ارتعاشات پیشا و کاربرد آن در مهندسی زلزله

در نرم افزار های

MatLab و SeismoSignal

جلسه پنجم: مقدمه ای بر ارتعاشات
پیشا (ویژگی های احتمالاتی)
(ویرایش ۲)

بهار ۱۳۹۱

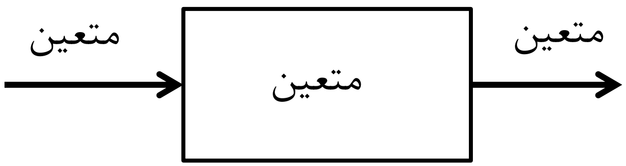
beheshtikhah@gmail.com

محمد حسین بهشتی خواه

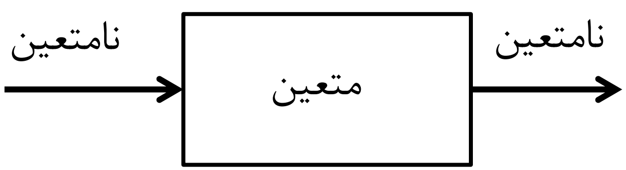
مقدمه (ارتعاشات پیشا)

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

- درحالتی که مشخصات سازه و بارگذاری معلوم باشد (متعین باشد) و پاسخ نیز معین است (همانند آن مطالبی که در دینامیک سازه ها مطرح می شود). در این صورت مقدار محاسبه شده برای پاسخ، مقدار دقیق است. به این روش، روش متعین می گوئیم.

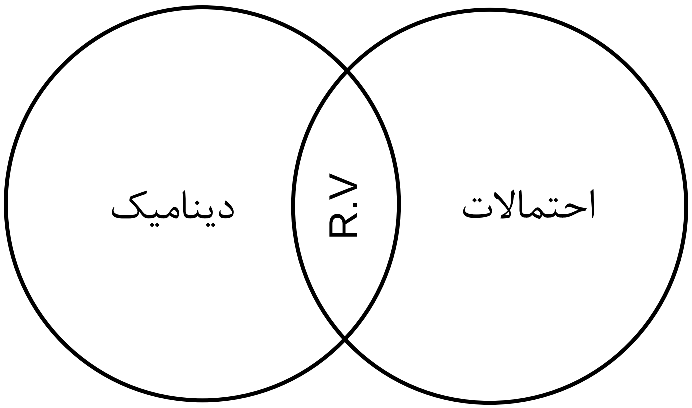


- در حالتی که سازه یا بارگذاری معلوم نباشد (نامتعین یا پیشا باشد)، پاسخ نیز نامتعین (پیشا) است. در این صورت مقدار محاسبه شده برای پاسخ بیانگر پاسخ با بیشترین احتمال وقوع است. به این روش، روش احتمالاتی می گوئیم.
- در این درس فرض بر متعین بودن سازه و نامتعین بودن بارگذاری است.



مقدمه (ارتعاشات پیشا)

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه



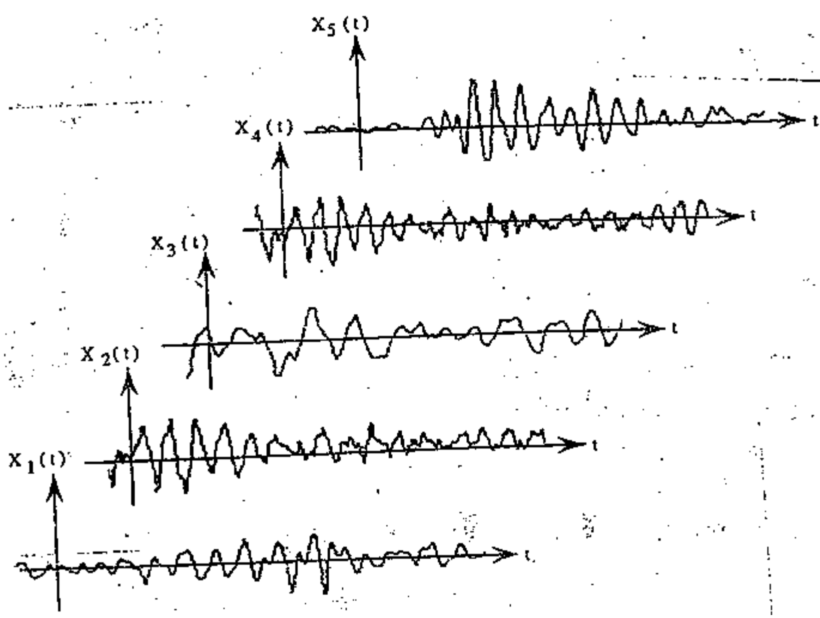
- تلفیق تئوری آمار و احتمالات با دینامیک ارتعاشی منجر به علم ارتعاشات پیشا (Random Vibration) می شود.
- تعریف فرآیند (X) و نمونه (X):

فرآیند مجموعه ای از نمونه هاست که می تواند متعین یا نامتعین باشد. یک فرآیند می تواند گسسته یا پیوسته باشد.

- در مورد زلزله وقتی صحبت از فرآیند پیشا می شود، منظور نمونه های نگاشت های زمانی فرآیند می باشد، لذا یک نمونه از فرآیند به تنهایی پیشا نیست. یعنی برای مثال:

X(t)={x1(t), x2(t), x3(t), x4(t), x5(t), x6(t), x7(t), x8(t)}

که Xi ها هرکدام یک شتابنگاشت هستند.



ویژگی های احتمالاتی

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

- **ویژگی های احتمالاتی**

1) تابع چگالی و توزیع احتمال (PDF & CDF)
2) امید ریاضی/آماری (Expected Value)
3) تابع همبستگی (Auto-Correlation, Cross-Correlation)
4) ضریب همبستگی (Correlation Coefficient)

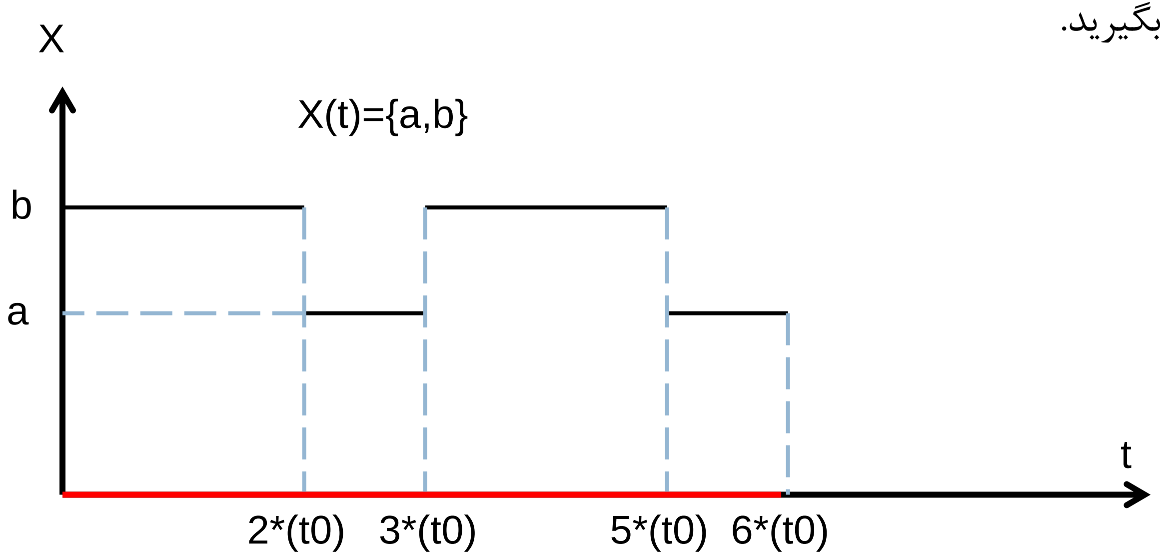
- این ویژگی ها در فضای زمان و فرکانس مورد بررسی قرار خواهند گرفت.
- تعریف فرآیند مانا: به فرآیندی که ویژگی های احتمالاتی آن با زمان ثابت باشد (مستقل از زمان باشد)، مانا می گوئیم. در حالت کلی، فرآیند زلزله یک فرآیند کاملاً نامانا است، ولی می توان آن را در محدوده ای از زمان (محدوده حرکات قوی) مانا فرض کرد. فایده این فرض این است که زمان از معادلات حذف می شود.

تابع چگالی احتمال
(Probability Density Function)
تابع توزیع احتمال
(Cumulative Distribution Function)

فرآیند گسسته

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

فرآیند X(t) را به صورت زیر درنظر بگیرید.

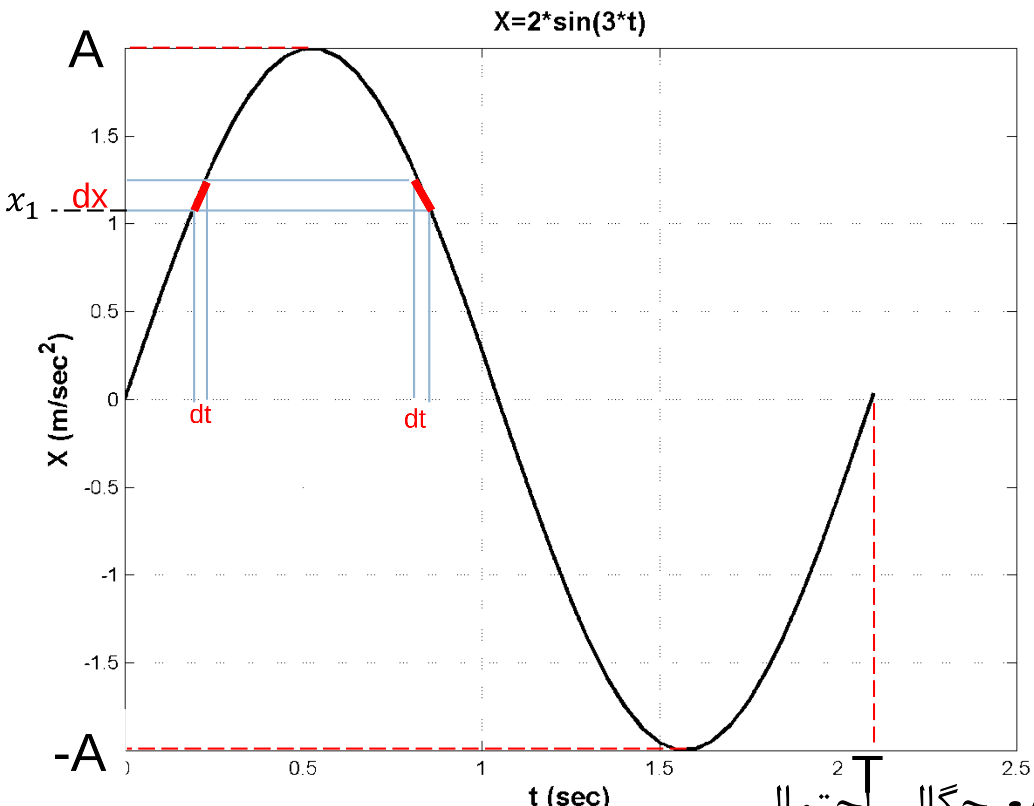


X(t) یک فرآیند گسسته است که دارای دو نمونه a و b است.

از آنجایی که می توان یک مدل ریاضی برای این فرآیند تعریف کرد می گوئیم متعین است و می توان گفت احتمال وقوع نمونه b دو برابر نمونه a است. زیرا نمونه b مدت زمان بیشتری را نسبت به نمونه a گذرانده است یعنی برای پیدا کردن احتمال از زمان استفاده کردیم. به عبارت دیگر پارامتر زمان را حذف کرده و پارامتر احتمال را جایگزین کردیم که هدف از بیان تئوری احتمالات در مهندسی زلزله نیز همین است چون در آن فرض بر پیشا بودن (نامشخص بودن) زمان است.

فرآیند پیوسته سینوسی

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه



تابع چگالی احتمال

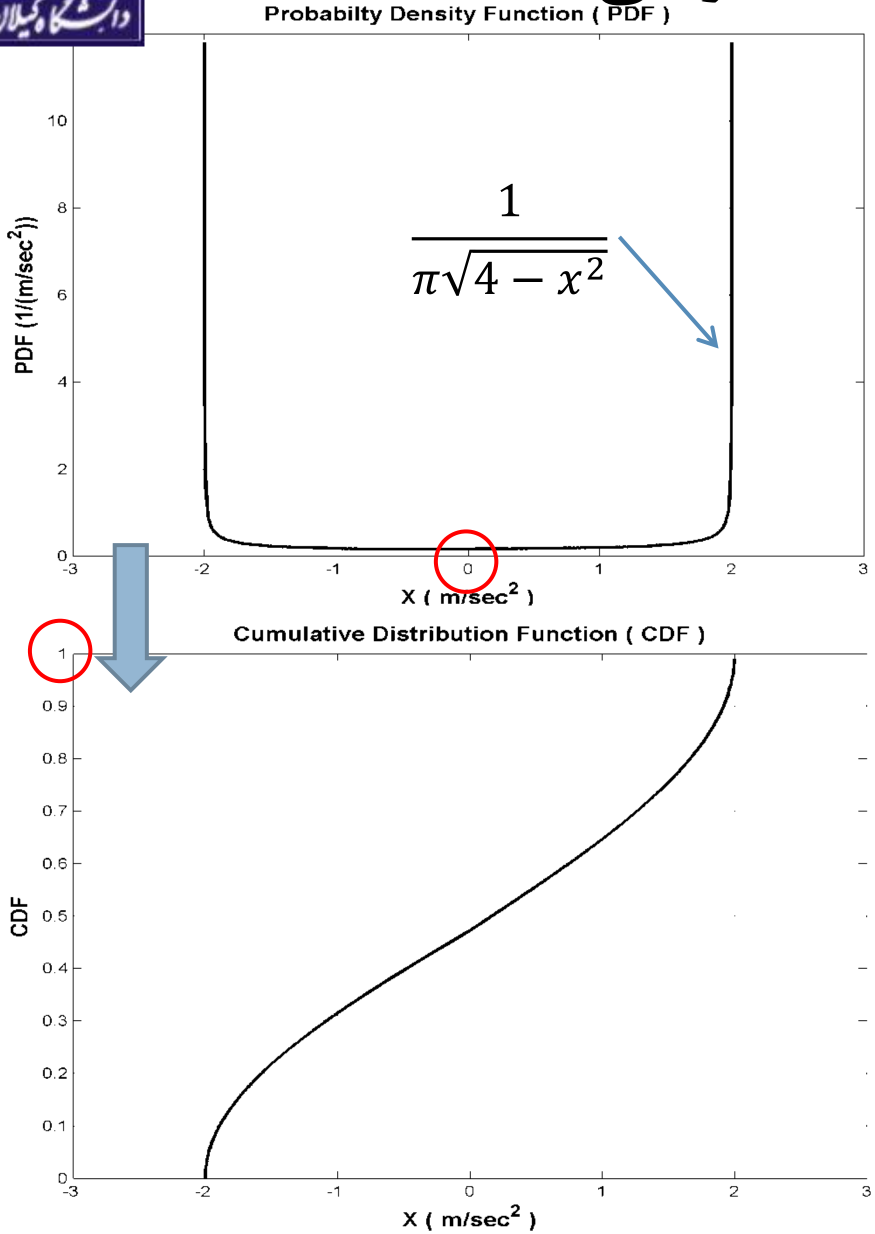
(ضریب dx)

$$p(x_1 < X < x_1 + dx) = \frac{2dt}{T} = \boxed{\frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}}dx$$

- این فرآیند دارای یک مدل ریاضی است، پس متعین است، ولی از آنجایی که زمان t پیشا است، X تبدیل به یک فرآیند پیشا می شود. پس سعی می کنیم با تئوری احتمالات زمان را تبدیل به احتمال کنیم.

فرآیند پیوسته سینوسی

محمد حسین بهشتی خواه



- بنابراین تابع چگالی احتمال (PDF) این فرآیند به شکل روبرو خواهد شد. در این نمودار محور افقی بیانگر فرآیند و محور قائم بیانگر تابع چگالی احتمال این فرآیند است.

PDF=Probability Density Function

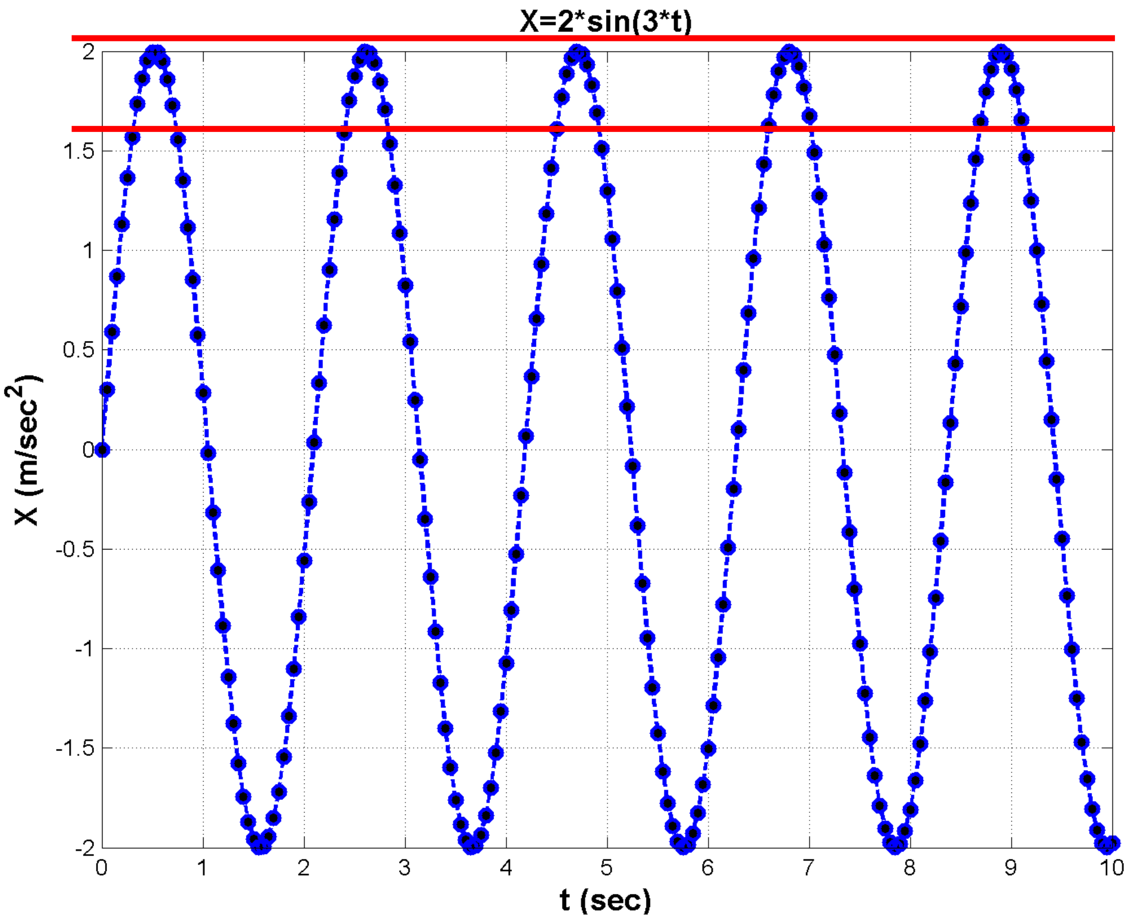
انتگرال تابع چگالی احتمال بیانگر تابع توزیع احتمال (CDF) است. این تابع برای فرآیند X به شکل زیر خواهد بود.

CDF=Cumulative Distribution Function

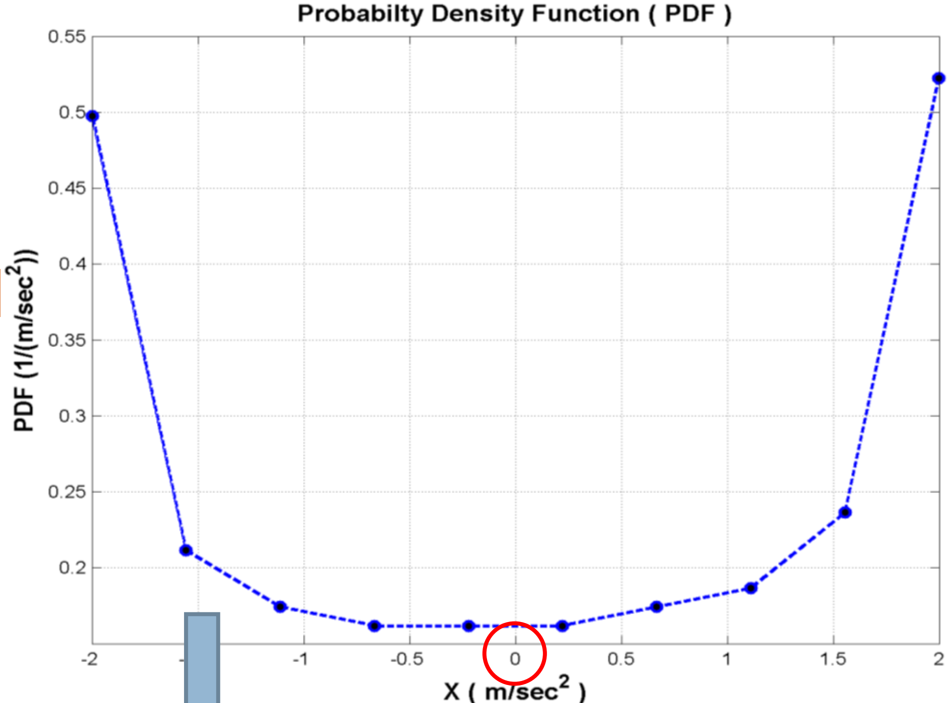
فرآیند گسسته سینوسی

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

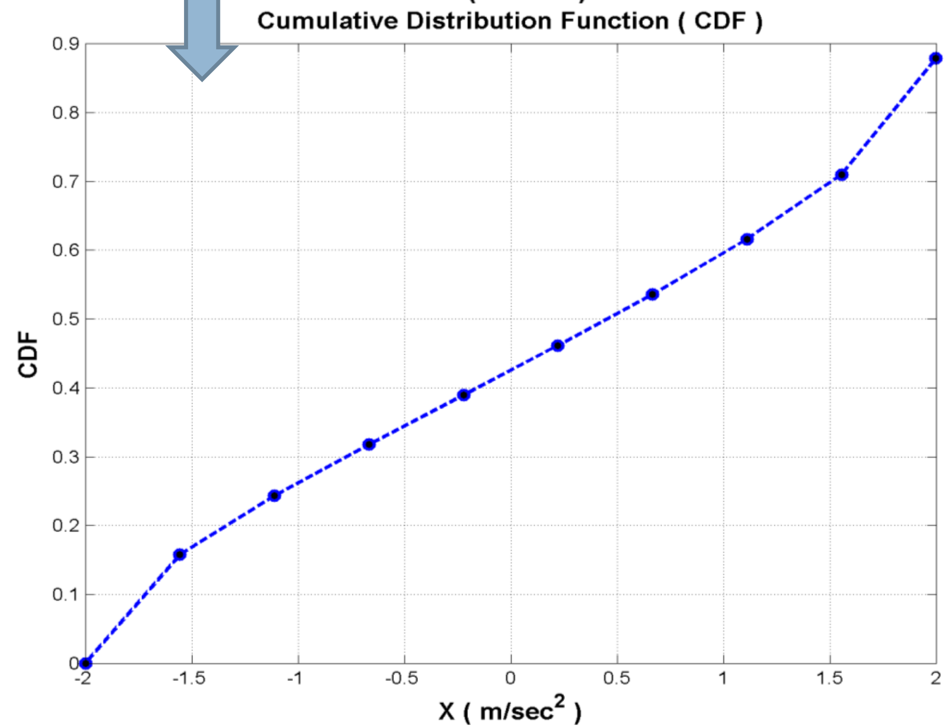
فرآیند X=A*sin(w*t) را در نظر بگیرید. (A=2, w=3)



- چون فرآیند گسسته است، نمی توان تابع چگالی احتمال را به صورت تئوریک به دست آورد، لذا از مفهوم آن در محاسبه استفاده خواهد شد. همانطور که ملاحظه می شود چگالی داده های فرآیند X در اطراف دامنه، بیشترین (تابع چگالی احتمال، بیشینه) و در اطراف صفر، کمترین (تابع چگالی احتمال، کمینه) است.



فرآیند گسست



- بنابراین تابع چگالی احتمال (PDF) این فرآیند به شکل روبرو خواهد شد. در این نمودار محور افقی بیانگر فرآیند و محور قائم بیانگر تابع چگالی احتمال این فرآیند است.

PDF=Probability Density Function

انتگرال تابع چگالی احتمال بیانگر تابع توزیع احتمال (CDF) است. این تابع برای فرآیند X به شکل زیر خواهد بود.

CDF=Cumulative Distribution Function

فرآیند گسسته سینوسی در MatLab

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

- clc;clear all;
- t=0:0.05:10;
- ماتریس t (زمان) با شروع از صفر و با گام زمانی ۰.۰۵ ساخته شده و تا ۱۰ ثانیه ادامه می یابد.
- X=2*sin(3*t);
- برای اینکه بین متغیر (ماتریس) t با X رابطه سینوسی برقرار باشد، از تابع sin استفاده می شود. از آنجایی که X به t وابسته است، تعداد درایه های t و X برابر خواهند شد.
- figure(1); plot(t,X,'k','LineWidth',2,'MarkerFaceColor','k','Marker','o');grid on ;
- m=10;
- dx=(max(X)+abs(min(X)))/m ;
- فاصله بین بیشترین تا کمترین مقدار X، به m قسمت (در اینجا ۱۰تا) تقسیم شده است.

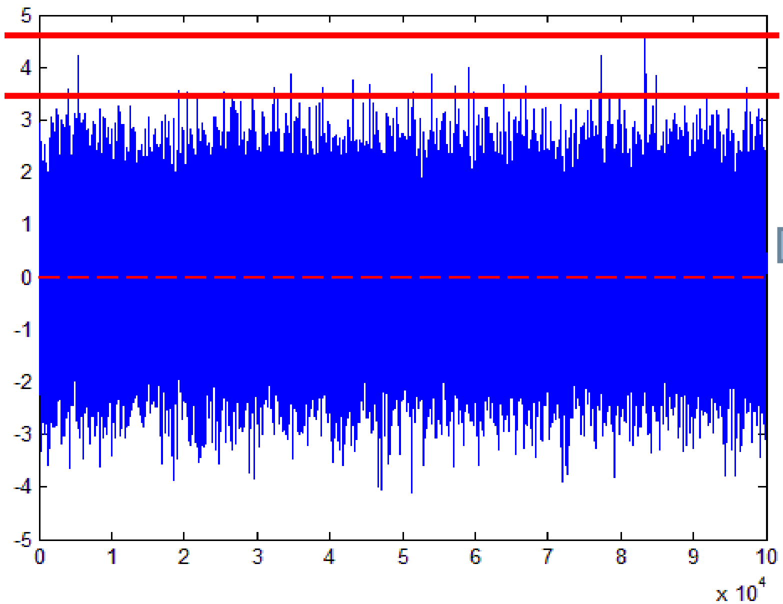
beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

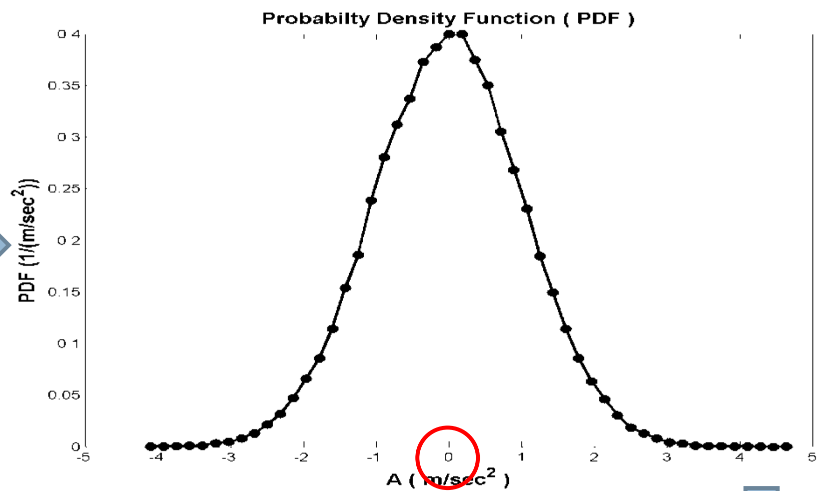
- حال، لازم است تعداد داده های موجود در بازه dx به دست آید. لذا، باید حلقه ای با m سیکل تعریف شود، تا تمام متغیر X پوشش داده شود.
- for j=1:m
- حلقه، با دستور for شروع شده و با دستور end پایان می یابد. متغیر حلقه، j در نظر گرفته شده است.
- y1=find(min(X)+(j-1)*dx<=X & X<=min(X)+j*dx) ;
- با فرض j=1 شماره آن درایه هایی از ماتریس X پیدا خواهد شد (find) که مقدار آن ها بین min(X) و min(X)+dx است. این روند آنقدر ادامه می یابد تا کل مقدار X جارو شود. مثلا برای j=2 شماره آن درایه هایی از ماتریس X پیدا خواهد شد (find) که مقدار آن ها بین min(X)+dx و min(X)+2dx است، الی آخر.
- G(j)=length(y1) ;
- در هر سیکل، تعداد این درایه ها با دستور length به دست آمده و در متغیر (ماتریس) G ذخیره می شود.
- End
- حلقه بسته شده و ماتریس G کامل می شود.

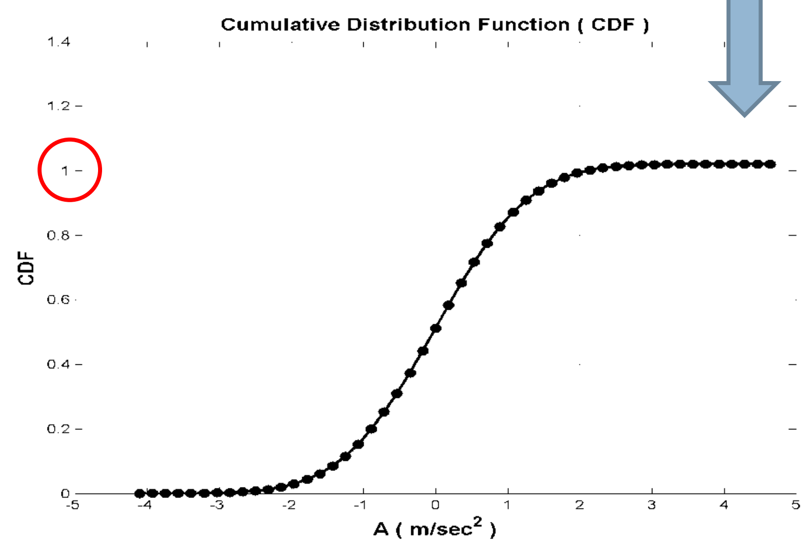
- PDF=G/(length(X)*dx) ;
- مقدار (ماتریس) G/length(X) برابر با احتمال وقوع داده های درون بازه dx خواهد بود. این ماتریس دارای m درایه است. اگر این ماتریس به dx تقسیم شود، (درایه های ماتریسِ) تابع چگالی احتمال به دست می آید.
- x=linspace(min(X),max(X),m) ;
- مقادیر فرآیند X به m قسمت تقسیم شده و محور افقی تابع چگالی احتمال به دست می آید.
- plot(x,PDF,'k','LineWidth',2,'MarkerFaceColor','k','Marker','o');grid on ;
- رسم نمودار تابع چگالی احتمال
- CDF=cumtrapz(x,PDF) ;
- محاسبه تابع توزیع احتمال از انتگرال گیریِ تابع چگالی احتمال

اعداد پیشا با توزیع نرمال استاندارد

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه





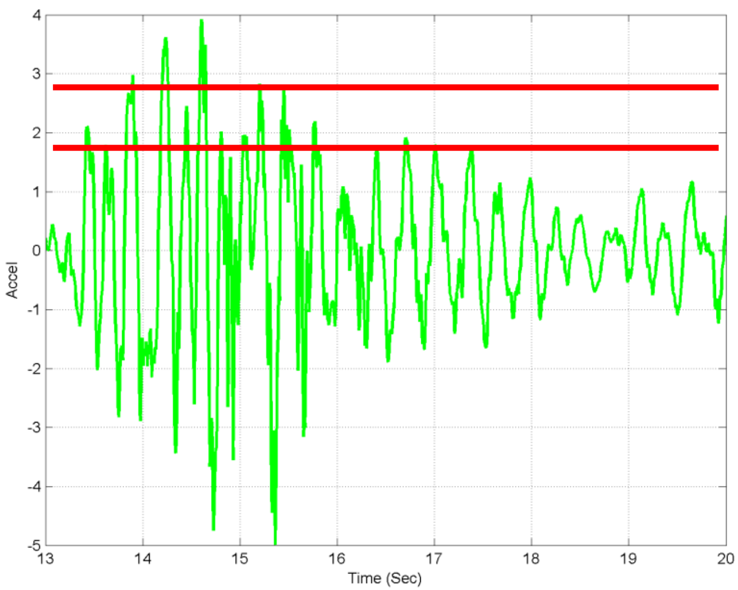


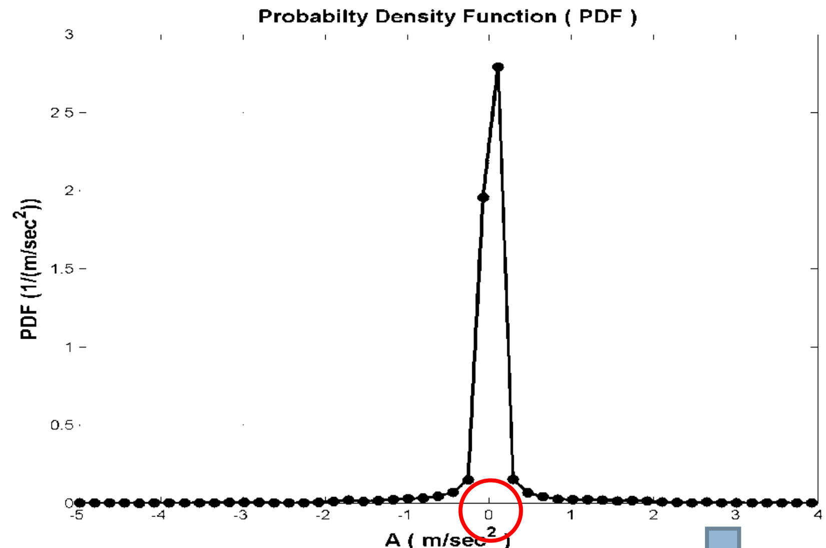
X=random('norm',0,1,[1,100000]);

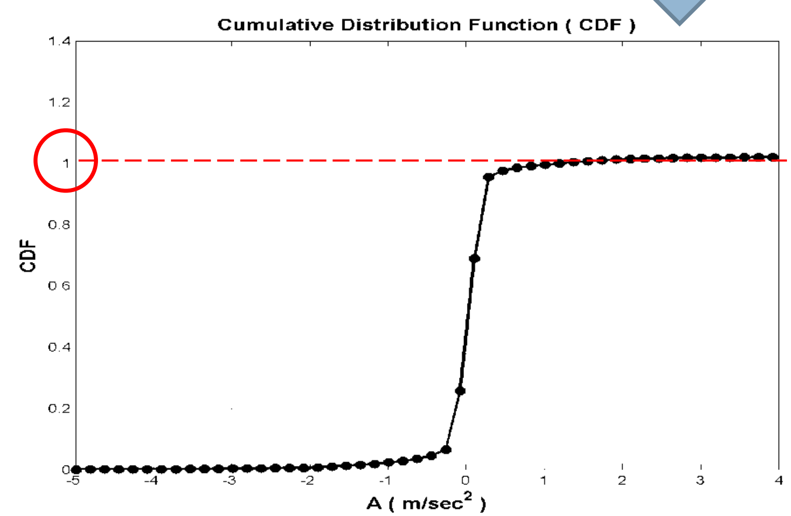
بردار سطری A، اعداد تصادفی هستند که نرم افزار، آن ها را به گونه ای تولید می کند تا نسبت به یکدیگر دارای توزیع نرمال استاندارد باشند. یعنی میانگین مقادیر صفر و انحراف معیار آن ها یک باشد. در این صورت، تابع چگالی احتمال آن ها باید یک نمودار زنگوله ای شکل باشد.

زلزله

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه





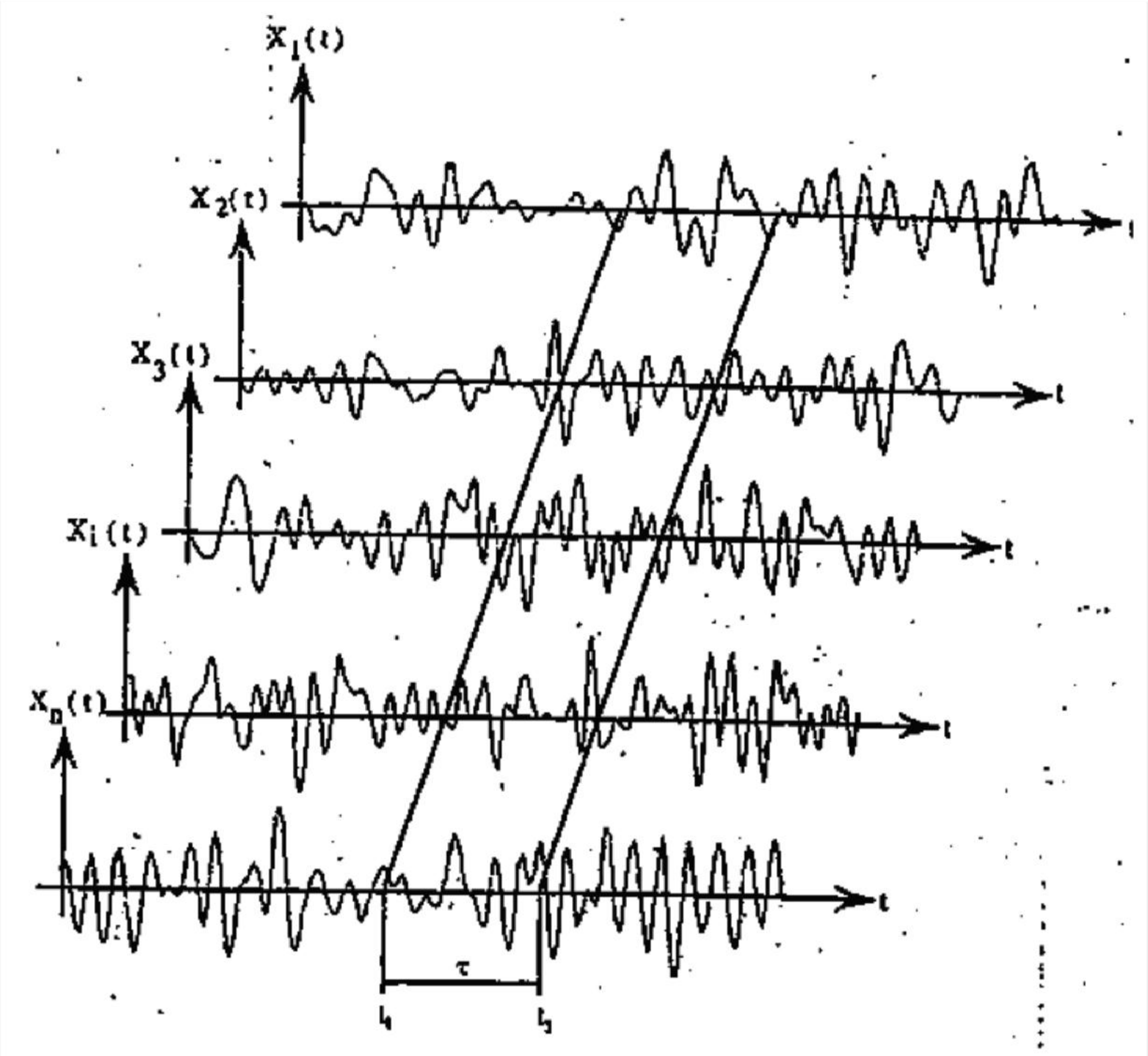


- در زلزله، مقادیر، حول متوسط آن یعنی صفر (در صورت اصلاح خط مبنا) جمع شده اند و در محل PGA و PGA– کمترین حضور را دارند، به همین دلیل تابع چگالی احتمال در صفر بیشینه و در PGA و PGA– کمینه است.

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

امید آماری/ریاضی (Expected Value)

تعریف میانگین مجموع



- به میانگین شتابنگاشت ها، میانگین مجموع (Ensemble Mean) می گوئیم. در این صورت حاصل نیز تابعی از زمان خواهد بود. به عبارت دیگر:

$$E[X(t)] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = m_X(t)$$

n تعداد شتابنگاشت های فرآیند $X(t)$

از آنجایی که اصلاح خط مبنا در شتابنگاشت ها صورت گرفته، اگر مقدار n به بی نهایت میل کند، مقدار $E[X(t)]$ به صفر میل می کند.

- اگر فرآیند مانا باشد، داریم:

$$E[X^k] = c_k$$

تعریف میانگین (مجموع) مرکزی از درجه k

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

- اگر میانگین را روی تفاضل شتابنگاشت ها از میانگین آن ها بگیریم، میانگین مرکزی (Central mean) به دست می آید. در این صورت، مقدار k در فرمول زیر یک است. یعنی مقادیر فرآیند را نسبت به مرکز آن مقادیر می سنجیم.
- اگر میانگین را روی مجذور تفاضل شتابنگاشت ها از میانگین آن ها بگیریم، میانگین مرکزی از درجه ۲ (Second Order Central mean) به دست می آید. در این صورت، مقدار k در فرمول زیر ۲ است. به این مقدار، توان دومِ انحراف معیار یا واریانس نیز می گویند.

$$E[(X(t)-m_X)^k] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_X(t))^k$$

$$E[X(t)-m_X] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_X(t))$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i - \frac{1}{n}n\times m_X(t) = m_X(t) - m_X(t)$$
$$= 0$$

$$E[(X(t)-m_X)^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_X(t))^2$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}({x_i}^2 + m_X(t)^2 - 2x_i m_X(t))$$
$$= E\left[X^2(t)\right] - m_X(t)^2$$

توجه:

۱- مقدار m_X به i بستگی ندارد.

۲- عملگر E یک عملگر خطی است.

تعریف میانگین موضعی

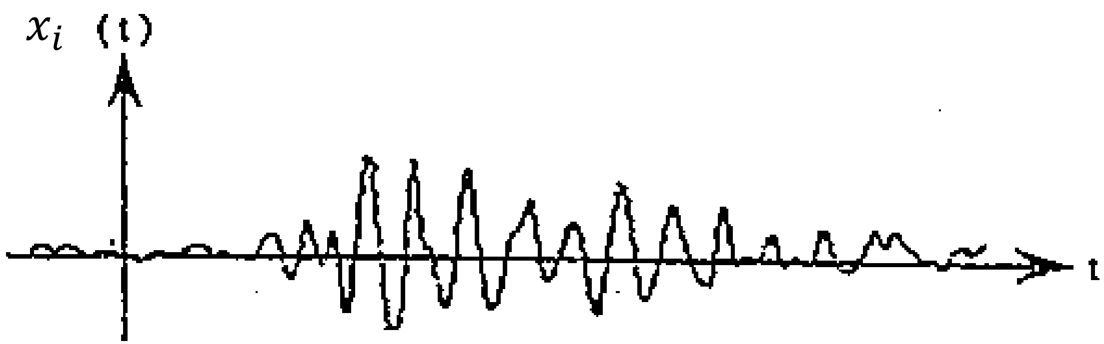
beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

- به میانگین نقاط یک شتابنگاشت در طول زمان میانگین موضعی (Temporal Mean) می گویند. در این حالت، حاصل تابعی از زمان نیست. به عبارت دیگر:

$$m_{x_i} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x_i(t_j)$$

m تعداد کل نقاط شتابنگاشت x_i

از آنجایی که اصلاح خط مبنا در شتابنگاشت صورت گرفته، مقدار m_{x_i} صفر است.



- یادآوری:
- در نرم افزار MatLab از دستور mean برای میانگین گیری داده ها استفاده می شود.
- در نرم افزار MatLab، اعداد کوچکتر از 10^{-16} صفر به حساب می آیند.

خواندن رکوردهای خام در MatLab

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

- clc;clear all;close all;
- filename={'J:\Guilan University\Accel\1500-1.V1','J:\Guilan University\Accel\1501-1.V1'...
- ,'J:\Guilan University\Accel\1502-1.V1','J:\Guilan University\Accel\1503-1.V1'...
- ,'J:\Guilan University\Accel\1504-1.V1','J:\Guilan University\Accel\1505.V1'...
- ,'J:\Guilan University\Accel\1506-1.V1','J:\Guilan University\Accel\1507.V1'...
- ,'J:\Guilan University\Accel\1508-1.V1','J:\Guilan University\Accel\1519-2.V1'};
- نام ۱۰ شتابنگاشت خام که در آدرس J:\Guilan University\Accel\ هستند، در متغیر filename ذخیره می شود.
- nn=10;
- for i=1:nn
- fid = fopen(char(filename(i)),'r');
- a = textscan(fid,'%f',3072,'headerlines',27);
- a=a{1};
- A(:,i)=a;
- هر شتابنگاشت در یکی از ستون های ماتریس A ذخیره می شود. علامت : (دو نقطه) یعنی، تمام سطرها
- end

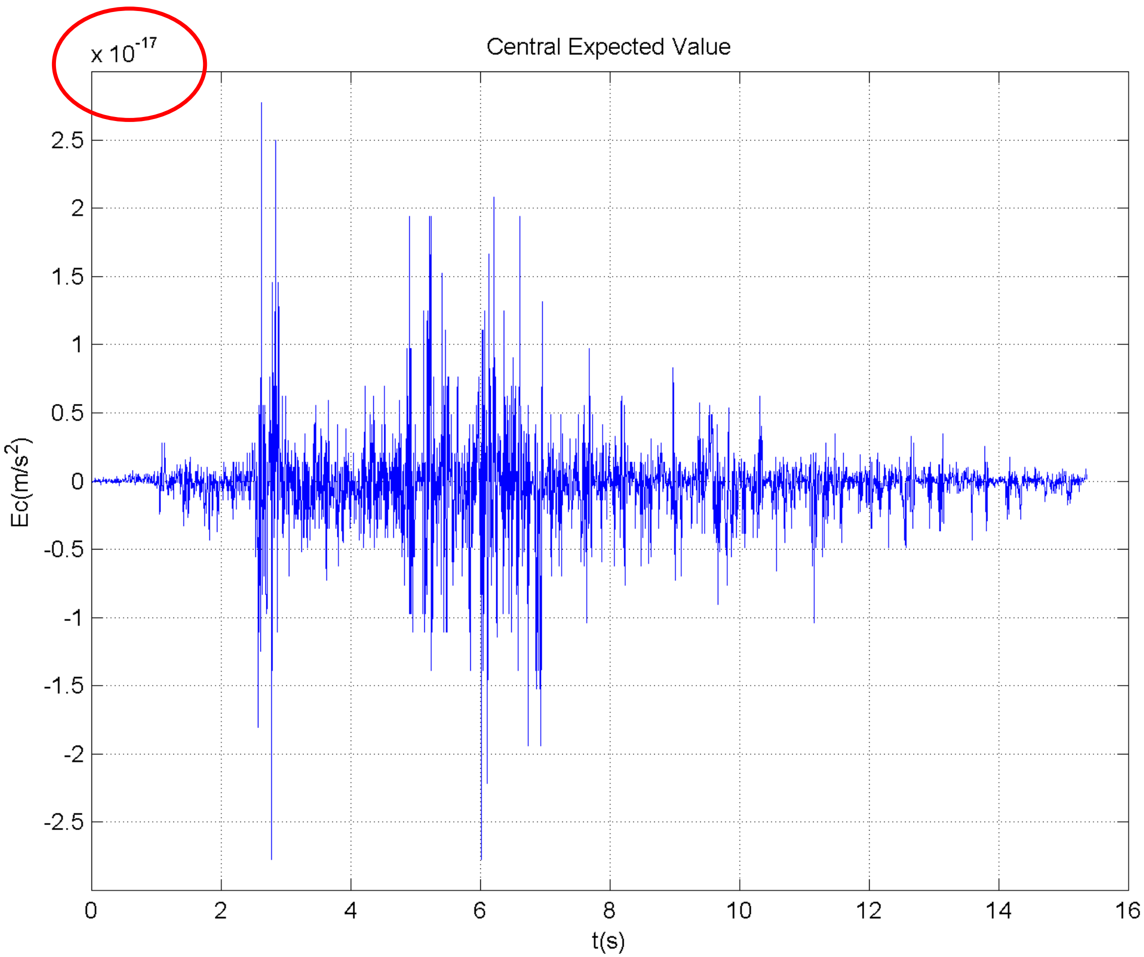
رسم امید آماری

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

- Temporal_E=mean(A(:,2),1);   %Temporal Mean of the Second Accelerogram
- عدد ۱ یعنی، میانگینِ سطری بگیرد.
- E=mean(A,2);   % (Ensemble) Mean Value (First Order Mean)
- عدد ۲ یعنی، میانگینِ ستونی بگیرد.
- E2=mean(A.^2,2);   % Mean Square (Second Order Mean)
- for j=1:nn
-     Ac(:,j)=A (:,j)-E;
- در هر سیکل از حلقه، تفاضلِ هر شتابنگاشت از میانگین مجموع حساب می شود.
-     Ac2(:,j)=(A(:,j)-E).^2;
- end
- Ec=mean(Ac,2);   % Central Mean   (First Order Central Mean)
- Ec2=mean(Ac2,2);   % Central Mean Square (Second Order Central Mean)=Variance
- dt=0.005; t = 0:dt:(length(A)-1)*dt;
- figure(1); plot(t,E); figure(2);plot(t,Ec);

رسم امید آماری

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه



- دقت کنید که تمام مقادیر روی محور قائم کوچکتر از 10^{-16} هستند. بنابراین می توان گفت: همواره

$$E[X(t) - m_X] = 0$$

خاصیت ها

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

- Standard_Deviation=sqrt(Ec2); %Definition
- به $\sqrt{E[(X-m_X)^2]}$ انحراف معیار می گویند.
- Variance=Ec2; %Definition
- به $E[(X-m_X)^2]$ واریانس می گویند.
- Sefr=Ec2-(E2-E.^2); %has been proved
- قبلاً اثبات کردیم: $E[(X(t)-m_X)^2]=E[X^2(t)]-m_X(t)^2$
- RMS=sqrt(E2); %Definition
- به $\sqrt{E[X^2]}$ میانگین مجذور مربعات (Root Mean Square) می گویند.

رابطه تابع چگالی احتمال با امید آماری

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

- فرآیند زیر را در نظر بگیرید:

X=[8 12 14 14 15 15 15 16 16 16 16 17 17 18 20]

- در این صورت مقدار میانگین برابر خواهد بود با:

$$m_X = \frac{1}{15}[8+12+14+14+15+15+15+16+16+16+16+17+17+18+20]$$
$$= 8\times\frac{1}{15} + 12\times\frac{1}{15} + 14\times\frac{2}{15} + 15\times\frac{3}{15} + 16\times\frac{4}{15} + 17\times\frac{2}{15} + 18\times\frac{1}{15} + 20$$
$$\times\frac{1}{15} = \sum_{i=1}^{15} x_i \times P_{x_i}$$

- بنابراین، درحالت کلی می توان گفت:

$$m_X = \int xP_x$$

- به عبارت دیگر، میانگین مجموع برابر است با مجموع گشتاور چگالی مقادیر، حول نقطه صفر. با توجه به این تفسیر، اثبات کنید:

$$E[X(t) - m_X] = 0$$