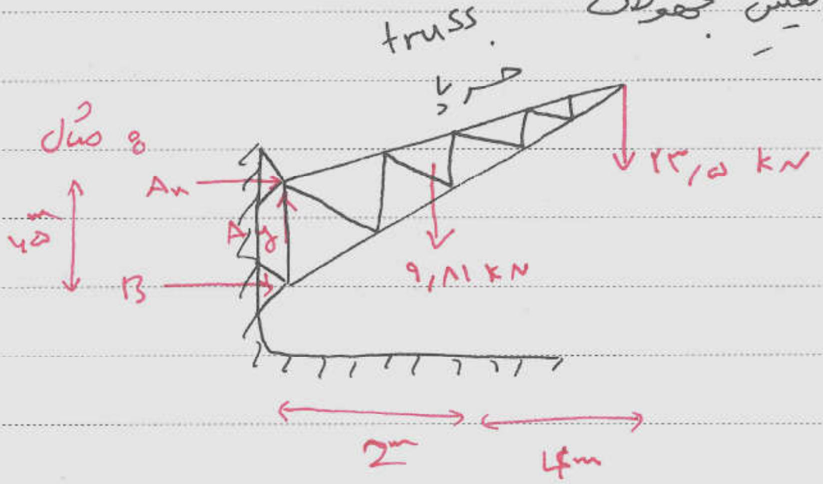
گام ① در نظر گرفتن سیستم مختصات

گام ② رسم دیاگرام آزاد {
خارجی
وزن
عکس العمل در تکیه گاه ها

گام ③ نوشتن معادلات تعادل {
$\Sigma F_x = 0$
$\Sigma F_y = 0$
$\Sigma M = 0$

گام ④ حل این معادلات تعادل برای تعیین مجهولات

مثال :



حل : دستگاه ۳×۳ $\xrightarrow{\text{تبدیل}}$ ۳ معادله ۳ مجهولی

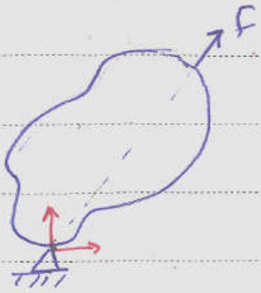
③ ΣF_x $A_x = B$

① ΣF_y $A_y - ۹٫۸۱ - ۲۳٫۵ \rightarrow A_y = ۲۳٫۵ + ۹٫۸۱$

② ΣM حول A : $+ B \times ۱٫۵ - ۹٫۸۱ \times ۲ - ۲۳٫۵ \times ۶$

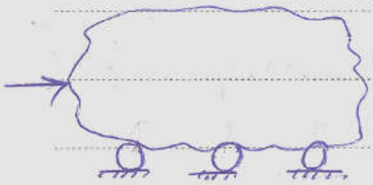
(حول A یا حول B) ⇒ ۱ مجهول

⇒ B بدست میاد

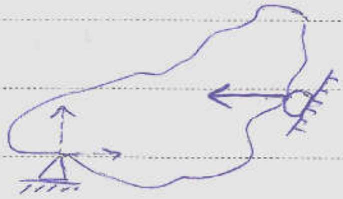


در شکل روبه‌رو جسم تعادل استاتیکی ندارد چون از بین سه معادله‌ی تعادل در صفحه یکی از آنها برقرار نمی‌باشد و آن $\Sigma M = 0$ است.

؟!؟



تعادل ندارد



برای برقراری $\Sigma F = 0$ نیروها ① نباید موازی باشند ② نباید همرس باشند.

تعادل جسم دو نیرویی:

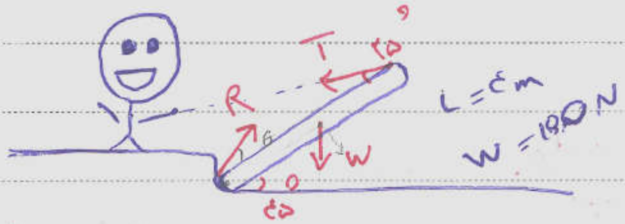
اینکه نیروها:
- در یک راستا قرار داشته باشند. ← $\Sigma M = 0$
- هم‌مقدار باشند. ← $\Sigma F_x = 0$
- مختلف الجهت باشند. ← $\Sigma F_y = 0$

تعادل جسم سه نیرویی:

سه نیرو تشکیل مثلث بدهند (قانون sin ها برقرار باشد) ← $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$

سه نیرو همرس باشند ← $\Sigma M = 0$

مثال:



۸۵/۳۶ ۷۰/۷

$$T\cos ۲۵° + \frac{w}{\sqrt{۲}} = R\cos\theta$$

۷۰/۷

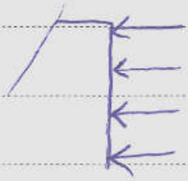
$$\frac{w}{\sqrt{۲}} = T\sin ۲۵° + R\sin\theta$$

$\Sigma M \rightarrow \frac{w}{\sqrt{۲}} \times ۲ = T\sin ۲۵ \times ۴ \Rightarrow \frac{w}{\sqrt{۲}} = ۲T\sin ۲۵ \rightarrow T = ۹۲/۴\,N$

$\begin{cases} R\cos\theta = ۱۵۴ \\ R\sin\theta = ۳۵/۳۵ \end{cases} \rightarrow \tan\theta = /۲۲۹ \rightarrow \theta = ۱۴/۱۴° \rightarrow R = ۱۵۰/۷\,N$

Subject: ۹۳/۱۲/۳ - جلسه هفتم
Year. Month. Date. ( )

مصادیق بار گسترده : مثال: آب پشت سد



مصادیق بار متمرکز: نداریم

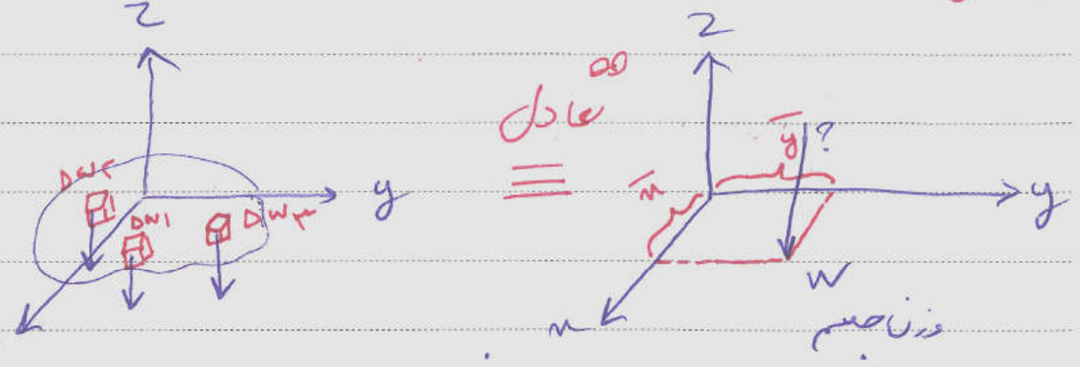
تعریف گشتاور در ریاضی: $M_n = \int r^n f(x)\,dx$ گشتاور مرتبه n

مثال: $M_0 = \int f(x)\,dx$ $\quad M_1 = \int r f(x)\,dx$ $\quad M_2 = \int r^2 f(x)\,dx$

گشتاور مرتبه
- صفرم ← خود تابع
- اول $\xleftarrow{\text{نیرو}}$ گشتاور (فیزیک)
- دوم $\xleftarrow{\text{سطح}}$ ؟

مرکز ثقل

برای ساده‌ترین حالت (۲ بعدی و صفحه افقی)



$\sum F_z = 0$

$\hookrightarrow \sum \Delta W_i = \int dW = \overset{\text{وزن جسم}}{W}$ ← سیستم سمت چپ باید این مقدار باشد.

سیستم سمت راست

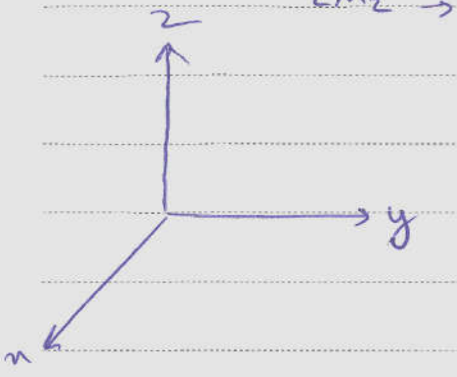
سیستم سمت راست

گشتاور حول محور y کل: $\Delta W_1 x_1 + \Delta W_2 x_2 + \Delta W_3 x_3 + \dots = \sum \Delta W_i x_i$

$\bar{y} = \dfrac{\int y\,dW}{W}$ $\qquad \bar{x} = \dfrac{\int x\,dW}{W}$ ← $\underset{\text{سمت چپ}}{W\bar{x}} = \int x\,dW$

مهم‌ترین مصداق بار گسترده ← وزن

$\Sigma M_z \rightarrow$ مستقل نیست و به ΣM_x و ΣM_y مربوط است.



بار گسترده

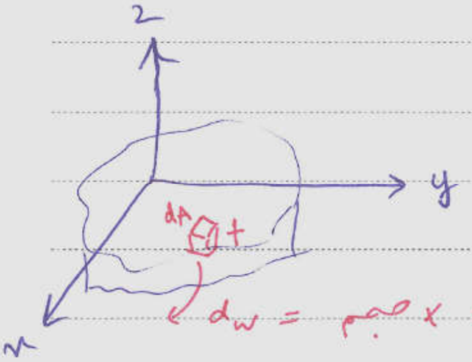
$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow$ کل نیرو

$\Sigma M_y \Rightarrow \bar{x} =$

$\Sigma M_x \Rightarrow \bar{y} =$

مرکز سطح
- خودش یک مسئله است
- ابزار حل و مسیری از مسائل (تعادل) استاتیک

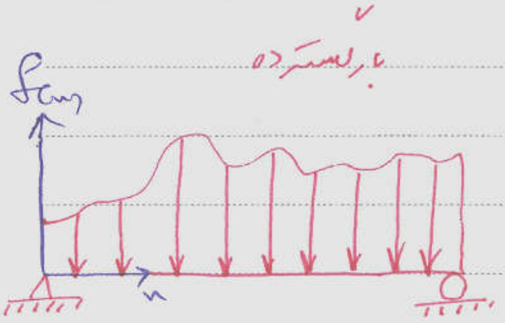
اگر در مسئله مبنی
- ضخامت دیسک ثابت باشد : t
- چگالی دیسک ثابت باشد : γ



$dw =$ چگالی وزنی × حجم $= t\,dA \cdot \gamma$

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dw}{\int dw} = \frac{\int x t \gamma\,dA}{\int t \gamma\,dA} = \frac{\int x\,dA}{\int dA} = \frac{\int x\,dA}{A} \quad , \quad \bar{y} = \frac{\int y\,dA}{A}$$

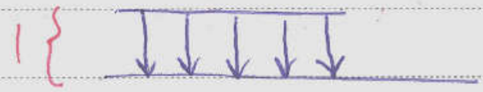
مرکز اثر بار گسترده:



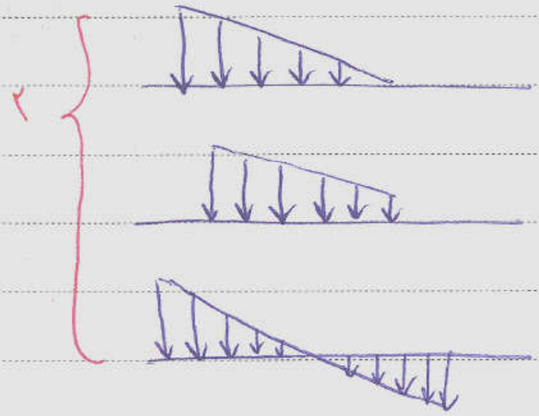
اولین کاربرد مرکز سطح: تعیین مرکز اثر بار گسترده است.

$$\bar{y} = \frac{\int y\,dA}{A} \quad , \quad \bar{x} = \frac{\int x\,d}{A}$$

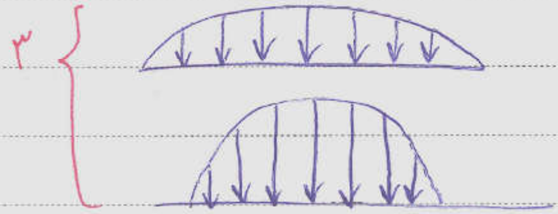
تعیین مرکز اثر شکل :



بار گسترده یکنواخت

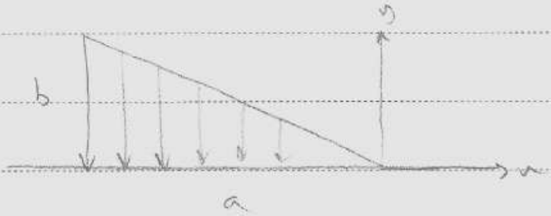


بار گسترده خطی



بار گسترده منحنی

حالت نیم دایره ؟

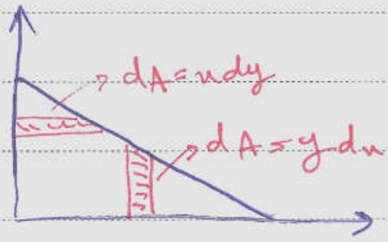


$A = ba/2$, $y = b/a\, x$

$dA = b/a\, x \times dx$

$$\bar{x} = \frac{\int x\, dA}{A} = \frac{\int x^2\, b/a\, dx}{ba/2} = \frac{2}{a^2} \times 1/3\, a^3 = \boxed{2/3\, a}$$

انواع المان :



ویرایش 7

اسلاید ۱۰, ۱۲, ۱۳ ـــ 2-12 , 2-9 , 2-6 , 2-27 , 2-24

و 2-45 , 2-36 , 2-50 , 2-48

سه‌شنبه ۱۲/۱۲/۹۳ ـــ 3-17 , 3-13 , 3-6 , 3-68 , 3-52 , 3-25

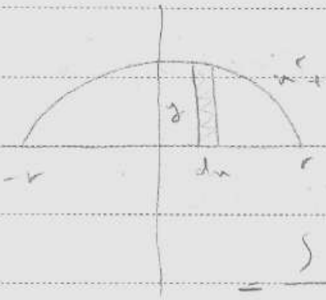
و 3-97 , 3-94 , 3-109

تمرین : به دو روش اثبات کنید مرکز سطح مستطیل وسط آن است.

روش اول : تعریف و انتگرال گیری

روش دوم : تبدیل به دو مثلث

محاسبه مرکز سطح نیم دایره :

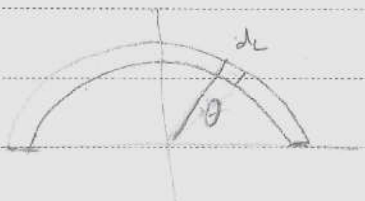


$dA = y\,dx \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,dA}{A}$

$$= \frac{\int y \times y\,dx}{A} = \frac{\int_{-r}^{r} (r^2-x^2)\,dx}{\pi r^2/2} = \frac{r^2 x\big|_{-r}^{r} - x^3/3\big|_{-r}^{r}}{\pi r^2/4}$$

$$= \frac{4r}{3\pi}$$

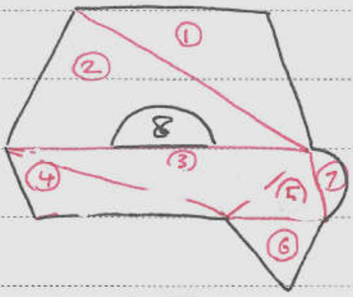
تعیین مرکز سطح رینگ :



$dL = R\,d\theta$

$$\bar{y} = \frac{\int y\,dL}{L} = \frac{\int y\,R\,d\theta}{\pi R} = \frac{\int_0^{\pi} R\sin\theta\,R\,d\theta}{\pi R} = \frac{2R}{\pi}$$

تعیین مرکز سطح یک جسم کلی : (میانترم و پایان ترم)



شماره سطح	A_i مقدار سطح	$\bar{x}_i$	$\bar{y}_i$	$A_i\bar{x}_i$
1	108	$\bar{x}_1$	$\bar{y}_1$	$A_1\bar{x}_1$
2	200	$\bar{x}_2$	$\bar{y}_2$	$A_2\bar{x}_2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
8	-24	$\bar{x}_8$	$\bar{y}_8$	$A_8\bar{x}_8$
جمع	742			$\sum_1^8 A_i\bar{x}_i$

$$\bar{x} = \frac{\sum A_i\bar{x}_i}{\sum A_i}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum A_i\bar{y}_i}{\sum A_i}$$

* علامت منفی سطوح که وجود ندارد علاوه بر خود سطح در $A\bar{x}$ ، $A\bar{y}$ هم لحاظ شود.

تحلیل سازه ها :

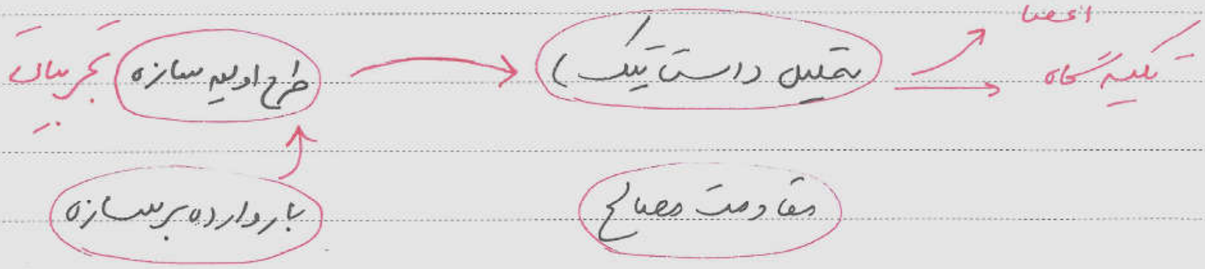
تحلیل { تعیین نیروهای عکس العمل تکیه گاهی ← طراحی تکیه گاه ها

تعیین نیروهای داخل تمام اعضای سازه ← طراحی اعضا

نکته : قبل از تحلیل سازه { فرض هندسه سازه (طرح اولیه)

بارهای خارجی (بارگذاری)

طراحی ← کنترل اینکه نیروی ایجاد شده در عنصر کمتر باشد از مقاومت مصالح

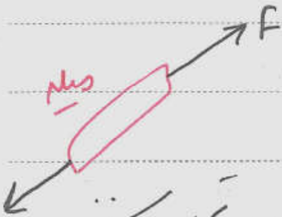

طرح اولیه سازه
بحرانی
تحلیل (استاتیک)
تکیه گاه
اعضا
بار وارده بر سازه
مقاومت مصالح

مهندسی $\xrightarrow{\text{هدف}}$ ساخت

سازه : مجموعه ای از اعضا برای تحمل بارهای خاص

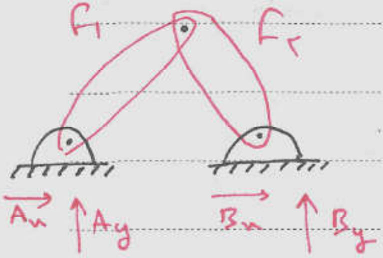
ساده ترین سازه : سازه ای است که تمام اعضای آن ، ساده ترین اعضا باشند.

ساده ترین عضو : فقط تحت نیروی محوری باشند



خرپا (truss) : سیستم سازه ای متشکل از اعضای میله ای که فقط نیروی محوری تحمل می کنند.

PAPCO


F_1
F_2
A_x
A_y
B_x
B_y

ساده‌ترین خرپا

* برای حفظ پایداری ساده‌ترین خرپا باید هر دو تکیه‌گاه، دو نیرویی باشند.

پایداری و حل معادلات

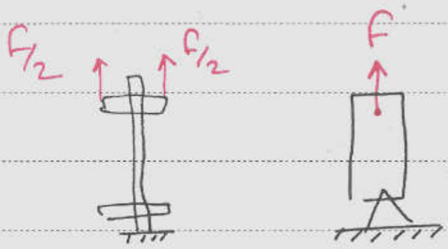
چگونگی یا روش تحلیل خرپا ← F_1 و F_2

A_x و A_y و B_x و B_y

در صفحه: ۳ تا معادله

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma F_x=0\\ \Sigma F_y=0\\ \Sigma M=0\end{array}\right\}$$

رفتار مشابه توزیع نیرو در مسائل زیر

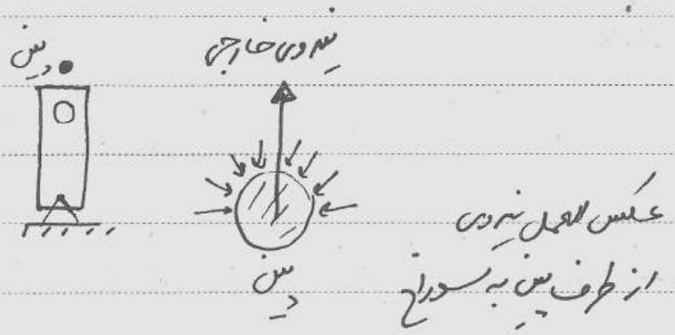


جلسه کم - ۹۳/۱۲/۱۰

روش تحلیل سازه خرپا

ابتدا حالت ساده‌ی زیر را در نظر می‌گیریم:

- ساز و کار تبادل نیرو بین پین و میله:


پین
نیروی خارجی
پین
عکس‌العمل نیروی
از طرف پین به سوراخ

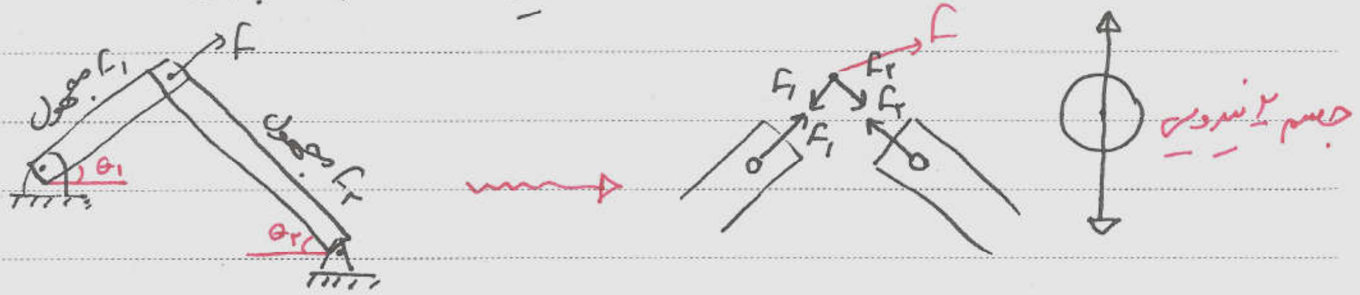
PAPCO

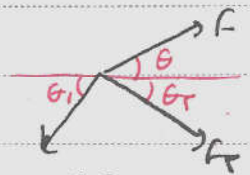
گام اول: سیستم مختصات

گام دوم: دیاگرام آزاد

گام سوم: نوشتن معادلات تعادل

$\Sigma F_x = 0$ ← به علت تنش برشی _ ضرورت برقراری شرط تعادل
$\Sigma F_y = 0$ ← مجموع مؤلفه‌های قائم نیروی وارد بر سطح پین = نیروی خارجی
$\Sigma M = 0$ ← این معادله خود به خود برآورده است


F_1 مجهول
F
θ_1
مجهول F_2
θ_2
F
F_1
F_2
F_2
F_1
جسم ۲ نیروی

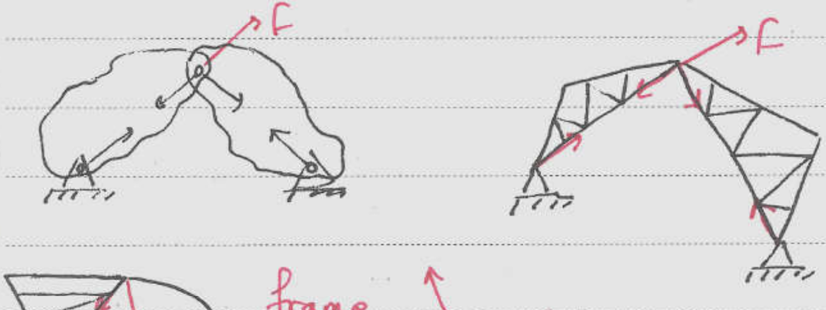

F
θ
θ_1
θ_2
F_2

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_2 \cos\theta_2 + F\cos\theta - F_1 \cos\theta_1 = 0$$

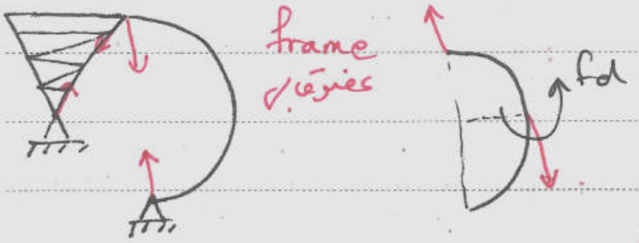
$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow F\sin\theta - F_1 \sin\theta_1 - F_2 \sin\theta_2 = 0$$

$\Sigma M = 0$ ✓ همه‌ی نیروها از یک نقطه می‌گذرند برآورده است

برای پین
$\Sigma F_x = 0$
$\Sigma F_y = 0$



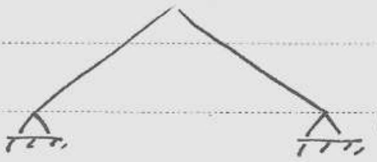
حل خرپا به روش گره:
node
joint


frame
عضو قابی
fd

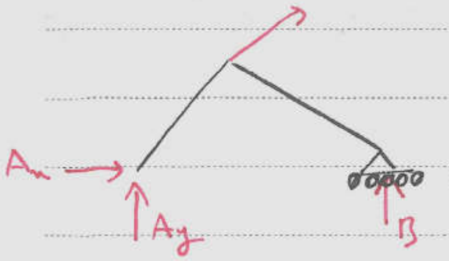
۱) رسم همه‌ی نیروهای خارجی وارد بر گره

۲) معادلات تعادل (نیاز به نوشتن $\Sigma M = 0$ نیست!)

★ یکی از سؤالات میان‌ترم یکی از چهار صورت بالا است!



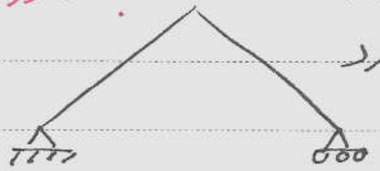
۳ معادله
۴ مجهول تکیه‌گاهی



۳ معادله
۳ مجهول تکیه‌گاهی

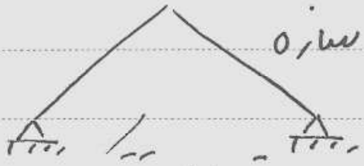
بحث در تعادل و پایداری خرپا؟

تعادل استاتیکی ندارد
تعادل دینامیکی ندارد

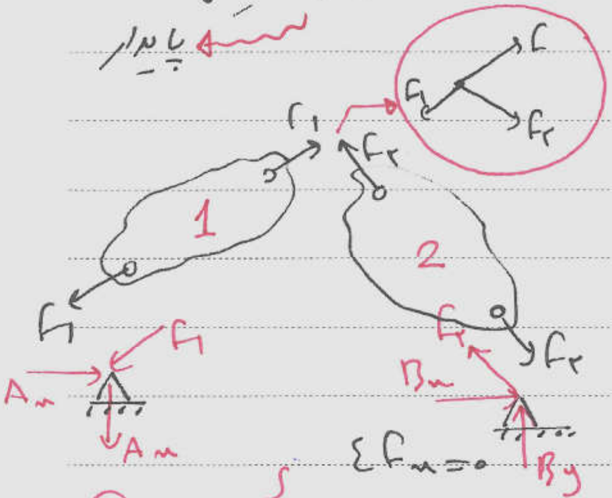


ناپایدار ← $\Sigma F = ma$

سازه



تعادل استاتیکی
پایدار



① → $\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M = 0 \end{cases}$

② → $\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M = 0 \end{cases}$

تکیه‌گاه ۴
عضو ۲

۶ = کل معادلات تعادل
۶ : تعداد مجهولات

* وقتی معادلات نیروهای وارد بر پین را حل کنیم به نیروهای وارد بر عضوها می‌رسیم.

* وقتی معادلات نیروهای ۲ گره یا پین را حل کنیم به نیروهای وارد بر تکیه‌گاه‌ها می‌رسیم.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* وقتی عضوها و تکیه‌گاه‌ها را کنار بگذاریم، همه‌ی سیستم هم‌ارز است با تمام بدن‌ها.

PAPCO

Subject: جلسه دهم - ۹۳/۱۲/۱۲
Year. Month. Date. ( )

فصل ۴ مسائل ← ۷ - ۱۱ - ۱۷ - ۲۱ - ۳۸ - ۳۹ - ۵۲ - ۸۷ - ۱۰۵ - ۱۱۰ - ۱۱۸

فصل ۵ ← ۶ - ۱۱ - ۲۰ - ۳۷ - ۵۰ - ۵۳ - ۵۶

بحث ریاضی

مجهولات < معادلات ← مثال { $۲x = ۳ \rightarrow x = ۳/۲$, $۲x = ۵ \rightarrow x = ۵/۲$ } ← جواب نداریم ⟷ $2j > m+r$ → ناپایداری → تعادل استاتیکی نداریم

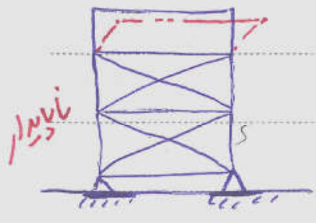
مجهولات > معادلات ← مثال: $x + 2y = ۳$ ← بی‌شمار جواب ← $2j < m+r$

مجهولات = معادلات ← جواب یکتا ⟷ $2j = m+r$

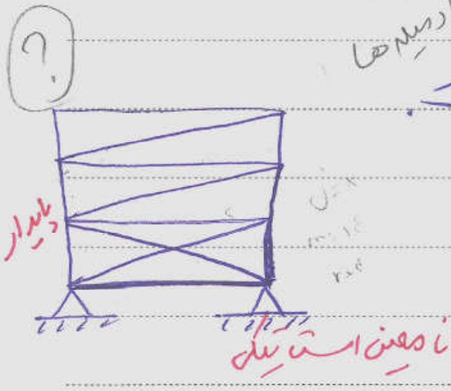
تعداد حرکت → $m+r$ عامل حرکت → $2j$

* هرچه m و r بیشتر ← پتانسیل حرکت کمتر ⇐ امکان تعادل و پایداری بیشتر و برعکس

تعادل دینامیکی ← کلاس استاتیک ← ناپایداری



تعداد گره‌ها
$j = ۸ \rightarrow$ معادلات $= 16$
$m = ۱۴$ و $r = ۴ \rightarrow$ مجهولات $= 18$
تعداد میله‌ها



$2j < m+r$ شرط لازم برای ناپایداری است اما کافی نیست.

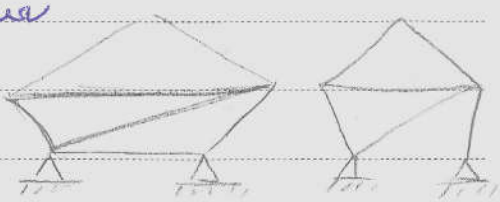
〃 نیز 〃 〃 〃 پایداری است و نه کافی.

* وقتی مجهولات > معادلات یکی از حالات آن پایدارها و دیگری ناپایداری است. وقتی که ناپایدار است، به شمار حالت تعادل دینامیکی داریم. در مورد شکل پایدار، وقتی به طور موضعی (در یک نقطه (point)) تعداد معادلات

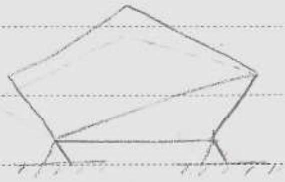
بیشتر از تعداد مجهولات باشد ، ناپایدار است ، تعداد قیود > عامل های حرکت

تعداد معادلات ـ تعداد مجهولات = درجه نامعینی

$(m+r)$ $(2j)$

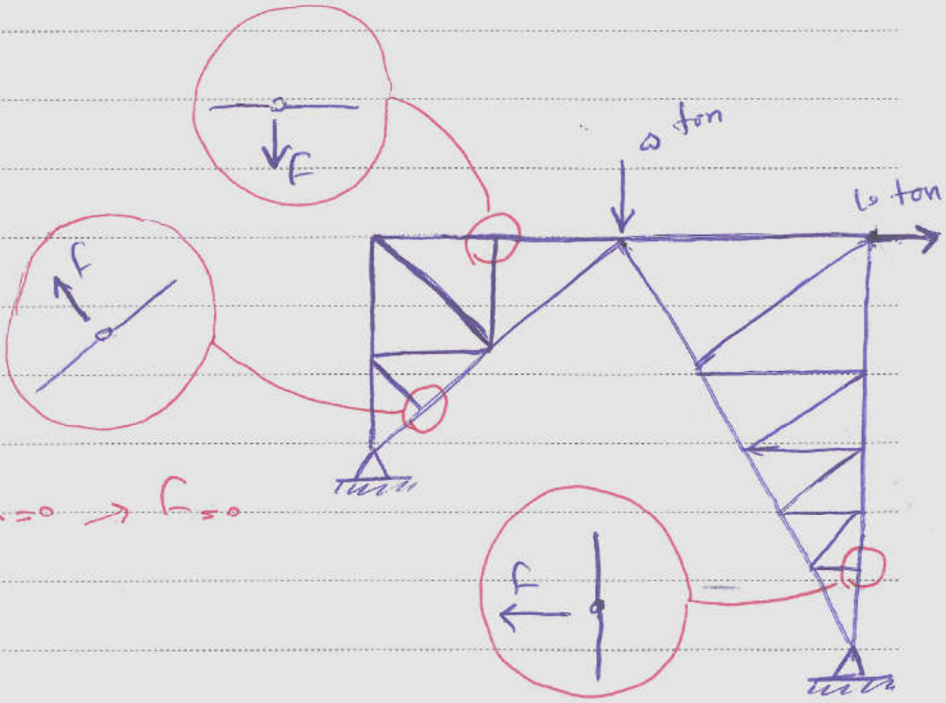


$2j = m + r$ ← پایدار / ناپایدار



$j = 5 \quad m = 6 \quad r = 4$

جلسه یازدهم ـ ۹۳/۱۲/۱۷



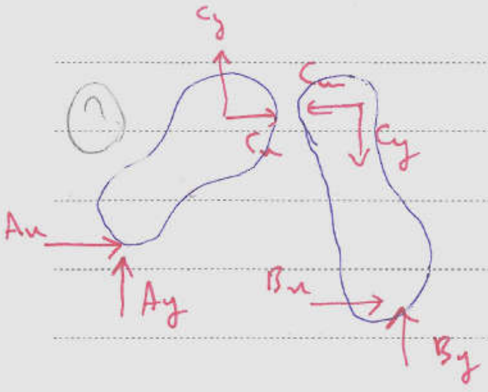
$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F = 0$

* اگر در یک گره دو عضوی هیچ نیروی خارجی وارد نشود $\Sigma F_x = 0$

* اگر در یک گره سه عضوی هیچ نیروی خارجی وارد نشود ، به شرط آنکه دو نیرو هم راستا باشند ، نیروی سوم صفر است.

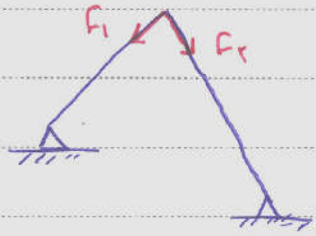
۶ تا مجهول تکیه‌گاهی ← کل جسم : شکل خرپای قبلی

سه تا معادله تعادل
$$\begin{cases}\Sigma F_x = 0\\ \Sigma F_y = 0\\ \Sigma M = 0\end{cases}$$



دو تا جسم { هرکدام سه معادله تعادل → دستگاه ۶×۶
کل مجهولات : ۶ تا

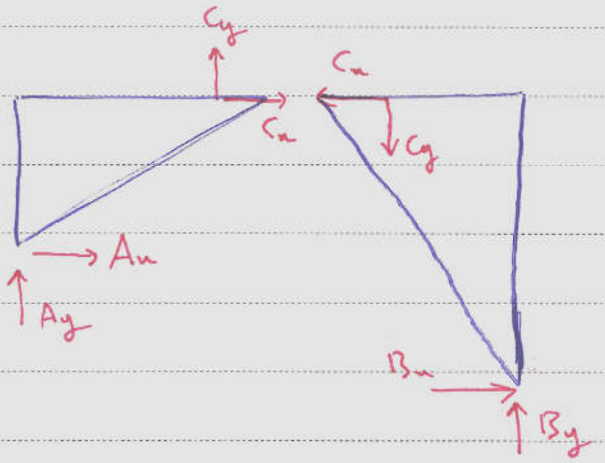
چگونه بدون حل دستگاه :



$\Sigma F_x = 0 \Longrightarrow F_1$ ✓
$\Sigma F_y = 0 \Longrightarrow F_2$ ✓

روش گره و ادامه به گره‌های دیگر :

روش مقطع

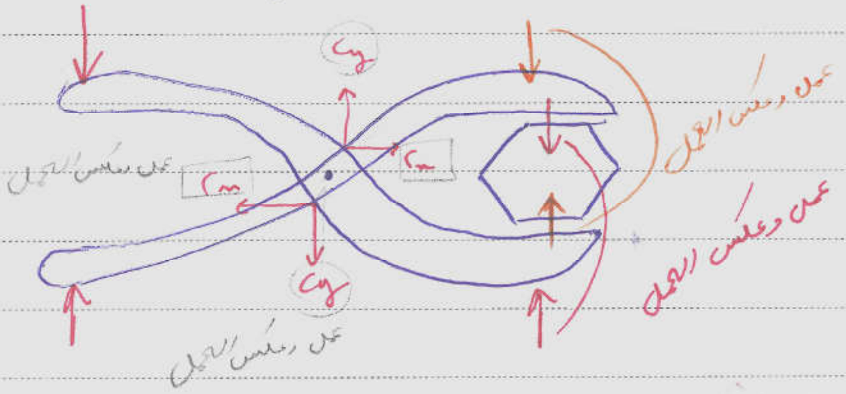


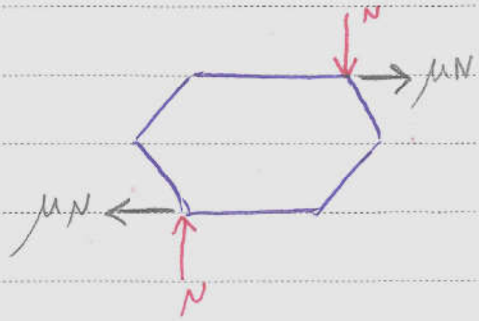
تمرین : چرا اینکه نیروی خارجی ، در گره راست باشد یا چپ تأثیری بر مقادیر پاسخ‌ها ندارد؟

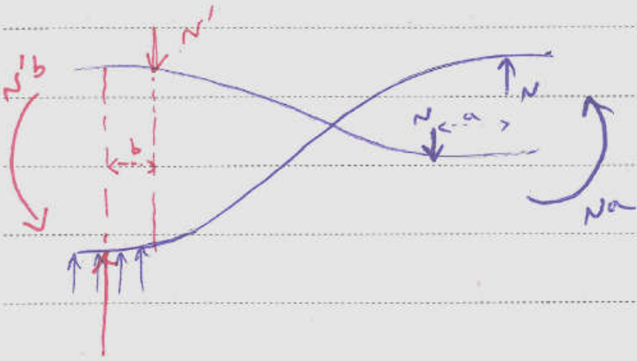
اثبات ریاضی!
توجیه فیزیکی!!

قالب‌ها و ماشین‌ها 8

پیچ و اسبند دست → یکی از ماشین‌های ساده

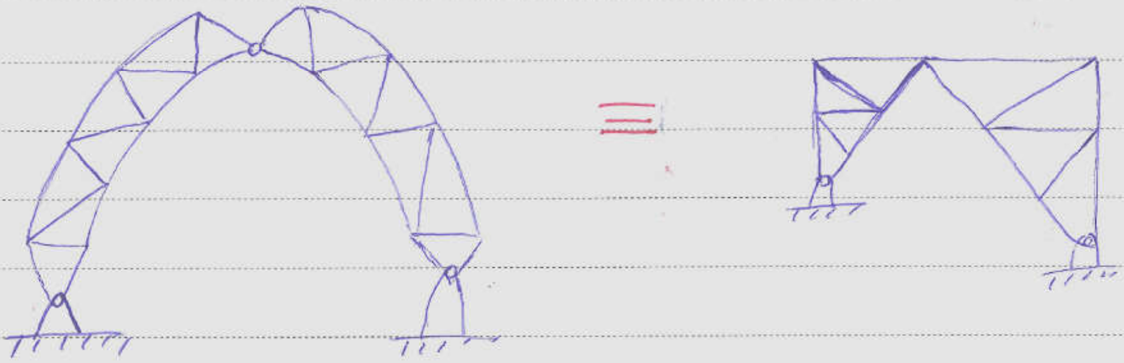

Cy
Cx
Cx
Cy
عمل و عکس العمل
عمل و عکس العمل
عمل و عکس العمل
عمل و عکس العمل

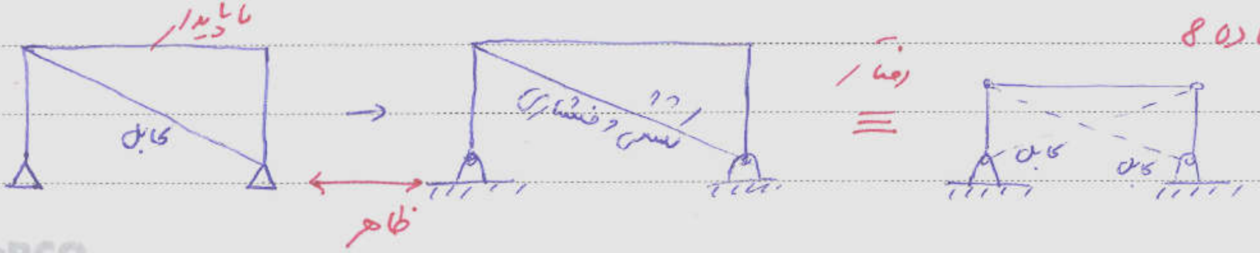




$N'b \equiv Na$

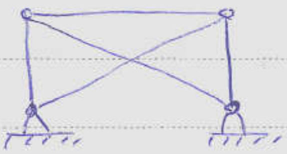
جلسه دوازدهم – ۹۳/۱۲/۱۹




ناپایدار
کابل
کششی و فشاری
ظاهر
رفتار
کابل
کابل

تکیه ساده 8
معین
پایدار

قاب



$j = ۴ \Rightarrow ۸ =$ معادلات → ۱ درجه نامعین

$r = ۴$ ، $m = ۵ \Rightarrow m + r = ۹$ مجهول

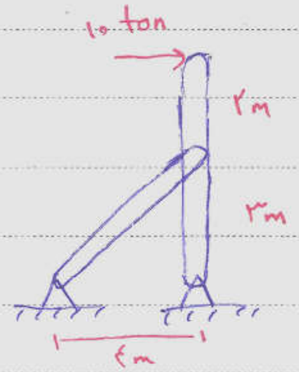
کابل : فقط کشش

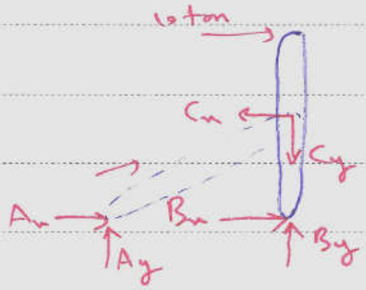
عضو خرپایی 8 کشش و فشار

یک مثال از قاب 8

خرپا و عضو خرپایی:
- عضو دو نیرویی
- نیروها در محل مفصل ها اعمال می شوند.

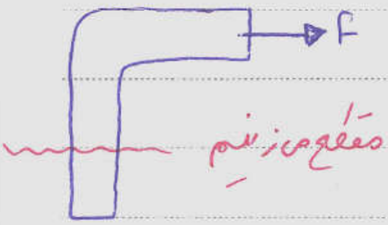
قاب

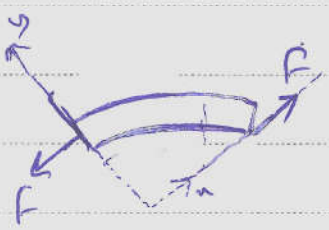

10 ton
۲m
۳m
۴m

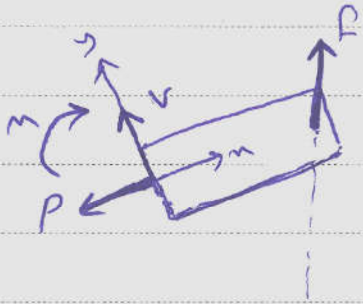

10 ton
C_x
C_y
A_x
B_x
A_y
B_y

* اگر یکی از این دو شرط نقض شود، به آن قاب می گوییم.

تحلیل قاب:
- تعیین عکس العمل ها
- تعیین نیروهای اعضا در هر نقطه ی دلخواه


F
مقطع می زنیم



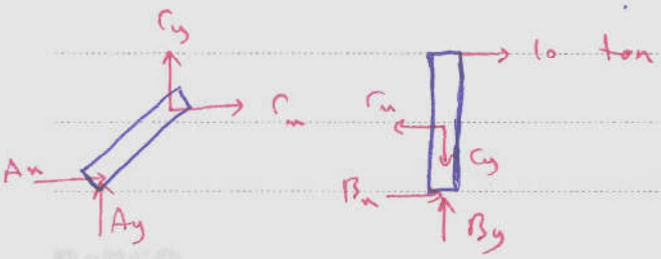


نیروی محوری P

نیروی عمود بر عضو V → نیروی عرضی / نیروی برشی (اشتباه)

ممان M

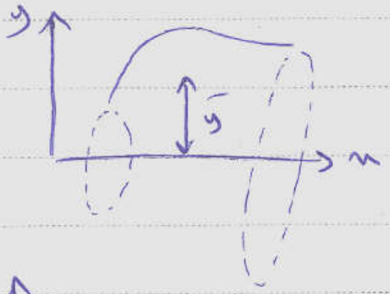
مثال 8


C_y
C_x
A_x
A_y
C_x
C_y
10 ton
B_x
B_y

حل ⟹ $A_x \times 3 - A_y \times 4 = 0 \Rightarrow 3A_x = 4A_y$

$B_x \times 3 - 6 \times 2 = 0 \Rightarrow B_x = 4/3$ $\quad$ $B_x + A_x + 10 = 0 \Rightarrow A_x = -50/3$

$\Rightarrow A_y = -50/4 \quad , \quad B_y = 50/4$



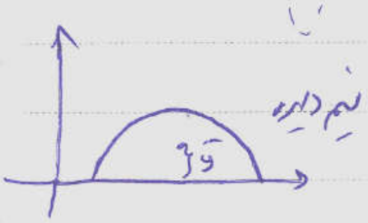
یک نکته تکمیلی در مرکز سطح:

$$A = 2\pi \bar{y} L$$

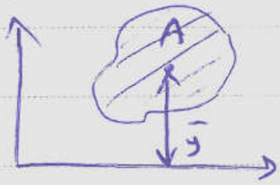
طول منحنی

مرکز ثقل

مساحت حاصل از دوران منحنی حول محور x



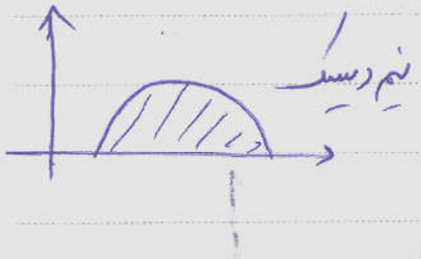
$$4\pi R^2 = (\pi R)\, 2\pi \bar{y} \Rightarrow \boxed{\bar{y} = \frac{2R}{\pi}}$$



$$V = 2\pi \bar{y} A$$

مرکز سطح

حجم حاصل از دوران منحنی حول محور x



$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 2\pi \bar{y} \times \frac{1}{2}\pi R^2 \Rightarrow \boxed{\bar{y} = \frac{4R}{3\pi}}$$

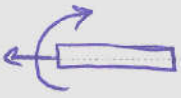
* قضیه پاپوس ـ گلدینوس

تیرها: (دیاگرام‌ها)

(رسم دیاگرام ممان، نیروی محوری و نیروی برشی یک عضو قاب)

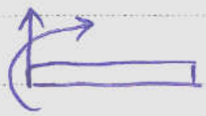
در کلاس اشتباه (به همه‌ی موارد تیر می‌گوییم،

ستون



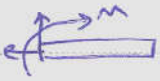
محوری } ممان

تیر



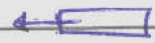
ممان و برش

تیر ستون ←



ممان و برش و نیروی محوری

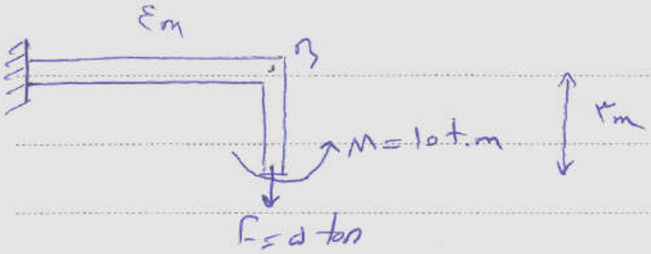
ستون ←

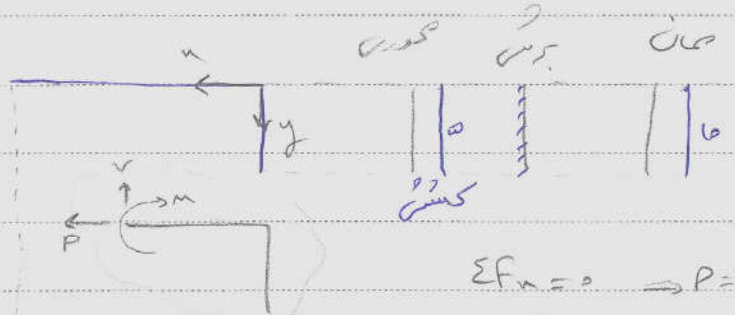


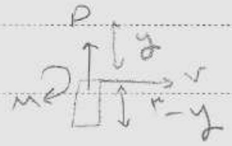
فقط محوری

ستون ←

رسم دیاگرام نیروی محوری، برشی و ممان خمشی


4m
B
M=10t.m
3m
F=5 ton


x
y
محوری
برشی
ممان
5
10
کشش
V
M
P



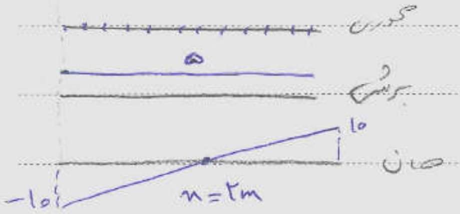
$\Sigma F_x = 0 \rightarrow V = 0$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow P = 5$

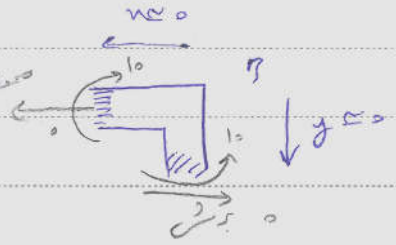
$\Sigma M = 0 \rightarrow M = 10$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow P = 0$ $\quad$ $\Sigma F_y = 0 \rightarrow V = 5$

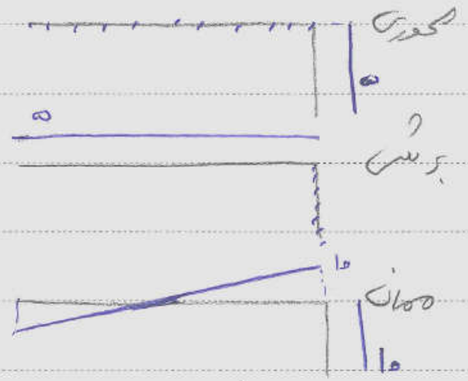
$\overset{+}{\Sigma M} = 0 \quad +10 - 5x - M = 0 \rightarrow M = 10 - 5x$

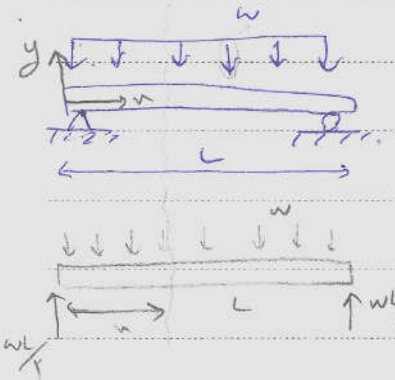

محوری
5
برشی
10
ممان
−10
x=2m

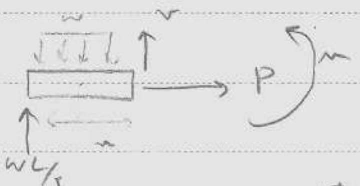
بحث در نقطه B
(اتصال عضو افقی با عضو قائم)


x≈0
محوری
10
B
0
10
y≈0
0 برشی

حال رسم →


محوری
5
5
برشی
10
ممان
10
10


w
y
x
L
w
x
L
wL/2
wL/2



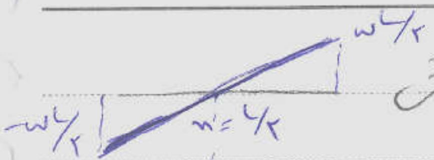
$\Sigma F_x = 0 \rightarrow P = 0$

$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow -wx + V + wL/2 = 0$

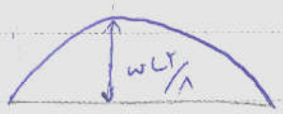
$\longrightarrow V = wx - wL/2 = w(x - L/2)$

$\overset{+}{\curvearrowleft} \Sigma M = 0 \longrightarrow +M + wx \times x/2 - wL/2 \times x = 0$

$M = \frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2}$



برش $V = w(x - L/2)$



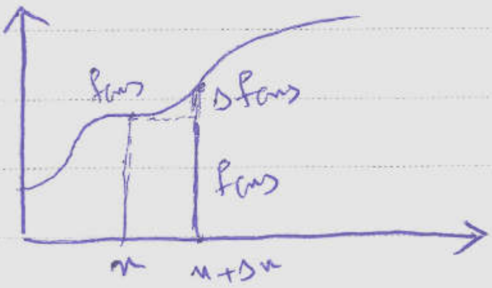
ممان $M = \frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2} \xrightarrow{\text{مشتق اول}} \frac{wL}{2} - wx = 0 \rightarrow x = L/2$

مشتق دوم $\rightarrow -w < 0 \Rightarrow$ تقعر رو به پایین } ⇒ max دارد در $x = L/2$

جلسه یازدهم ـ ۹٤,۱,۱۸

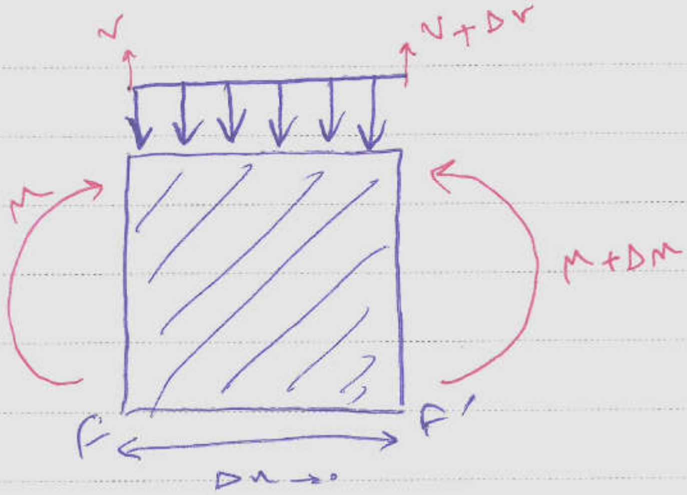
نکته مهم دیفرانسیل

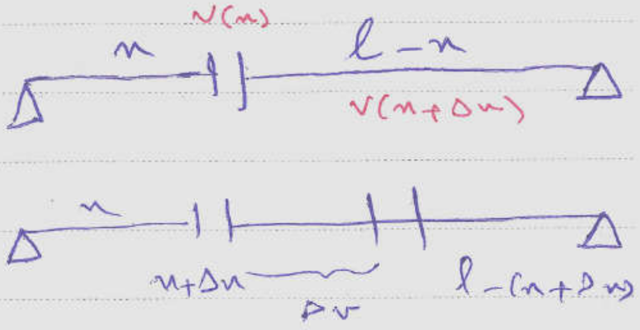
در توابع پیوسته (بدون تغییر آنی)



$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta f(x)$$

$$\boxed{V(x+\Delta x) = V(x) + \Delta V(x)}$$


V
V+ΔV
M
M+ΔM
F
F'
Δx→۰


V(x)
x
l−x
V(x+Δx)
x
x+Δx
Δx
l−(x+Δx)

$\Sigma F_y = 0 \uparrow^{+}$ برش

تعادل ← $\left.\begin{matrix}\Sigma F_x = 0\\ \Sigma F_y = 0\\ \Sigma M = 0\end{matrix}\right\}$

$+V - (V+\Delta V) - w\Delta x = 0$

$\Delta V = -w\Delta x \qquad \frac{\Delta V}{\Delta x} = -w \Rightarrow \frac{dV}{dx} = -w$

⇒ شیب برش = − (بار گسترده) $\qquad \underbrace{\frac{dV}{dx} = -w}$ $\equiv \Sigma F_y = 0$

؟ اگر در نقطه C برش معلوم باشد، آنگاه برش در D چقدر است؟

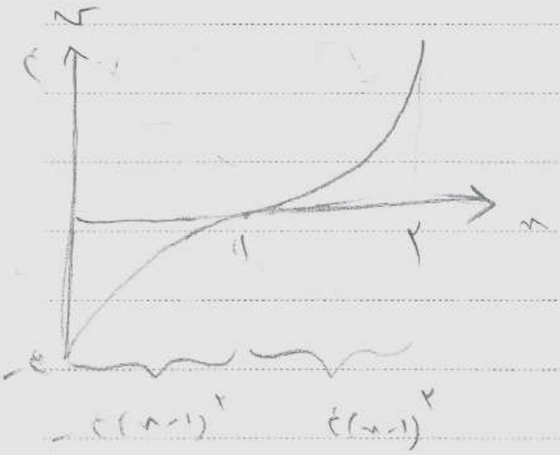
$\int_C^D dV = \int_C^D -w\,dx \qquad V\Big|_C^D = -$ (سطح زیر بار گسترده)

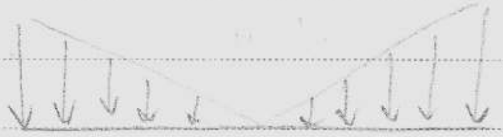
$V_D - V_C = -$ (سطح زیر بار گسترده) $\qquad V_D = V_C +$ (سطح زیر بار گسترده)

اکنون دو تیپ مسئله را می‌توان حل کرد

مسئله‌ی الف) تابع دیاگرام برش معلوم است. با مشتق‌گیری از این تابع معلوم توزیع بار گسترده را می‌توان حل کرد.

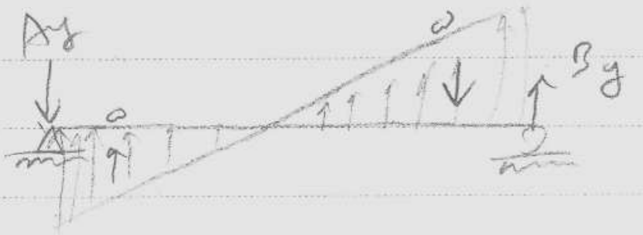
مسئله‌ی ب) توزیع بار گسترده معلوم است: می‌توان برش در هر نقطه را محاسبه کرد





Subject:

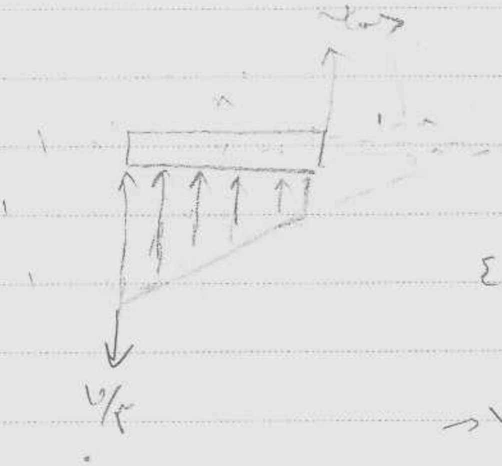
Year. Month. Date. ( )



تقارن : $A_y = B_y$

$\overset{+}{\curvearrowleft}\ \Sigma M_B = ۰ \rightarrow +\frac{۱}{۳}\times ۵ - \frac{۵}{۳}\times ۵ + ۲A_y = ۰$

$\rightarrow A_y = \frac{۱۰}{۳} = B_y$

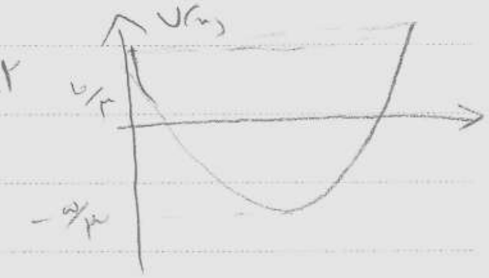


$\frac{۱-x}{?} = \frac{۱}{۱۰} \rightarrow ? = ۱۰(۱-x)$

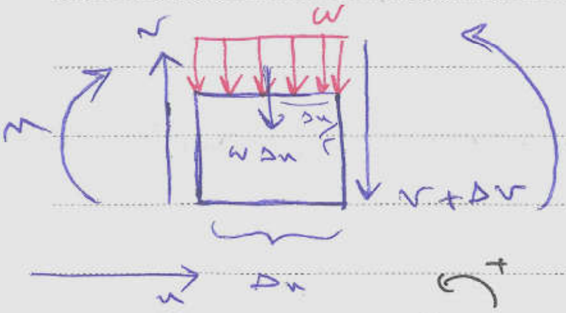
$\Sigma F_y = ۰ \rightarrow V(x) - \frac{۱۰}{۳} + \frac{۱}{۲}\times\left[۱۰(۱-x)+۱۰\right] = ۰$

$\rightarrow V(x) = \frac{۱۰}{۳} - \frac{۱}{۲}\times(۲۰ - ۱۰x)$

$V(x) = \frac{۱۰}{۳} - ۱۰x + ۵x^۲$



Subject: جلسه شانزدهم - ۲۳ / ۱ / ۹۴
Year. Month. Date. ( )



$\Sigma f_x=0 \;,\; \Sigma f_y=0$

$\longrightarrow \begin{cases} -w = \dfrac{dv}{dx} \\ v_D - v_C = - \end{cases}$ (سطح زیر بار گسترده بین D تا C)

$\overset{+}{\curvearrowleft}$

$\Sigma M=0 ,\quad \cancel{M}+\Delta M-\cancel{M}-v\cdot\overset{\text{کوچک}}{\Delta x}$

$+w\cdot\underset{\text{کوچک}}{\Delta x}\cdot\underset{\text{کوچک}}{\dfrac{\Delta x}{2}}=0$

$\Delta x \rightarrow 0$ مربع یک مقدار کوچک = خیلی کوچک

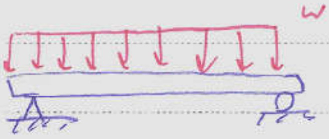
$\Delta M - v\Delta x=0 \qquad v=\dfrac{\Delta M}{\Delta x} \xrightarrow{\text{درحد}} \boxed{v=\dfrac{dM}{dx}} \equiv \Sigma M=0$

$\boxed{w=-\dfrac{dv}{dx}} \equiv \Sigma f_y=0$ جلسه قبل

$\Sigma M=0 \qquad \int_C^D dM=\int_C^D v\,dx \Rightarrow M_D=M_C +$ سطح زیر منحنی برش

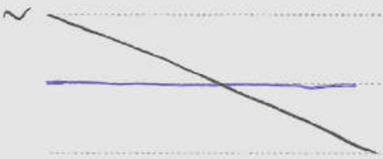
M_C معلوم باشد ← اگر تکیه‌گاه یا یک سر آزاد

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dM}{dx}\right)=-w \longrightarrow \dfrac{d^2M}{dx^2}=-w$



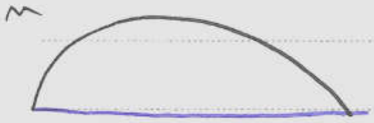
$-w=\dfrac{dv}{dx}$ w ثابت → v خطی

$w=\overset{\text{ثابت}}{a} \xleftarrow{\text{مشتق}} v=ax+b$

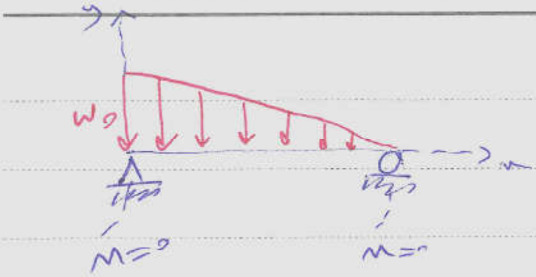


$v=dM/dx$ v خطی است → M سهمی

$v=2ax+b \leftarrow M=ax^2+bx+c$



$\begin{cases} w & \text{ثابت} \\ v & \text{خطی} \\ M & \text{سهمی} \end{cases}$



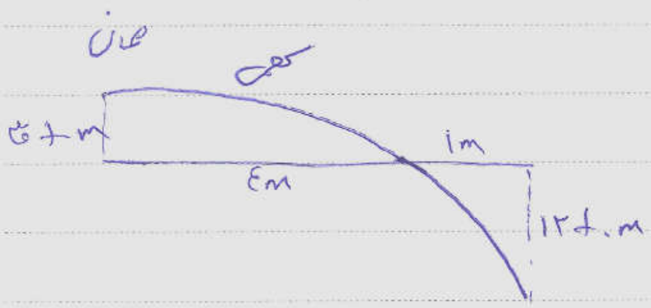
خط w $\xrightarrow{\int}$ برش $\xrightarrow{\int}$ ممان

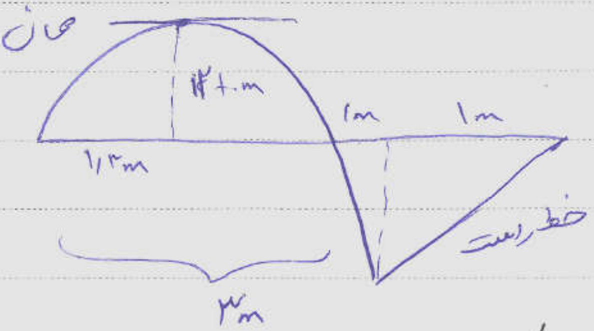
$ax+b \xrightarrow{\int} \frac{1}{2}ax^2+bx+c \xrightarrow{\int} \frac{1}{6}ax^3+\frac{b}{2}x^2+cx+c'$

عکس العمل تکیه گاه موجود در مبدأ

تکیه گاه :

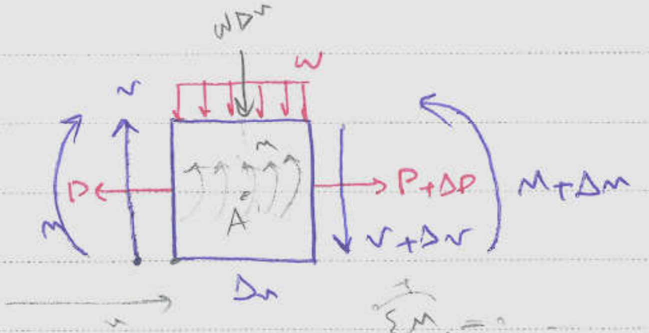
تمرین ۸ با فرض منحنی زیر برای ممان دیاگرام برش و بار گسترده را به دست آورید.


ممان
کمی
۶ t.m
۴m
1m
۱۲ t.m


ممان
۱۴ t.m
۱/۳m
1m
1m
خط راست
۳m

تمرین ۹ یک آزمون میان ترم طرح کنید. (سه سؤال)

ممان گسترده و نیروی محوری گسترده


$w\Delta x$
w
V
M
P
$P+\Delta P$
$M+\Delta M$
$V+\Delta V$
m
A
Δx
x

$$\sum F_x=0 \Rightarrow P+\Delta P-P+p\Delta x=0 \rightarrow p=-\frac{\Delta P}{\Delta x}$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow V-V-\Delta V-w\Delta x=0$$

$$\Rightarrow \Delta V+w\Delta x=0 \rightarrow$$ معادله Δv و Δx

$$\Rightarrow w=-\frac{\Delta V}{\Delta x} \rightarrow w=\frac{dV}{dx}$$

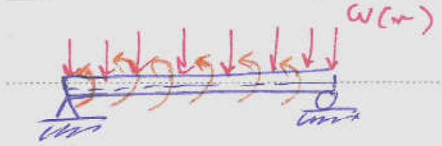
$$\sum M_A=0$$

$$\rightarrow -V\times\Delta x/2-(V+\Delta V)\times\Delta x/2-\cancel{M}+\cancel{M}+\Delta M+m\Delta x=0$$

$$-V\Delta x-\overset{\text{کوچک}}{\Delta x^2/2}+\Delta M+m\Delta x=0 \rightarrow V-m=\frac{dM}{dx}$$

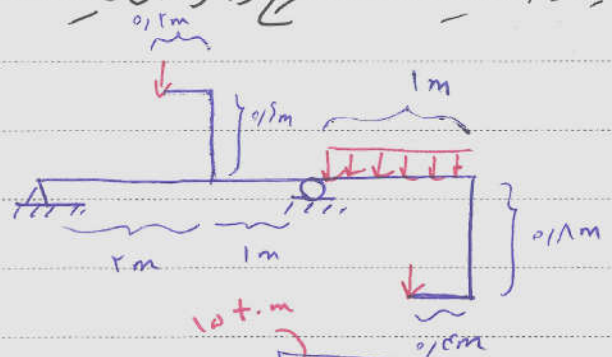
$$\rightarrow V=\frac{\Delta M}{\Delta x} \rightarrow V=\frac{dM}{dx} \rightarrow V=m+\frac{dM}{dx}$$

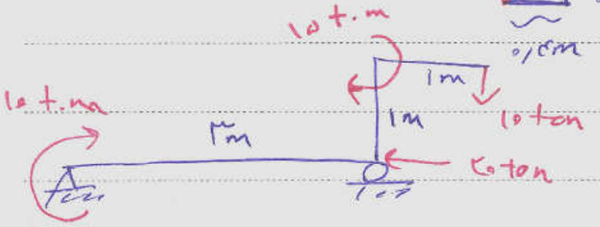
Subject: جلسه هفدهم — ۲۵/۱/۹۴
Year. Month. Date. ( )



تمرین: با توجه به معادلات تکمیل شده مربوط به دیاگرام‌ها یک مسئله طرح و آنرا حل کنید.

دوتمرین: رسم دیاگرام نیروی محوری، برشی و خمشی
(تحویل شود)


۰٫۲m
۰٫۵m
1m
۲m
1m
۰٫۸m
۰٫۲m

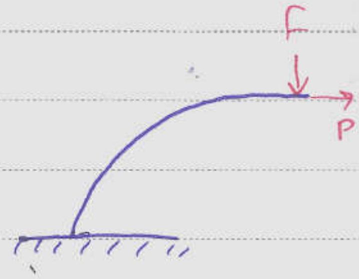

۱۵ t.m
1m
1m
۱۰ ton
۱۰ t.m
۳m
۲۰ ton

اثر نیروی متمرکز بر دیاگرام‌های
- محوری
- برشی
- خمشی

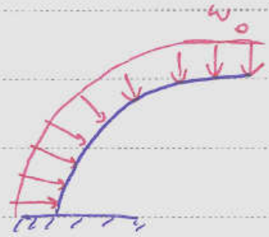
نیرو — ممان

رسم دیاگرام برشی، محوری و ممان
- رسم دیاگرام آزاد قسمتی از سیستم
  - متمرکز
  - گسترده و پیوسته
- فرمول‌بندی
  - محوری
  - عرضی
  - ممان
  - گسترده و پیوسته

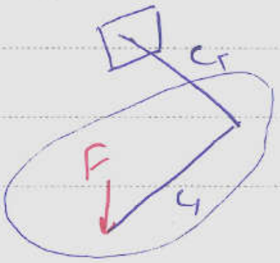
یک مثال ساده:



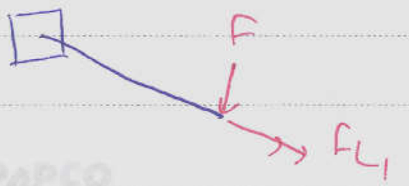
ربع دایره به شعاع R



ممان پیچشی:



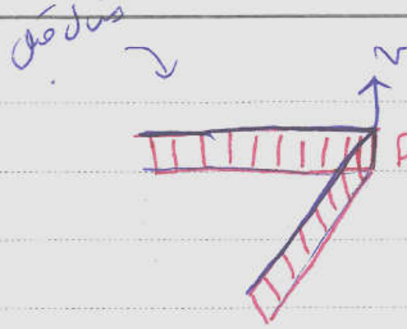
انتقال نیرو:

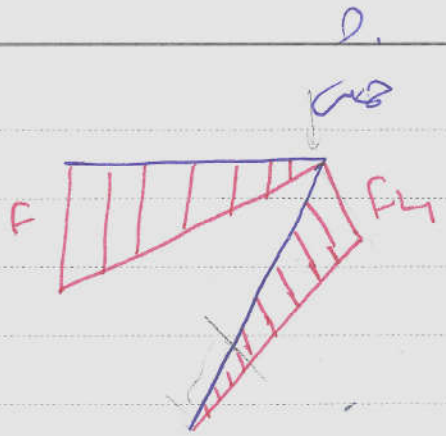


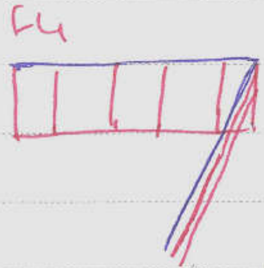
D.

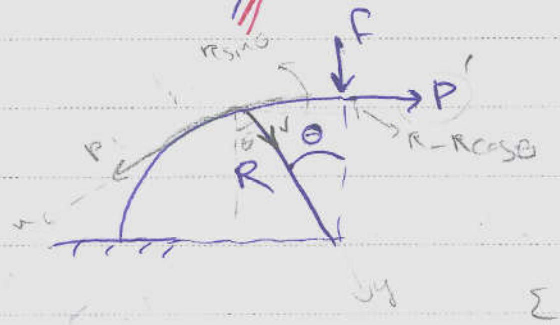
اعضای 8

محوری
برشی
خمشی
ممان پیچشی







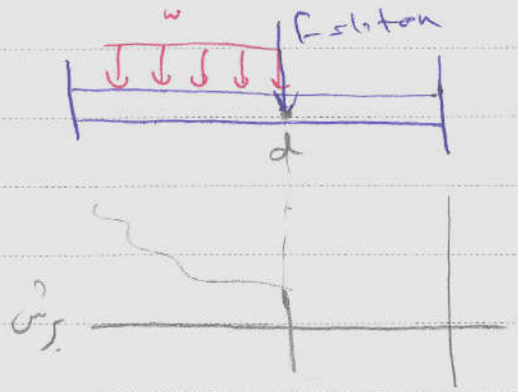

F
P'
RsinΘ
R-RcosΘ
P'
Θ
R

مثال: دیاگرام‌ها

$\Sigma F_x = 0 \rightarrow P' - P'\cos\theta + F\sin\theta = 0$

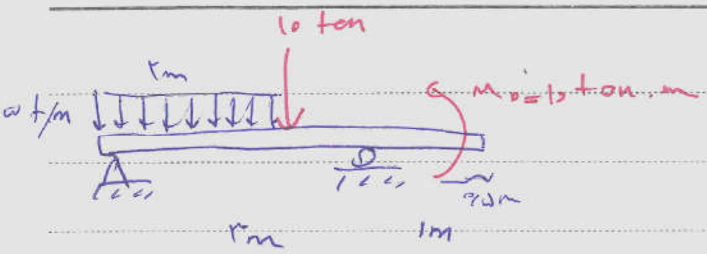
$\Sigma F_y = 0 \rightarrow V - P'\sin\theta + F\cos\theta = 0$

$\Sigma M_A = 0 \rightarrow M + P'(R - R\cos\theta) + F R\sin\theta = 0$


w
F slotan
d
برش

PAPCO

تمرین : دیاگرام نیروها

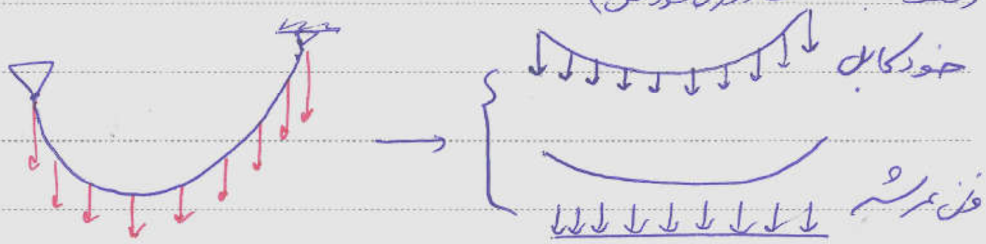

10 ton
۲m
۵ t/m
$M_0 = ۱۰$ ton.m
۳m
1m

کابل‌ها (حتی یک رزیستانس تا پایان نرم است)

کابل بدون وزن ، صلب ، کشش در کل کابل یکسان

کابل منحنی
- سهمی : x, x^2
- تابع نمایی (هیپربولیک) sinh x

کابل تحت بار گسترده


(فقط کابل هست و وزن خودش)
خود کابل
وزن عرشه

طراحی کابل
- طول
- مقطع
- جنس

طول ، مقطع ← هندسه ← جسم

جنس ← طراحی اجزاء

Subject: جلسه هجدهم - ۳۰ / ۱ / ۹۴
Year. Month. Date. ( )

فلسفه و کاربرد کابل‌ها
- نگهداری برخی از سازه‌ها (کابل‌های معلق)
- مهار برخی از سازه‌ها (خطوط مهار کشتی)

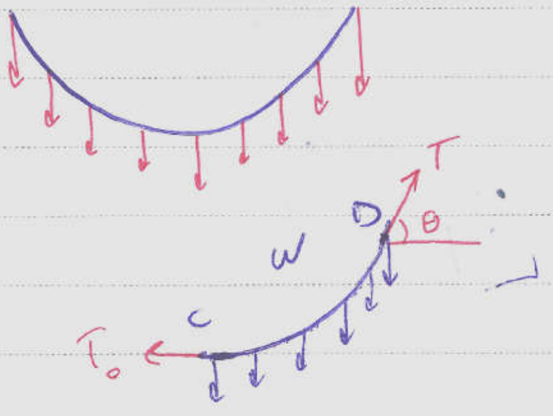
بارگذاری
- کابل تحت وزن خود در امتداد طول کابل: یکنواخت
- کابل نسبت به سیستمی که نگه می‌دارد سبک است

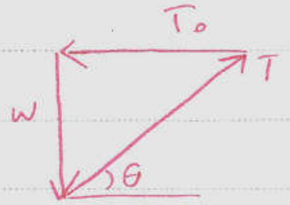
روش تحلیل ← المان در نظر می‌گیریم ← تعادل

هدف 8

طراحی کابل است
- طول کابل
- سطح مقطع کابل

هندسه





$$\Sigma F_x = 0 \longrightarrow T\cos\theta = T_0 \quad (1)$$
$$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow T\sin\theta = W \quad (2)$$

$$\tan\theta = W/T_0$$

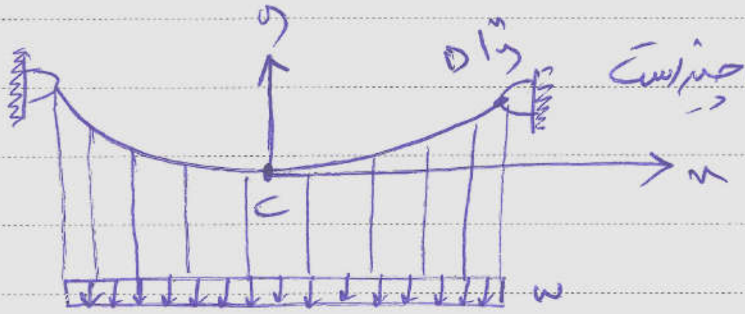
$$(1),(2) \Longrightarrow T^2 = T_0^2 + W^2$$
$$(1),(2) \Longrightarrow \tan\theta = \frac{W}{T_0}$$

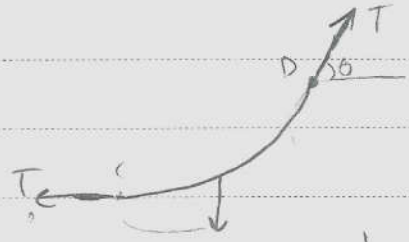
* تصویر افقی کشش در هر نقطه ثابت است.

هر چه از C دورتر شویم → $\begin{cases} w \uparrow \\ \theta \uparrow \rightarrow \sin\theta \uparrow \end{cases}$

کابل سهموی (کابل تحت بار گسترده افقی یکنواخت)

- وزن کابل نسبت به بار افقی یکنواخت ناچیز است





$\Sigma F_x = 0 \longrightarrow T\cos\theta = T_0$

$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow T\sin\theta = wx$

$w = T\cos\theta$ x/c

$T = T\sin\theta$

$\tan\theta = \frac{T\sin\theta}{T\cos\theta} = \frac{wx}{T_0}$

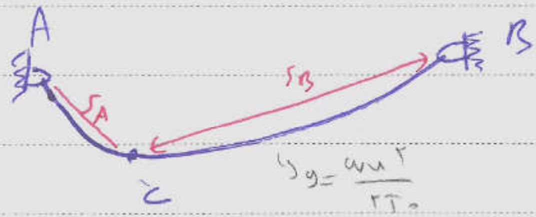
D روش ۱

$y = \int_0^y dy = \int_0^x \frac{wx\,dx}{T_0} \Longrightarrow y = wx^2/2T_0$

روش ۲

$\Sigma M_D = 0 \longrightarrow -T_0 y + x/2 \times wx = 0 \Longrightarrow y = \frac{wx^2}{2T_0}$

تعیین طول کابل



طول کابل $= S_A + S_B$

$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} = dx\sqrt{1 + y'^2}$

$y = wx^2/2T_0$ $\int_0^B ds = \int_0^{x_B} \sqrt{1 + y'^2}\,dx$ $S_B = \int_0^{x_B} \sqrt{1 + y'^2}\,dx$

$S_B = \int_0^{x_B} \sqrt{1 + \frac{w^2x^2}{T_0^2}}\,dx =$

Subject: جلسه نوزدهم _ ۹۴/۲/۱
Year. Month. Date. ( )

* در کابل های اگر نیرو متمرکز باشد ← خط راست
گسترده باشد ← سهمی

ادامه‌ی مسئله‌ی جلسه‌ی قبل 8

بسط تیلور: $(1+z)^{\frac{1}{۲}} = 1+\frac{1}{۲}z + ?z^۲$

اگر $z \ll 1 \rightarrow$ می‌توان از جمله‌ی $z^۲$ صرف نظر کرد

$$S_B = \int_0^{x_B} \sqrt{1+y'^۲}\,dx = \int_0^{x_B} \left(1+\frac{y'^۲}{۲}\right) dx = \int_0^{x_B} \left[1+\frac{1}{۲}\left(\frac{wx}{T_0}\right)^۲\right] dx$$

$$y = \frac{wx^۲}{۲T_0} \rightarrow y' = \frac{wx}{T_0} \qquad = x_B + \frac{1}{۲} \times \frac{w^۲}{T_0^۲} \frac{x_B^۳}{۳}$$

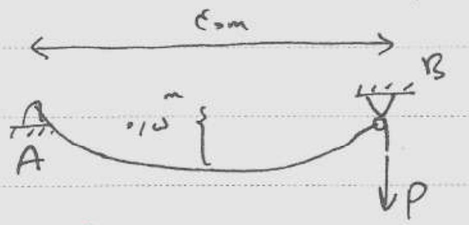
$$= x_B \left[1+\frac{1}{۶}\left(\frac{wx_B}{T_0}\right)^۲\right]$$

$$w/T_0 = \frac{۲y_B}{x_B^۲} \rightarrow \frac{w^۲}{T_0^۲} = \frac{۴y_B^۲}{x_B^۴} \qquad \Longrightarrow x_B\left[1+\frac{۲}{۳}\left(\frac{y_B^۲}{x_B^۲}\right)\right]$$

کابل تحت وزن خود 8

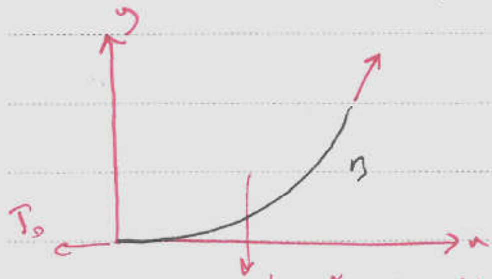
* در بین تمام حالت های کابل، هر چه شیب کابل کمتر شود و به خط راست نزدیک شود، شکل سهمی می‌شود.

* خطای قابل قبول مهندسی در طیف وسیعی از مسائل تا ۲٪ است.



جرم واحد طول کابل $= ۰٫۷۵\ kg/m$

$P = ?$ شیب در B طول کابل A تا B



$W = ۲۰\times(۰٫۷۵ \times ۹٫۸۱) = ۱۴۷٫۲N$

$\sum M_B = 0 \qquad T_0 \times ۰٫۵ = ۱۰ \times ۱۴۷٫۲$

$\rightarrow T_0 = ۲۹۴۴N$

$T_B = P = \sqrt{۲۹۴۴^۲ + ۱۴۷٫۲^۲} = ۲۹۴۸$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

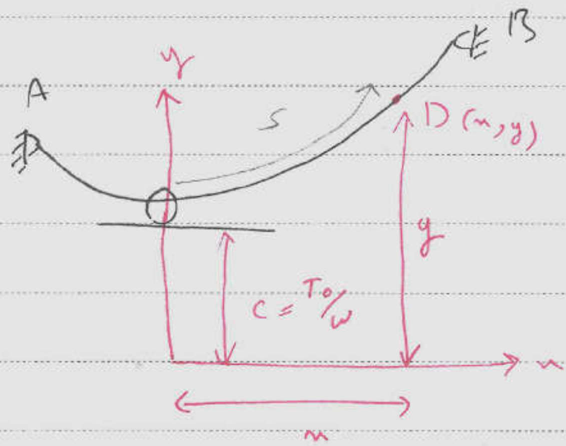
$\tan\theta = \frac{w}{T_0} = \frac{۱۴۷/۲}{۲۹۴۴} \rightarrow \theta = ۲/۹^{\circ}$

طول کابل
$$\begin{cases} \overset{۴۰}{} \\ ۲ \times \sqrt{۲۰^۲ + (۰/۵)^۲} = ۴۰/۰۱ \\ ۲ \times ۲۰\left[1 + \frac{۲}{۳}\left(\frac{۰/۵}{۲۰}\right)^۲\right] = ۲۰/۰۰۸ = ۴۰/۰۱۶ \end{cases}$$

* در کابل هایی که شیب خیلی کم است، می‌توان فرض کرد که کشش در تمام طول کابل یکسان است.

catenary
- chain
- rope
- cable

۹۴/۳/۶ — جلسه بیستم

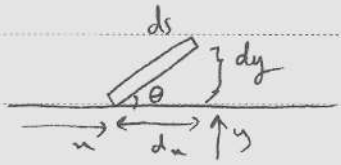


$W = ws$

$T^۲ = T_0^۲ + w^۲ S^۲ \quad , \quad T_0 = wc$

$= c^۲w^۲ + s^۲w^۲ = w\sqrt{c^۲ + s^۲}$

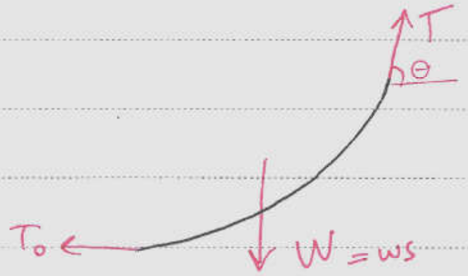
ساده‌سازی نوشتار

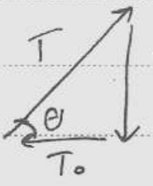


المان جزء از طول کابل

$dx = ds . \cos\theta$

$\cos\theta = \frac{dx}{ds}$ هندسه





$W = ws$ شکل $\cos\theta = T_0/T$

$\frac{dx}{ds} = T_0/T$

$$dx = \frac{T_0}{T}\,ds = \frac{cw}{w\sqrt{c^2+s^2}}\,ds$$

$$\Rightarrow T = w\sqrt{c^2+s^2} \quad \Big| \quad dx = \frac{ds}{\sqrt{1+\frac{s^2}{c^2}}}$$

تمرین اختیاری: شباهت‌ها و تفاوت‌های توابع هیپربولیک و توابع هارمونیک

cos , sin   sinh , cosh

$$\sinh(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \quad , \quad \cosh(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

$$x = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1+s^2/c^2}} = c\left[\sinh^{-1} s/c\right]_0^s = c.\sinh^{-1} s/c$$

$$\Rightarrow x/c = \sin^{-1} s/c$$

$$\sinh x/c = s/c \qquad s = c\sinh x/c \qquad \sinh x/c = \frac{e^{x/c}-e^{-x/c}}{2}$$

$\left.\begin{matrix} S=? \\ A=? \end{matrix}\right\}$ چون هنوز کابل طراحی نشده پس وزن واحد طول (w) مجهول است.

$C = T_0/w$: برای تعیین s باید

اکنون می‌خواهیم رابطه بین y و x را به دست آوریم.

$$\begin{cases} T\sin\theta = ws \\ T\cos\theta = T_0 \end{cases} \rightarrow \tan\theta = \frac{ws}{T_0} = 1/c\; s = 1/c\,(c\sinh x/c) = \sinh x/c$$

$$y' = \sinh(x/c)$$

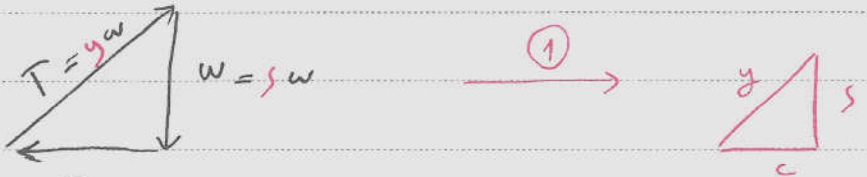
$$\rightarrow \int_c^y dy = \int_0^x \sin(x/c)\,dx \rightarrow y - c = c\cosh(x/c)\Big|_0^x$$

$$= c\cosh(x/c) - c \Rightarrow y = c\cosh(x/c)$$

$s = c\sinh x/c \longrightarrow s/c = \sinh x/c$

$y = c\cosh x/c \longrightarrow y/c = \cosh x/c$

$\cosh^{۲} - \sinh^{۲} = ۱ \longrightarrow \frac{y^{۲}}{c^{۲}} - \frac{s^{۲}}{c^{۲}} = ۱ \to c^{۲} + s^{۲} = y^{۲}$ ①



$y = c\cosh x/c \simeq y = \alpha x^{۲}$ $\quad = c\,\frac{e^{x/c} + e^{-x/c}}{۲}$

جلسه بیست ویکم - ۹۴/۲/۸

$\int \frac{۱}{\sqrt{۱+x^{۲}}}$

$x = \tan\theta \Rightarrow dx = (۱ + \tan^{۲}\theta)\,d\theta$

$\Rightarrow \int \frac{۱}{\sqrt{۱+x^{۲}}}\,dx = \int \frac{۱}{\cos\theta}\,d\theta = \int \sec\theta\,d\theta = \ln \sec\theta + \tan\theta$

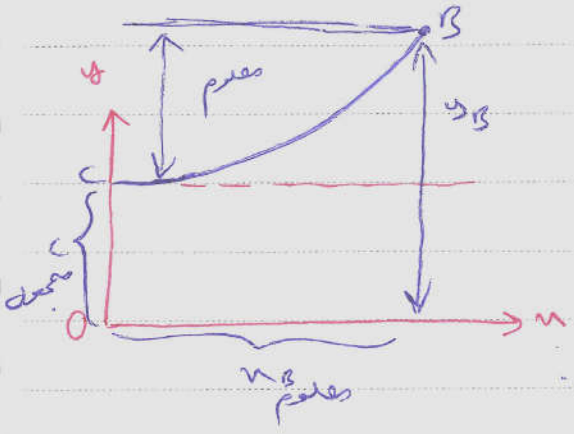
$\Rightarrow \int \frac{۱}{\sqrt{۱+x^{۲}}}\,dx = \ln x + \sqrt{۱+x^{۲}}$ $\qquad \int \frac{۱}{\sqrt{۱+a^{۲}x^{۲}}}\,dx = \ln ax + \sqrt{۱+a^{۲}x^{۲}}$

$x = \int \frac{۱}{\sqrt{۱+s^{۲}/c^{۲}}}\,ds = c\left(\ln s/c + \sqrt{۱+s^{۲}/c^{۲}}\right)\Big|_{۰}^{s} = c\left(\ln s/c + \sqrt{۱+s^{۲}/c^{۲}}\right)$

$\Rightarrow x/c = \ln s/c + \sqrt{۱ + s^{۲}/c^{۲}}$ $\qquad$ ① $e^{x/c} - e^{-x/c} = \frac{۲s^{۲}/c^{۲} + ۲s/c\sqrt{۱+s^{۲}/c^{۲}}}{s/c + \sqrt{۱+s^{۲}/c^{۲}}} = ۲s/c$

$\Rightarrow \frac{e^{x/c} - e^{-x/c}}{۲} = s/c \Rightarrow$

Subject:
Year.	Month.	Date.	( )


B
y
معلوم
y_B
c
c
مجهول
O
x
x_B
معلوم

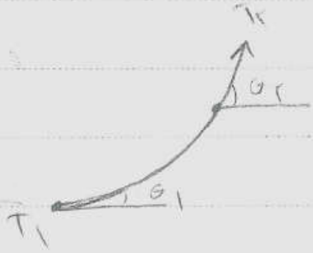
$$y = c\cosh x/c$$

$$B\begin{cases} x_B = \text{معلوم} \\ y_B = \underset{۷۵}{\text{معلوم}} + c = c\cosh x/c \end{cases}$$

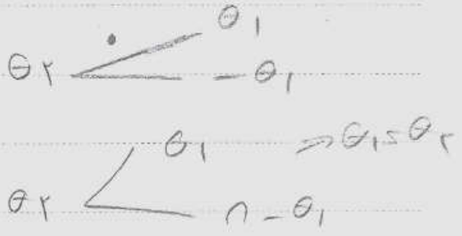
$c = c\cosh x/c$ − ۷۵

c = ۹۰
c = ۱۰۵
c = ۹۹
⋮

نقطه ثابت } ریاضی / فیزیک ← بررسی } قابل قبول / غیر قابل قبول


T_2
θ_2
θ_1
T_1

$T_1\cos\theta_1 = T_2\cos\theta_2$
$T_1\sin\theta_1 = T_2\sin\theta_2$
$T_1 = T_2$
$\cos\theta_1 = \cos\theta_2$
$\sin\theta_1 = \sin\theta_2$


θ_1
θ_2
$-\theta_1$
θ_1
θ_2
$\pi-\theta_1$

$\Rightarrow \theta_1 = \theta_2$

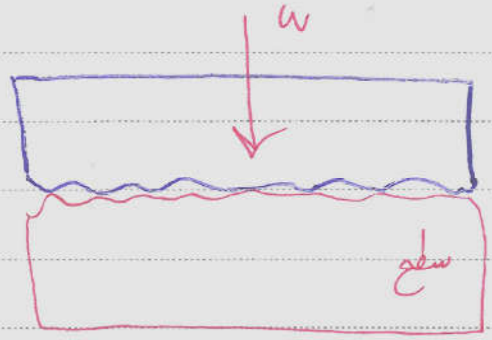
نکته } وزن عضو خرپا بسیار کمتر از بارهای گره‌ای است.
این بار گسترده است.

خطی است — متمرکز

کابل در دبیرستان ← شبیه خرپا در استاتیک هم از حیث فرم و هم از حیث توزیع بار

Subject: ۹۴/۲/۱۳ - جلسه بیست و دوم
Year. Month. Date. ( )

اصطکاک:



شناخت سطح تماس و نیروهای وارده بر آن

سطح تماس ممکن است:

الف) تعداد نقاط اندک تماس به جسم

نیروی وزن در هر دو حالت ثابت است

ثابت

$$\uparrow \sigma = \frac{W}{\downarrow \sum A_i}$$

σ نیروی واحد سطح

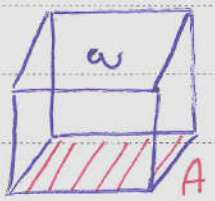
$\sum A_i$ سطح تماس

ب) تعداد نقاط زیاد تماس به جسم

$$\downarrow \sigma = \frac{W}{\uparrow \sum A_i}$$

$$W = \overset{\downarrow}{\underset{\uparrow}{\sigma}} \times \overset{\uparrow}{\underset{\downarrow}{\sum A_i}}$$

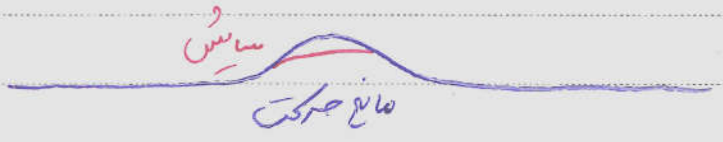
* کل نیروی تعادلی (عمل و عکس العمل) بین دو سطح ارتباطی با زبری ندارد



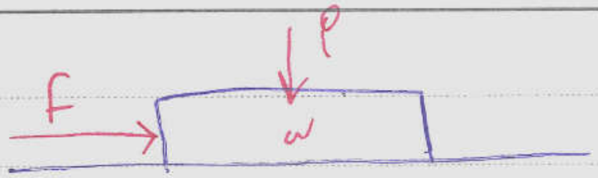
؟.

$$\sigma_{\text{تنش}} = \frac{W}{A}$$

$$\sigma_{\text{واقعی}} > W/A$$



اصطکاک ⇐ جفت و بست مکانیکی

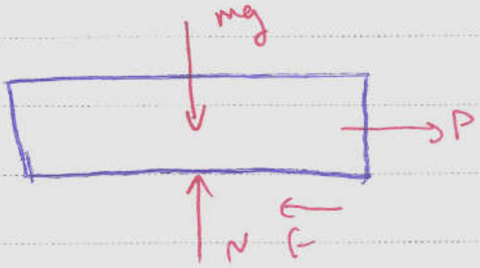


$F =$ تابع است از {
زبری سطح
وزن
}

تمرین: هل دادن جسم سبک راحت‌تر است از هل دادن جسم سنگین.

تمرین: هل دادن جسم روی سطح صاف راحت‌تر است از هل دادن روی سطح زبر.

$F = \mu N$

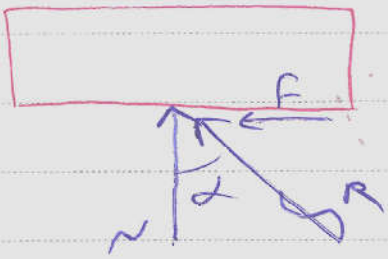


تعادل استاتیکی:

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N = mg$

$\Sigma F_x = 0 \rightarrow P = F$

زاویه اصطکاک:

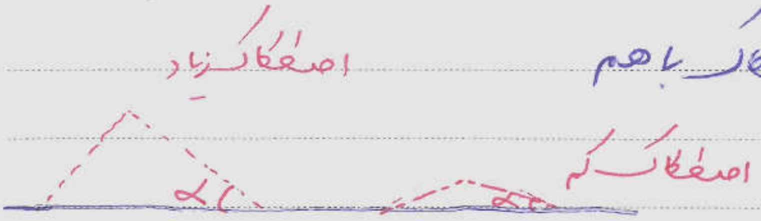


اصطکاک ↓ $\Rightarrow \alpha \downarrow$

اصطکاک ↑ $\Rightarrow \alpha \uparrow$

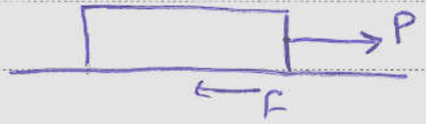
$\tan\alpha = F/N \Rightarrow \alpha = \tan^{-1} F/N$.

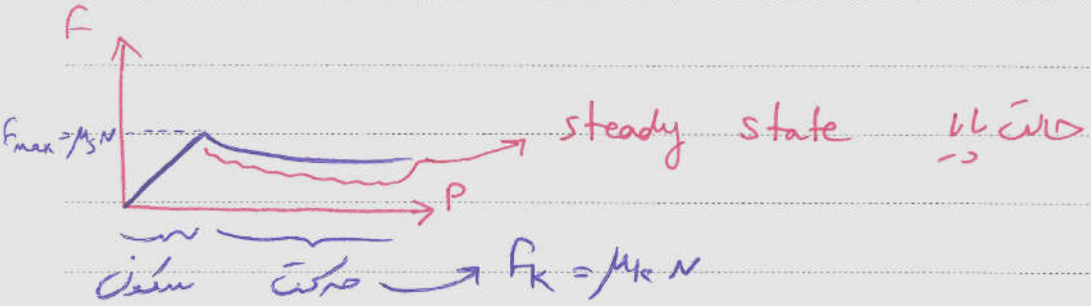
شن و ماسه: ذرات ریز دارای اصطکاک باهم



اصطکاک داخلی خاک ←

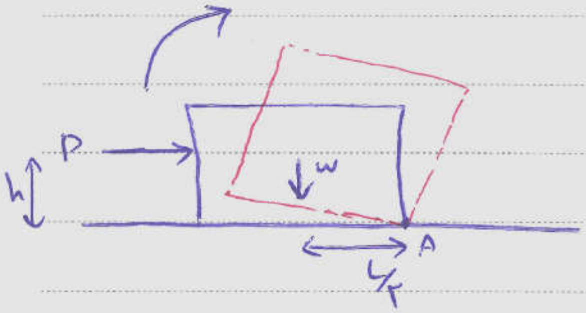
هدف از اعمال P : حرکت جسم





تمرین : یک مسئله از اصطکاک در سطح شیبدار بنویسید و آن را حل کنید.

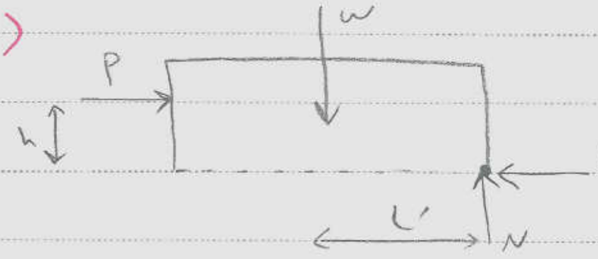
در لحظه‌ی دوران دیاگرام آزاد جسم را بکشید.



$\boxed{Ph > wL/2}$ ⇐ دوران

یا واژگونی (over turning)

کوپل (N , W) و کوپل (F , P)



sliding ← لغزش

شروع دوران ⇐ تداوم دوران → ناپایداری ، واژگونی

واژگونی → عدم برگشت به حالت قبل و اینکه نقطه اثر ها در سمت راست نقطه‌ی A بیفتد

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تمرین: محل اعمال P چقدر باشد (h) تا جسم دوران نکند.

تمرین: با مراجعه به مسئله ۶_۲ مشابه یک مسئله طرح و حل کنید.

۶_۱۸ ، ۲۲ ، ۳۱ ، ۴۷ ، ۶۵

تمرین: مسئله‌ی میان ترم را با فرض اصطکاک حل کنید.

تمرین: چند مصداق از اصطکاک سودمند را بیابید (در صنعت)

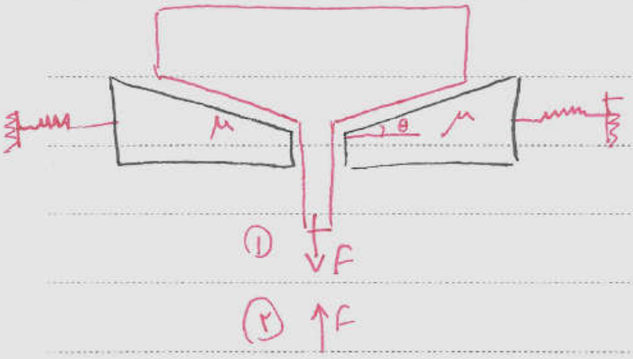
تمرین: بعد از آنکه با دستگاه تست کشش در آزمایشگاه مقاومت مصالح آشنا شدید مکانیزم گیره این دستگاه را تحلیل اصطکاکی - استاتیکی کنید.

یاتاقان های ژورنال - اصطکاک اکسل

تمرین: این بحث را در کتب استاتیک مرور کنید (جلسه بعد سؤال طرح می‌شود)

PAPCO

Subject ۹۴/۳/۱۵ – جلسه بیست و سوم
Year. Month. Date. ( )



در مسئله زیر برحسب θ ، μ ، جهت F

بحث کنید: ۱) کشش: قفل ⟵⟶ ①
۲) فشار: آزاد ⟵⟶ ②

اصطکاک تسمه

روش عمومی حل تمام مسائل استاتیک

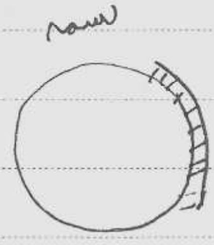
۱- مجهولات

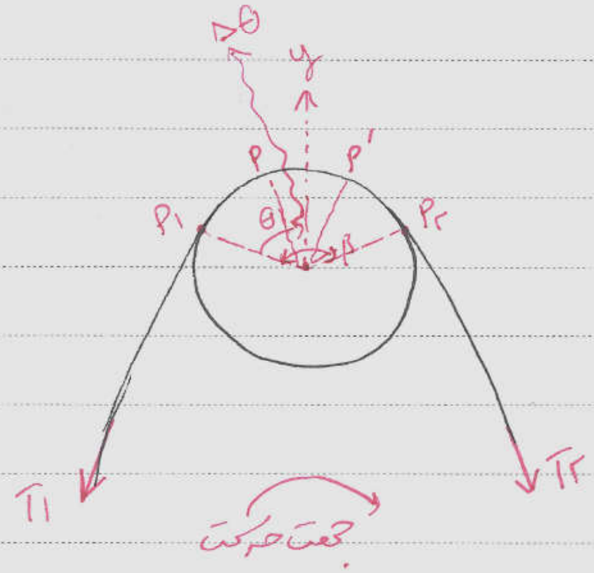
۲- انتخاب جسم مناسب
- کل جسم
- بخشی از جسم
- المان دیفرانسیلی از جسم

و رسم دیاگرام آزاد برای آن

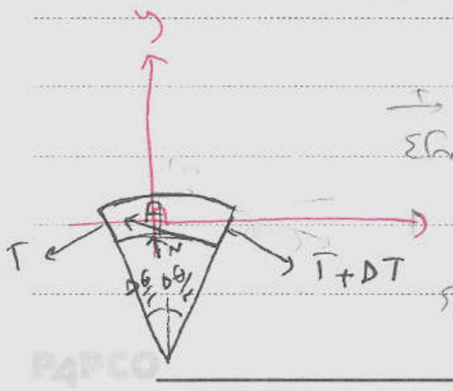
۳- معادلات تعادل

۴- حل این معادلات





$$\boxed{dT = \mu\, dN}$$



$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0 \Rightarrow (T+\Delta T) \times \cos\frac{\Delta\theta}{2} - T\cos\frac{\Delta\theta}{2} - \mu\,\Delta N = 0 \Rightarrow \Delta T = \mu . \Delta N$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow \Delta N - T\sin\frac{\Delta\theta}{2} - (T+\Delta T)\sin\frac{\Delta\theta}{2} = 0$$

$$\sin\frac{\Delta\theta}{2} \simeq \frac{\Delta\theta}{2}$$

$$\cos\frac{\Delta\theta}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \Delta N = T\Delta\theta + \underbrace{\Delta T\,\frac{\Delta\theta}{2}}_{0}$$

$$\boxed{dN = T\, d\theta}$$

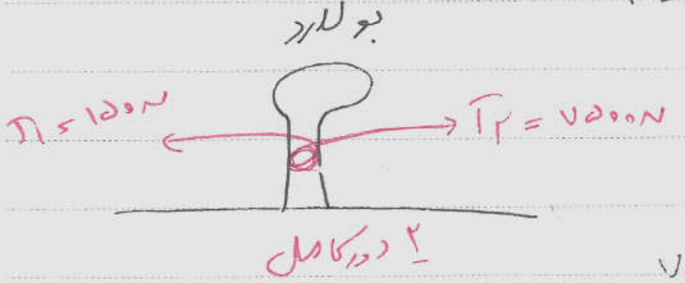
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\frac{\Delta T}{\mu} = T\Delta\theta \longrightarrow \frac{\Delta T}{T} = \mu\Delta\theta \longrightarrow \frac{\Delta T}{T} = \mu\Delta\theta$

$\longrightarrow \int_{T_1}^{T_۲} \frac{dT}{T} = \int_{0}^{\beta} \mu\, d\theta \longrightarrow \ln T \Big|_{T_1}^{T_۲} = \mu\theta \Big|_{0}^{\beta} \longrightarrow \ln\frac{T_۲}{T_1} = \mu f$

$\Longrightarrow T_۲ = T_1 e^{\mu\beta}$

$$T_۲ = T_1 e^{\mu\beta}$$



$\beta = ۲\times۲\pi = ۴\pi = ۱۲٫۵۷$ rad

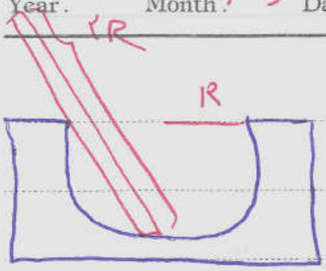
$۷۵۰۰ = ۱۵۰ e \longrightarrow \mu = ۰٫۳۱$

حال اگر ۳ دور بچرخانیم : $T_1 = ۱۵۰N \quad \beta = ۳\times۲\pi \longrightarrow T_۲ = ۱۵۰ e^{۶\pi}$

$\longrightarrow T_۲ = ۵۲۷۲۵\ N$

۲ حالت { (آ) یا شخص باید بر اصطکاک غلبه کند
یا اینکه شخص و اصطکاک در یک جهت عمل می‌کنند.

Subject ۹۳/۲/۲۰ - جلسه بیست و چهارم
Year. Month. Date. ( )

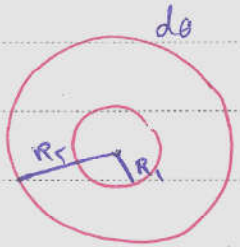


تمرین: مسئله‌ی امتحان میان‌ترم را با روش اصطکاک حل کنید.

تمرین: معادلات هر دو نوع کابل را به دست آورید.

اگر یک کابل به سطح مقطع $1000\ cm^2$ را به دو کابل با سطح مقطع $500\ cm^2$ یا 1000 رشته با سطح مقطع $1\ cm^2$ تقسیم کنیم، چه تغییراتی در معادلات تنش ایجاد می‌شود؟

اصطکاک دیسک: برای تعیین اصطکاک جانبی برای محورهای دوار از فیزیک اصطکاک دیسک استفاده می‌شود. دیسک ممکن است به صورت دایره‌ی کامل یا حلقه باشد. اصطکاک بین این دو سطح را اصطکاک دیسک می‌نامیم مانند کلاچ‌های دیسکی. کوپل M سرعت دورانی محور را ثابت نگه می‌دارد و نیروی محوری فشاری P (کشیدگی) تماس این صفحه را با صفحه‌ی ثابت (یاتاقان) حفظ می‌کنند.



P نیروی محوری

p فشاری که به هر جزء از سطح وارد می‌شود

$$p = \frac{P}{A} = \frac{P}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}$$

اصطکاک دیسک:

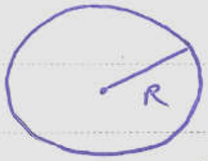
$dM = r\mu_k p\,dA$ $\quad M = \int dM = \int r\mu_k p\,dA = \mu_k p \int r^2\,dr\,d\theta$

$= \mu_k p \int_0^{2\pi} \left(\int_{R_1}^{R_2} r^2\,dr \right) d\theta$ $\quad M = \mu_k p\, 2\pi\, \frac{R_2^3 - R_1^3}{3}$

$$= \mu_k 2\pi \frac{P}{\pi(R_2^2-R_1^2)} \times \frac{(R_2^2-R_1^2)}{3} = \frac{2}{3}\mu_k P \times \frac{R_2^3-R_1^3}{R_2^2-R_1^2}$$

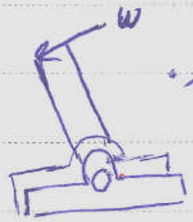
$$\xrightarrow{R_1=0} M = \frac{2}{3}\mu_k P R = \mu_k P \times \boxed{\frac{2}{3}} R \longrightarrow$$ مرکز سطح مثلث

$$\xrightarrow{R_1 \to R_2 = R} M = \mu_k P R$$



تمرین: با استفاده از کره‌ی هوشیال و رفع ابهام ٪ معادله‌ی بالا را می‌توانیم تعمیم داد از لحاظ ریاضی و فیزیک منطقی است اما شما به تفسیر ریاضی آن بپردازید. (٪ در این جا یعنی چی؟!)

یاتاقان های ژورنال و اصطکاک محور (اکسل)



یاتاقان‌های ژورنال برای تأمین تکیه‌گاه جانبی محورهای دوار به کار می‌رود.

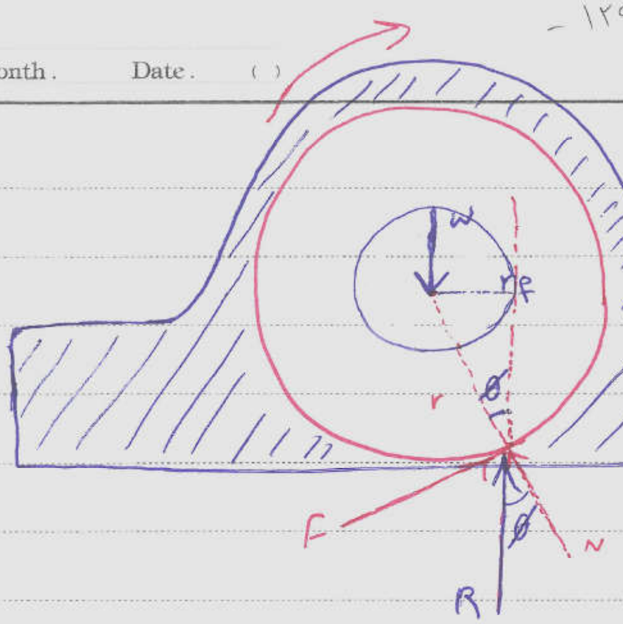
* این یاتاقان‌ها نیاز به روغن‌کاری و روان‌کاری دارند.

هدف این است که اصطکاک بین میله و یاتاقان کمینه باشد. اکنون اگر یاتاقان روان‌کاری کامل نشده باشد و در نتیجه اصطکاک آن با اکسل قابل ملاحظه باشد، باید این مسئله بررسی شود. فرض کنید سهم وزن محور که در یاتاقان تحمل می‌شود = w است.

وقتی اکسل می‌چرخد اگر بخواهیم این سرعت دورانی ثابت بماند باید به آن کوپلی مساوی M مانند شکل زیر وارد کنیم

[illegible]

-۱۲۹ -۱۱۳ -۱۰۳ -۸۵ -۷۳



ϕ بسیار کوچک $\Rightarrow \sin\phi = \tan\phi = \frac{F}{N} = \mu_k$

$\tan\phi = \mu$

$$M = W r_f = W r \sin\phi = W r \mu_k$$

به خاطر روغن کاری (می‌خواهیم اصطکاک را به حداقل برسانیم)

تمرین: دایره‌ی اصطکاک اکسل چیست (مراجعه به کتاب)

تمرین: در فیزیک و ریاضی‌های زیر کمک کنند

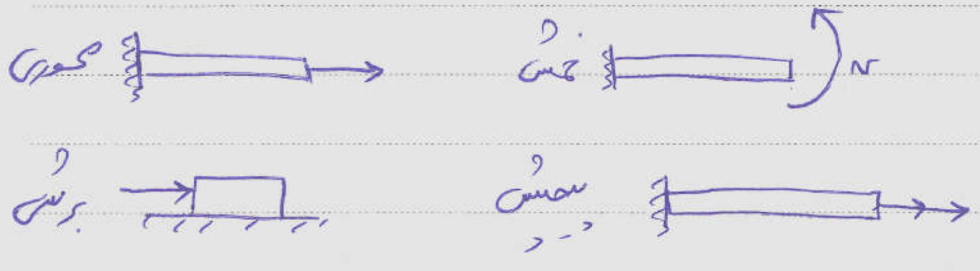
$M = \omega r \mu_k$

تمرین: M از جنس مقاومت مخالف کننده است یا نه؟

ممان اینرسی

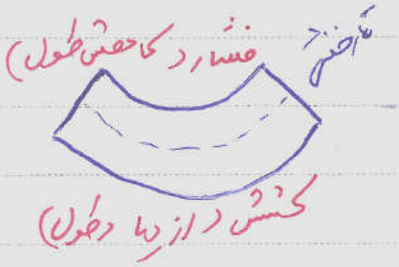
جلسه بیست و پنجم ـ ۹۴,۲,۲۲

۴ تا Mode زیر را داریم

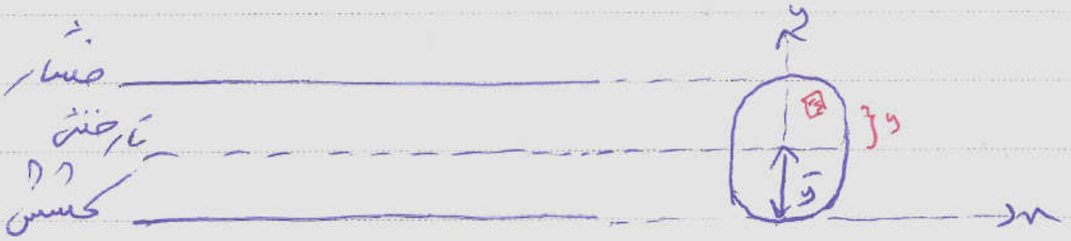


Subject:
Year. Month. Date. ( )

در ترم بعد می آموزیم که چگونه این ۴ mode باعث تغییر شکل جسم می شوند.

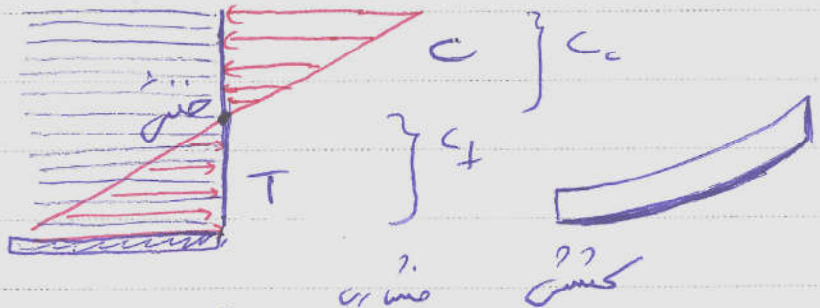

(فشار ، کاهش طول)
تار خنثی
(کشش ، ازدیاد طول)

مشخصات
دیاگرام آزاد ← { کل جسم
تعادل { قسمتی از جسم
{ المان کوچک از جسم } مقطع زدن


فشار
تار خنثی
کشش
z
y
$\bar{y}$
x

$$\bar{y} = \frac{\int y\,dA}{\int dA} = \frac{\sum y_A}{\sum A} = \frac{\int y\,dA}{A} \Rightarrow \sum f_x = 0$$

بررسی توزیع نیروهای ناشی از ممان خمشی در مقطع 8


C
C_c
خنثی
C_t
T
فشار
کشش

$\sum F = 0$ تعادل $\Rightarrow C = T$

نیرو بر واحد سطح

تعادل ممان خمشی

خارج کردن دیاگرام
M نمایش داده شدن $= \int \underbrace{y\,\underbrace{(\text{بار گسترده})\,dA}_{dF}}_{dM}$

بار گسترده { تار خنثی $\Rightarrow 0$
دورترین تارها $\Rightarrow$ Max
خطی

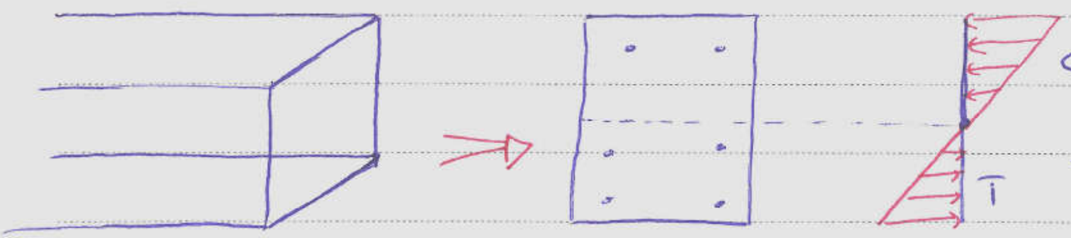
Subject:
Year. Month. Date. ( )

بار گسترده

$\sigma = ?y \longleftrightarrow$ فشار: $\frac{\sigma}{y} = \frac{\sigma_{max}\text{ فشار}}{C_c}$

$\sigma = ?y \longleftrightarrow$ کشش: $\frac{\sigma}{y} = \frac{\sigma_{max}\text{ کشش}}{C_t}$

$M = \int y \times ?\bar{y} \times dA = ? \boxed{\int y^2 dA}$ مقطع



$\Sigma F_x = 0$

$\Rightarrow C = T$

تار خنثی مرکز سطح

$dF = \underbrace{\text{بار گسترده}}_{?y} \times dA$

$\Sigma F = 0 \quad \int dF = 0 \Longrightarrow \int y\, dA = 0$

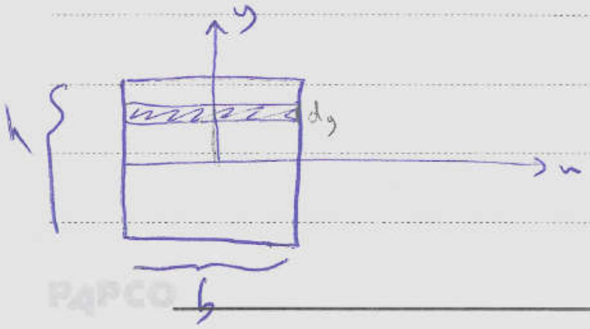
ممان اینرسی $I_x = \int y^2 dA$

$I_y = \int x^2 dA$ ممان = نیرو × بازو

مقاومت مصالح

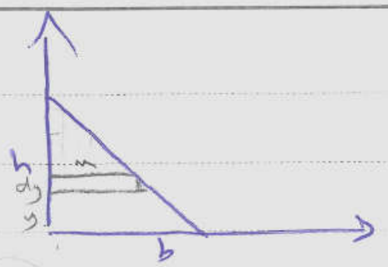
ممان دوم سطح ← ممان اینرسی ← دینامیک

ΣF طول $= 0$ → مرکز سطح ΣM مقطع $\Rightarrow \int y^2 dA$



$I_x = \int y^2 dA = \int b\, dy\, y^2$

$= 2 \times \frac{b}{3} y^3 \Big|_0^{h/2} = \frac{b}{3} \frac{h^3}{8} \times 2 = \boxed{\frac{bh^3}{12}}$



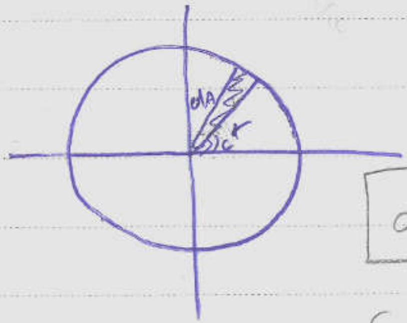
$$I_x = \int y^2 \overset{m\,dy}{\boxed{dA}} = \int y^2 b(1 - y/h)\,dy$$

$$\frac{h-y}{h} = \frac{m}{b} \Rightarrow 1 - y/h$$

$$= \int y^2 b - y^3 \frac{b}{h}\,dy$$

$$= \frac{y^3}{3} b - \frac{y^4}{4}\frac{b}{h}\Big|_0^h$$

$$= \frac{h^3}{3} b - \frac{h^3}{4} b = \frac{1}{12} h^3 b$$



$$I_x = \int y^2 dA = \int r^2 \sin^2\theta = \int r^3 \sin^2\theta\, dr\, d\theta$$

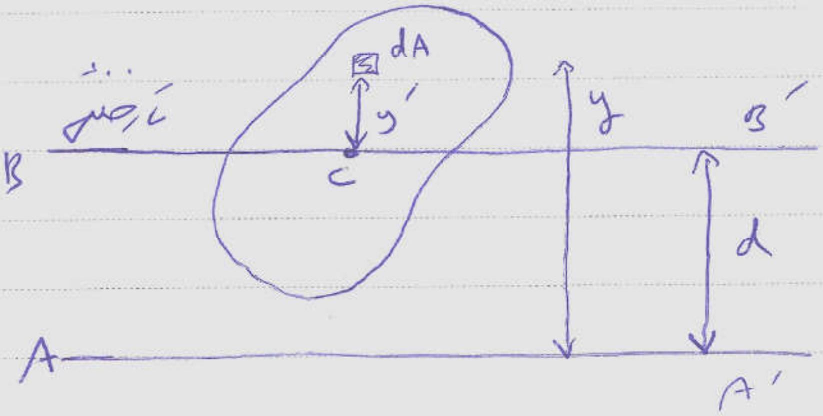
$$\boxed{dA = r\,dr\,d\theta}$$

$$= \int r^3 dr \int \sin^2\theta\, d\theta$$

$$= \int r^3 dr \times \pi = \frac{\pi}{4} r^4$$

$$\int \sin^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta \Big|_0^{2\pi} = \pi - 0 = \pi$$

انتقال (شیفت محورها)



$$\begin{cases} \bar{I} = \int y'^2 dA & \text{معلوم} \\ d & \text{معلوم} \end{cases}$$

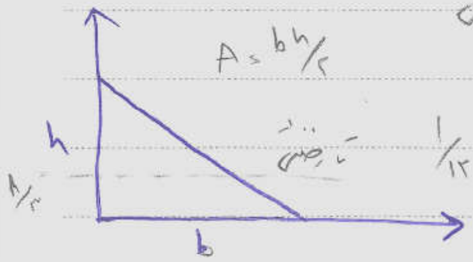
Subject:
Year.　Month.　Date.　( )

هدف:

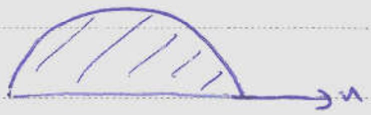
I حول محور منتقل شده $= \int y^۲ dA = \int (y'+d)^۲ dA = \int y'^۲ dA + \int d^۲ dA$

$= \underline{۲\int y\cdot \overset{\circ}{d}\cdot dA} = \bar{I} + Ad^۲$

?.. حول ت رضی



ت رضی $\frac{۱}{۱۲}bh^۳ - \frac{bh}{۲}\times\frac{h^۲}{۹} = \frac{۱}{۱۲}bh^۳ - \frac{۱}{۱۸}bh^۳ = \frac{۱}{۳۶}bh^۳$



جلسه بیست و ششم – ۲۷، ۲، ۹۴

ممان اینرسی قطبی

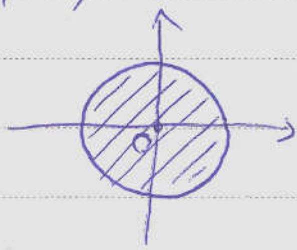
قطب: نقطه مرکزی وقتی در یک مختصات به جای فاصله کمینه تا محورها، فاصله کمینه تا یک نقطه منظور باشد.

$J_o = \int r^۲ dA$

نکته: می‌توان نوشت: $J_o = \int (x^۲+y^۲) dA = \int x^۲ dA + \int y^۲ dA = I_x + I_y$

مثال: $J_o = \frac{bh^۳}{۱۲} + \frac{hb^۳}{۱۲} = \frac{A}{۱۲}(b^۲+h^۲)$

ممان اینرسی دایره:

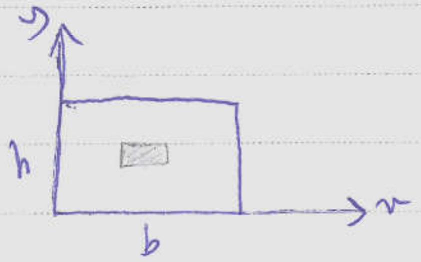


$I_x = I_y = \frac{\pi r^۴}{۴}$

$J_o = I_x + I_y = \frac{\pi r^۴}{۲}$

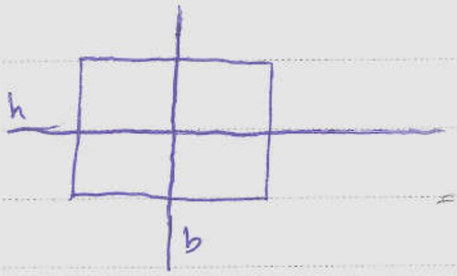
تعریف : I_{xy}

$$I_{xy} = \int xy\, dA$$



$$I_{xy} = \iint xy\, dA = \iint xy\, dx\, dy = \int x\,dx \int y\, dy$$

$$= \frac{b^{۲}h^{۲}}{۴}$$



$$I_{xy} = \iint xy\, dA = \int_{-b/۲}^{b/۲} \left(\int_{-h/۲}^{h/۲} xy\, dy \right) dx$$

$$= \int_{-b/۲}^{b/۲} x/_{۲}\, y^{۲} \Big|_{-h/۲}^{h/۲} dx = \int_{-b/۲}^{b/۲} x\, h^{۲}/_{۴}\, dx = \frac{h^{۲}}{۸} x^{۲} \Big|_{-b/۲}^{b/۲}$$

$$= h^{۲}/_{۴} \times b^{۲}/_{۴} = \frac{h^{۲}b^{۲}}{۱۶}$$

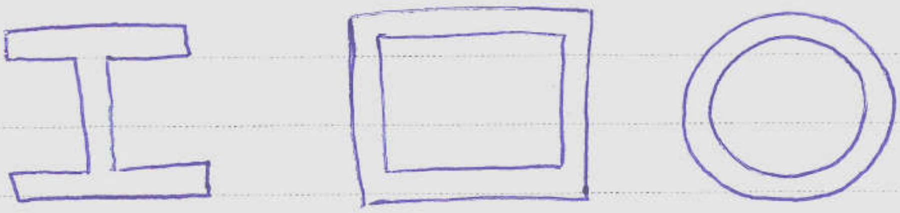
$$I_x = \int y^{۲}\, dA \rightsquigarrow A r_x^{۲} = I_x \quad , \quad A r_y^{۲} = I_y$$

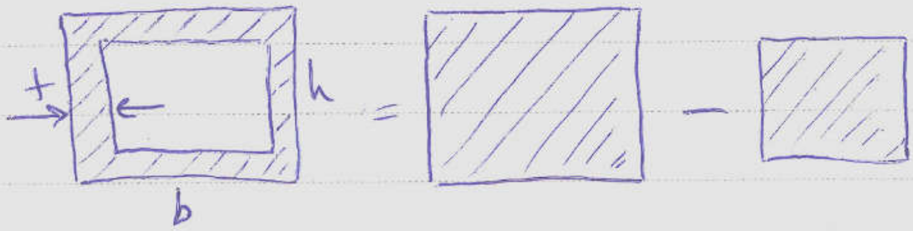
$$A\underbrace{(r_x^{۲} + r_y^{۲})}_{r_o^{۲}} = I_x + I_y = J_o$$

$$A r_o^{۲} = J_o \rightsquigarrow r_o = \sqrt{J_o/A}$$

شعاع ژیراسیون قطبی

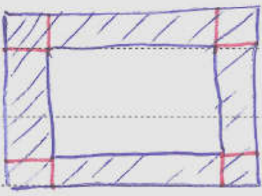
ممان اینرسی مقطع مرکب :





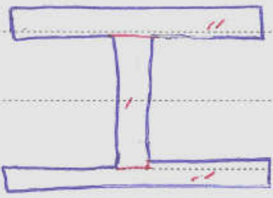
عبارت را ساده کنید اگر $t << b$ $\Rightarrow I_1 - I_2 = \frac{b^4}{12} - \frac{(b-2t)^4}{12}$

تبدیل مقطع به چند مقطع دیگر که آن ها را بلدیم



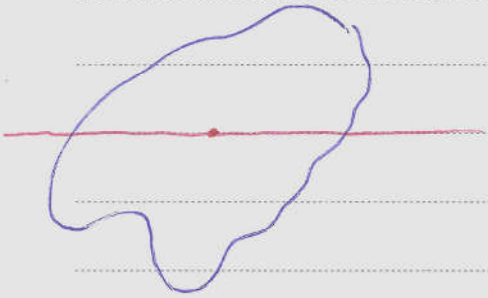
$\rightarrow I = ?$

تبدیل مقطع به ۳ مقطع دیگر



$\rightarrow I = ?$

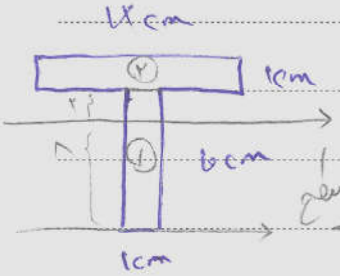
نقش جدول برای محاسبه ی ممان اینرسی :



اولین قدم : تعیین مرکز سطح $\bar{y} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}$

قدم دوم : تعیین ممان اینرسی حول محور ها را از مرکز سطح

مثال : محاسبه ی ممان اینرسی حول مرکز سطح .



$\bar{y} = \frac{176}{22} = 8cm$

شماره سطح	A_i	$\bar{y}_i$	$A_i y_i$	$\bar{I}_i$	d_i	$I_i = \bar{I}_i + Ad^2$
۱	۱۰	۵	۵۰	$\frac{1\times10^3}{12}$	۳	$\frac{10^3}{12} + 90$
۲	۱۲	۱۰/۵	۱۲۶	$\frac{12\times1^3}{12}$	۲/۵	۱ + ۷۵
جمع	۲۲	۱۵/۵	۱۷۶			✓ جمع

برای مسئله ی بالا I_{xy} را هم محاسبه کنید .

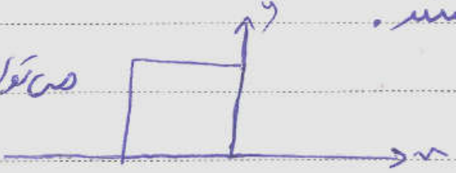
برای محاسبه ی I_{xy} باید قضیه انتقال محور ها را در این حالت داشته باشیم .

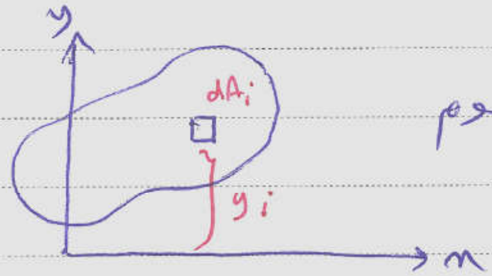
Subject

Date

$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + \bar{x}\bar{y}A$ اثبات کنید x′ و y′ محورهای گذرا از مرکز سطح هستند.

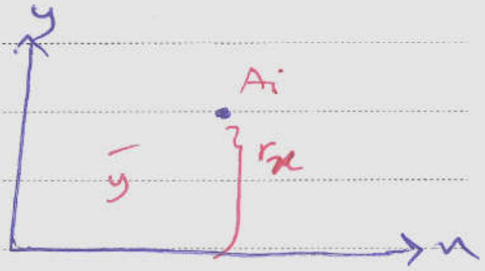
* $I_{xy} \rightarrow$ می‌تواند منفی باشد





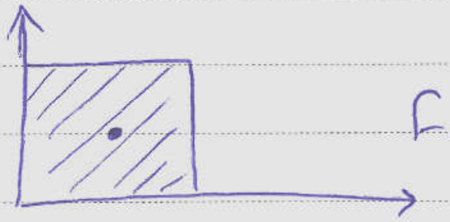
معلوم $I_x = \int y^2 dA$

$\equiv$



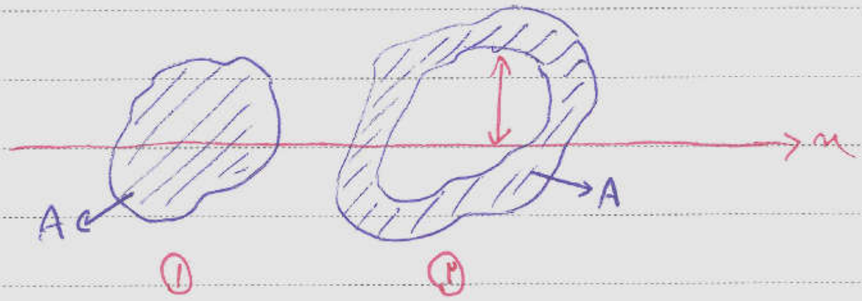
$I_x = A\bar{y}^2 \rightarrow \bar{y} = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = r_x$ شعاع چرخش ـ ژیراسیون حول محور xها

$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$, $r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$



معادل چرخشی

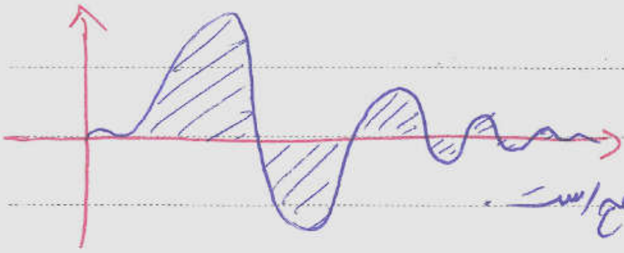
$F = ma \qquad M = I\alpha$



* اگر گشتاور صفرم و اول دو جسم با هم برابر باشند، لزومی ندارد دو جسم عین هم باشند.

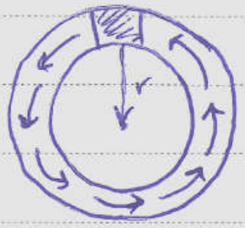
* اگر هر ۳ گشتاور برابر باشند هم الزامی ندارد ۲ جسم عین هم باشند. $\int y^2 dA << \int y^2 dA$

$\Sigma (\Delta y_i)^2 \Delta A_i$



این رابطه مشابه آمار و احتمالات است.

ممان اینرسی یک شاخص پراکندگی سطح حول مرکز سطح است.



ممان پیچشی ایجاد نیروهای برشی می‌کند.

حول محوری که از مرکز می‌گذرد.

$T = \int R F$ هر چقدر المان دورتر شود، نیروی بیشتری به آن وارد می‌شود.

$J = \int R^2 dA$ مقاومت پیچشی بیشتر

اگر بخواهیم سطحی مقاومت پیچشی بیشتری داشته باشد بهتر است پراکنده‌تر باشد.

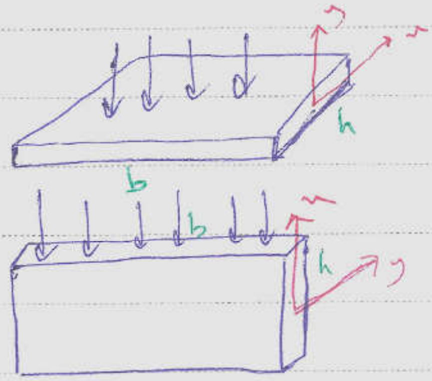
$(\uparrow J \leftarrow \uparrow R)$

پراکندگی مقطع $\left\{ \uparrow \Rightarrow \uparrow \right.$ تحمل پیچشی

در شکل‌های زیر اسپین هم‌ارزی گشتاور مرتبه صفرم و دوم سطح برقرار است نه گشتاور اول سطح.

Subject: ۹۴/۲/۲۹ _ جلسه بیست و هفتم
Year. Month/ Date. ( )

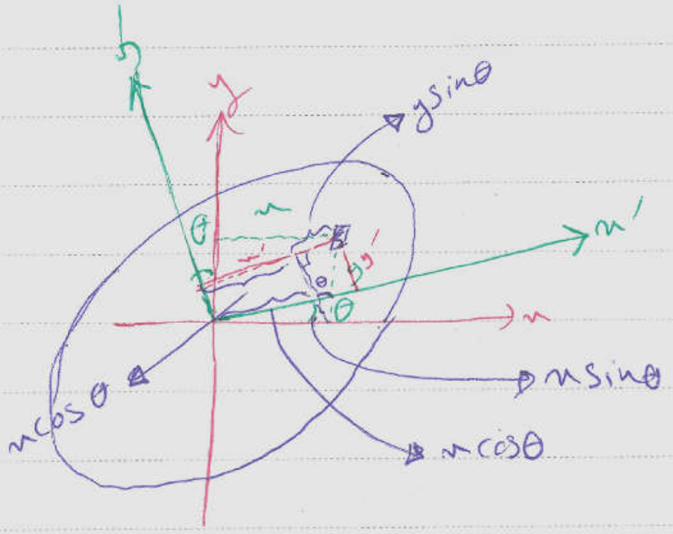
ممان اینرسی: $I_x = \int y^2 dA$ $\quad I_y = \int x^2 dA$ $\quad I_{xy} = \int xy\, dA$



$I_x = hb^3/12$

$I_y = bh^3/12$

$\longrightarrow \quad \frac{I_x}{I_y} = \frac{b^2}{h^2} = (b/h)^2$



$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$

$y' = y\cos\theta - x\sin\theta$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ماتریس دوران

$$I_{x'} = \int y'^2 dA = \int (y^2\cos^2\theta + x^2\sin^2\theta - 2xy\sin\theta\cos\theta)\, dA$$

$$= \cos^2\theta \int y^2 dA + \sin^2\theta \int x^2 dA - \sin 2\theta \int xy\, dA$$

$$= \cos^2\theta\, I_x + \sin^2\theta\, I_y - \sin 2\theta\, I_{xy}$$

$$I_{y'} = \int x'^2 dA = \int (x^2\cos^2\theta + y^2\sin^2\theta + 2xy\sin\theta\cos\theta)\, dA$$

$$= \cos^2\theta \int x^2 dA + \sin^2\theta \int y^2 dA + \sin 2\theta \int xy\, dA$$

$$= \cos^2\theta\, I_y + \sin^2\theta\, I_x + \sin 2\theta\, I_{xy}$$

$$I_{x'y'} = \int (xy\cos^{۲}\theta - x^{۲}\sin\theta\cos\theta + y^{۲}\sin\theta\cos\theta - xy\sin^{۲}\theta)\,dA$$

$$= \cos^{۲}\theta \int xy\,dA - {}^{1}\!/_{۲}\sin ۲\theta \int x^{۲}dA + {}^{1}\!/_{۲}\sin ۲\theta \int y^{۲}dA - \sin^{۲}\theta \int xy\,dA$$

$$= \cos^{۲}\theta\, I_{xy} - {}^{1}\!/_{۲}\sin ۲\theta\, I_y + {}^{1}\!/_{۲}\sin ۲\theta\, I_x - \sin^{۲}\theta\, I_{xy}$$

$$= \cos ۲\theta\, I_{xy} - {}^{1}\!/_{۲}\sin ۲\theta\, I_y + {}^{1}\!/_{۲}\sin ۲\theta\, I_x$$

$$\underbrace{I_{x'}, I_{y'}, I_{x'y'}}_{\text{Max} \quad \text{Min}} = f_{۱,۲,۳}(\underset{\text{عدد}}{I_x}, \underset{\text{ثابت}}{I_y}, I_{xy}, \overset{\text{متغیر}}{\theta})$$

$\theta = ?$

$$I_{x'} = \frac{\cos ۲\theta + 1}{۲} I_x + \frac{1 - \cos ۲\theta}{۲} I_y - \sin ۲\theta\, I_{xy}$$

$$= \cos ۲\theta \left(\frac{I_x - I_y}{۲}\right) + \frac{I_x + I_y}{۲} - \sin ۲\theta\, I_{xy}$$

$$I_{y'} = \cos^{۲}\theta\, I_y + \sin^{۲}\theta\, I_x + \sin ۲\theta\, I_{xy}$$

$$= \frac{\cos ۲\theta + 1}{۲} I_y + \frac{1 - \cos ۲\theta}{۲} I_x + \sin ۲\theta\, I_{xy}$$

$$= \cos ۲\theta \left(\frac{I_y - I_x}{۲}\right) + \frac{I_y + I_x}{۲} + \sin ۲\theta\, I_{xy}$$

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{۲} + \frac{I_x - I_y}{۲}\cos ۲\theta - I_{xy}\sin ۲\theta$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{۲} \cancel{+} - \frac{I_x - I_y}{۲}\cos ۲\theta + I_{xy}\sin ۲\theta$$

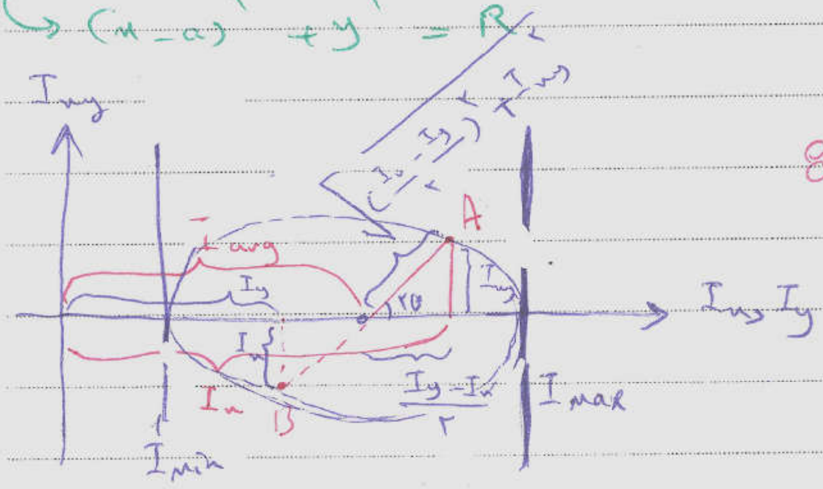
$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{۲}\sin ۲\theta + I_{xy}\cos ۲\theta \qquad \boxed{I_x + I_y = I_{x'} + I_{y'}}$$

$$\hookrightarrow \left\{\begin{matrix} a + b\cos ۲\theta + c\sin ۲\theta \\ a - b\cos ۲\theta - c\sin ۲\theta \\ 0 + b\sin ۲\theta - c\cos ۲\theta \end{matrix}\right. \qquad ۲\theta = \alpha \qquad \left\{\begin{matrix} a + b\cos\alpha + c\sin\alpha \\ a - b\cos\alpha - c\sin\alpha \\ b\sin\alpha - c\cos\alpha \end{matrix}\right.$$

$$I_{avg} = \frac{I_x + I_y}{۲} \qquad (I_{x'} - I_{avg})^۲ + I_{x'y'}^۲ = \left(\frac{I_x - I_y}{۲}\right)^۲ + I_{xy}^۲$$

$$(I_{x'} - I_{avg})^۲ + I_{x'y'}^۲ = \left(\frac{I_x - I_y}{۲}\right)^۲ + I_{xy}^۲$$

$$\hookrightarrow (x - a)^۲ + y^۲ = R^۲$$



دایره موهر

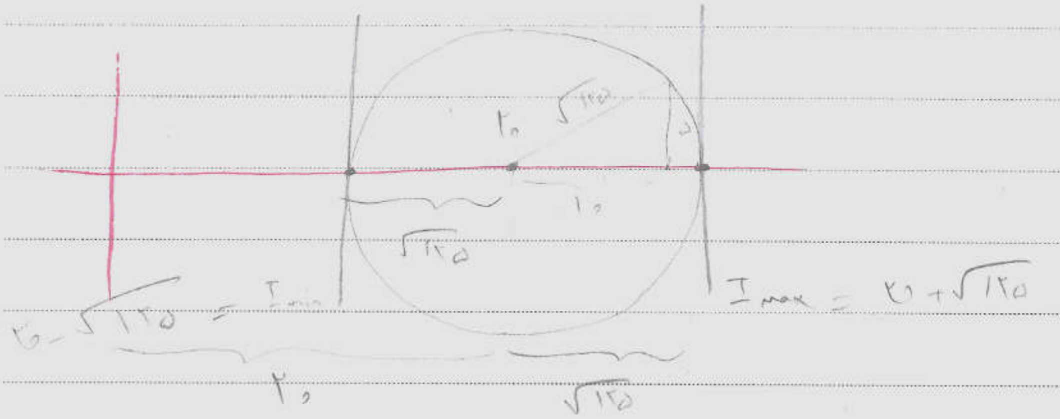
A | I_x, I_{xy}

B | I_y, $-I_{xy}$

$$I_{max} = I_{avg} + R = \frac{I_x + I_y}{۲} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{۲}\right)^۲ + I_{xy}^۲}$$

$$I_{min} = I_{avg} - R = \frac{I_x + I_y}{۲} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{۲}\right)^۲ + I_{xy}^۲}$$

مثال: $I_x = 35$ $I_y = 15$ $I_{xy} = 5$ → $A\Big|^{35}_{5}$ $B\Big|^{15}_{-5}$



جلسه بیست و هشتم ـ ۹۴،۳،۳

مسائل مقدار ویژه ـ بردار ویژه:

معروف‌ترین مسئله طبیعت، بیان تعادل است در فرم المان کوچک

⟸ معادله دیفرانسیل ⟸ هدف: تعیین این مجهولات (مجهولات) ... و $\ddot{x}$ و $\dot{x}$ و x

$y, y', y'', y''', \dots$

تعادل سیستم $$\overset{\overset{2}{\uparrow}}{ay''} + \overset{\overset{1}{\uparrow}}{by'} + \overset{\overset{0}{\uparrow}}{cy} = f(x)$$

حرکت دینامیکی ⟸ تعادل دینامیکی $$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f(t)$$

شتاب، سرعت، جابجایی

$x, \dot{x}, \ddot{x}$ ← ابزار اندازه‌گیری ← توسط استرین گیج ←

$\Longrightarrow a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f(t)$

طراحی ⟸ پاسخ شمارش ⟺ حل معادله جبری

تعیین مجهولات چرا مهم است؟ معادله دیفرانسیل ⟺ تبدیل به معادله جبری

حل!

حل معادله دیفرانسیل

مسأله مقدار ویژه - بردار ویژه:

۱) حل معادلات دیفرانسیل.

۲) برخی مواقع در فضای خارج از معادلات دیفرانسیل خودش یک مسئله است.

تمرین اجباری: با مراجعه به جزوه ۲۸ صفحه‌ای دانشیارها نحوه‌ی تبدیل معادلات دیفرانسیل به معادلات جبری مانند تعریف و چگونگی تعریف $e^{\lambda x}$ را بیان کنید.

نکته مهم: دیفرانسیل / غیر دیفرانسیل } فرم معادله یکسان است.

$$[A]\{\vec{x}\} = \lambda\{\vec{x}\}$$

تبدیل $\xrightarrow{\text{رو}}$ بردار → بردار موازی قبل!

بردار: پاره خط جهت دار

فضای برداری: فضای متشکل از همه‌ی بردارها

مهم‌ترین فضای برداری = فضای جبری $\sum a_i x^i \Leftarrow x^0, x^1, x^2, \ldots$ بسط تیلور

هارمونیک $\sum a_i \sin ix \;\{\; \sin x, \sin 2x, \ldots$ فوریه

هندسه . تعریف بردار

سؤال: چگونه به جایی می رسیم که نیاز داشته باشیم که بفهمیم این مسئله را حل کنیم؟

$[A]\vec{x} = \lambda \vec{x}$

نکته کلیدی: چرا؟ محدودیت شمارش

حل: $[A]\vec{x} - \lambda \vec{x} = \{0\}$

$[A - \lambda I]\{x\} = \{0\} \Rightarrow A - \lambda I = 0$

$\xrightarrow{n \text{ بعد}} \begin{cases} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{cases}$

$[A]\vec{x} = \lambda \vec{x} \rightarrow$ $\vec{x}$ به دست می آید

تبدیل تحت مشتق گیری $(e^{\lambda x}) \xrightarrow{\prime} \lambda e^{\lambda x}$

$ay'' + by' + ay = 0 \rightarrow y = e^{x} \rightarrow a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \rightarrow$ جبری ـ شمارش

$\Rightarrow \lambda_1 , \lambda_2 \quad (y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x})$

هدف: تعیین مقادیر Max و Min ممان اینرسی

مثال: $I_x = 1000$ و $I_y = 300$ و $I_{xy} = 200 \Leftarrow I_{max}$ و I_{min} و θ ?

$$\left| \begin{bmatrix} 1000 - \lambda & 200 \\ 200 & 300 - \lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \Rightarrow \lambda_1 , \lambda_2$$

تمرین: λ_1 و λ_2 را حساب کنید

تمرین: با دایره مور تمرین قبل را حل کنید.

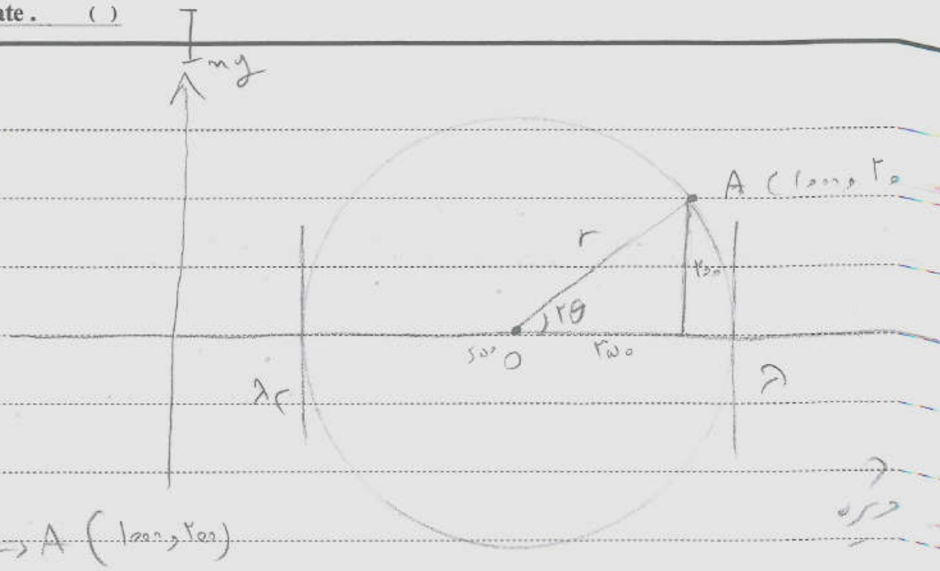
ASEMAN

Subject :
Year. Month. Date. ( )

$I_x = ۱۰۰۰$

$I_y = ۳۰۰$

$I_{xy} = ۲۰۰$


I_{xy}
A (۱۰۰۰، ۲۰
r
۲θ
۲۰۰
۶۵۰ O
۳۵۰
λ_2
λ_1
درجه

$O\left(\frac{I_x+I_y}{2}, 0\right)$

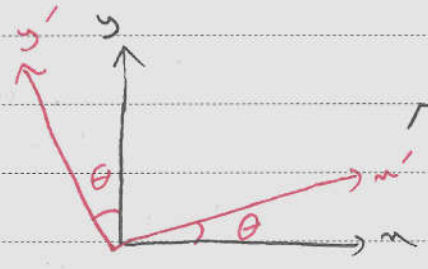
$\Rightarrow O(۶۵۰, ۰)$

$A(I_x, I_{xy}) \Rightarrow A(۱۰۰۰, ۲۰۰)$

$B(I_y, -I_{xy})$

$r = \sqrt{۲۰۰^2 + ۳۵۰^2} = ۱۰\sqrt{۴۰۰ + ۱۲۲۵}$

$\Rightarrow I_{max} = ۶۵۰ + ۴۰۳ = ۱۰۵۳$ $I_{min} = ۶۵۰ - ۴۰۳ = ۲۴$



کنند زاویه بین x و x' در صفحه، نصف دایره موهر

!

هندسه ! دایره موهر

جبر : مقدار ویژه ـ بردار ویژه

ی نمونه ی ۷ـ۹ کتاب بیر جانسون که کاملاً شبیه امتحان است را حل کنید.

$\sum \vec{F} = 0$
$\sum \vec{M} = 0$ } برداری

ی دل ← اسکالر : V.W : کار مجازی

بعدی: مجموعه اعداد حقیقی

مجازی ← برخی مسائل را بسیار ساده می‌کند

← انطباق کامل با محدودیت شمارش

Subject: ۹۴,۳,۵ — جلسه بیست و نهم

Year. Month. Date. ( )

مجازی: یعنی در واقعیت رخ نمی‌دهد و ما فقط رخ دادن آن را فرض می‌کنیم.

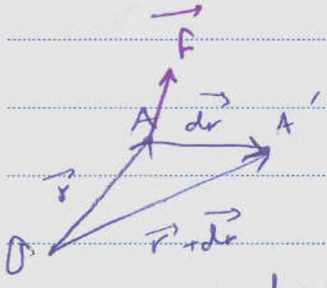
کار مجازی: کار نیروها به ازای جابجایی های فرضی

چرا؟ ابزاری قدرتمند برای حل طیف وسیعی از مسائل

مزایا:
- ساده
- قدرتمند
- اسکالر (بردار یک عددی) مبنی بر کار، که فیزیک آن توسط بشر قابل فهم است

کار: اول ترم: $F_x x$ سه بعدی: $F_x x + F_y y + F_z z$

تعریف ضرب داخلی نمایش به صورت زیر: $W = \vec{F} \cdot \vec{r}$



کار واقعی به ازای دیفرانسیل جابجایی

جابجایی کوچک

$$dU = \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

چون du اسکالر نتیجه بیان مقداری آن مهم است.

$$du = (F)(ds)\cos\alpha \qquad N.m \equiv J$$

نیرو N، طول m، بی بعد

سه حالت خاص:

$du = F ds$ — $\alpha = 0$

$du = 0$ — $\alpha = 90$

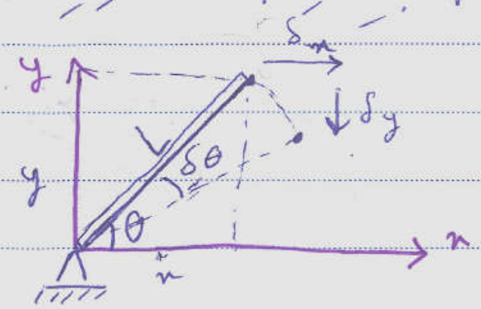
$du = -F ds$ — $\alpha = 180$

Sunwood

هندسه: طول

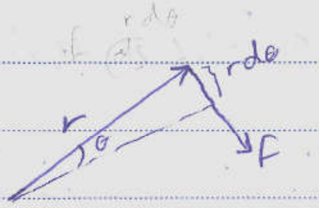
کار ←(لازم) جابجایی ←(طول) هندسه!

کل هندسه: ۱) سیستم مختصات ۲) ارتباط بین سیستم مختصات با فیزیک ابعادی جسم

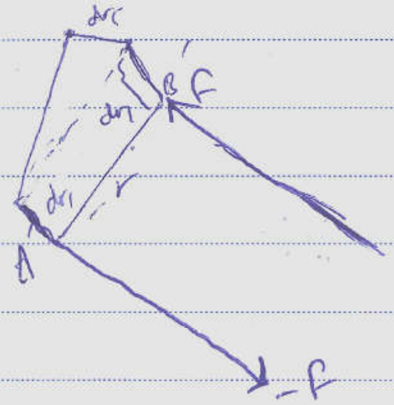

y
y
δx
δy
$\delta\theta$
θ
l
x
x

$x = l\cos\theta \rightarrow \delta x = -l\sin\theta\,\delta\theta$

$y = l\sin\theta \rightarrow \delta y = \pm l\cos\theta\sin\theta$


r
θ
$r\,d\theta$
F

$M = rF \qquad \underset{\substack{N.m\\ \textcircled{J}}}{du} = F.(r\,d\theta) = Fr\,d\theta = \underset{\substack{N.m\\ \cancel{\textcircled{J}}}}{M\,d\theta}$


dr_2
dr_2
dr_1
r
B
F
A
-F

کار F، کار (F-) = کار نیروهای زوج = کار ممان = dM

$(-\vec{F}).\vec{dr_1} + (\vec{F}).(\vec{dr_1} + \vec{dr_2})$

$= -\vec{F}.\vec{dr_1} + \vec{F}.\vec{dr_1} + \vec{F}.\vec{dr_2}$

$= \vec{F}.\vec{dr_2} = Fr\,d\theta = M\,d\theta$

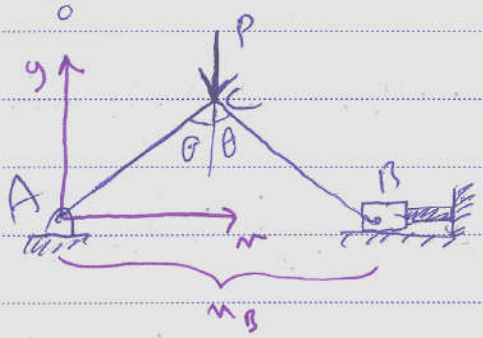
کار مجازی :

کل کار تمام نیروها تحت جابجایی مجازی $= \vec{F_1} \cdot \vec{\delta r} + \vec{F_2} \cdot \vec{\delta r} + \dots + \vec{F_n} \cdot \vec{\delta r}$

$$= \underbrace{(\sum \vec{F})}_{0} \cdot \vec{\delta r} = 0$$

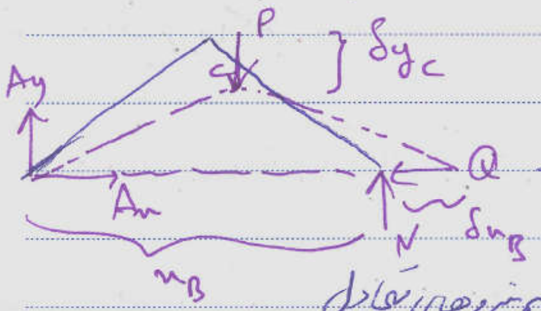
الگوریتم : ✓

۱) رسم مختصات خاص



۲) رسم دیاگرام آزاد

۳) اجازه می‌دهیم نیروی مجهول کار انجام دهد.



۴) از هندسه تغییر مکان‌های مجازی را محاسبه می‌کنیم.

۵) نوشتن قانون کار مجازی $\equiv$ گام سوم رسم نیروهای تعادل

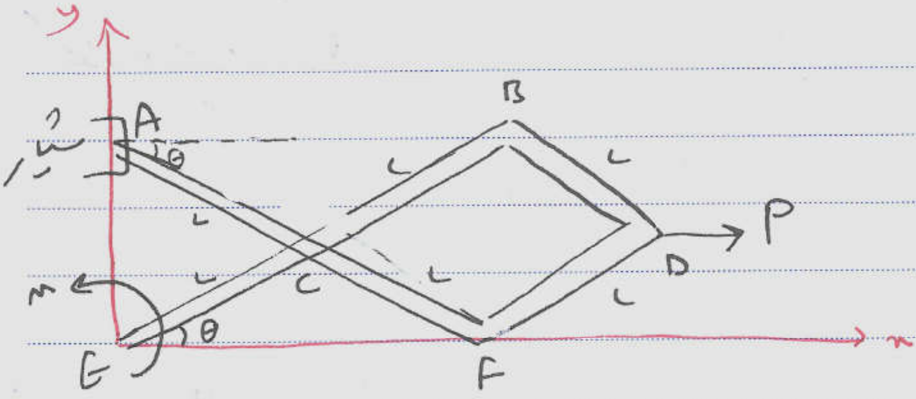
۶) حل این معادله

$\delta x_B = ?$ $\delta y_C = ?$

$$\overset{\text{کل کار}}{\delta U} = 0 \longrightarrow \delta U_{Ax} + \delta U_{Ay} + \delta U_P + \cancel{\delta U_N} + \delta U_Q$$

$$\begin{cases} \delta U_P = -P\,\delta y_C \\ \delta U_Q = -Q\,\delta x_B \end{cases}$$

مثال:



P در چه امتدادی کار انجام می دهد؟

$x_D = 3L\cos\theta$

$\delta x_D = -3L\sin\theta\,\delta\theta$

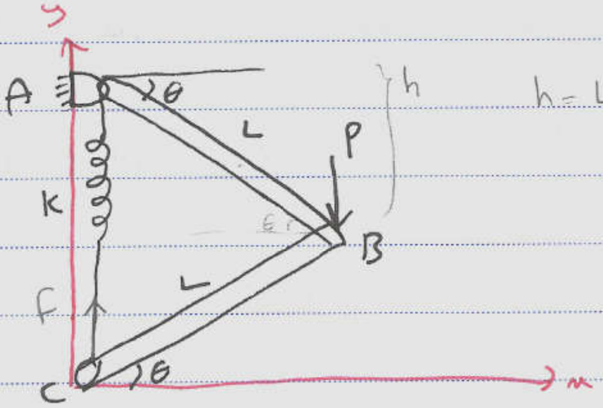
$$\delta U = 0 \Rightarrow M\,\delta\theta + P(-3L\sin\theta\,\delta\theta) = 0 \Rightarrow M = 3PL\sin\theta$$

(+) هم جهت

نکته مهم: در امتحان نپرسید آیا می توانم این مسئله کار مجازی را به جای کار مجازی با روش تعادل نیرو حل کنم.

مثال: اگر در مسئله ی قبل در نقطه ی B یک نیروی قائم بود، حل چگونه انجام می شد؟

مثال: بسیار شبیه امتحان پارسال!!



$h = L\sin\theta \Rightarrow \delta h = L\cos\theta\,\delta\theta$

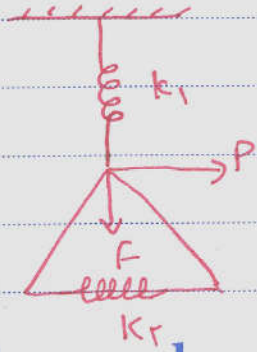
وزن نداریم. θ ؟ P

$\delta U = 0$

$\rightarrow P \times L\cos\theta\,\delta\theta - K(2L\sin\theta - h)(2L\cos\theta\,\delta\theta) = 0$

$\Rightarrow P = 2K(2L\sin\theta - h) \Rightarrow \left(\frac{P}{2K} + h\right)\times\frac{1}{2L} = \sin\theta$

$\Rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{P+2Kh}{4KL}\right)$



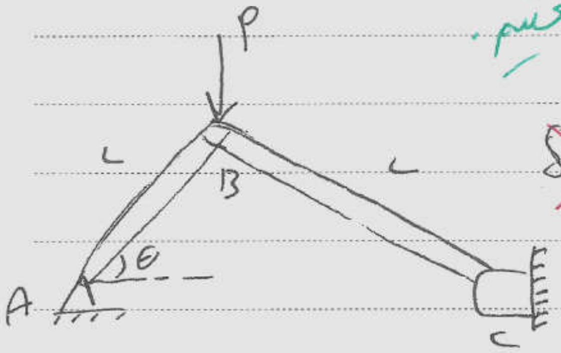
مسئله امتحان: به عنوان تمرین تحویل روز امتحان!!

Subject

Date

سؤال: چرا باید تغییر شکل های مجاز را کوچک باشد؟

اگر کوچک نباشد دیگر نمی توانیم از دیفرانسیل استفاده کنیم.

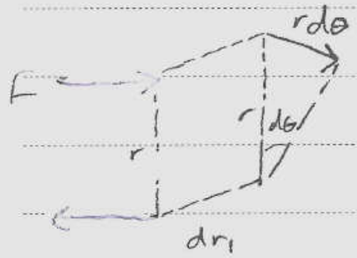


$\cancel{\delta x_B}$ یا $\cancel{dx_B}$

$\longrightarrow L\sin\theta - L\sin(\theta - \alpha)$

باید از   استفاده کنیم.

در راستای ساده سازی مسئله از حساب دیفرانسیل استفاده می کنیم.


F
$rd\theta$
r
$d\theta$
r
dr_1

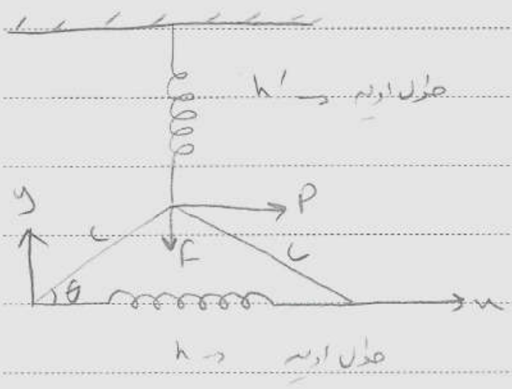
کار ممان $= F.dr_1 = F.rd\theta = Md\theta$ سؤال؟

رویه دو مقدار r

$d\theta$ عمود بر صفحه

راه دوم: $F \times (d\theta \times r) = (\vec{F}\cdot\vec{r})\,\vec{d\theta} - \cancel{(\vec{F}\cdot\vec{d\theta})}\,\vec{r} = (\vec{F}\cdot\vec{r})\,d\theta$

سؤال مطرح شده در کلاس ۴

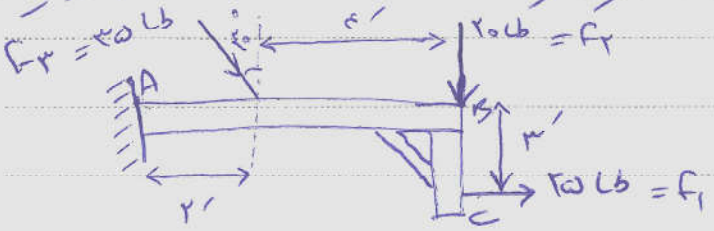

h' ← طول اولیه
y
P
L
F
L
θ
x
h ← طول اولیه

$\delta U = 0$

۹۳٫۱۲٫۱۶

Subject: جلسه دوم - حل تمرین استاتیک
Year. Month. Date. ( )

① مجموعه نیروهای نشان داده شده در شکل را با یک نیرو و گشتاور در نقطه‌ی A جایگزین کنید.



پاسخ :

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$$

$$\vec{F_1} = ۲۵\vec{i}$$

$$\vec{F_2} = -۲۰\vec{j}$$

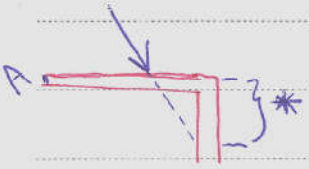
$$\vec{F_3} = ۳۵(\sin ۴۰\,\vec{i} + \cos ۴۰\,\vec{j})$$

$$\vec{R} = \{۴۲٫۵\,\vec{i} + ۵۰٫۳\,\vec{j}\}\ \text{Lb}$$

$$\overset{+}{\curvearrowright}\ \Sigma M_A = -۳ \times ۲۵ + ۶ \times ۲۰ + ۲(۳۵ \cos ۴۰) = ۱۰۵٫۶\ \hat{k}\ \text{Lb.ft}$$

سیستم فوق را طوری تنظیم کنید که فقط یک نیرو به جسم وارد شود. بیان کنید که راستای این

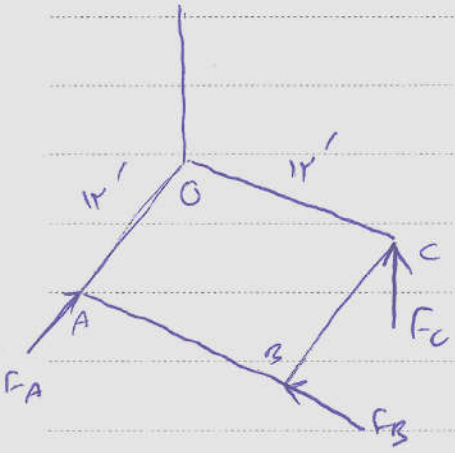
یک نیرو در چه فاصله‌ای از نقطه‌ی B ضلع BC را قطع می‌کند؟



* (جواب = ۴٫۶۲ ft درین مسیر از نقطه‌ی A) *

② سیستم زیر را به یک نیرو و گشتاور هم‌سوی آن (wrench) تبدیل کنید.

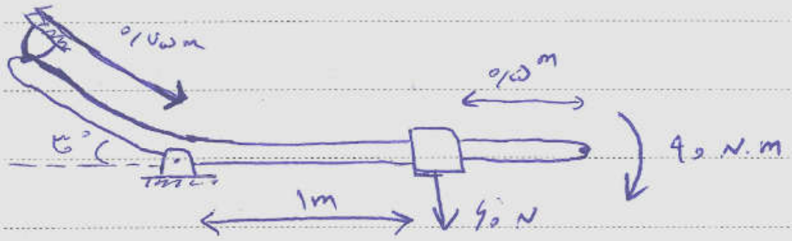
$F_A = ۸۰\ \text{Lb}$ $F_B = ۶۰\ \text{Lb}$ $F_C = ۴۰\ \text{Lb}$



oject :

ar . Month . Date . ( )

سازه‌ای به شکل زیر داده شده که در نقطه A پین شده است. عکس العمل تکیه‌گاهی در نقطه A را بیابید



نکات تعادل:

① هیچ مسأله‌ی تعادلی در استاتیک نباید بدون دیاگرام آزاد حل شود.

② اگر تکیه‌گاهی از حرکت (چرخش) در جهت خاصی جلوگیری می‌کند در همان جهت به جسم نیرو وارد می‌کند. (ممان)

③ نیروهای داخلی هیچگاه روی دیاگرام آزاد رسم نمی‌شوند.

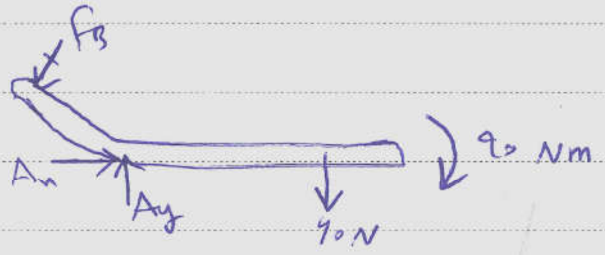
④ وزن نیروی خارجی است و در دیاگرام آزاد رسم می‌شود.

⑤ ممان (کوپل) می‌تواند هر جایی روی دیاگرام آزاد قرار بگیرد.

⑥ نیروها را می‌توان در هر محلی از راستای خودشان قرار داد.

* برای تشخیص نیروهای تکیه‌گاهی از سایر نیروها یک خط روی آنها قرار می‌دهیم.

پاسخ:



$$\overset{+}{\curvearrowleft}\ \sum M_A = 0 \rightarrow -۶۰ - ۹۰ + F_B \times ۰/۷۵ = ۰$$

$$\rightarrow F_B = ۲۰۰\ N$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x - F_B \sin ۳۰ \rightarrow A_x = 100N$$

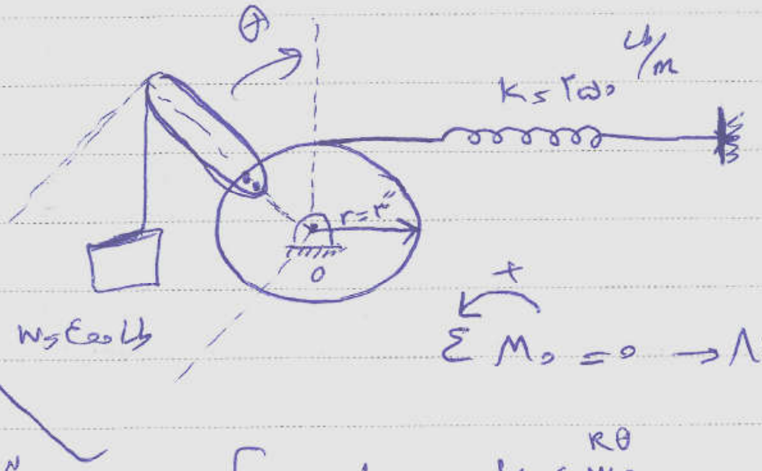
$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y - ۶۰ - F_B \cos ۳۰ = ۰ \rightarrow A_y = ۲۳۳\ N$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

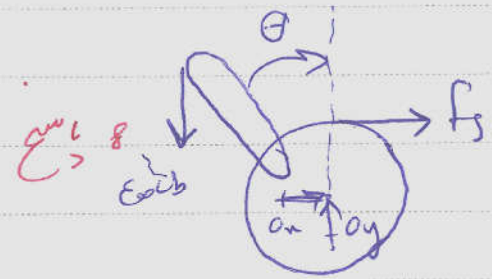
imp $\boxed{g = ۹,۸۱}$

نشان دهید اگر حول سه نقطه روی یک خط معادله‌ی تعادل $\Sigma M = ۰$ بنویسیم، این سه معادله مستقل از هم نخواهند بود.

③ در $\theta = ۰$ فنر در حال تعادل است. θ وضعیت تعادل بار را بیابید.



۸ پاسخ د

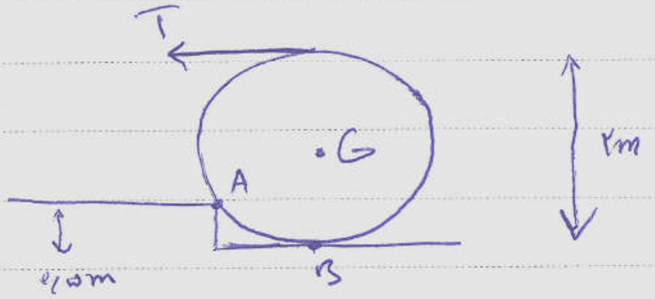


$$\overset{+}{\curvearrowleft}\ \Sigma M_o = ۰ \rightarrow ۸\sin\theta \times ۴۰۰ = ۳f_s$$

$$F_s = kx = k(\overset{R\theta}{۳\theta}) = ۷۵۰\,\theta \qquad \sin\theta = ۰/۷۰۳\,\theta$$

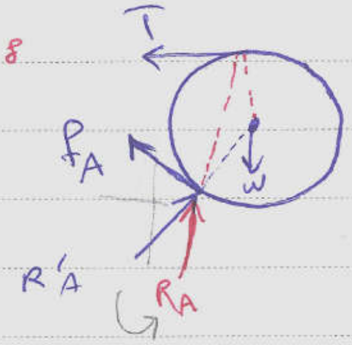
$$\rightarrow \theta = ۰ \qquad \theta = ۸۰/۳^\circ$$

④



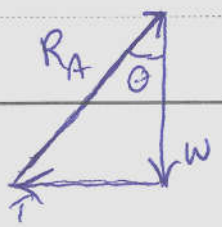
W = ۲۵۰ kg
A: Rough contact
T = ? R_A = ?

۸ پاسخ د



سه نیرو داریم $\Rightarrow R_A , T , W \rightarrow$ هم‌رسند

در غیر این صورت ← گشتاور ایجاد می‌شود که تعادل را بر هم می‌زند ← نه استاتیک بلکه دینامیک

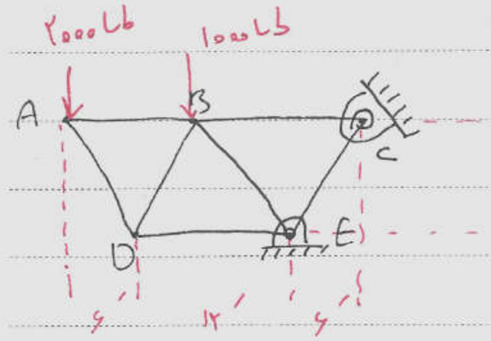


$$r - r\cos\alpha = ۰/۵ \qquad \alpha = ۶۰^\circ \qquad \theta = ۳۰^\circ$$

$$T = W\tan\theta = ۲۵۰ \times ۹/۸۱ \times \tan ۳۰ = ۱۴۱۶\ N$$

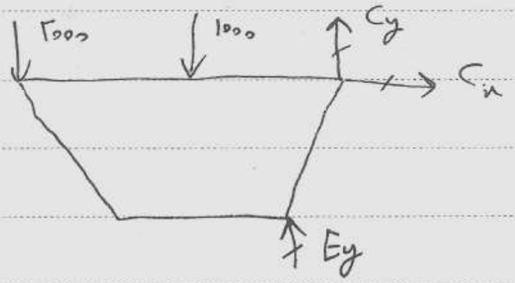
$$R_A = \frac{W}{\cos\theta} = ۲۸۳۲\ N$$

Subject: استاتیک TA - جلسه چهارم ۹۴/۱/۱۵
Year. Month. Date. ( )



نیرو های داخلی اعضا و فشاری یا کششی بودن آنها را بیابید.

پاسخ: مرحله اول یافتن نیروهای تکیه‌گاهی از طریق رسم FBD



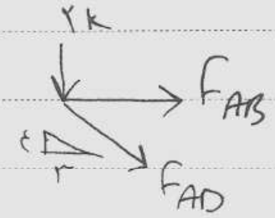
1000 Lb = 1 Kips

$$\overset{+}{\curvearrowright}\ \sum M_C = 0 \longrightarrow 6E_y - 12\times1000 - 24\times2000 = 0 \longrightarrow E_y = 10 \text{ kips}$$

$$\sum F_y = 0 \longrightarrow C_y + E_y - 3000 = 0 \longrightarrow C_y = -7 \text{ kips}$$

$$\sum F_x = 0 \longrightarrow C_x = 0$$

Ⓐ گره

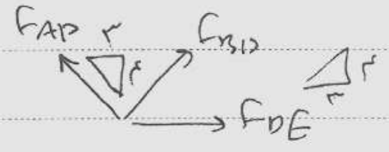


$$\sum F_y = 0 \quad \tfrac{4}{5}F_{AD} + 2 = 0 \rightarrow F_{AD} = -2.5 \text{ kips}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_{AB} + \tfrac{3}{5}\overset{-2.5}{F_{AD}} = 0$$

$$F_{AB} = 1.5 \text{ kips} \Rightarrow \text{tension}$$ کشش

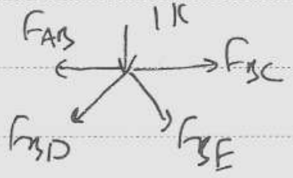
Ⓓ گره



$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_{BD} + F_{AD} = 0 \rightarrow F_{BD} = 2.5 \text{ kips} \rightarrow (T)$$

$$\sum F_x = 0 \quad F_{DE} + \tfrac{3}{5}(F_{BD} - F_{AD}) = 0 \longrightarrow F_{DE} = -3 \text{ kips} \rightarrow (C)$$

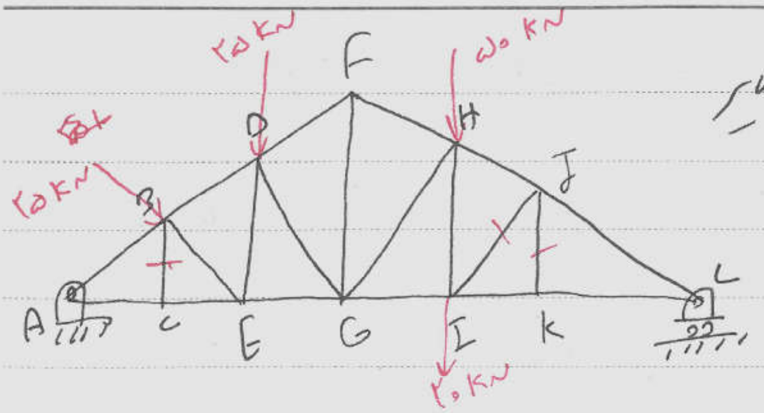
Ⓑ گره



$$\sum F_y = 0 \rightarrow 1 + \tfrac{4}{5}(F_{BE} + F_{BD}) = 0$$

$$\rightarrow F_{BE} = -3.75 \text{ k} \rightarrow (C)$$

$$\sum F_x = 0 \ \ldots \longrightarrow F_{BC} = 0.25 \text{ k} \rightarrow (T)$$


۲۵ kN
F
۵۰ kN
D
H
J
۲۵ kN
B
A
C
E
G
I
K
L
۲۰ kN

اعضای صفر نیروی را مشخص کنید و نیروی داخلی سایر

اعضا را بیابید:

تا پاسخ 8

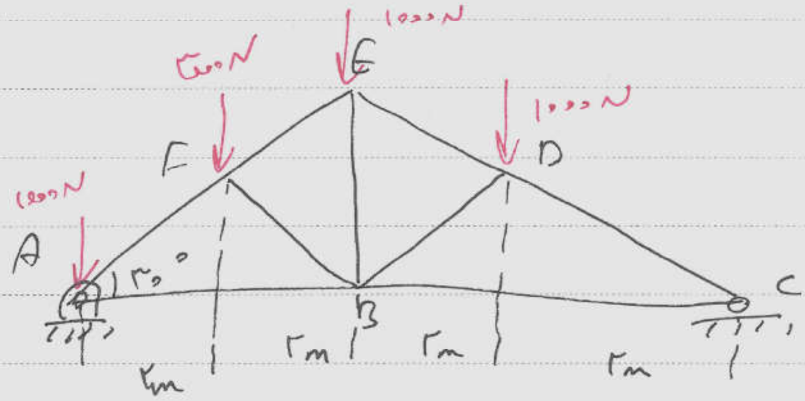
$F_{BC} = 0 \rightarrow F_{AC} = F_{CE}$ $F_{JK} = 0 \rightarrow F_{IK} = F_{KL}$

$F_{IJ} = 0 \rightarrow F_{JL} = F_{JH}$

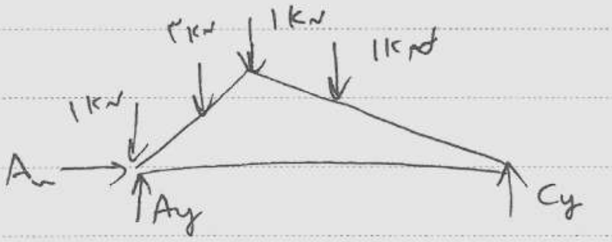
③ نمره $F_{BE} = ۲۱۵$ kN → (C) فشاری

③ نمره $F_{HI} = ۲۰$ kN → (T) کششی $F_{GI} = F_{IK}$

⓪ نمره $F_{DE} \neq ۲۵$ kW


۱۰۰۰ N
E
۳۰۰۰ N
۱۰۰۰ N
F
D
۱۰۰۰ N
A
۳۰°
B
C
۲m
۳m
۳m
۳m

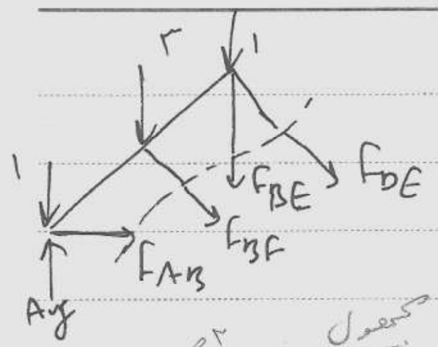
$F_{BE} = ?$


۳kN
۱kN
۱kN
۱kN
A_x
A_y
C_y

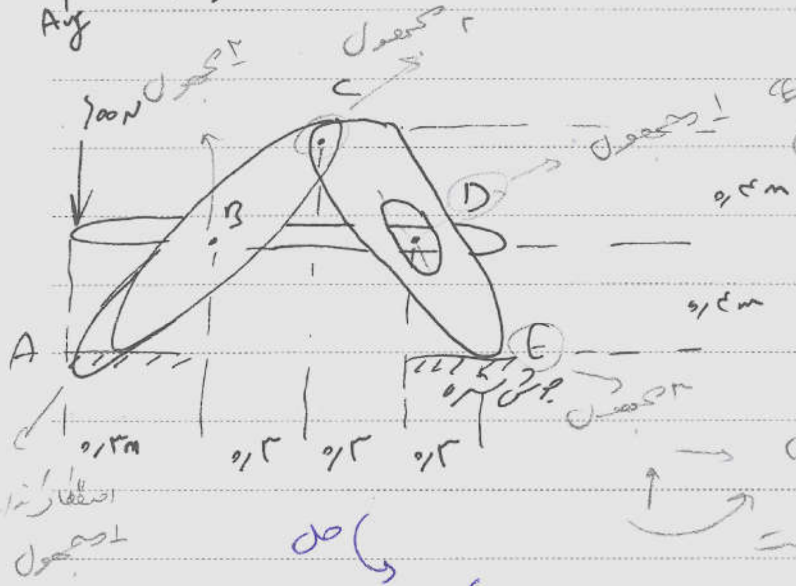
$\overset{+}{\curvearrowright}$ $\Sigma M_A = 0 \rightarrow C_y = ۲$ kN

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow A_y = ۴$ kN

$\rightarrow \Sigma F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$


۳
۱
۱
F_{BE}
F_{DE}
F_{BF}
F_{AB}
Ay

$\overset{+}{\curvearrowright}$ $\sum M_B = ۰ \rightarrow F_{DE}$ ✓


۲ مجهول
۲ مجهول
۵۰۰N
C
B
D
۱ مجهول
A
E
جوش شده
۳ مجهول
۰/۴m
۰/۴m
۰/۳m
۰/۳
۰/۳
۰/۳
اصطکاک ندارد
۱ مجهول

(چون می‌لغزد در راستای E نیرو در راستای آن وارد نمی‌شود)

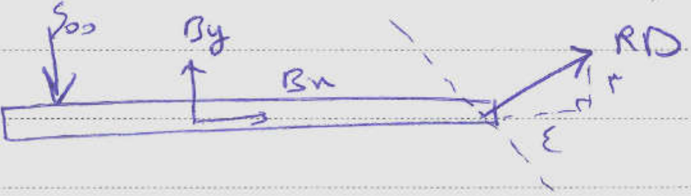
Find reactions at E & A

Slider → لغزنده

در کل ۹ مجهول داریم ⇐ و ۳ تکه میله داریم که اگر برای هر میله سه معادله را بنویسیم در آخر همه مجهولات بدست می‌آیند.

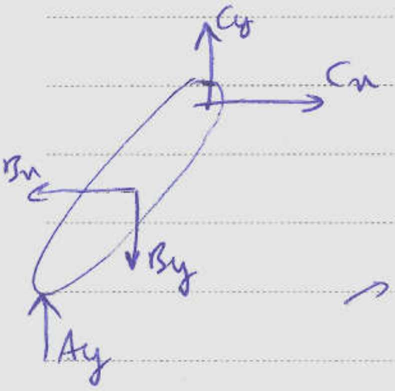
حل

۹۳/۱/۲۴
جلسه پنجم


۵۰۰
By
Bx
RD
۳
۴

$\overset{+}{\curvearrowleft}$ $\sum M_B = ۰ \rightarrow \frac{۳}{۵} R_D \times ۰/۶ + ۰/۳ \times ۵۰۰ = ۰ \rightarrow R_D = -۵۰۰\ N$

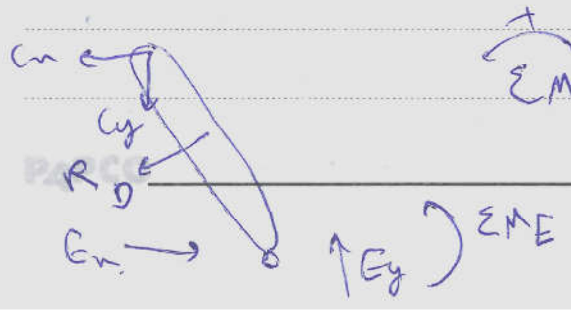
$\sum F_x = ۰ \rightarrow B_x = ۴۰۰\ N$ $\sum F_y = ۰ \rightarrow B_y = ۹۰۰\ N$


Cy
Cx
Bx
By
Ay

$\overset{+}{\curvearrowleft}$ $\sum M_C = ۰ \Rightarrow ۰/۶ A_y - ۰/۳ B_y + ۰/۴ B_x = ۰$

$\rightarrow A_y = ۱۸۳/۳\ N$ $\sum F_x = ۰ \rightarrow C_x = B_x = ۴۰۰\ N$

$\sum F_y = ۰ \rightarrow C_y = ۷۱۷\ N$


Cx
Cy
RD
Ex
Ey
$\sum M_E$

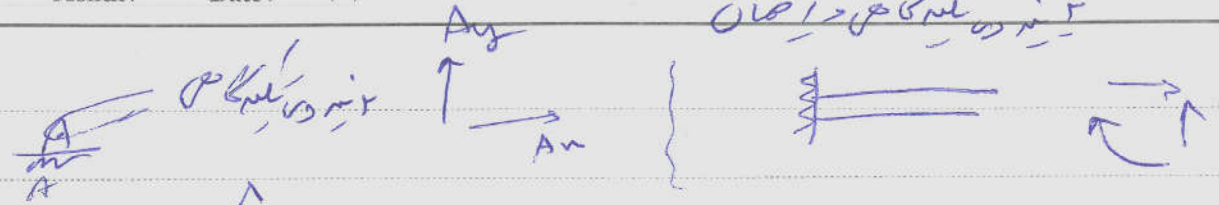
$\overset{+}{\curvearrowleft}$ $\sum M_E = ۰$ $M_E + ۰/۵ R_D + ۰/۶ C_y + ۰/۸ C_y = ۰$

$\rightarrow M_E = -۵۰۰/۲\ N.m$

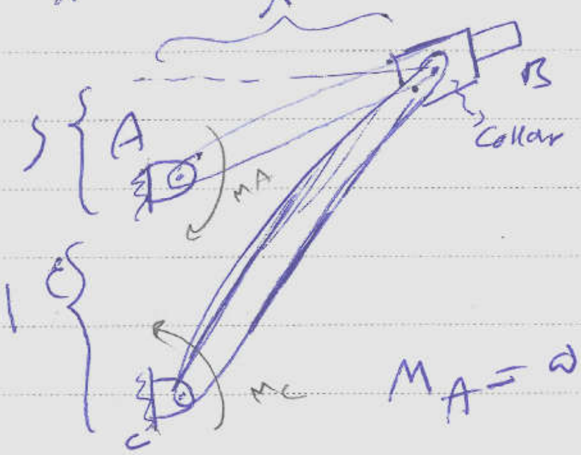
$\sum F_x = ۰ \rightarrow E_x = ۰$

$\sum F_y = ۰ \rightarrow E_y = ۴۷۷\ N$

۳ نیروی تکیه گاهی دارا هان



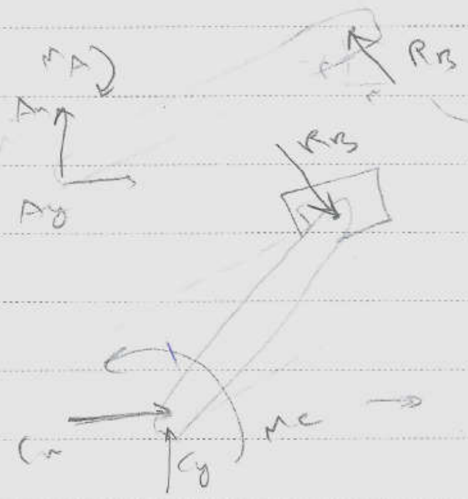
۲ نیروی تکیه گاهی


۸
B
Collar
A
MA
۶
۱
C
Mc

ممان M_c را طوری باید بیابید که تعادل را برقرار کند. نیروی عکس العمل در نقطه‌ی B را نیز بیابید.

$M_A = ۵۰۰$ lb.in

Collar ـ در راستای مماسی نیرو نداریم. مانند slider


MA
Ax
Ay
RB
RB
Cx
Cy
Mc

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow ۱۰ \times R_B = M_A = ۵۰۰$

$\Rightarrow R_B = ۵۰$ lb

$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow M_C = \frac{۳}{۵} R_B \times ۶ + \frac{۴}{۵} R_B \times ۸ = ۹۶$ lb.in

$\begin{cases} C_x = -۳۰ \text{ lb} \\ C_y = +۴۰ \text{ lb} \end{cases}$

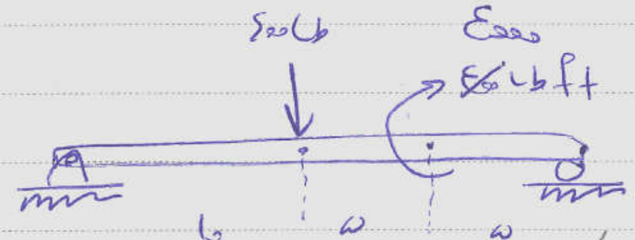
R_B به BC عمود نیست.

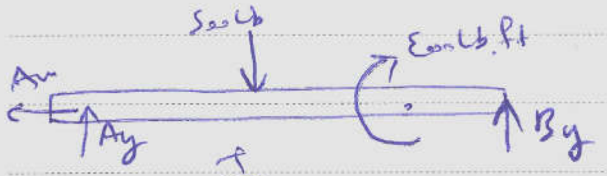
تیرها

Pin_Roller: Simply-supported

این گونه مسائل تیرها در قسمت طراحی تکیه‌گاه کاربرد دارد. و در تشبیه آن مقاومت مصالح مثلاً در شکل ما در این سوال می خواهیم ببینیم که تیر در کجا می‌شکند.

رسم دیاگرام های نیروی برشی و ممان خمشی


۵۰۰ lb
۴۰۰۰
~~۴۰۰~~ lb ft
A
۶
۵
۵

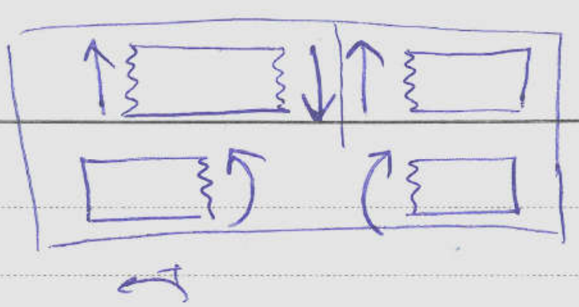

۵۰۰ lb
۴۰۰ lb.ft
Ax
Ay
By

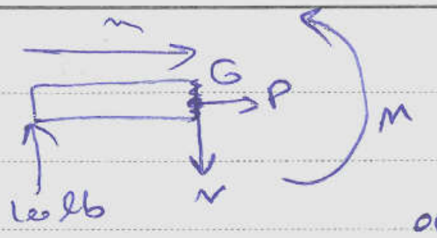
$\Sigma M_A = 0 \rightarrow B_y \times ۱۶ = ۵۰۰ \times ۶ + ۴۰۰۰ \rightarrow B_y = ۴۰۰$ lb

$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow A_y = ۱۰۰ \quad A_x = 0$

Subject:
Year.   Month.   Date.   ( )

قرارداد





$۰ < x < ۱۰$ $\overset{\curvearrowleft}{\sum M_G} = ۰ \to M - ۱۰۰x = ۰$

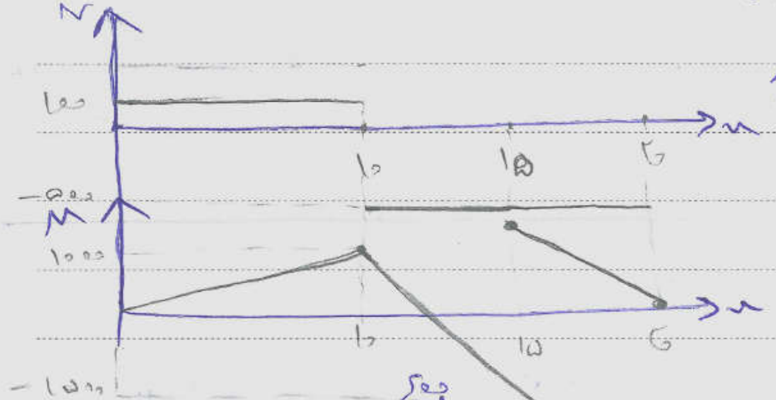
$\Rightarrow M = ۱۰۰x$ $۰ \leq x \leq ۱۰$

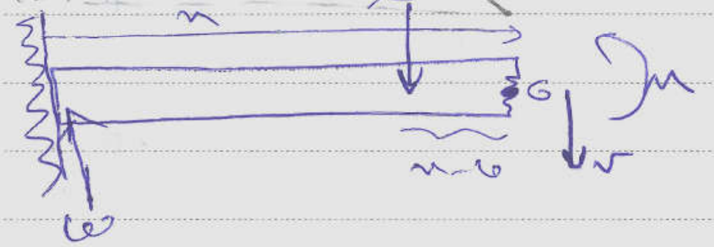
$\sum F_y = ۰ \to ۱۰۰ - V = ۰ \to V = ۱۰۰\text{lb}$

$\sum F_x = ۰ \to P = ۰$

imp

هواسمان باشد که مبدأ را برای تکه‌های مختلف تیر ثابت در نظر بگیریم چون در غیر این صورت معادله‌های ما به هم می‌خورد

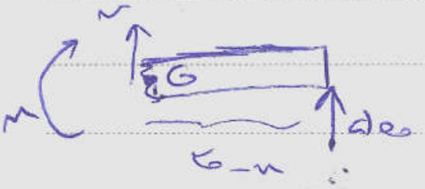




$\overset{\curvearrowleft}{\sum M_G} = ۰ \to M - ۱۰۰x + ۶۰۰(x - ۱۰) = ۰$

$M = -۵۰۰x + ۶۰۰۰$ $۱۰ \leq x \leq ۱۵$

$\sum F_y = ۰ \to V = -۵۰۰\text{lb}$



$۱۵ \leq x \leq ۲۰$

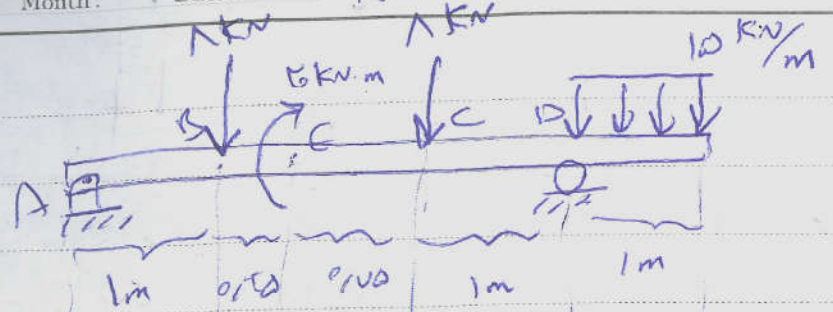
$\sum M_G = ۰ \to M = ۵۰۰(۲۰ - x) = -۵۰۰x + ۱۰۰۰۰$

$\sum F_y = ۰ \to V = -۵۰۰\text{lb}$

* اینجا جاهاشان را عوض کنیم در تیرهای تکیه‌گاهی تاثیر ندارد اما در تیرهای داخلی چی؟!

Subject: جلسه ششم

Year. Month. Date. ( ) ۹۴/۱/۲۴



مطلوب است رسم نمودارهای نیروی برشی و ممان خمشی؟

نکته ① از هریک از دو قسمت تیر برای به دست آوردن معادلات V و M می توان استفاده کرد.

② نمودار M تنها در نقاطی که ممان متمرکز داریم ناپیوسته است.

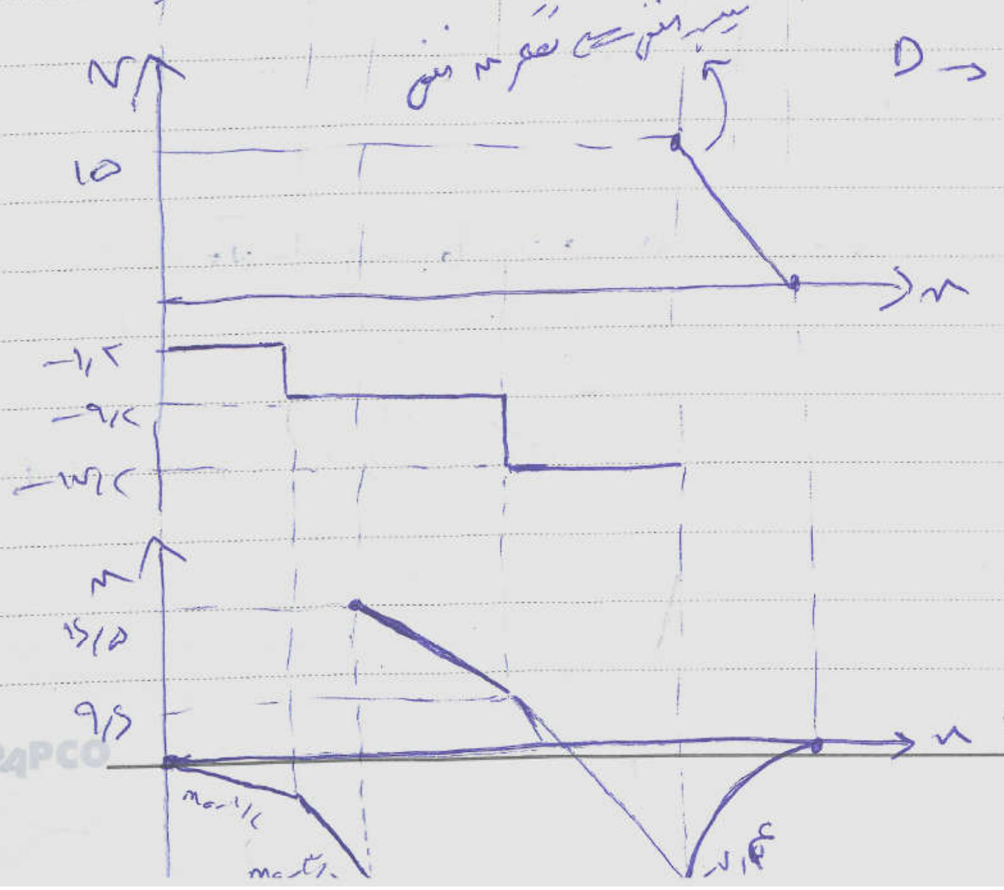
③ نمودار V تنها در نقاطی که نیروی متمرکز داریم ناپیوسته است.

④ نمودار V تنها در نقاطی که ممان متمرکز داریم پیوسته است.

گام اول نیرو و ممان تکیه‌گاهی $A_y = -1,2$ kN $D_y = 32,2$ kN

فقط هنگام محاسبه‌ی نیروی تکیه‌گاهی معادل نیروهای گسترده را متمرکز نمائیم.

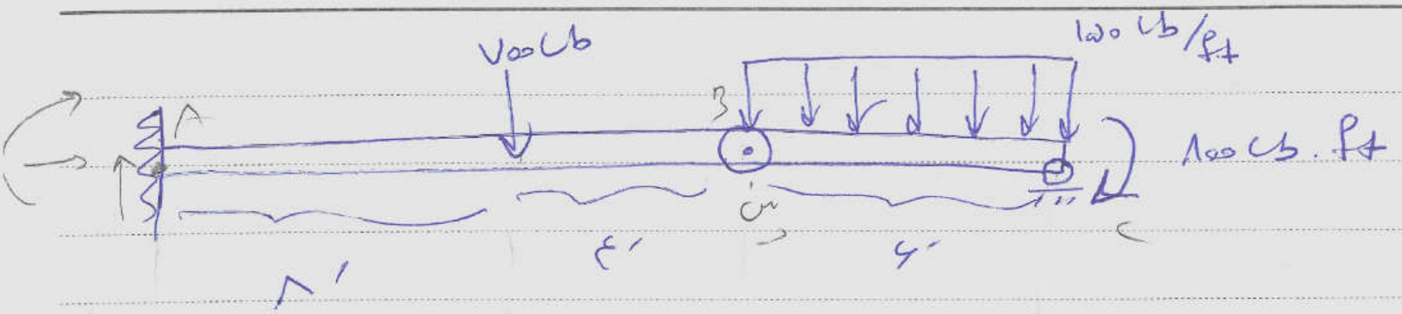
نقطه‌ی بحرانی → D



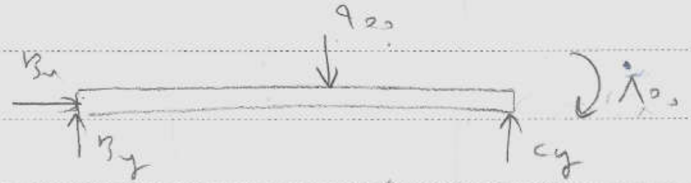
$$\frac{dv}{dx} = -q$$

$$\frac{dM}{dx} = V$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )


۷۰۰ Lb
۱۵۰ Lb/ft
A
B
۸۰۰ Lb. ft
پین
۴'
۶'
۸'

برای اینکه بتوانیم نیرو های تکیه گاهی را
پیدا کنیم در قسمت بین مفصل برش می زنیم


۹۰۰
B_x
B_y
C_y
۸۰۰

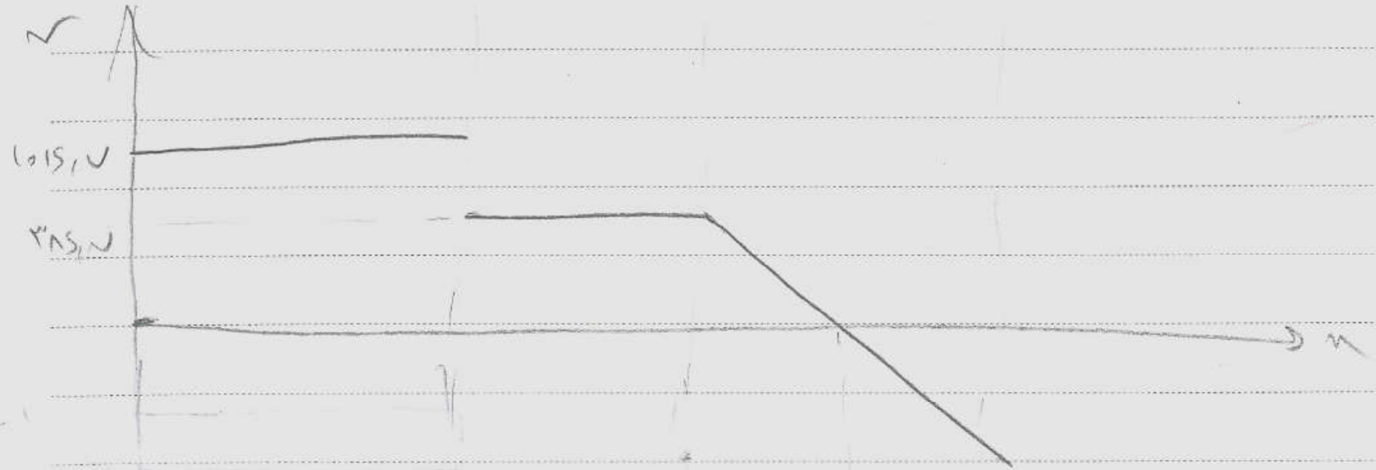
$\sum F_x = ۰ \Rightarrow B_x = ۰$ $\sum M_B = ۰ \rightarrow C_y = ۵۸۳ Lb$

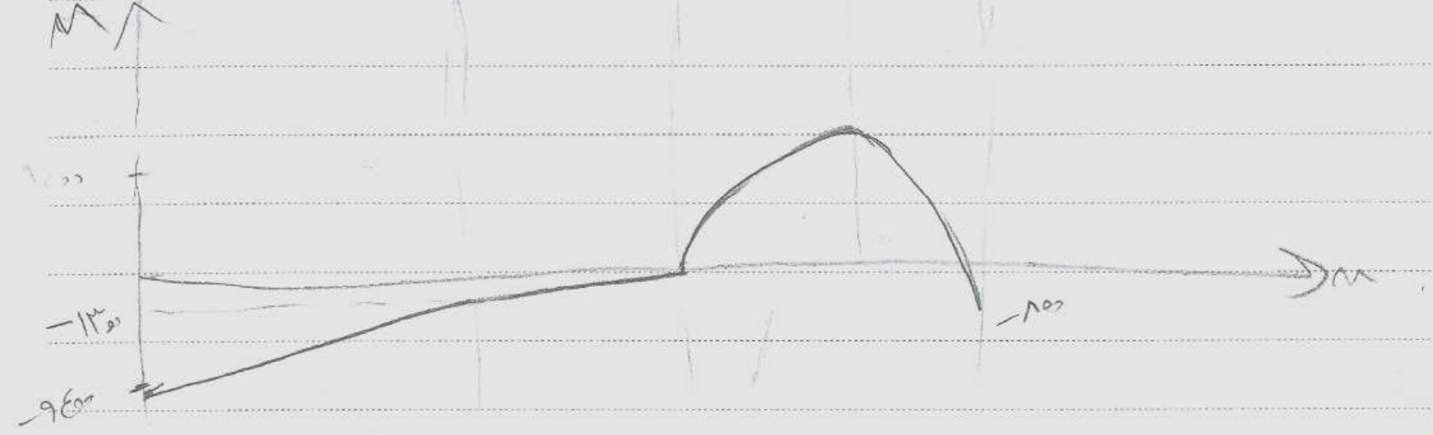
$B_x = ۰$ $B_y = ۳۱۷$

حال به [illegible] مشخص

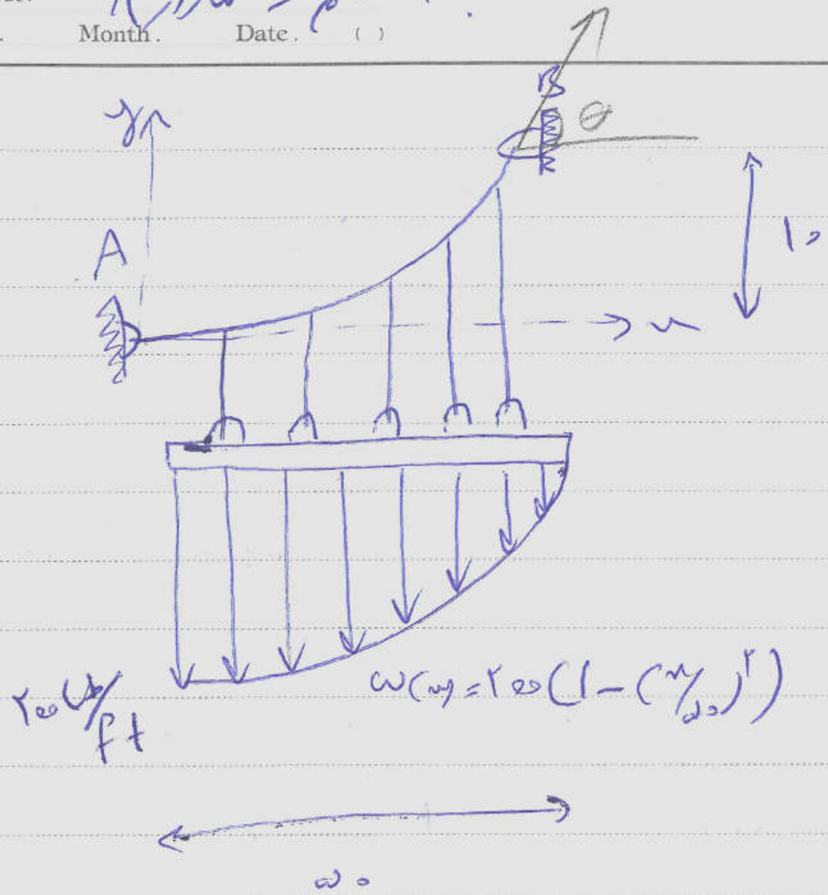
$\sum M_A = ۰ \rightarrow M_A = -۹۶۰۰ \; Lb.ft$

$\sum F_y = ۰ \rightarrow A_y = ۱۰۱۵,۷ Lb$ A_y





Subject: جلسه هفتم – ۹۴/۳/۵
Year. Month. Date. ( )



$y=f(x)=?$

$T_{max}=?$

$S_{AB}=?$

$$\frac{d^۲y}{dx^۲}=\frac{w(x)}{T_0}\Rightarrow T_0\frac{d^۲y}{dx^۲}=۲۰۰\left(۱-\left(\frac{x}{۵۰}\right)^۲\right)$$

$$\rightarrow T_0\frac{dy}{dx}=۲۰۰x-\frac{۲۰۰}{۳}\frac{x^۳}{۲۵۰۰}+C_1\xrightarrow{\text{نقطه A}}C_1=0 \qquad ⊛$$

$$\Rightarrow T_0\times y=۱۰۰x^۲-\frac{۲۰۰}{۱۲}\frac{x^۴}{۲۵۰۰}+C_2\xrightarrow{\text{نقطه A}}C_2=0$$

$$\overset{\text{نقطه B}}{\Longrightarrow} T_0\times ۱۰=۱۰۰\times(۵۰)^۲-\frac{۲۰۰}{۱۲}\times\frac{۵۰^۴}{۲۵۰۰}=۲۵\times۱۰^۴-\frac{۵\times۱۰^۵}{۱۲}\Rightarrow T_0=۲۰٫۸۳\text{ kips}$$

$$T=\sqrt{T_0^۲+w^۲x^۲}\Rightarrow T_{max}=T_B=$$

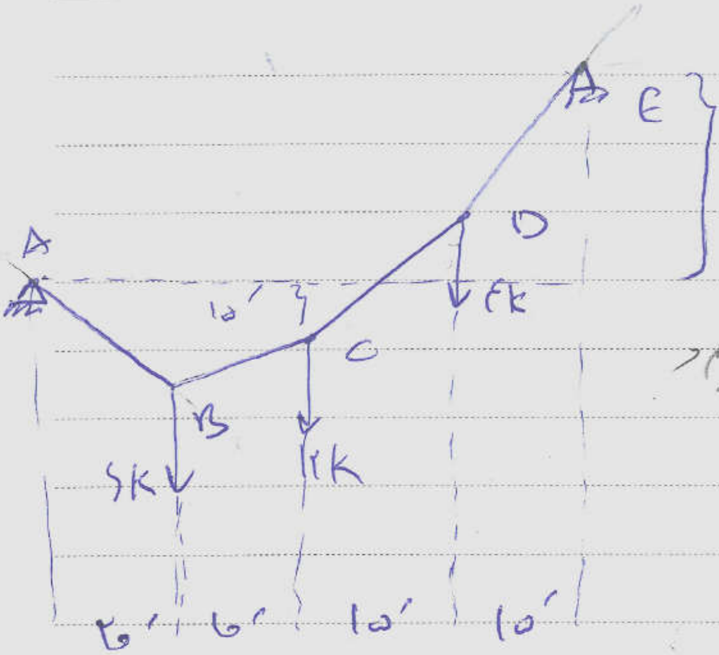
یا $T_B=\frac{T_0}{\cos\theta}$ ⊛ $\rightarrow \tan B=\frac{dy}{dx}\Big|_{x_B}=۰٫۳۲\rightarrow\theta_B=۱۷٫۷^\circ$

$\rightarrow T_{max}=۲۱٫۸۷$ kips $\qquad S_{AB}=x_B\left(۱+\frac{۲}{۳}\left(\frac{y_B}{x_B}\right)^۲\right)$

$$\rightarrow S_{AB}=۵۰\times\left(۱+\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۲۵}\right)=۵۱٫۳$$

$۵۰+$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

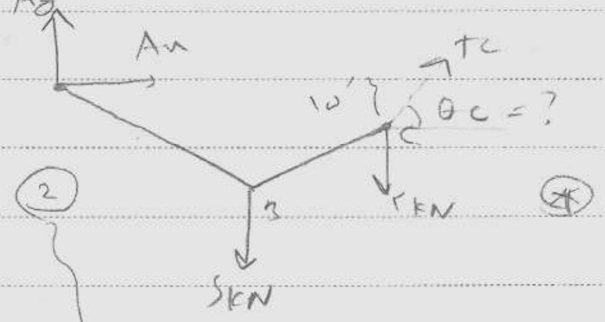


موقعیت عمودی نقاط B و D را بیابید

کشش ماکزیمم در طول کابل را بیابید

از نقطه‌ی C برش می‌دهیم. دیاگرام آزاد را رسم می‌کنیم و

معادلات تعادل را می‌نویسیم.



$\Sigma M_C = 0 \longrightarrow f(A_x, A_y) = 0$ ②

دیاگرام آزاد کل $\Sigma M_E = 0 \Longrightarrow g(A_x, A_y) = 0 \Big\} \Longrightarrow A_x = \ldots \quad A_y = \ldots$

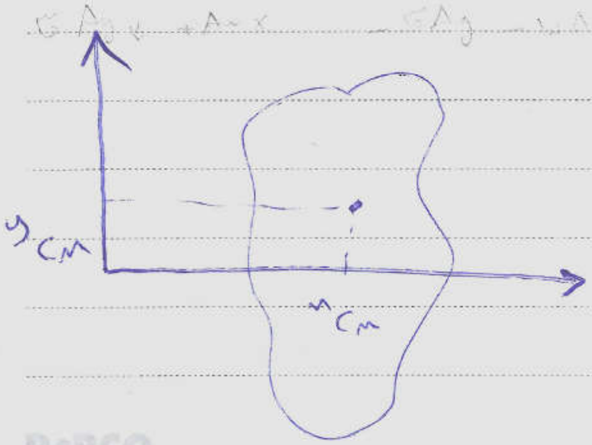
① $\hookrightarrow$ ۲A_x − ۶A_y + ۶۶ = ۰ $\rightarrow$ A_x = −۱,۸ A_y

۱۵A_y = ۳۰

② ۵A_x + ۳A_y − ۶۰ = ۰   ۲۵A_x + ۱۷۰ = ۰ → A_x = −۱۰,۸

→ (۱۵؟) → کل سؤال غلط شده

(*) حل $\Sigma M_B = 0 \rightarrow$ ۳$A_y + y_B \times A_x = 0 \rightarrow |y_B| =$ ۵,۵۶'



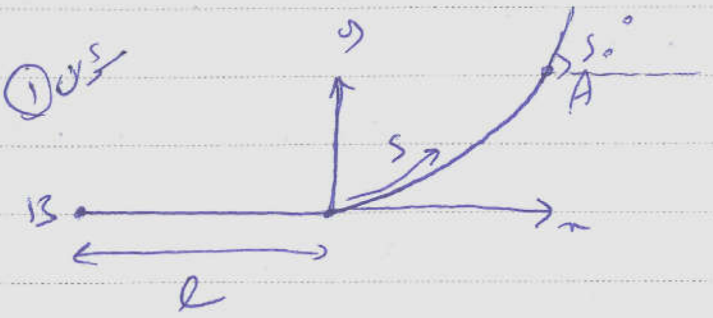
$$x_{cm} = \frac{\int x\,dA}{A}$$ $\int x\,dA \rightarrow$ ممان اول سطح حول y Q_y

$$y_{cm} = \frac{\int y\,dA}{A}$$ $\int y\,dA \rightarrow Q_x$ ممان اول سطح حول محور x

PAPCO

Subject: ۹۳/۳/۱۹ _ جلسه هشتم
Year. Month. Date. ( )

① سوال



$\mu = ۰/۸ \ lb/ft$

$T_A = ۱۵۰ \ lb$

$\theta_A = ۶۰°$

total energy = ۴۰۰' find l & h?

$y = \frac{T_0}{\mu}\left(\cosh\frac{\mu x}{T_0} - 1\right) \qquad h = \frac{T_0}{\mu}\left(\cosh\frac{\mu x_A}{T_0} - 1\right)$ ①

$\tan\theta_A = \frac{dy}{dx} = \sinh\frac{\mu x_A}{T_0} = \tan ۶۰°$ ②

$T_0 = T_A \cos ۶۰ = ۷۵ \ lb$ ③ $\qquad$ ② $\Longrightarrow \frac{\mu x_A}{T_0} = ۱/۳۱۶۸$ ④

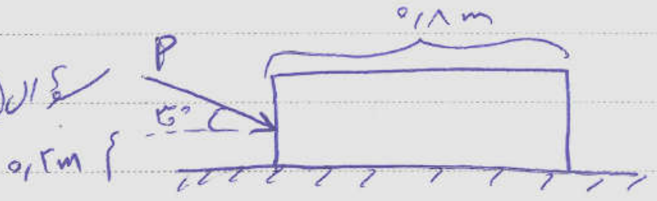
①, ③, ④ $\Rightarrow h = ۹۳/۷۵ \ ft$

$s = \frac{T_0}{\mu}\sinh\frac{\mu x_A}{T_0} = \frac{۷۵}{۰/۸}\sinh ۱/۳۱۶۸ = ۱۶۲/۴ \ ft$

$l = ۴۰۰ - ۱۶۲/۴ = ۲۳۷/۶ \ ft$

(با اصطکاک)

② سوال



$m = ۶ \ kg \quad P = ۸۵ \ N$

$\mu_s = ۰/۳$

۵۵

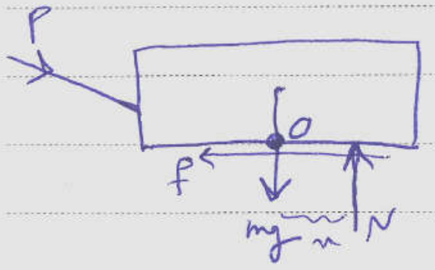
نکته: روش حل مسائل اصطکاک:

قدم اول: رسم دیاگرام آزاد (فرض نکنید $f = \mu N$ مگر آنکه در صورت مسئله لغزش باشد)

قدم دوم: شمردن تعداد مجهولات و تطبیق دادن آنها با تعداد معادلات تعادل استاتیکی

قدم سوم: اگر تعداد مجهولات بیشتر از تعداد معادلات تعادل باشد برای بعضی از نقاط تماس (نه همه) فرض کنید $f = \mu N$.

قدم چهارم: اگر از معادله $f = \mu N$ استفاده می‌کنید دقت شود که جهت نیروی اصطکاک باید به درستی انتخاب شود.



Unknowns: f, N, x

Static Eqs: ۳

$\sum F_x = 0 \rightarrow f = P\cos\theta = ۶۹٫۳\ N$

$\sum F_y = 0 \rightarrow N - mg - P\sin\theta = 0 \rightarrow N = ۲۳۶$

$\overset{+}{\curvearrowleft}\ \sum M_O = 0 \Rightarrow Nx + P\sin\theta \times ۰٫۲ - ۰٫۳\, P\cos\theta = 0$

$\Rightarrow x = -۰٫۰۰۹۱\ m = -۹٫۱\ mm$

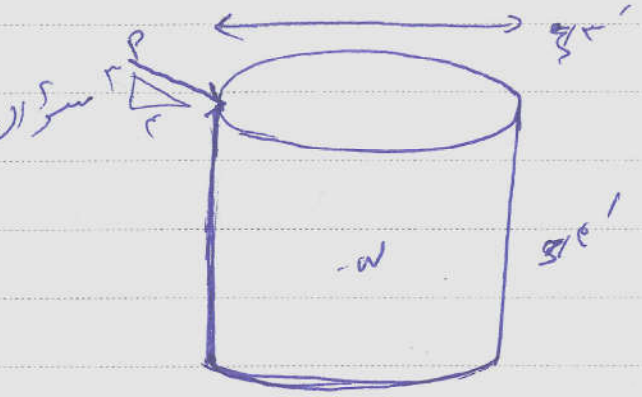
$f_{max} = \mu_s N = ۷۰٫۸ \sim > f \Rightarrow$ No slipping (سر نمی‌خورد)

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$|x| < ۰٫۴ m \Rightarrow$ No tipping دیگر واژگونی شود

سؤال ③

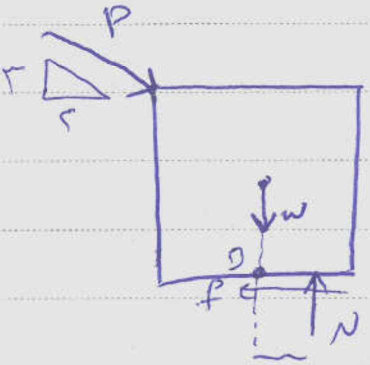


$W = ۱۰۰\ lb$ $\mu_s = ۰٫۵$

$P_{min} = ?$

↓

مرز تعادل آن به هم بخورد



مجهولات: N, x, f, P_{min}

معادلات: ۳ تا

$$\begin{cases} f = \mu_s N \Rightarrow P_1 \\ x = ۱٫۵' \Rightarrow P_2 \end{cases} \Rightarrow P_{min} = \min(P_1, P_2)$$

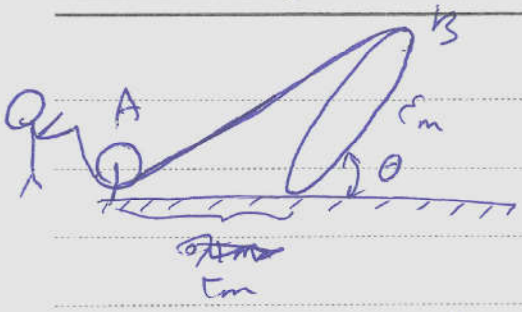
$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N - ۱۰۰ - \frac{۳}{۵} P = ۰$ (i)

$\Sigma F_x = 0 \rightarrow f = \frac{۴}{۵} P$ (ii)

$\overset{\curvearrowleft}{\Sigma M_P} = ۰ \longrightarrow x \times ۱۰۰ + \frac{۳}{۵} P(۱٫۵ + x) - \frac{۴}{۵} P \times ۴ = ۰$ (iii)

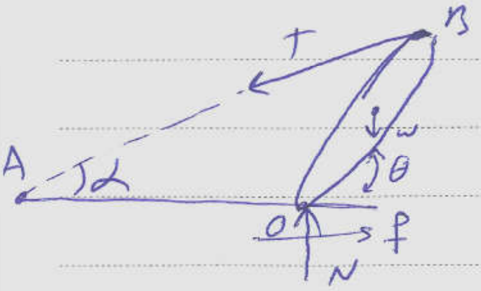
فرض $f = \mu_s N = ۰٫۵N$ $\Longrightarrow \begin{cases} P = ۱۰۰\ lb \\ N = ۱۶۰\ lb \\ f = ۸۰\ lb \\ x = ۱٫۴۴' < ۱٫۵' \end{cases}$

$\begin{cases} \text{(i) (ii) (iii)} \\ x = ۱٫۵' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = ۱۰۷٫۱\ lb \\ f = ۸۵٫۷\ lb \\ N = ۱۶۴٫۳\ lb \end{cases} \rightarrow f/N = ۰٫۵۲۲ > \mu_s$ ✗



شخص طناب را کم کم شل می کند　$\mu = ۰٫۳$

زاویه ای را بیابید که این ستون شروع به لغزش می کند



Unknowns : N, f, T, θ

Eqs : ۳ , $f_B = \mu N$ ②

$\overset{\curvearrowleft +}{\sum M_A} = 0$ ①　$-۲N + (۲ + ۲\cos\theta)W = 0$

$\boxed{N = w(1+\cos\theta)}$　$\boxed{f = ۰٫۳\, w(1+\cos\theta)}$

③ $\sum F_x = 0 \rightarrow T\cos\alpha = f$　④ $\sum F_y = 0 \rightarrow N - w - T\sin\alpha = 0$

$\Longrightarrow \tan\alpha = \dfrac{N-w}{f}$　i , ii , iii $\Rightarrow \dfrac{w\cos\theta}{۰٫۳\,w(1+\cos\theta)} = \tan\alpha$

$= \dfrac{۴\sin\theta}{۲+۴\cos\theta} \Rightarrow \theta = ۶۵٫۲°$