



# ارتعاشات پیشا و کاربرد آن در مهندسی زلزله

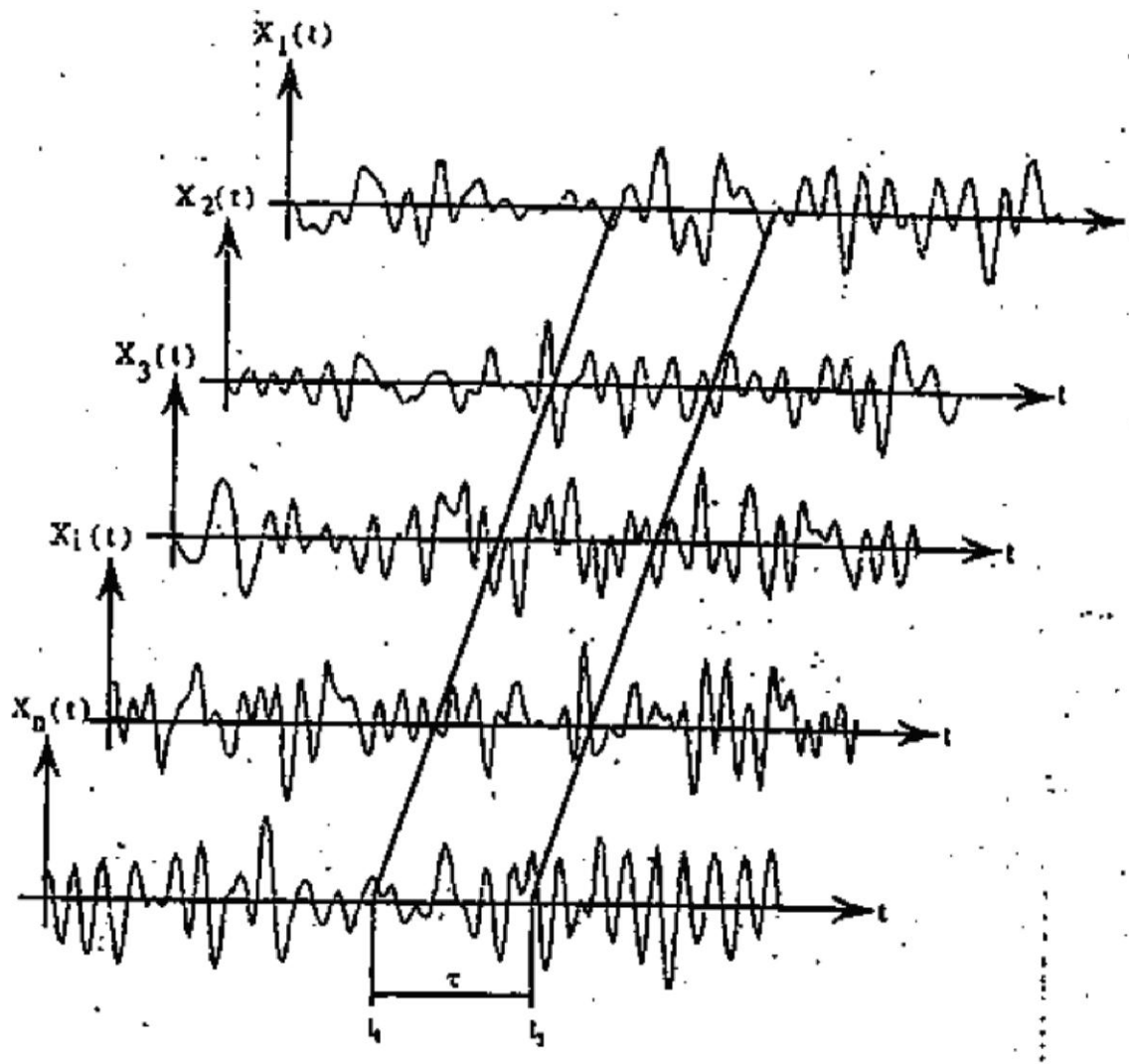
## در نرم افزار های

## SeismoSignal و MatLab

جلسه ششم: مقدمه ای بر ارتعاشات  
پیشا (ادامه ویژگی های احتمالاتی)



# توابع همبستگی (Correlation Functions)



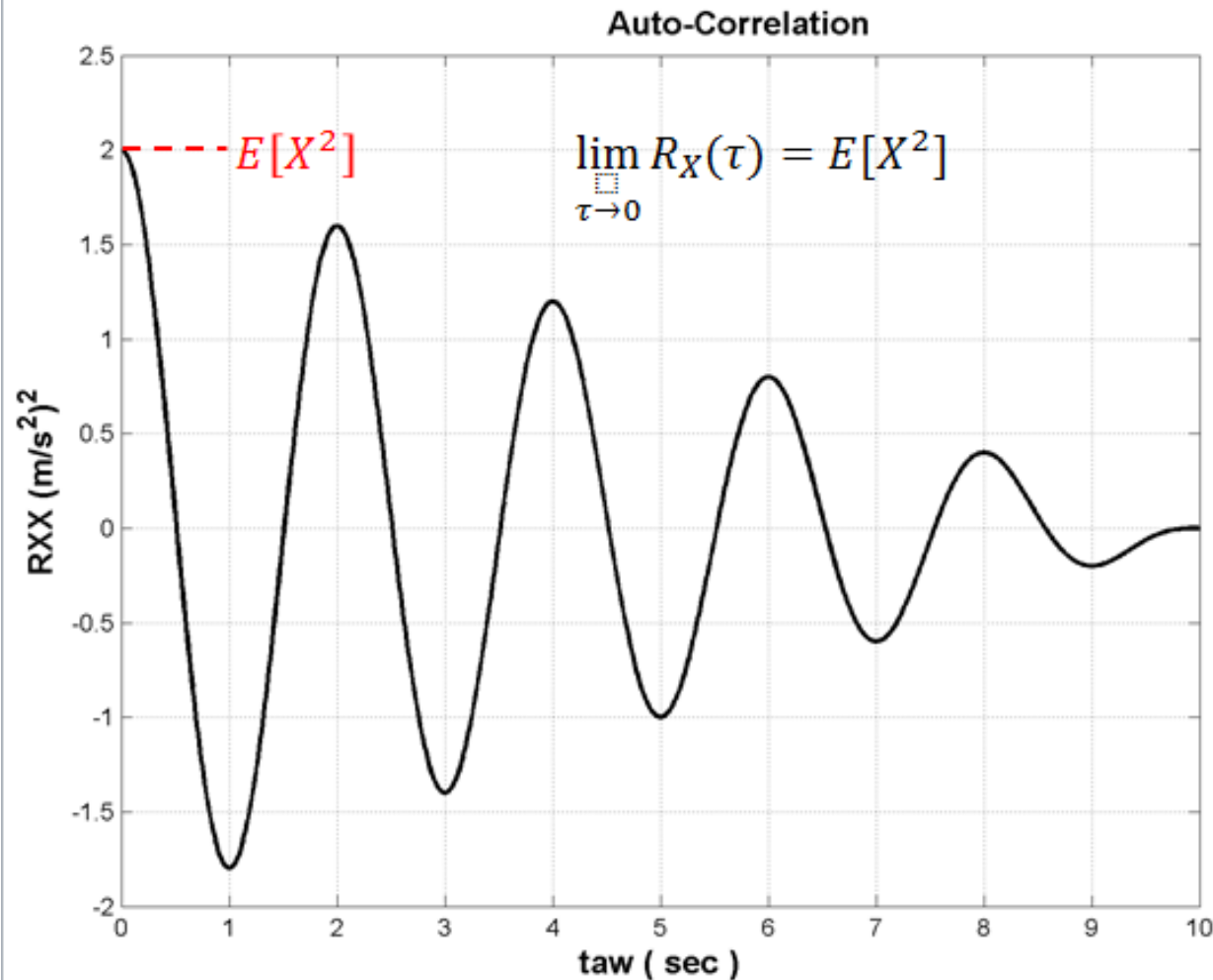
□ در بررسی دو یا چند متغیر، ارتباط مشخص بین آن ها از اهمیت خاصی برخوردار است. اما هنگامیکه یکی یا همه متغیر ها از نوع فرآیند پیشا باشد، دیگر رابطه واحدی بین آن ها وجود نخواهد داشت و برای مقدار خاصی از یک متغیر امکان وجود چندین مقدار برای متغیر دیگر می باشد. بنابراین موضوع باید از دیدگاه آمار و احتمالات و با استفاده از تئوری فرآیند های پیشا بررسی و میزان همبستگی و ارتباط آن ها تعیین شود.

# تابع خود همبستگی (شکل کلی) Auto-Correlation Function

4

beheshtikhah@gmail.com

محمد حسین بهشتی خواه



□ اگر بخواهیم بدانیم در فرآیند  $X$ ، چه ارتباطی بین زمان  $t_1$  و زمان  $t_2$  وجود دارد، عملگر  $E$  (میانگین مجموع) را به ضرب نمونه های مربوط به این زمان ها در فرآیند اعمال می کنیم. به عبارت دیگر:

$$\begin{aligned} R_{XX} &= R_X(t_1, t_2) = R_X(t, \tau) \\ &= E[X(t_1)X(t_2)] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t_1)x_i(t_2) \end{aligned}$$

که

$$\tau = t_2 - t_1$$

□ اگر فرض کنیم فرآیند مانا است:

$$R_{XX} = R_X(\tau)$$

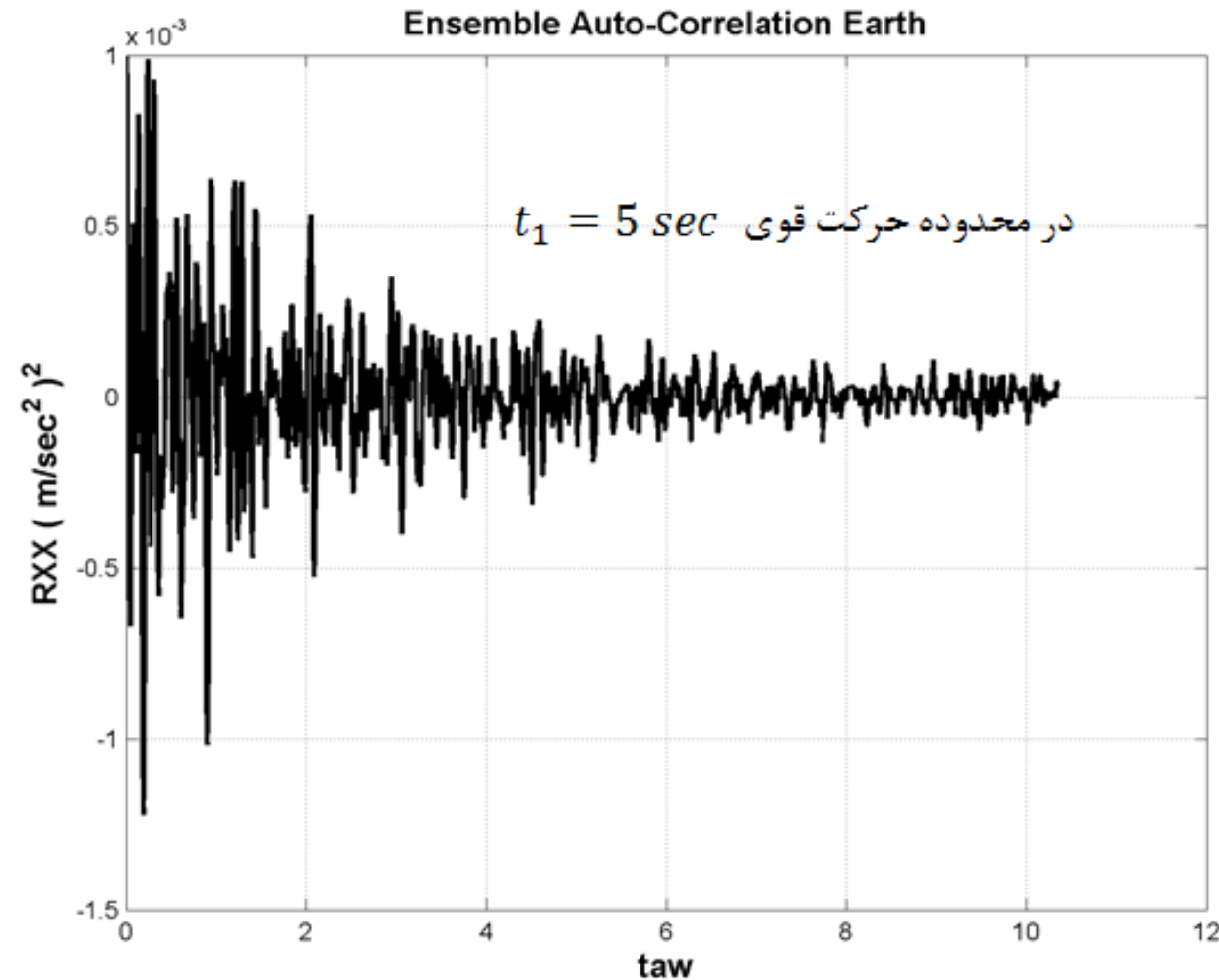
□ شکل کلی این تابع، در حالت کلی، برای یک فرآیند مانا و نرمال به صورت روبرو است.

# تابع خود همبستگی (مجموعه) زلزله (Ensemble) Auto-Correlation Function

5

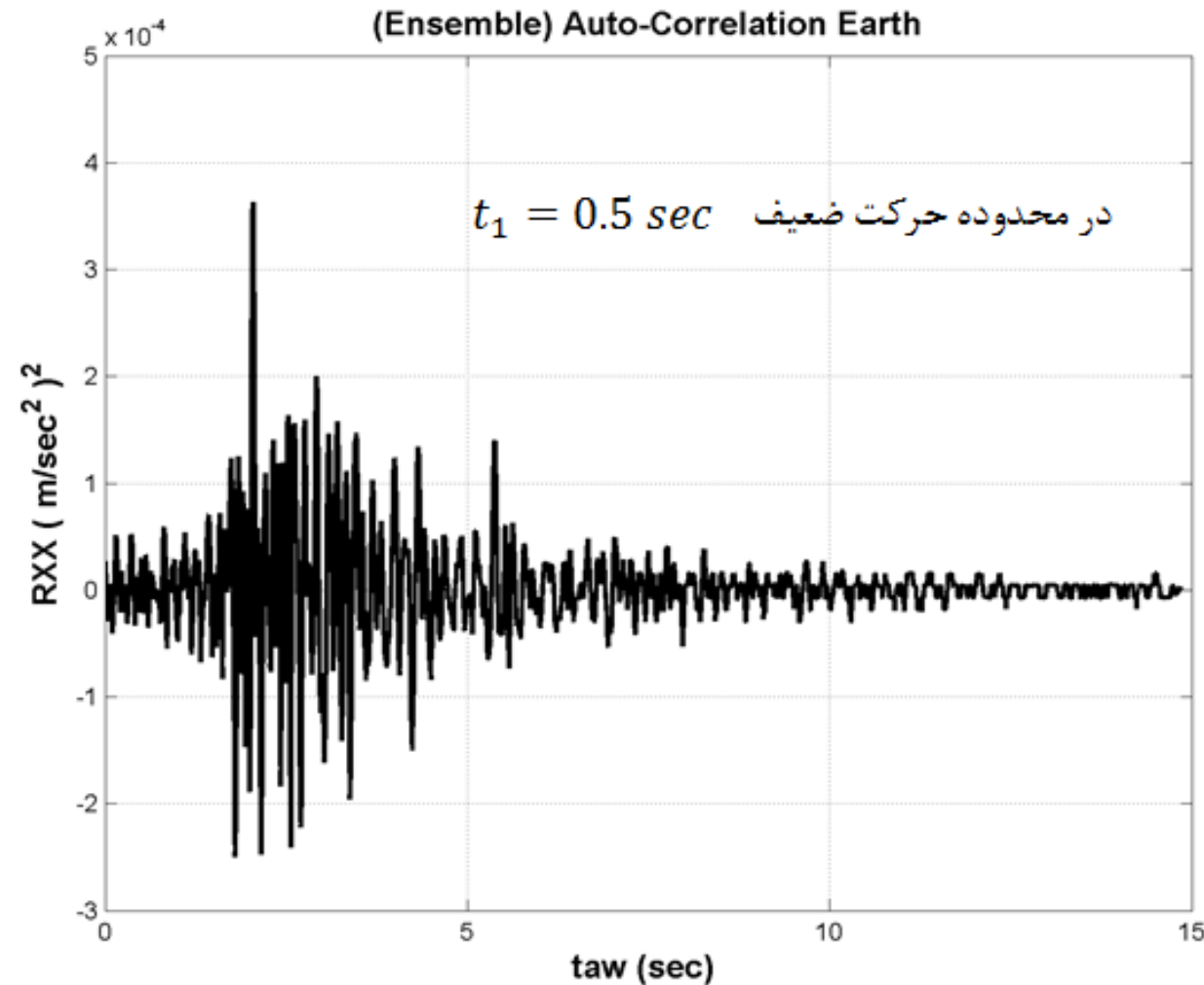
beheshtikhah@gmail.com

محمد حسین بهشتی خواه



دانشتیم که زلزله به شدت نامانا است. یعنی ویژگی های احتمالاتی آن وابسته به زمان است. بنابراین با انتخاب زمان های متفاوتی از آن نمودارهای متفاوتی برای تابع خود همبستگی به دست می آید. در حالت کلی، می توان فرض کرد فرآیند زلزله در ناحیه حرکت قوی، مانا است. بنابراین با انتخاب زمان انتخابی در این ناحیه شکل کلی تابع خود همبستگی همانند شکل کلی این تابع در حالت مانا خواهد بود (اسلاید قبل!).

# تابع خود همبستگی (مجموعه) زلزله (Ensemble) Auto-Correlation Function



□ در حالتی که زمان انتخابی از نواحی غیر از محدوده حرکت قوی انتخاب شود، این شکل کلی، همانند شکل روبرو، رعایت نخواهد شد.

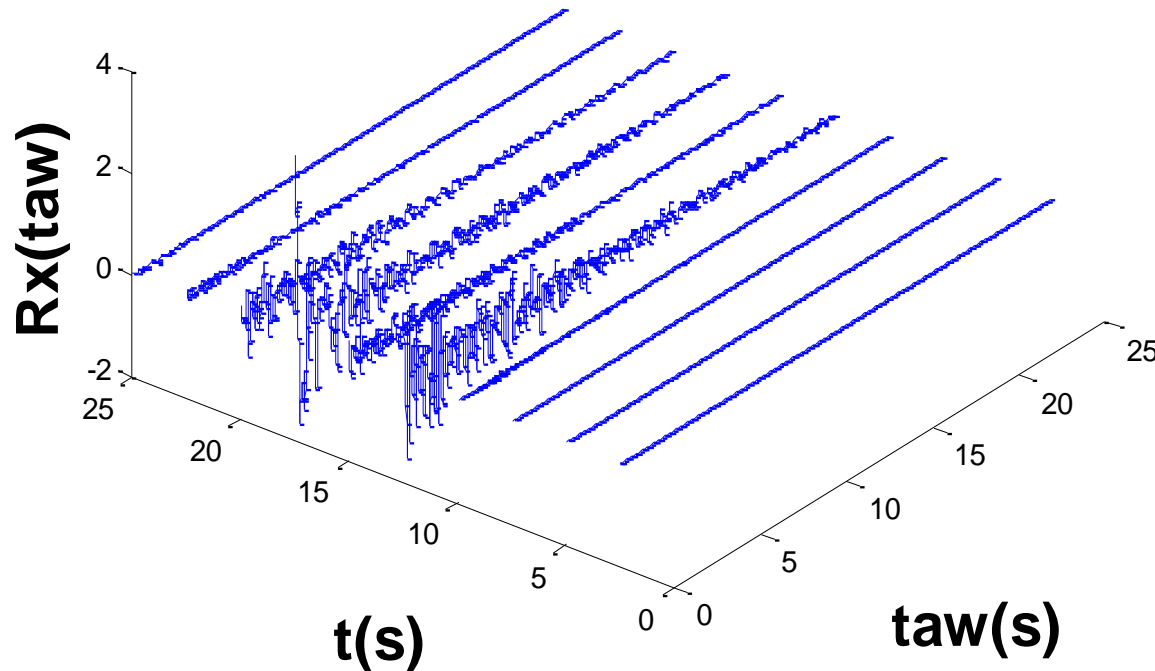
□ توجه:

$\tau$  زمان نیست، بلکه اختلاف زمان نمونه برداری است.



# تابع خود همبستگی (مجموعه) زلزله (Ensemble) Auto-Correlation Function

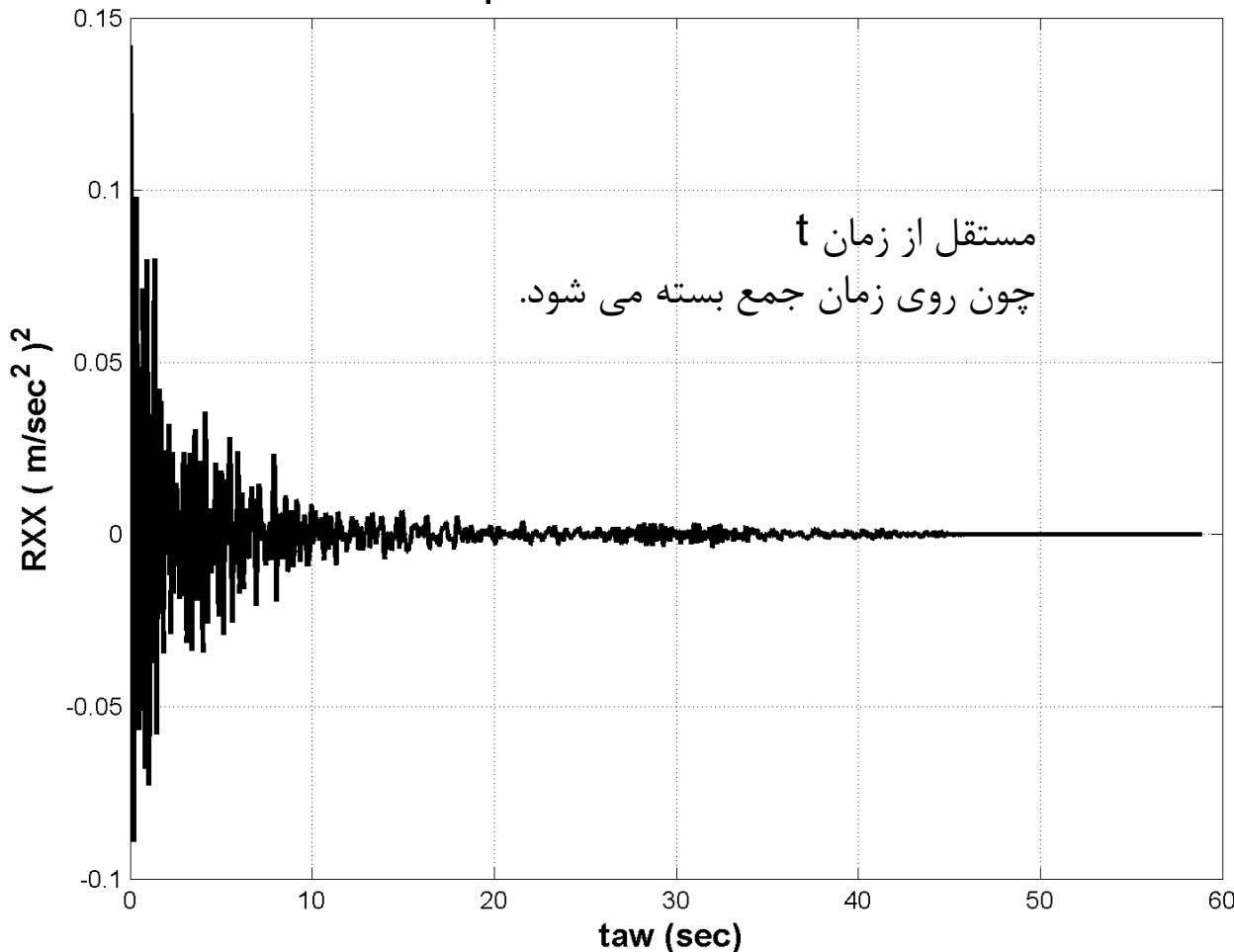
## Time Dependent Auto Correlation x



□ شکل زیر نمودار تابع خود همبستگی بین ۱۰ مولفه شتابنگاشت اصلاح شده را نشان می دهد. همانطور که ملاحظه می شود، نمودار  $R_x$  در زمان  $(t)$  های متفاوت شکل کاملاً متفاوتی را به خود می گیرد، که این دلیلی بر نامانایی زلزله است.



Temporal Auto-Correlation Earth



این تابع بیانگر همبستگی بین مقادیر یک نمونه از فرآیند پیشامی باشد. به عبارت دیگر:

$$\varphi_x(\tau) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i(t_1)x_i(t_2)$$

این تابع به زمان وابسته نیست، چون مربوط به یک نمونه از فرآیند است و نه یک فرآیند.





# کد متلب: تابع خود همبستگی (مجموعه) زلزله

9

beheshtikhah@gmail.com

محمد حسین بهشتی خواه

□ تعداد ۵ شتابنگاشت را در MatLab خوانده و به صورت ستونی در متغیر  $X$  ذخیره کنید. در ادامه کد زیر را وارد کرده تا تابع خود همبستگی این مجموعه ۵ تایی محاسبه شود.

□ `dt=0.005; t=0:dt:(length(X)-1)*dt;`

□ `E2=mean(X.^2,2);`      `%(Ensemble) Mean Square (Second Order Mean)`

□ `mm=length(X);`

□ `for i=1000`      `%t1`

□  $i$  بیانگر زمان انتخابی است. این زمان برابر با ۵ (ثانیه) در نظر گرفته شده است. دقت شود که در حلقه، به جای کار با زمان، با تعداد گام زمانی کار می کنیم. ( $5 = 1000 * 0.005$  ثانیه)

□ `for j=0:mm-i`      `%taw`

□ هرچه  $i$  (زمان انتخابی) بیشتر باشد، لازم است حداکثر اختلاف زمانی کمتر باشد، بنابراین حداکثر بردار  $j$  به  $mm-i$  محدود شده است.  
**ضرب نمونه های یک فرآیند در دو زمان مختلف**

□ `XX(j+1,:)=X(i,:).*X(i+j,:);`

□ در اولین سیکل از حلقه، مقدار  $j$  صفر است. و این یعنی  $taw$  صفر در نظر گرفته شده است. بنابراین،  $E[X^2]$  محاسبه می شود. توجه شود، که در کل حلقه ها  $i$  ثابت است و مقدار  $j$  از صفر تا ۵ ثانیه کمتر از زمان کل تغییر می کند.

□ `end`

□ `end`



# کد متلب: تابع خود همبستگی (مجموعه) زلزله

10

beheshtikhah@gmail.com

محمد حسین بهشتی خواه

- $RXX = \text{mean}(XX, 2);$
- عملگر E به ضرب نمونه ها اعمال می شود.
- $taw = 0:dt:(mm-i)*dt;$
- تعداد درایه های ماتریس taw باید با تعداد درایه های ماتریس RXX برابر باشد.
- $\text{figure}(3); \text{plot}(taw, RXX);$
- $\text{Seff} = E2(i) - RXX(1);$       %Check Point
- قبلاً اثبات کردیم، بیشترین مقدار RXX برابر با  $E[X^2]$  است، بنابراین تفاضل آنها باید صفر باشد. این موضوع برای اطمینان از صحتِ کدنویسی، کنترل شده است.

تمرین:

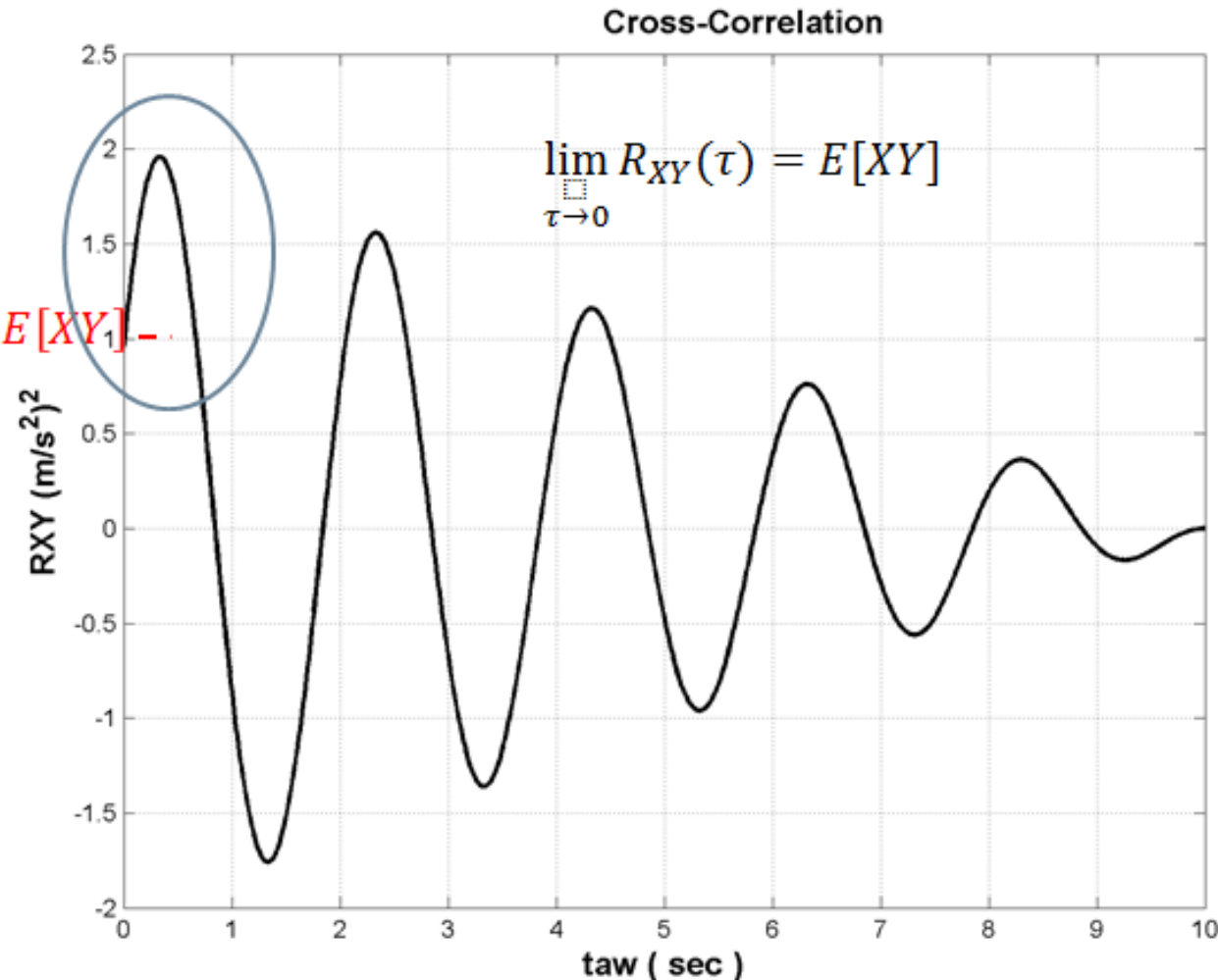
از دستور **xcorr** برای محاسبه تابع خود همبستگی استفاده کنید.

# تابع همبستگی متقاطع (شکل کلی) Cross-Correlation Function

11

beheshtikhah@gmail.com

محمد حسین بهشتی خواه



□ اگر بخواهیم بدانیم فرآیند  $X$  در زمان  $t_1$  و با فرآیند  $Y$  در زمان  $t_2$  چه ارتباطی دارد، عملگر  $E$  (میانگین مجموع) را به ضرب نمونه های مربوط به این زمان ها در فرآیند  $X$  و  $Y$  اعمال می کنیم. به عبارت دیگر:

$$R_{XY} = R_{XY}(t_1, t_2) = R_X(t, \tau) = E[X(t_1)Y(t_2)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t_1)y_i(t_2)$$

$\tau$ : اختلاف زمان نمونه برداری

□ اگر فرض کنیم فرآیند مانا است:

$$R_{XX} = R_X(\tau)$$

□ شکل این تابع، در حالت کلی، برای یک فرآیند مانا و نرمال به صورت روبرو است.



# تابع همبستگی متقاطع (زلزله) Cross-Correlation Function

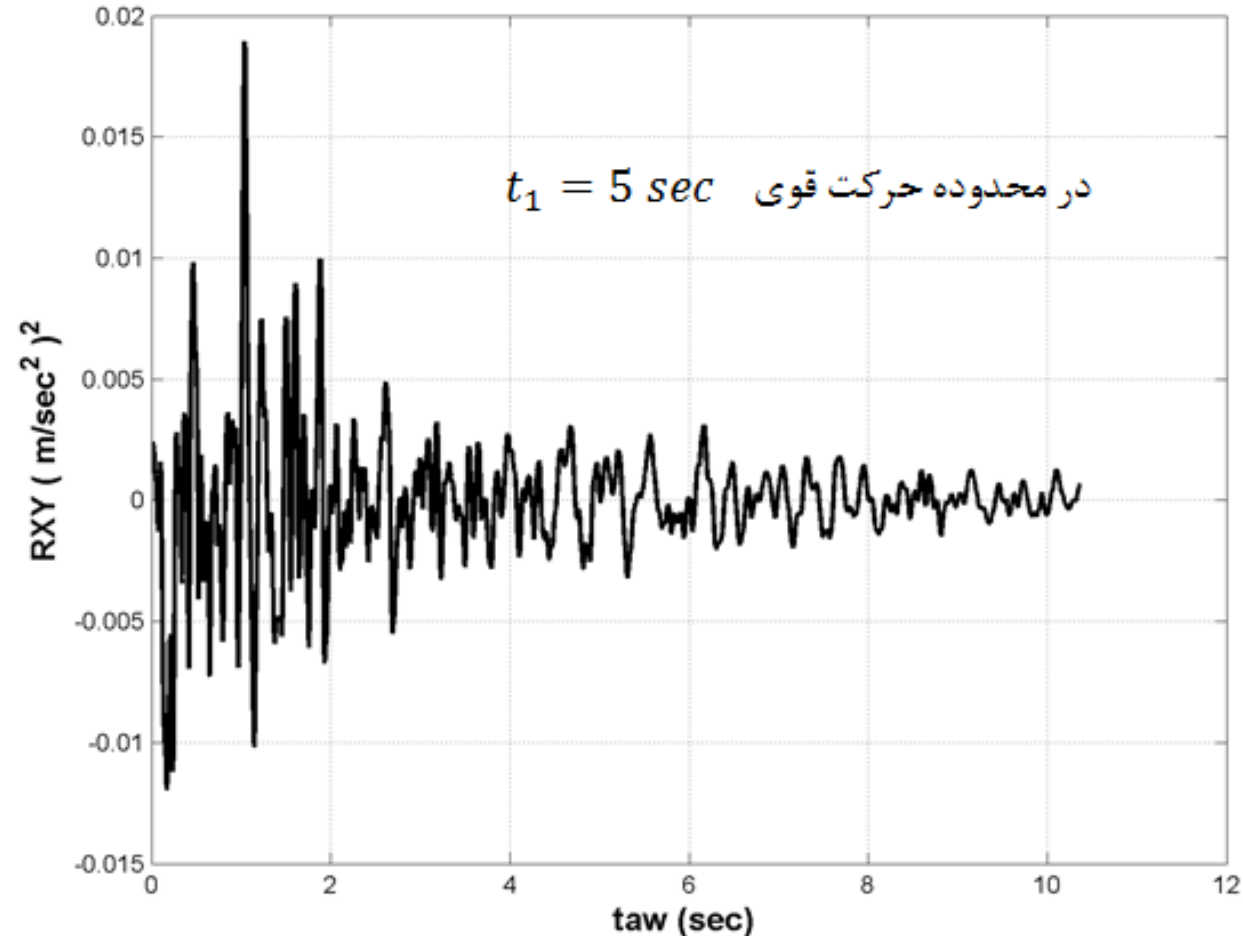


12

beheshtikhah@gmail.com

محمد حسین بهشتی خواه

Ensemble Cross-Correlation Earth





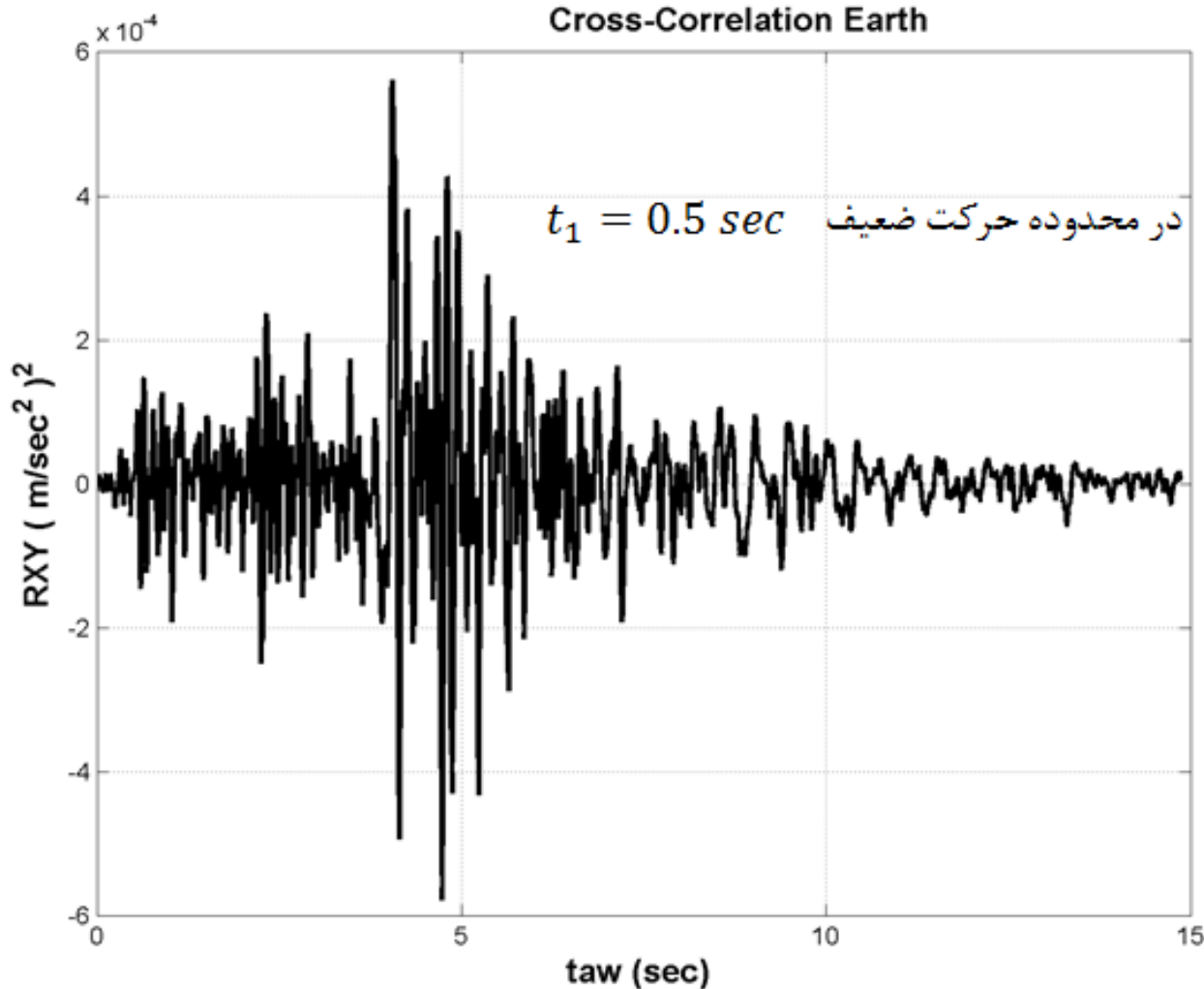
# تابع همبستگی متقاطع (زلزله) Cross-Correlation Function



13

beheshtikhah@gmail.com

محمد حسین بهشتی خواه





# تابع همبستگی متقاطع (زلزله) Cross-Correlation Function

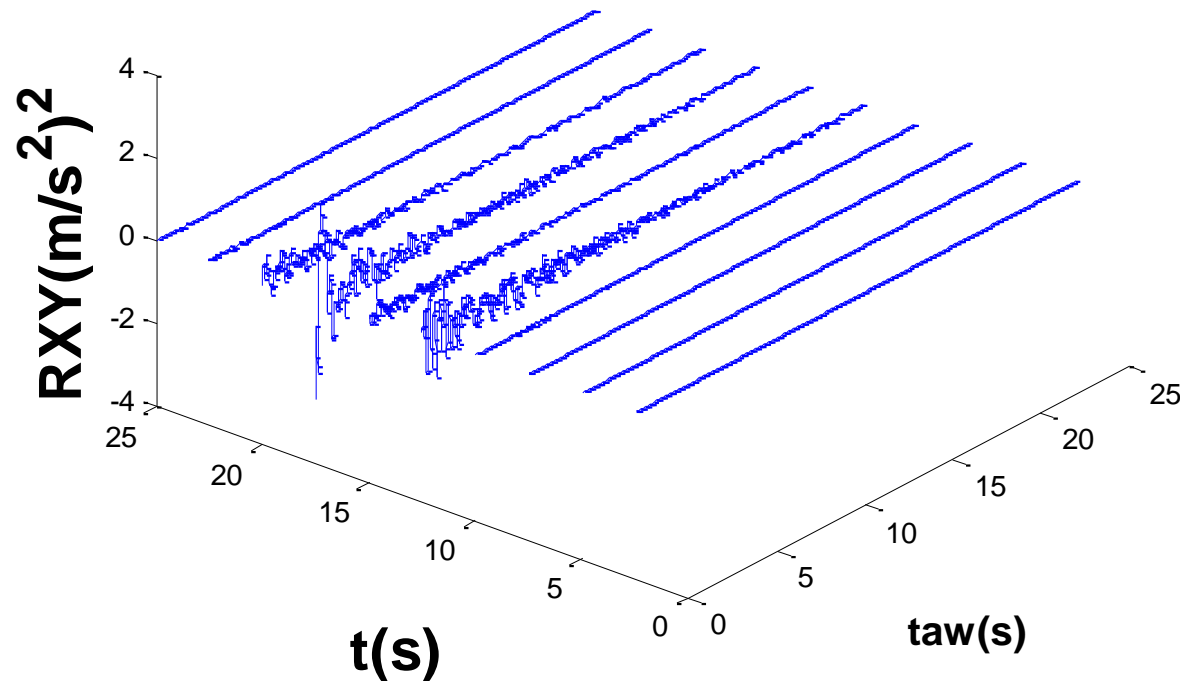


14

beheshtikhah@gmail.com

محمد حسین بهشتی خواه

## Time Dependent Cross Correlation $\gamma_{xy}$





# کد متلب: تابع همبستگی متقاطع

15

beheshtikhah@gmail.com

محمد حسین بهشتی خواه

این کد نیز همانند کد قبلی عمل کرده با این تفاوت که فرآیند  $Y$  یک ماتریس حاوی ۵ شتابنگاشت ستونی متفاوت با  $X$  است. □

```
□ dt=0.005; t=0:dt:(length(X)-1)*dt;
□ mm=length(X);
□ for i=1000 %t1
□     for j=0:mm-i %taw
□         XY(j+1,:)=X(i,:).*Y(i+j,:);
□     end
□ end
□ RXY=mean(XY,2);
□ taw=0:dt:(length(X)-i)*dt;
□ figure(4);plot(taw,RXY);
```

تمرین:

از دستور **xcorr** برای محاسبه تابع همبستگی متقاطع استفاده کنید.

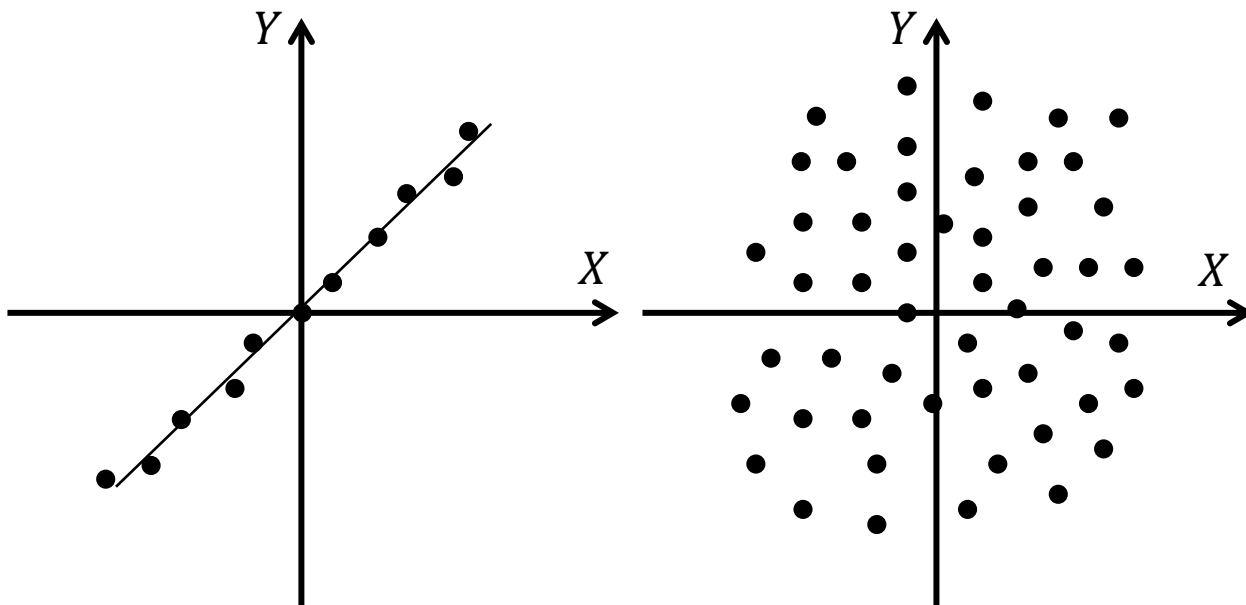
# تعریف ضریب همبستگی

## Correlation Coefficient

16

beheshtikhah@gmail.com

محمد حسین بهشتی خواه

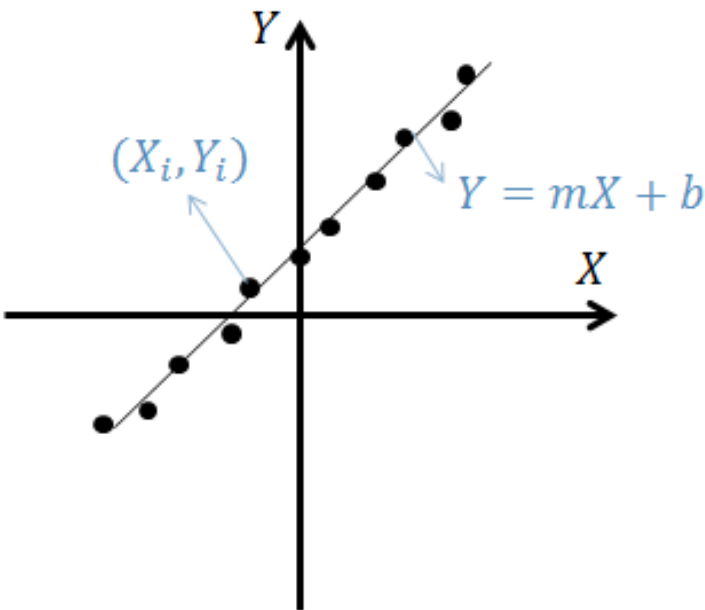


دو فرآیند همبسته خطی

دو فرآیند ناهمبسته

یکی از روش های مرتبط ساختن فرآیندها، روش حداقل نمودن مجموع مربعات انحرافهای بین آن ها می باشد. این روش در محاسبه ضریب همبستگی استفاده خواهد شد.





دو فرآیند همبسته خطی

□  $X$  (مثلاً قد افراد جامعه) و  $Y$  (مثلاً وزن افراد جامعه) دو فرآیند پیشا هستند. با استفاده از رگرسیون خطی  $Y$  روی  $X$  داریم:

$$\Delta_Y^2 = (Y - Y_i)^2$$

خطا برای یک نمونه

$$E[\Delta_Y^2] = E[(mX + b - Y)^2]$$

خطا برای یک فرآیند

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial m} = 2E[X(mX + b - Y)] \\ \quad = mE[X^2] + bE[X] - E[XY] = 0 \\ \\ \frac{\partial E}{\partial b} = 2E[mX + b - Y] \\ \quad = mE[X] + b - E[Y] = 0 \end{cases}$$



□ با حل دو معادله و دو مجهول داریم:

$$\begin{cases} b = E[Y] - mE[X] \\ m = \frac{E[XY] - E[X]E[Y]}{E[X^2] - E[X]^2} = \frac{E[(X - m_X)(Y - m_Y)]}{E[(X - m_X)^2]} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_{XX}^2} = \frac{Cov_{XY}}{\sigma_{XX}^2} \end{cases}$$

$$Y = mX + b = mX + E[Y] - mE[X] = m \left( X - \underbrace{E[X]}_{m_X} \right) + \underbrace{E[Y]}_{m_Y}$$

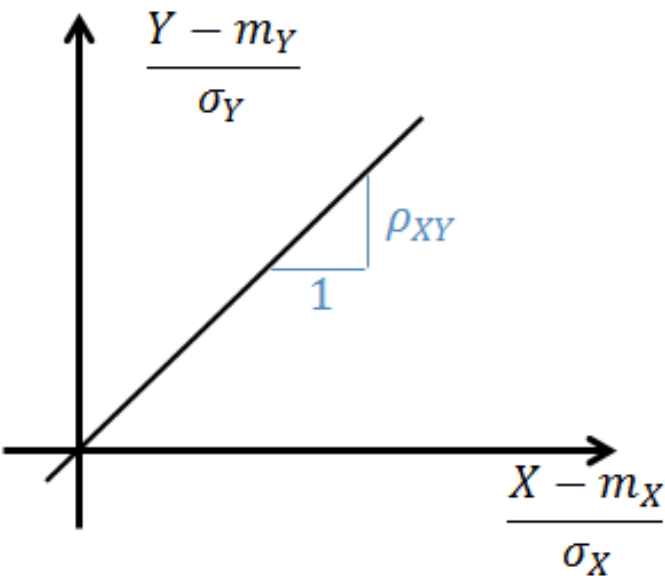
$$Y = \frac{E[(X - m_X)(Y - m_Y)]}{E[(X - m_X)^2]} (X - m_X) + m_Y$$

# ضریب همبستگی Correlation Coefficient

19

beheshtikhah@gmail.com

محمد حسین بهشتی خواه



یادآوری: □

$$\sigma_X^2 = \sigma_{XX}^2 = E[(X - m_X)^2] = v_X$$

$$E[XY] = R_X(t, \tau)$$

$$E[(X - m_X)^2] = E[X^2] - m_X^2$$

$$R.M.S = \sqrt{E[X^2]}$$

□ رابطه رگرسیون را بدون بعد می کنیم:

$$\underbrace{\frac{Y - m_Y}{\sigma_Y}}_{\text{بدون بعد}} = \frac{\overbrace{E[(X - m_X)(Y - m_Y)]}^{\rho_{XY}}}{\sigma_X \sigma_Y} \underbrace{\frac{X - m_X}{\sigma_X}}_{\text{بدون بعد}}$$

$$\rho_{XY} = \frac{E[(X - m_X)(Y - m_Y)]}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{Cov_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

□ روابط زیر را اثبات کنید:

$$-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$$

$$\rho_{XY} = 1 \Rightarrow Cov_{XY} = \sigma_X \sigma_Y$$

همبستگی کامل

$$\rho_{XY} = 0 \Rightarrow E[XY] = m_X m_Y$$

بدون همبستگی



# ویژگی های احتمالاتی در فضای فرکانس



# تابع چگالی طیفی

□ یادآوری: اگر  $X$  یک فرآیند باشد:

$$\left\{ \begin{array}{l} X(t) \xrightarrow{FT} X(\omega) \\ X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{i\omega t} dt \end{array} \right. \quad \text{در حالت کلی مختلط است}$$

□ همانطور که از یک فرآیند تبدیل فوریه می گیریم، از ویژگی های احتمالاتی آن نیز می توانیم تبدیل فوریه بگیریم.

$$R_X(\tau) \xrightarrow{FT} S_X(\omega) \quad \text{تابع چگالی طیفی}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{i\omega \tau} d\tau \\ R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) e^{-i\omega \tau} d\omega \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{چگالی طیفی تعریف کمی از یک فرآیند در محدوده فرکانسی} \\ \text{است و بیانگر تغییرات، اهمیت و شدت فرآیند در فرکانس های} \\ \text{متفاوت است. (شبیه طیف فوریه است)} \end{array}$$

□ تابع خودهمبستگی زوج است: چون

$$R_X(\tau) = E \left[ \underbrace{X(t)}_{\tilde{t}-\tau} \underbrace{X(t+\tau)}_{\tilde{t}} \right] = E[X(\tilde{t})X(\tilde{t}-\tau)] = R_X(-\tau)$$

□ بنابراین، تابع چگالی طیفی، یک تابع حقیقی و زوج است. زیرا

$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) [\cos \omega \tau - i \sin \omega \tau] d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) \cos \omega \tau d\tau + i \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{R_X(\tau)}_{\text{زوج}} \underbrace{\sin \omega \tau}_{\text{فرد}} d\tau}_{\text{صفر}} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) \cos(-\omega) \tau d\tau = S_X(-\omega) \end{aligned}$$

□ تابع چگالی طیفی، طبق تئوری بوخنر (Bochner)، مثبت است.

□ سطح زیر نمودار تابع چگالی طیفی برابر با  $E[X^2]$  است. چون

$$\tau = 0 \Rightarrow R_X(\tau = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) d\omega = E[X^2] = \sigma_X^2 + m_X^2 = 2 \int_0^{+\infty} S_X(\omega) d\omega$$

□ بنابراین واحد چگالی طیفی برابر است با:  $\frac{\text{واحد مربع فرآیند}}{\text{واحد فرکانس}}$

□ تابع همبستگی متقاطع زوج نیست. چون  $R_{XY}(\tau) = E \left[ \underbrace{X(t)}_{\tilde{t}-\tau} \underbrace{Y(t+\tau)}_{\tilde{t}} \right] = E[Y(\tilde{t})X(\tilde{t}-\tau)] = R_{YX}(-\tau)$



# خاصیت ها



23

beheshtikhah@gmail.com

محمد حسین بهشتی خواه

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{\dot{x}}(\tau) = -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} R_x(\tau) \\ R_{\ddot{x}}(\tau) = -\frac{\partial^4}{\partial \tau^4} R_x(\tau) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{\dot{x}}(\omega) = \omega^2 S_x(\omega) \\ S_{\ddot{x}}(\omega) = \omega^4 S_x(\omega) \end{array} \right.$$

□ یادآوری:

اگرچه تئوری فوریه در اصل برای توابع متناوب است، برای هر تابع غیر متناوب نیز قابل تعمیم است.

$$\left\{ \begin{array}{l} E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) d\omega \\ E[\dot{X}^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 S_X(\omega) d\omega \\ E[\ddot{X}^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^4 S_X(\omega) d\omega \end{array} \right.$$

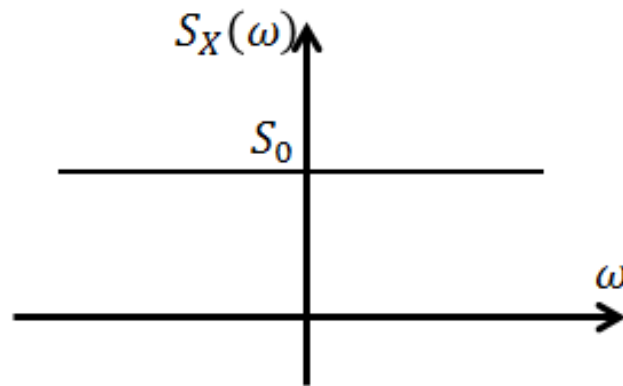
# نوفه سفید

24

beheshtikhah@gmail.com

محمد حسین بهشتی خواه

- برای  $S_X(\omega)$  می توان مدل ریاضی در نظر گرفت.
- یکی از این مدل ها whitenoise یا نوفه سفید است که شکل آن به صورت روبرو است. خصوصیت اصلی آن عدم وابستگی به فرکانس است.



- زلزله در کانون را می توان با نوفه سفید مدل کرد. یعنی وقتی rupture اتفاق می افتد، انرژی زلزله در تمام فرکانس ها به یک میزان آزاد می شود. چون هنوز هیچ فیلتری از جانب خاک روی آن صورت نگرفته است. شرح این موضوع به جلسات آینده موکول می شود.