بخش هفتم - مسائل دو بعدی تئوری ارتجاعی

۷-۱- مقدمه

مسائل دو بعدی تئوری ارتجاعی به مسائلی گفته می‌شوند که توزیع تنش یا کرنش در کلیه نقاط جسم بصورت دو بعدی باشد، به عبارتی اگر در کلیه نقاط جسم تانسور تنش بصورت

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(x,y) & \sigma_{xy}(x,y) & 0 \\ \sigma_{yx}(x,y) & \sigma_{yy}(x,y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۱)$$

باشد جسم در حالت تنش مسطح بوده و چنانچه در کلیه نقاط جسم تانسور کرنش بصورت

$$[e] = \begin{bmatrix} e_{xx}(x,y) & e_{xy}(x,y) & 0 \\ e_{yx}(x,y) & e_{yy}(x,y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۲)$$

باشد جسم در حالت کرنش مسطح می‌باشد.

وقتی که جسم در حالت کرنش مسطح باشد، با توجه به روابط بین کرنش و مؤلفه‌های بردار تغییر مکان

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \qquad (۳)$$

و تانسور کرنش (۲) نتیجه می‌گیریم که مؤلفه‌های تغییر مکان باید بصورت زیر باشند:

$$\begin{cases} u_x(x,y) \\ u_y(x,y) \\ u_z = 0 \end{cases} \qquad (۴)$$

و با توجه به روابط تنش-کرنش داریم:

$$\begin{aligned} &\sigma_{xx}(x,y) \\ &\sigma_{xy}(x,y) \\ &\sigma_{yy}(x,y) \\ &\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \end{aligned} \qquad (۵)$$

$$e_{zz} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})\right] = 0 \Rightarrow \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}) \Rightarrow \sigma_{zz}(x,y)$$

و از روابط تعادل نیز نتیجه حاصل می‌شود:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0$$

$$\begin{cases} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \\ f_z = 0 \end{cases} \qquad (۶)$$

روی سطح S_T که نیروهای سطحی $\vec{T}$ معلوم هستند با توجه به معادلات تعادل تنش، نیروهای سطحی $\sigma_{ij} n_j = T_i$ را داشته باشیم :

$$
\begin{cases}
T_x(x,y) \\
T_y(x,y) \qquad\qquad S_T(x,y) \\
T_z = 0
\end{cases}
\qquad (7)
$$

* بنابراین شرایط کافی برای اینکه جسم در حالت کرنش مسطح باشد عبارتست از :

۱- جسم در امتداد محور z ها به اندازه کافی طویل باشد و مقطع جسم مستقل از z باشد

۲- سطح S_T مستقل از z باشد.

۳- نیروهای سطحی وارده بر S_T ، فقط دارای دو مؤلفه T_x و T_y که مستقل از z هستند است. (8)

۴- وقتی که مقطع جسم مستقل از z باشد و S_T نیز مستقل از z باشد، خود بخود سطح S_u نیز مستقل از z خواهد شد.

۵- نیروهای حجمی وارده بر واحد حجم جسم باید مؤلفه در امتداد z برابر صفر داشته و مؤلفه های f_x و f_y نیز مستقل از z باشند.

وقتی جسم در حالت کرنش مسطح باشد از روابط (1) با توجه به معادلات تعادل تنش $\sigma_{ij,j} + f_i = 0$ نتیجه می‌گیریم که f_x و f_y باید مستقل از z باشند و $f_z = 0$ باشد. (9) از روابط بین کرنش - تنش نتیجه می‌شود که :

$$
\begin{aligned}
&e_{xx}(x,y) &\qquad & e_{xx}(x,y) = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) \\
&e_{yy}(x,y) && e_{yy}(x,y) = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) \\
(10) \qquad &e_{xy}(x,y) && e_{xz} = e_{yz} = 0
\end{aligned}
$$

$$
e_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -\frac{\nu}{1-\nu}(e_{xx} + e_{yy}) \Rightarrow e_{zz}(x,y)
$$

و با توجه به روابط کرنش - تغییر مکان ملاحظه می‌شود که :

$$
\begin{aligned}
& u_x(x,y,z) \\
(11) \qquad & u_y(x,y,z) \\
& u_z = z \cdot e(x,y)
\end{aligned}
$$

اگر ضخامت جسم در امتداد محور z ها کم بوده و $2h$ فرض شود مقادیر متوسط مؤلفه های تغییر مکان عبارتند از :

$$
\begin{aligned}
& \bar{u}_x(x,y) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} u_x(x,y,z)\,dz \\
(12) \qquad & \bar{u}_y(x,y) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} u_y(x,y,z)\,dz \\
& \bar{u}_z(x,y) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} u_z(x,y,z)\,dz = 0
\end{aligned}
$$

اگر سطوح $z = \pm h$ جسم عاری از نیروهای سطحی باشد :

$$
(13) \qquad \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0
$$

برای توضیح بیشتر به جلد ۲-۱ بخش چهارم مراجعه شود.

برای امکان برای آنکه جسم در حالت تنش مسطح قرار گیرد لازم است:

۱- صفحه‌ی نازکی به ضخامت خیلی کم $2h$ (نسبت به ابعاد دیگر) که از صفحه‌ی $o\,x_1x_2$ ضخامت صفحه را نصف کند جسم مورد نظر باشد.

۲- مولد استوانه موازی محور z باشد.

۳- نیروهای سطحی به سطح جانبی استوانه اثر کنند و تابع امتداد z نباشد.

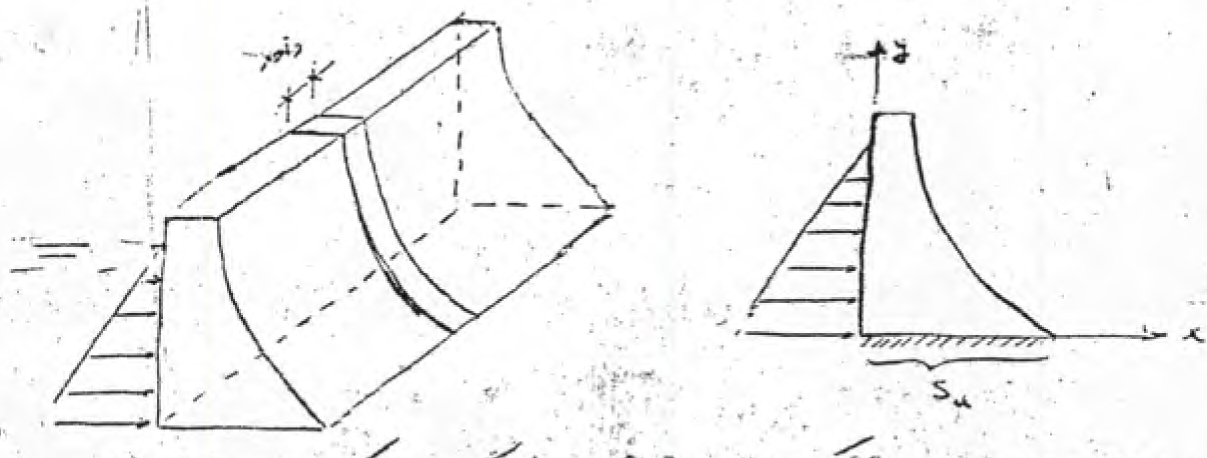
۴- سطح S_t مستقل از z بوده و روی آن $T_x(x,y)$ و $T_y(x,y)$ و $T_z=0$ باشد.

۵- نیروهای حجمی $f_x(x,y)$ و $f_y(x,y)$ و $f_z=0$ باشد.

۶- شرایط مرزی روی سطح S_u مستقل از z باشد.

۷- تغییرات تنش، کرنش و مؤلفه‌های تغییرمکان در ضخامت صفحه ناچیز باشد.

۲-۷- مسائل کرنش مسطح و روابط مربوط به آن:



جسم طولانی در امتداد محور z ها، مثل یک سد وزنی، با مقطع ثابت را در نظر می‌گیریم و به طوری که تحت اثر نیروهای سطحی به شدت $T_x(x,y)$ و $T_y(x,y)$ و $T_z=0$ روی سطح $S_t(x,y)$ قرار گرفته باشد. و نیروهای حجمی نیز $f_x(x,y)$ و $f_y(x,y)$ و $f_z=0$ باشد.
سطح S_u نیز مستقل از z است تحت اثر تغییرمکانهای تحمیل شده‌ی $u_x(x,y)$ و $u_y(x,y)$ و $u_z=0$ قرار گرفته است.

در این صورت با توجه به تقارن جسم نسبت به صفحات $z=$ ثابت، نتیجه می‌گیریم که در هر مقطع جسم

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
&u_x(x,y)\\
&u_y(x,y)\\
&u_z=0
\end{aligned}
$$

می‌باشد. از روابط کرنش- تغییرمکان داریم:

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})$$

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
&e_{xx}(x,y)=\frac{\partial u_x}{\partial x}\\
&e_{yy}(x,y)=\frac{\partial u_y}{\partial y}\\
&e_{xy}(x,y)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)\\
&e_{xz}=0 \qquad e_{yz}=0 \qquad e_{zz}=0
\end{aligned}
$$

و از روابط تنش - کرنش فقط روابط زیر باقی می‌ماند:

$$e_{zz}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{zz}-\nu(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})\right]=0 \Rightarrow \sigma_{zz}=\nu(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})$$

$$e_{xz}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{xz}=0 \Rightarrow \sigma_{xz}=0$$

$$\sigma_{yz}=\frac{E}{1+\nu}e_{yz}=0 \Rightarrow \sigma_{yz}=0$$

(۳)

$$e_{xx}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{xx}-\nu\sigma_{yy}-\nu^2(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})\right]=\frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\sigma_{xx}-\nu(1+\nu)\sigma_{yy}\right]$$

$$e_{yy}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{yy}-\nu\sigma_{xx}-\nu^2(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})\right]=\frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\sigma_{yy}-\nu(1+\nu)\sigma_{xx}\right]$$

$$e_{xy}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy}$$

از ماتریسی کردن آنها داریم:

(۴)

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & 1-2\nu\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}e_{xx}\\ e_{yy}\\ e_{xy}\end{Bmatrix}$$

از معادلات تعادل $\sigma_{ij,j}+f_i=0$ فقط دو معادله زیر باقی می‌ماند:

(۵)

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+f_x=0$$

$$\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+f_y=0$$

و از شش معادله سازگاری تنها یک معادله زیر باقی می‌ماند:

(۶)

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2}=2\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x\partial y}$$

بدین ترتیب برای هر نقطه از جسم در حالت کرنش مسطح: ۳ رابطه کرنش - تغییر مکان ، ۳ رابطه تنش - کرنش

۱ رابطه $\sigma_{zz}=\nu(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})$ و ۲ معادله تعادل یعنی مجموعاً ۹ معادله داریم.

و ۹ مجهول در هر نقطه از جسم عبارتند از: σ_{xx} σ_{yy} σ_{xy} σ_{zz} (۴تا)

e_{xx} e_{yy} e_{xy} (۳تا) و u_x و u_y (۲تا) که جمعاً ۹ مجهول در هر نقطه می‌شود.

از معادلات سازگاری همانطور که قبلاً گفته شد برای کنترل جوابها مورد استفاده قرار می‌گیرد.

معادلات سازگاری را می‌توان بر حسب تنشها به شرح زیر نوشت:

از روابط (۳) نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2}=\frac{1}{E}(1-\nu^2)\frac{\partial^2\sigma_{xx}}{\partial y^2}-\frac{\nu(1+\nu)}{E}\frac{\partial^2\sigma_{yy}}{\partial y^2}$$

(۷)

$$\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2}=\frac{1}{E}(1-\nu^2)\frac{\partial^2\sigma_{yy}}{\partial x^2}-\frac{\nu(1+\nu)}{E}\frac{\partial^2\sigma_{xx}}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

این مشتقات را در معادله سازگاری (۶) قرار داده و ساده می‌کنیم:

$$(8) \qquad (1-\nu)\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + (1-\nu)\frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

حال از معادلات تعادل (۵) مشتق می‌گیریم

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f_x}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial f_y}{\partial y} = 0$$

که از جمع کردن آنها داریم:

$$(9) \qquad 2\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} - \frac{\partial f_x}{\partial x} - \frac{\partial f_y}{\partial y}$$

از جایگزینی رابطه (۹) در (۸) نتیجه می‌شود:

$$(10) \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\right)$$

و با تعریف اپراتور لاپلاسین $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ معادله سازگاری به صورت زیر در می‌آید:

$$(11) \qquad \nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\right)$$

معادله فوق را که در واقع مشابه معادلات بلترامی-میشل در حالت تنش مسطح می‌باشد را می‌توان مستقیماً از معادلات بلترامی میشل نیز بدست آورد (تمرین - بعهده دانشجو)

بدین ترتیب اگر توزیع تنشهای σ_{xx} ، σ_{yy} و σ_{xy} در کلیه نقاط جسم بعنوان مجهولات اصلی مسئله در نظر گرفته شوند، معادلات سازگاری (۱ معادله) و معادلات تعادل (۲ معادله) و شرایط مرزی روی سطح ۳ که برای تعیین توزیع تنش در جسم مورد استفاده قرار می‌گیرد.

برای اینکه تعداد مجهولات در هر نقطه از جسم را به یک مجهول کاهش دهیم از تابع کمکی به نام تابع تنش ایری استفاده می‌کنیم. این تابع به گونه‌ای در نظر گرفته می‌شود که معادلات تعادل بطور خود بخود ارضاء گردد.

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = 0 \end{cases}$$

اگر نیروهای حجمی f_x و f_y از یک تابع پتانسیل نیروهای حجمی V مشتق شده باشند:

$$f_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

(۱۲)

$$f_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

تابع V در اغلب مسائل بسهولت قابل تعیین است. روابط (۱۲) را در معادلات تعادل (۵) قرار داده:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{xx} - V) + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0$$

(۱۳)

$$\frac{\partial}{\partial y}(\sigma_{yy} - V) + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = 0$$

و حال تابع تنش ایری $\phi(x,y)$ را به شرح زیر تعریف می‌کنیم تا معادلات تعادل (۱۳) در کلیه نقاط جسم اقناع گردد:

$$\sigma_{xx} - V = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

(۱۴)

$$\sigma_{yy} - V = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

از قرار دادن تنشها برحسب تابع تنش ایری در معادله سازگاری (۱۱) داریم:

$$\nabla^2\left[\left(V + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right) + \left(V + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)\right] = -\frac{1}{1-\nu}\left[-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right]$$

که از ساده کردن آن داریم:

(۱۵)

$$\nabla^4 \phi = \frac{2\nu - 1}{1-\nu} \nabla^2 V$$

بدیهی است که چنانچه نیروهای حجمی $f_x = f_y = 0$ باشند، معادله فوق بصورت زیر درمی‌آید

(۱۶)

$$\nabla^4 \phi = 0$$

بدین ترتیب کافی است که در هر نقطه از جسم مقدار تابع تنش ایری $\phi(x,y)$ را که در معادله (۱۶) صدق می‌کند را بدست آورده و سپس از روابط (۱۴) توزیع تنشها را بدست آوریم. این توزیع تنشها علاوه بر معادلات سازگاری معادلات تعادل را نیز اقناع می‌کنند، بنابراین جواب مسئله هستند:

۷-۳- مراحل حل مسائل کرنش مسطح

در حالتی که نیروهای حجمی f_x و f_y وجود داشته باشند، در صورتی که تابع پتانسیل $V(x,y)$ را طوری تعریف کنیم که

$$f_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad f_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

باشد

گاهی اوقات می‌توان معادله دیفرانسیل $\nabla^4\phi = \frac{2\nu-1}{1-\nu}\nabla^2 V$ را حل کرد، ولی در اغلب حالات تابع تنش ایری $\phi(x,y)$ را حدس می‌زنیم، به طوری که معادله فوق را اقناع کند.

سپس توزیع تنش را به دست می‌آوریم:

$$\sigma_{xx} = V + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}$$

$$\sigma_{yy} = V + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

$$\sigma_{xz} = 0$$

$$\sigma_{yz} = 0$$

با توجه به شرایط حدی روی سطح S_T ثابت‌های مربوط به توزیع تنش‌ها را به دست می‌آوریم. در این مرحله گاهی اوقات لازم است که از اصل سن ونان بهره بگیریم. در صورت وجود تناقض ناچار باید در تابع تنش ایری تجدید نظر کنیم.

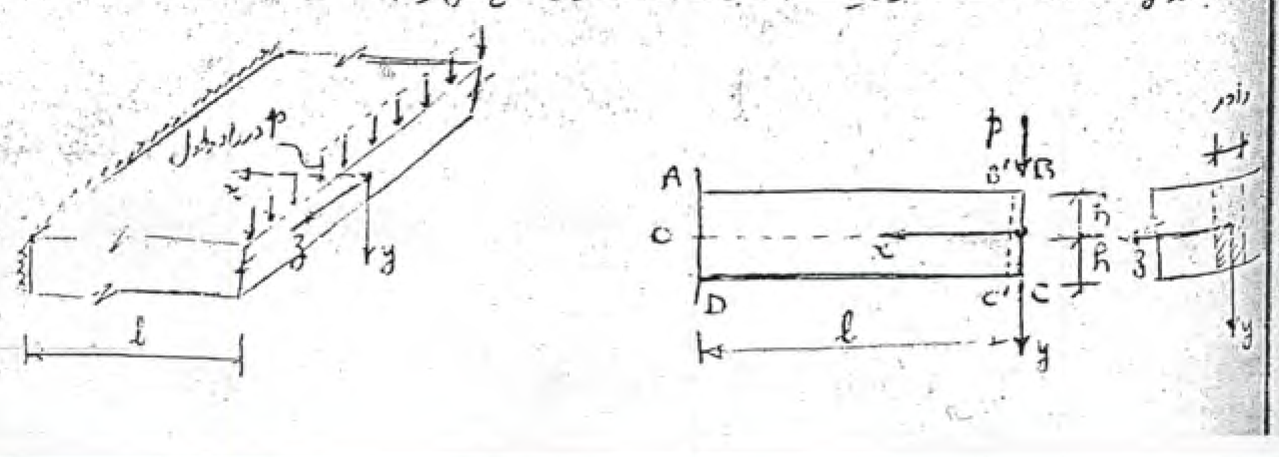
پس از تعیین تنش‌ها، کرنش‌ها و سپس مؤلفه‌های بردار تغییر مکان را از روابط

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

به دست آورده و شرایط حدی روی سطح S_u را اقناع می‌کنیم.

۷-۴- مثال ۱:

دال کنسولی تحت اثر بار P در واحد طول به مطابق شکل قرار گرفته است. از وزن دال صرف‌نظر می‌شود. توزیع تنش، کرنش و مؤلفه‌های تغییر مکان را به دست آورید. ضخامت دال 2h، طول کنسول l و طول دال در امتداد محور z ها نامحدود است (باید مسئله را به صورت کرنش مسطح حل کرد).



حل: چون از نیروهای حجمی صرف‌نظر شده است تابع پتانسیل نیروهای حجمی $V=0$ می‌باشد.

برای حل مسئله تابع تنش ایری زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\phi = axy^3 + bxy + cx^2$$

برای اینکه تابع فوق تابع تنش ایری باشد، باید در کلیه نقاط جسم $\nabla^4\phi = 0$ باشد.

$$\nabla^4\phi = \frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\phi}{\partial y^4} \equiv 0$$

$$\nabla^4\phi = 0 + 2\times 0 + 0 = 0$$

با این توزیع تنش‌ها را می‌توان از تابع فوق بصورت زیر آورد:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 6axy$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 2c$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = -3ay^2 - b$$

شرایط مرزی مربوط به سطح S_T را اقناع می‌کنیم:

روی سطح AB و CD داریم:

$$y = \pm h \quad \forall x \qquad \sigma_{ij}n_j = T_i = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{xy} = 0 \\ \sigma_{yy} = 0 \end{cases}$$

$$\sigma_{xy}\Big]_{y=\pm h} = -3ah^2 - b \equiv 0 \Rightarrow b = -3ah^2$$

$$\sigma_{yy}\Big]_{y=\pm h} = 2c \equiv 0 \Rightarrow c = 0$$

روی سطح BC داریم:

$$x = 0 \quad \forall y \in [-h, +h]$$

بردار نرمال سطح $\vec{n} = \begin{cases} n_x = -1 \\ n_y = 0 \end{cases} \qquad \sigma_{ij}n_j = T_i$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}\times -1 + \sigma_{xy}\times 0 &= T_x \\ \sigma_{xy}\times -1 + \sigma_{yy}\times 0 &= T_y \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} T_x = -6axy\Big]_{x=0} = 0 \\ T_y = -\sigma_{xy}\Big]_{x=0} = -3ay^2 + 3ah^2 \end{cases}$$

با توجه به اصل سن ونان برآیند توزیع نیروهای سطحی T_y روی BC باید معادل نیروی برشی p گردد:

$$\int_{-h}^{+h} T_y\,dy = p \Rightarrow 3a\int_{-h}^{+h}(h^2 - y^2)\,dy = p$$

$$\Rightarrow -2ah^3 + 6ah^3 = -p \Rightarrow a = -\frac{p}{4h^3}$$

بنابراین تابع تنش ایری به صورت زیر می باشد:

$$\phi = -\frac{p}{4h^3}xy^3 + \frac{3}{4}\frac{p}{h}xy$$

و پخش تنش در جسم به صورت زیر می باشد:

$$\sigma_{xx} = -\frac{3}{2}\frac{p}{h^3}xy$$

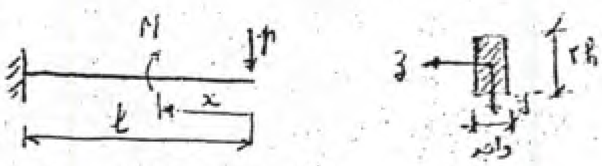
$$\sigma_{yy} = 0$$

$$\sigma_{xy} = \frac{3p}{4h}\left(\frac{y^2}{h^2} - 1\right)$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{3}{2}\nu\frac{p}{h^3}xy$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$$

توزیع تنش خمشی با نتایج مقاومت مصالح سازگار است؛ چون برای تیر کنسول به عرض واحد داریم:



$$I = \frac{(2h)^3}{12} = \frac{2h^3}{3}$$

گشتاور خمشی $M = -px$

برش $T = -p$

$$\sigma_{xx} = \frac{M \cdot y}{I} = \frac{-px \cdot y}{\frac{2h^3}{3}} = -\frac{3}{2}\frac{p}{h^3}xy$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{T \cdot S_{xx}}{I_{xx} \cdot b} = \frac{p \cdot \left(\frac{h^2 - y^2}{2}\right)}{\frac{2h^3}{3} \times 1} = \frac{3p}{4h}\left(\frac{y^2}{h^2} - 1\right)$$

توزیع تنش برشی در ضخامت دال به صورت سهمی است و حداکثر آن متعلق به نقطه $y=0$ یعنی میان صفحه دال است:

$$(\sigma_{xy})_{max} = \frac{3p}{4h} = 1.5\left(\frac{p}{2h}\right) = 1.5 \times \text{تنش برشی متوسط مقطع}$$

تعیین کرنش ها:

$$e_{xx} = \frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\sigma_{xx} - \nu(1+\nu)\sigma_{yy}\right] = -\frac{1-\nu^2}{EI}pxy$$

$$e_{yy} = \frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\sigma_{yy} - \nu(1+\nu)\sigma_{xx}\right] = \frac{\nu(1+\nu)}{EI}pxy$$

$$e_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy} = \frac{1+\nu}{2EI}p(y^2 - h^2)$$

$$e_{xz} = e_{yz} = e_{zz} = 0$$

تعیین تغییر مکانها:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = e_{xx} = -\frac{1-\nu^2}{EI} p x y \Rightarrow u_x = -\frac{1-\nu^2}{2EI} p x^2 y + f_1(y)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} = e_{yy} = \frac{\nu(1+\nu)}{EI} p x y \Rightarrow u_y = \frac{\nu(1+\nu)}{2EI} p x y^2 + f_2(x)$$

$$e_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1+\nu}{2EI} p (y^2-h^2) = \frac{1}{2}\left[-\frac{1-\nu^2}{2EI} p x^2 + \frac{d f_1(y)}{dy} + \frac{\nu(1+\nu)}{2EI} p y^2 + \frac{d f_2(x)}{dx}\right]$$

$$\frac{1-\nu^2}{4EI} p x^2 - \frac{1}{2}\frac{d f_2(x)}{dx} - \frac{1+\nu}{2EI} p h^2 = \frac{\nu(1+\nu)}{4EI} p y^2 + \frac{1}{2}\frac{d f_1(y)}{dy} - \frac{1+\nu}{2EI} p y^2$$

چون سمت چپ رابطهٔ فوق فقط تابع x و سمت راست فقط تابع y است، این دو عبارت وقتی می‌توانند با یکدیگر مساوی گردند که هر یک از آنها برابر مقدار ثابت A باشد:

$$\frac{1-\nu^2}{4EI} p x^2 - \frac{1}{2}\frac{d f_2(x)}{dx} - \frac{1+\nu}{2EI} p h^2 = A \Rightarrow \frac{d f_2(x)}{dx} = \frac{1-\nu^2}{2EI} p x^2 - \frac{1+\nu}{EI} p h^2 - 2A$$

$$\frac{\nu(1+\nu)}{4EI} p y^2 + \frac{1}{2}\frac{d f_1(y)}{dy} - \frac{1+\nu}{2EI} p y^2 = A \Rightarrow \frac{d f_1(y)}{dy} = -\frac{\nu(1+\nu)}{2EI} p y^2 + \frac{1+\nu}{EI} p y^2 + 2A$$

از انتگرال‌گیری روابط فوق داریم:

$$f_2(x) = \frac{1-\nu^2}{6EI} p x^3 - \frac{1+\nu}{EI} p h^2 x - 2Ax + B$$

$$f_1(y) = \frac{2+\nu-\nu^2}{6EI} p y^3 + 2Ay + C$$

در نتیجه برای مؤلفه‌های بردار تغییر مکان داریم:

$$u_x = -\frac{1-\nu^2}{2EI} p x^2 y + \frac{2+\nu-\nu^2}{6EI} p y^3 + 2Ay + C$$

$$u_y = \frac{\nu(1+\nu)}{2EI} p x y^2 + \frac{1-\nu^2}{6EI} p x^3 - \frac{1+\nu}{EI} p h^2 x - 2Ax + B$$

$$u_z = 0$$

اقناع شرایط مرزی مربوط به S_u. روی لبهٔ AD تیر گیردار است. به عبارتی برای نقاط

$$x = l \quad \forall y \in [-h, +h] \quad \begin{cases} u_x = 0 \\ u_y = 0 \end{cases}$$

ملاحظه می‌شود که شرط فوق را نمی‌توان اقناع کرد. به عبارتی تابع تنش ایری حدس زده شده برای حل این مسئله مناسب نبوده است. معهذا با دقت در مؤلفه‌های تغییر مکانها مشاهده می‌شود که این تغییر مکانها بستگی به سه پارامتر A، B و C دارند. با داشتن برای سطح ... سه شرط هندسی مستقل از هم را می‌توانیم

اکنون نشان دهیم که تأثیر گیرداری بر روی لبهٔ AD امکان‌پذیر نیست.

در نتیجه اگر فرض می‌کنیم که فقط نقطهٔ O وسط پاره خط AD تکیه‌گاه ثابت باشد داریم:

$$x=l\ ;\ y=0 \qquad \begin{cases} u_x=0 \implies C=0 \\ u_y=0 \implies B=-\dfrac{1-\nu^2}{6EI}pl^3+\dfrac{1+\nu}{EI}ph^2l+2Al \end{cases}$$

مقادیر B و C را در معادلات قرار داده و در تغییر مکان‌ها جایگزین می‌کنیم:

$$u_x=-\frac{1-\nu^2}{2EI}px^2y+\frac{2+\nu-\nu^2}{6EI}py^3+2Ay$$

$$u_y=\frac{\nu(1+\nu)}{2EI}pxy^2+\frac{1-\nu^2}{6EI}p(x^3-l^3)-\frac{1+\nu}{EI}ph^2(x-l)+2A(l-x)$$

برای تأثیر گیرداری لبهٔ AD دو حالت مختلف را می‌توان در نظر گرفت:

* حالت اول: عنصر (۱) در نقطهٔ O گیردار است. بدین معنی که المان بر روی سطح ... x ها

در نقطهٔ O مماس است:

$$x=l\ ,\ y=0 \qquad \frac{\partial u_y}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial x}=\frac{\nu(1+\nu)}{2EI}py^2+\frac{1-\nu^2}{2EI}px^2-\frac{1+\nu}{EI}ph^2-2A$$

$$\left.\frac{\partial u_y}{\partial x}\right]_{\substack{x=l\\y=0}}=\frac{1-\nu^2}{2EI}pl^2-\frac{1+\nu}{EI}ph^2-2A=0 \implies A=\frac{1-\nu^2}{4EI}pl^2-\frac{1+\nu}{2EI}ph^2$$

که در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} u_x=\dfrac{1-\nu^2}{2EI}py(l^2-x^2)+\dfrac{1+\nu}{6EI}py\left[(2-\nu)y^2-6h^2\right] \\ u_y=\dfrac{\nu(1+\nu)}{2EI}pxy^2+\dfrac{1-\nu^2}{6EI}p(x^3-3xl^2+2l^3) \end{cases}$$

همانطور که ملاحظه می‌گردد u_x تابع درجهٔ ۳ از y است و بنابراین فرض مسطح ماندن مقاطع (فرض برنولی) در حالت کلی صادق نیست. فقط وقتی این فرض قابل قبول است که بتوان از جملهٔ

$$\frac{(1+\nu)}{3}\left[(2-\nu)y^2-6h^2\right]$$

در برابر جملهٔ $1-\nu^2(l^2-x^2)$ صرفنظر کرد و این به شرطی میسر است که h نسبت به l خیلی کوچک باشد. به عبارت دیگر اگر ورق نازک باشد ($h \ll l$) می‌توان نوشت:

$$u_x=\frac{1-\nu^2}{2EI}py(l^2-x^2)$$

و در نتیجه به علت خطی بودن u_x نسبت به y فرض برنولی صادق است.

اگر شیب تماس عمود بر میان سطح را نسبت به قائم بخواهیم بدست آوریم کافیست از u_x نسبت به y مشتق بگیریم:

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{1-\nu^2}{2EI} p (l^2 - x^2) + \frac{1+\nu}{6EI} p \left[3(2-\nu) y^2 - 6h^2 \right]$$

در روی میان سطح می‌شود:

$$\left.\frac{\partial u_x}{\partial y}\right]_{y=0} = \frac{1-\nu^2}{2EI} p (l^2 - x^2) - \frac{1+\nu}{EI} p h^2$$

به ازای مقادیر مختلف x جدول زیر را داریم:

$$\alpha = + \frac{1+\nu}{EI} p h^2$$

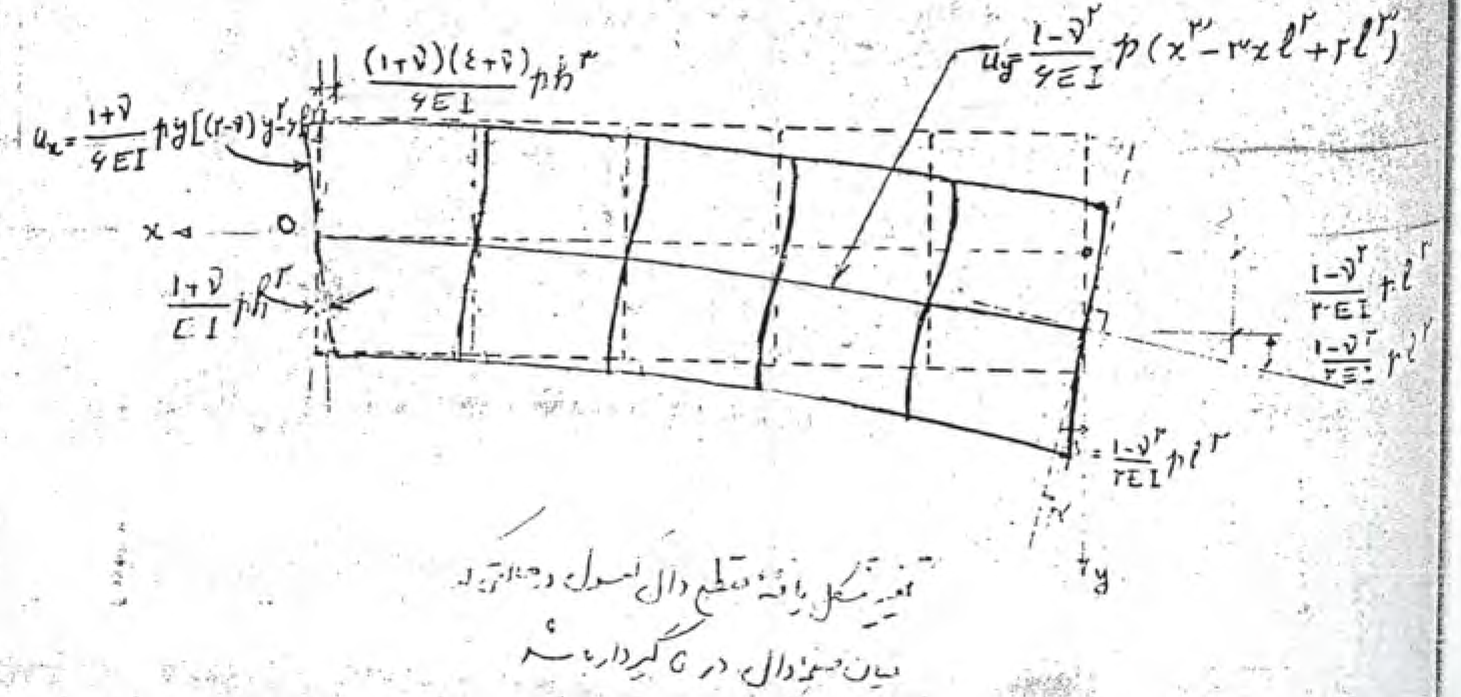
$$\beta = \frac{1-\nu^2}{2EI} p l^2 \qquad \left.\frac{\partial u_x}{\partial y}\right]_{y=0} = \beta \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) - \alpha \qquad \delta = \frac{p h l^2 (1-\nu^2)}{2EI}$$

$$u_x\big]_{y=h} = \delta \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) - \theta \qquad \theta = \frac{(1+\nu)(4+\nu) p h^3}{6EI}$$

x	0	$\frac{l}{5}$	$\frac{2l}{5}$	$\frac{3l}{5}$	$\frac{4l}{5}$
$\left.\frac{\partial u_x}{\partial y}\right]_{y=0}$	$\beta-\alpha$	$\frac{24}{25}\beta-\alpha$	$\frac{21}{25}\beta-\alpha$	$\frac{16}{25}\beta-\alpha$	$\frac{9}{25}\beta-\alpha$
$u_x\big]_{y=-h}$	$-ph\left[\frac{1-\nu^2}{2EI}l^2-\frac{(1+\nu)(4+\nu)}{6EI}h^2\right] = +\theta-\delta$	$-\frac{24}{25}\delta+\theta$	$-\frac{21}{25}\delta+\theta$	$-\frac{16}{25}\delta+\theta$	$-\frac{9}{25}\delta+\theta$
$u_x\big]_{y=h}$	$\delta-\theta$	$\frac{24}{25}\delta-\theta$	$\frac{21}{25}\delta-\theta$	$\frac{16}{25}\delta-\theta$	$\frac{9}{25}\delta-\theta$
$u_y\big]_{y=0}$	2γ	$1{,}408\gamma$	$0{,}864\gamma$	$0{,}416\gamma$	$0{,}112\gamma$

$$u_y\big]_{y=0} = \frac{1-\nu^2}{6EI} p (x^3 - 3xl^2 + 2l^3) = \frac{1-\nu^2}{6EI} p l^3 \left(\frac{x^3}{l^3} - 3\frac{x}{l} + 2 \right)$$

$$\gamma = \frac{1-\nu^2}{6EI} p l^3 \qquad u_y\big]_{y=0} = \gamma \left(\frac{x^3}{l^3} - 3\frac{x}{l} + 2 \right)$$



تغییر شکل یافته مقطع دال اصول وجداری
میان صفحه دال در C گیردار باشد

حالت دوم: مقطع دال، AD در نقطه‌ی O بدون دوران باقی می‌ماند:

$$x = l \; ; \; y = 0 \qquad \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0$$

از رابطه‌ی

$$u_x = -\frac{1-\nu^2}{2EI} p x^2 y + \frac{2+\nu-\nu^2}{6EI} p y^3 + 2Ay$$

داریم.

$$\left.\frac{\partial u_x}{\partial y}\right]_{\substack{x=l\\y=0}} = \left[-\frac{1-\nu^2}{2EI} p x^2 + \frac{2+\nu-\nu^2}{2EI} p y^2 + 2A\right]_{\substack{x=l\\y=0}} = -\frac{1-\nu^2}{2EI} p l^2 + 2A = 0$$

و از آن $A = \frac{1-\nu^2}{4EI} p l^2$ به دست می‌آید و با قرار دادن آن در روابط u_x و u_y داریم:

$$u_x = \frac{1-\nu^2}{2EI} p y (l^2 - x^2) + \frac{1+\nu}{6EI} p y^3 (2-\nu)$$

$$u_y = \frac{\nu(1+\nu)}{2EI} p x y^2 + \frac{1-\nu^2}{6EI} p (x^3 - 3x l^2 + 2l^3) - \underline{\frac{1-\nu^2}{2EI} p l^2 (x-l)}$$

اگر شیب میان سطح را نسبت به افق بدست آوریم:

$$\left.\frac{\partial u_y}{\partial x}\right]_{y=0} = \frac{1-\nu^2}{6EI} p (3x^2 - 3l^2) - \frac{1-\nu^2}{2EI} p l^2 = \frac{1-\nu^2}{2EI} p (x^2 - 2l^2)$$

ملاحظه می‌شود که در نقطه‌ی O که داریم:

$$\left.\frac{\partial u_y}{\partial x}\right]_{\substack{x=l\\y=0}} = -\frac{1-\nu^2}{2EI} p l^2$$

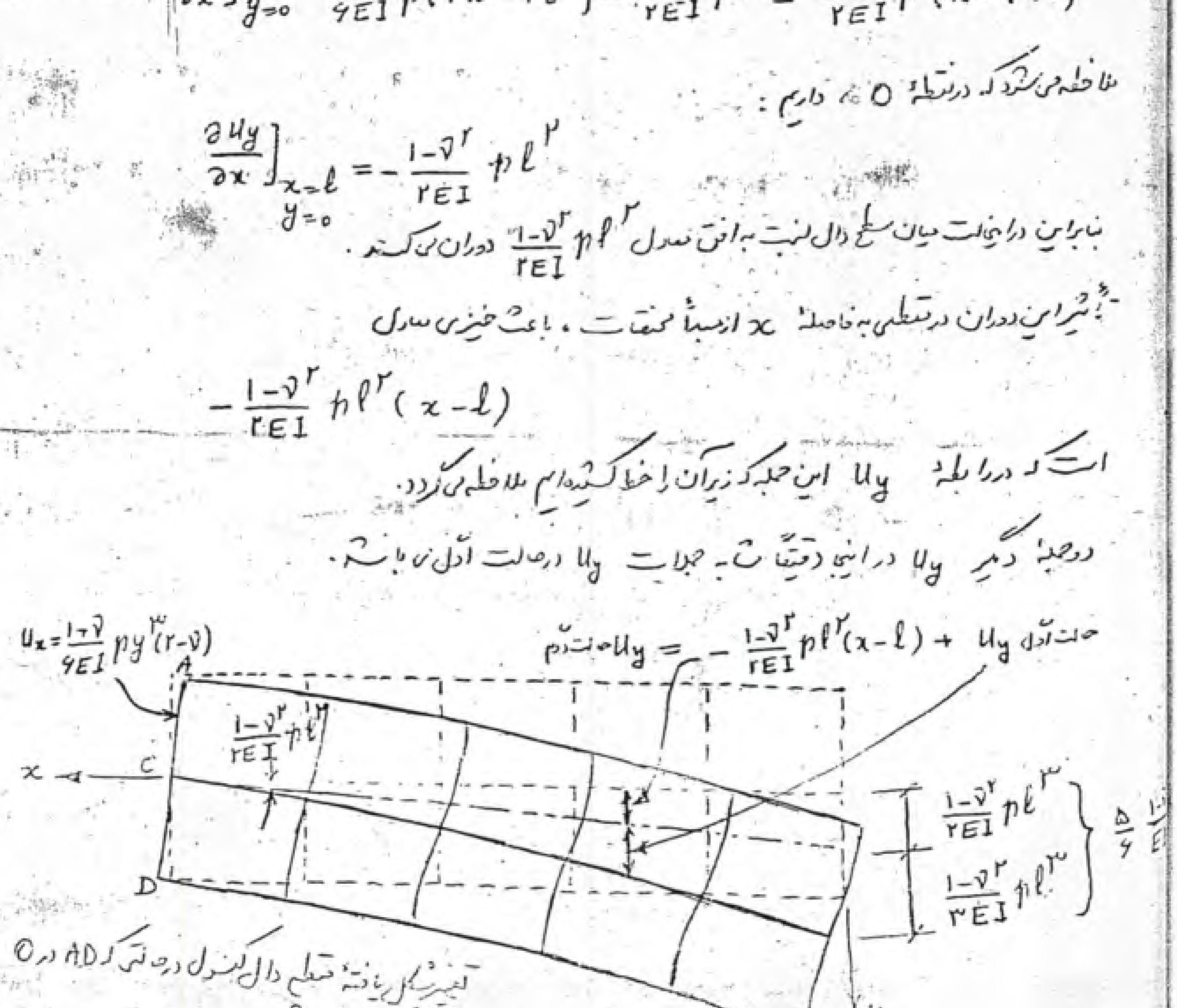
بنابراین در این حالت میان سطح دال نسبت به افق معادل $\frac{1-\nu^2}{2EI} p l^2$ دوران می‌کند.

تأثیر این دوران در مقطعی به فاصله‌ی x از مبدأ مختصات، باعث خیزی معادل

$$-\frac{1-\nu^2}{2EI} p l^2 (x-l)$$

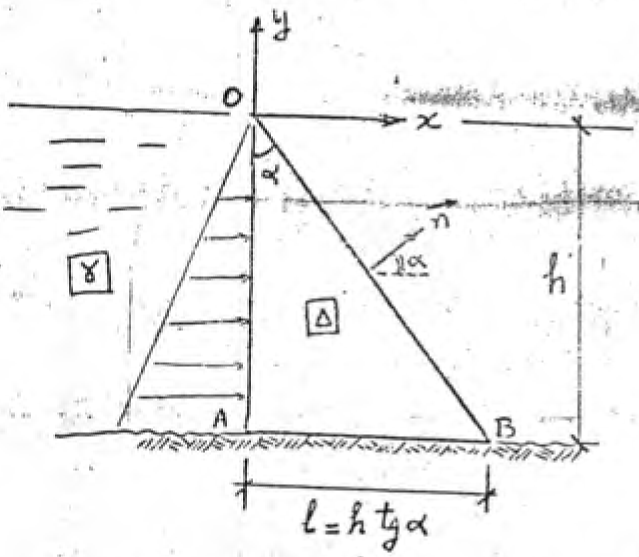
است که در رابطه‌ی u_y این جمله که زیر آن را خط کشیده‌ایم ملاحظه می‌گردد.

در حقیقت دیگر u_y در اینجا مساوی است با جملات u_y در حالت اول می‌باشد.



تغییر شکل یافته‌ی مقطع دال کنسول در حالتی که AD در O دوران نداشته باشد

۷-۵- مثال ۲: سدی وزنی با مقطع مثلث قائم الزاویه مطابق شکل با مصالحی به وزن مخصوص Δ ساخته شده است. ارتفاع سد برابر h و وزن مخصوص مایع پشت سد γ می باشد. عرض پی سد معادل $l = h\,tg\alpha$ که در آن α زاویهٔ رأس سد است می باشد. مطلوبست تعیین توزیع تنش در بدنهٔ سد و مؤلفه های بردار تغییر مکان. سد به اندازهٔ کافی طویل می باشد به طوری که بتوان آن را در حالت کرنش مسطح فرض کرد.



حل: در اینجا مؤلفه های نیروی حجمی عبارتند از: $f_x = 0$ و $f_y = -\Delta$. در بدو امر به تعیین تابع پتانسیل نیروهای حجمی می پردازیم:

$$f_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \Rightarrow V(y)$$

$$f_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\Delta \Rightarrow V = \Delta y$$

تابع تنش ایری را به صورت $\phi = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ حدس می زنیم. در اینحالت باید تابع تنش ایری معادلهٔ $\nabla^4\phi \equiv \frac{2\nu-1}{1-\nu}\nabla^2 V$ را اقناع کند.

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

$$\nabla^4 \phi = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad \checkmark$$

تعیین تنش ها:

$$\sigma_{xx} = V + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \Delta y + 2cx + 6dy$$

$$\sigma_{yy} = V + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \Delta y + 6ax + 2by$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -2bx - 2cy$$

اقناع شرایط مرزی روی سطح S_T :

روی OA داریم: $x = 0 \quad \forall y \in [-h, 0]$ $\quad \begin{cases} T_x = -\gamma y \\ T_y = 0 \end{cases}$

$$\vec{n} = \begin{cases} n_x = -1 \\ n_y = 0 \end{cases}$$

$$\sigma_{ij} \cdot n_j = T_i \Rightarrow -\sigma_{xx} = -\gamma y \quad ; \quad -\sigma_{xy} = 0$$

$$\sigma_{xx}\Big]_{\substack{x=0 \\ \forall y}} = \Delta \cdot y + 6d \cdot y = (\Delta + 6d)\, y \equiv \gamma y \Rightarrow \Delta + 6d = \gamma \Rightarrow \boxed{d = \frac{\gamma - \Delta}{6}}$$

$$\sigma_{xy}\Big]_{\substack{x=0 \\ \forall y}} = -2cy \equiv 0 \Rightarrow \boxed{c = 0}$$

روی OB داریم :

$$\vec{n} = \begin{cases} n_x = \cos\alpha \\ n_y = \sin\alpha \end{cases} \qquad \vec{T} = \begin{cases} T_x = 0 \\ T_y = 0 \end{cases}$$

$x = -y\, tg\,\alpha$ معادلهٔ خط : OB

$$\sigma_{ij}\, n_j = T_i \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{xx} \cdot \cos\alpha + \sigma_{xy} \sin\alpha = 0 \\ \sigma_{xy} \cdot \cos\alpha + \sigma_{yy} \sin\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{xx} + \sigma_{xy}\, tg\,\alpha = 0 \\ \sigma_{xy} + \sigma_{yy}\, tg\,\alpha = 0 \end{cases}$$

در روابط مربوط به σ_{xx} و σ_{yy} و σ_{xy} مختصات مربوط به خط OB یعنی $x = -y\, tg\,\alpha$ قرار می‌دهیم و دو رابطهٔ تعادل فوق را اقناع می‌کنیم :

$$\sigma_{xx}\Big]_{x=-y\, tg\alpha} = y\,(\Delta - 2c\, tg\,\alpha + 6d)$$

$$\sigma_{yy}\Big]_{x=-y\, tg\alpha} = y\,(\Delta - 6a\, tg\,\alpha + 2b)$$

$$\sigma_{xy}\Big]_{x=-y\, tg\alpha} = y\,(2b\, tg\,\alpha - 2c)$$

$$\sigma_{xx} + \sigma_{xy}\, tg\,\alpha = y\left[\Delta - 2c\, tg\,\alpha + 6d + 2b\, tg^2\alpha - 2c\, tg\,\alpha\right] = 0 \quad \forall y \in [-h, 0]$$

$$\Rightarrow \cancel{\Delta} + (\gamma - \cancel{\Delta}) + 2b\, tg^2\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{b = -\frac{\gamma}{2\, tg^2\alpha}}$$

$$\sigma_{xy} + \sigma_{yy}\, tg\,\alpha = y\left[2b\, tg\,\alpha - 2c + \Delta\, tg\,\alpha - 6a\, tg^2\alpha + 2b\, tg\,\alpha\right] = 0 \quad \forall y \in [-h, 0]$$

$$\Rightarrow -\frac{2\gamma}{tg\,\alpha} + \Delta\, tg\,\alpha - 6a\, tg^2\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{\gamma}{3\, tg^3\alpha} + \frac{\Delta}{6\, tg\,\alpha}}$$

در نتیجه توزیع تنش در بدنهٔ سد برابر زیر است :

$$\sigma_{xx} = (\Delta + 6d)\,y = (\Delta + \gamma - \Delta)\,y = \gamma y$$

$$\sigma_{yy} = (\Delta + 2b)\,y + 6ax = \left(\Delta - \frac{\gamma}{tg^2\alpha}\right)y + \left(\frac{\Delta}{tg\,\alpha} - \frac{2\gamma}{tg^3\alpha}\right)x$$

$$\sigma_{xy} = -2bx - 2cy = \frac{\gamma}{tg^2\alpha}\,x$$

$$\sigma_{zz} = \nu\,(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$$

برای سهولت نوشتن $k = ctg\,\alpha$ قرار داده می‌شود :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \gamma y \\ \sigma_{yy} = (\Delta - \gamma k^2)\,y + (\Delta k - 2\gamma k^3)\,x \\ \sigma_{xy} = \gamma k^2 x \\ \sigma_{zz} = \nu\left[(\Delta - \gamma k^2 + \gamma)\,y + (\Delta k - 2\gamma k^3)\,x\right] \\ \sigma_{xz} = 0 \\ \sigma_{yz} = 0 \end{cases}$$

تعیین کرنش‌ها :

$$e_{xx} = \frac{1}{E}\left\{(1-\nu^2)\gamma y - \nu(1+\nu)\left[(\Delta - \gamma k^2)\,y + (\Delta k - 2\gamma k^3)\,x\right]\right\}$$

$$e_{yy} = \frac{1}{E}\left\{(1-\nu^2)\left[(\Delta - \gamma k^2)\,y + (\Delta k - 2\gamma k^3)\,x\right] - \nu(1+\nu)\gamma y\right\}$$

$$e_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\,\gamma k^2 x$$

$$e_{xz} = e_{yz} = e_{zz} = 0$$

تعیین مؤلفه‌های تغییر مکان :

$$e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \Rightarrow u_x = \frac{1}{E}\left\{(1-\nu^2)\gamma xy - \nu(1+\nu)\left[(\Delta - \gamma k^2)\,xy + \frac{1}{2}(\Delta k - 2\gamma k^3\right.\right.$$

$$e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \Rightarrow u_y = \frac{1}{E}\left\{(1-\nu^2)\left[\frac{1}{2}(\Delta - \gamma k^2)\,y^2 + (\Delta k - 2\gamma k^3)\,xy\right] - \nu(1+\nu)\,\frac{1}{2}\right.$$

$$e_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)$$

$$2\times\frac{1+\nu}{E}\,\gamma k^2 x \equiv \frac{1}{E}\left\{(1-\nu^2)\gamma x - \nu(1+\nu)\left[(\Delta - \gamma k^2)\,x\right]\right\} + \frac{d f_1(y)}{dy} + \frac{(1-\nu^2)}{E}(\Delta k - 2\gamma$$

$$+ \frac{d f_2(x)}{dx}$$

$$2(1+\nu)\gamma k^2 x-(1-\nu^2)\gamma x+\nu(1+\nu)(\Delta-\gamma k^2)x-E\frac{df_2(x)}{dx}=$$
$$=E\frac{df_1(y)}{dy}+(1-\nu^2)(\Delta k-2\gamma k^3)y$$

بشرطی این دو طرف برقرار است که هر یک از طرفین برابر با مقدار ثابت A باشند:

$$\frac{df_2(x)}{dx}=-\frac{A}{E}+\frac{1}{E}\{[2(1+\nu)\gamma k^2-(1-\nu^2)\gamma+\nu(1+\nu)(\Delta-\gamma k^2)]\}x$$

$$f_2(x)=-\frac{Ax}{E}+\frac{1}{2E}\left[2(1+\nu)\gamma k^2-(1-\nu^2)\gamma+\nu(1+\nu)(\Delta-\gamma k^2)\right]x^2$$

$$\frac{df_1(y)}{dy}=\frac{A}{E}-\frac{1-\nu^2}{E}(\Delta k-2\gamma k^3)y$$

$$f_1(y)=\frac{Ay}{E}-\frac{1-\nu^2}{2E}(\Delta k-2\gamma k^3)y^2+C$$

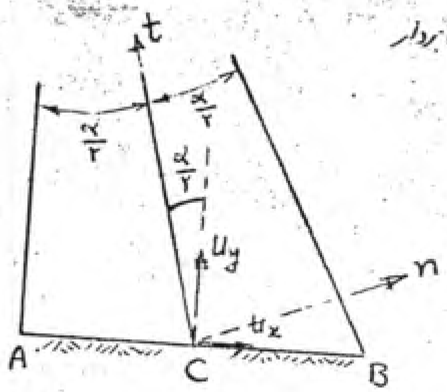
از جایگزینی مقادیر $f_1(y)$ و $f_2(x)$ در روابط مربوط به u_x و u_y داریم:

$$u_x=\frac{1-\nu^2}{E}\gamma xy-\frac{\nu(1+\nu)}{E}(\Delta-\gamma k^2)xy-\frac{\nu(1+\nu)}{2E}(\Delta k-2\gamma k^3)x^2+\frac{Ay}{E}-\frac{1-\nu^2}{2E}(\Delta$$

$$u_y=\frac{1-\nu^2}{2E}(\Delta-\gamma k^2)y^2+\frac{1-\nu^2}{E}(\Delta k-2\gamma k^3)xy-\frac{\nu(1+\nu)}{2E}\gamma y^2-\frac{Ax}{E}+\frac{1+\nu}{E}\gamma k^2x^2$$
$$-\frac{1-\nu^2}{2E}\gamma x^2+\frac{\nu(1+\nu)}{2E}(\Delta-\gamma k^2)x^2+B$$

برای تعیین ثابتهای A، B و C چون شرایط گیرداری AB در تمام نقاط را نمی‌توان تأمین کرد، نیمساز AOB را رسم می‌کنیم تا AB را در C قطع کند. مختصات نقطه C عبارتست از: $x=h\,tg\frac{\alpha}{2}$ و $y=-h$ عمود بر نیمساز OC در نقطه C را گیردار و بدون دوران در نظر می‌گیریم،

محور t را در امتداد CO فرض می‌کنیم، تصویر مؤلفه‌های بردار تغییرمکان در امتداد محور t حاصل می‌شود:



$$u_t=u_y\cos\frac{\alpha}{2}-u_x\sin\frac{\alpha}{2}$$

در نقطه C در اینصورت داریم:

$u_x=0$ (1)

$u_y=0$ (2)

$$\frac{\partial u_t}{\partial n}=0$$

چون رابطه بین مختصات (x,y) با (n,t) به صورت زیر است :

$$x = n\cos\frac{\alpha}{2} - t\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$y = n\sin\frac{\alpha}{2} + t\cos\frac{\alpha}{2}$$

در نتیجه از قاعده زنجیره‌ای داریم :

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial x}{\partial n}\cdot\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial n}\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} = \cos\frac{\alpha}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \sin\frac{\alpha}{2}\frac{\partial}{\partial y}$$

لذا $\frac{\partial u_t}{\partial n} = 0$ با توجه به رابطه بین u_t با u_x و u_y به صورت زیر در می‌آید :

$$\frac{\partial u_t}{\partial n} = \cos\frac{\alpha}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u_y\cos\frac{\alpha}{2} - u_x\sin\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\frac{\alpha}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(u_y\cos\frac{\alpha}{2} - u_x\sin\frac{\alpha}{2}\right) = 0$$

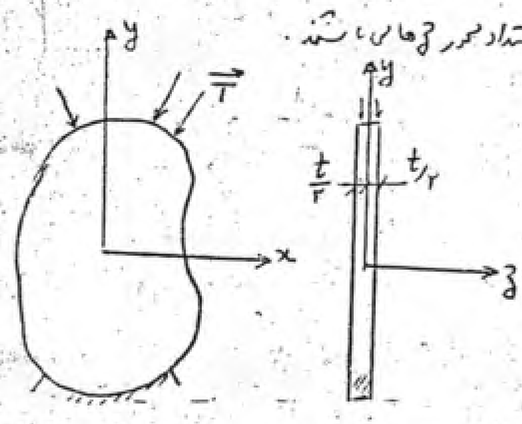
$$\Rightarrow \cos^2\frac{\alpha}{2}\frac{\partial u_y}{\partial x} - \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\frac{\partial u_x}{\partial x} + \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\frac{\partial u_y}{\partial y} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\frac{\partial u_x}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

از روابط (۱) تا (۳) می‌توان ثابت‌های A، B و C را به دست آورد. (ادامه حل مسئله به عهده دانشجو)

۷-۶ - مسائل تنش مسطح و روابط مربوط به آن :

صفحه نازک که تحت اثر بارهائی در میان سطح قرار گرفته است را در نظر می‌گیریم. محورهای مختصات x و y در میان سطح و محور z ها در امتداد ضخامت صفحه فرض می‌گردد. نیروهای حجمی $f_x(x,y)$ و $f_y(x,y)$ و $f_z = 0$ می‌باشند.

نیروهای سطحی فقط بر لبه‌های صفحه اثر کرده و فاقد مؤلفه در امتداد محور z ها می‌باشند.



S_u

با توجه به اینکه روی سطوح $z = \pm\frac{t}{2}$

(t ضخامت صفحات) هیچگونه نیروی سطحی اثر نمی‌کند

از معادلات تعادل مرزی با نیروهای سطحی

$$\sigma_{ij}n_j = T_i$$

می‌توان نتیجه گرفت که :

$$\sigma_{xz} = 0$$
$$\sigma_{yz} = 0$$
$$\sigma_{zz} = 0$$

با توجه به کم بودن ضخامت صفحه، از تغییرات تنش در ضخامت صفحه صرف‌نظر می‌شود. لذا از کلیه نقاط صفحه می‌توان تصور کرد که

سه مؤلفه تنش فوق صفرند و بقیه مؤلفه‌های تنش نیز مستقل از z می‌باشند :

$$\sigma_{xx}(x,y)$$
$$\sigma_{yy}(x,y)$$

چنانچه حل مسئله را محدود به تعیین توزیع تنش، کرنش و مؤلفه‌های تغییرمکان در مقطع عرضی کنیم، در این صورت معادلات حاکم بر مسئله به شرح زیرند:

معادلات تعادل تنش‌ها: $\sigma_{ij,j} + f_i = 0$ از این معادلات فقط دو معادله زیر باقی می‌ماند:

$$(1) \quad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = 0$$

روابط بین تنش ـ کرنش:

$$e_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy})$$

$$e_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx})$$

$$(2) \quad e_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy}$$

$$e_{xz} = 0$$

$$e_{yz} = 0$$

$$e_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

با توجه به روابط e_{xx} و e_{yy} و e_{zz} با حذف σ_{xx} و σ_{yy} بین این سه رابطه داریم:

$$(3) \quad e_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu}(e_{xx} + e_{yy})$$

عکس روابط (۲) می‌شود:

$$(4) \quad \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{xy} \end{Bmatrix}$$

روابط کرنش ـ تغییرمکان:

$$e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

$$e_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)$$

$$(5) \quad e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$e_{xz} = e_{yz} = 0 \Rightarrow e_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) = 0$$

$$e_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) = 0$$

از بین روابط سازگاری کرنش‌ها فقط یک رابطه زیر باقی می‌ماند:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = 2\,\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad (6)$$

بدین‌ترتیب ملاحظه می‌شود که در حالت تنش مسطح چنانچه مجهولات را σ_{xx}، σ_{yy}، σ_{xy}، e_{xx}، e_{yy}، e_{xy} و u_x و u_y یعنی ۸ مجهول در هر نقطه در نظر بگیریم، تعداد معادلات در هر نقطه عبارت است از ۲ معادله تعادل، ۳ رابطه تنش-کرنش و ۳ رابطه کرنش-تغییر مکان و یک معادله سازگاری که جهت کنترل جواب به کار می‌رود؛ بدین‌ترتیب در هر نقطه هم ۸ معادله داریم.

چنانچه روابط فوق را در دو حالت تنش مسطح و کرنش مسطح با یکدیگر مقایسه کنیم جدول زیر را داریم:

	تنش مسطح	کرنش مسطح
معادلات تعادل	$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = 0$ $\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = 0$	$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = 0$ $\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = 0$
روابط تنش-کرنش	$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1-\nu\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}e_{xx}\\ e_{yy}\\ e_{xy}\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & 1-2\nu\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}e_{xx}\\ e_{yy}\\ e_{xy}\end{Bmatrix}$
روابط کرنش-تغییر مکان	$e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$ $e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$ $e_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)$	$e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$ $e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$ $e_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)$
معادلات سازگاری	$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y}$	$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y}$

از مقایسه فوق ملاحظه می‌شود که فقط روابط تنش-کرنش در دو حالت با یکدیگر تفاوت دارند. بنابراین اگر با تمهیداتی بتوان این روابط را یکسان کرد، در این صورت حل دو مسئله «تنش مسطح» و «کرنش مسطح» کاملاً یکسان خواهد بود.

برای این منظور ضرایب ارتجاعی و پواسون را در حالت کرنش مسطح با $\bar{E}$ و $\bar{\nu}$ نشان می‌دهیم و ماتریس ضرایب ماده را در دو حالت مساوی یکدیگر قرار می‌دهیم:

$$\frac{E}{1-\nu^2} = \frac{\bar{E}(1-\bar{\nu})}{(1+\bar{\nu})(1-2\bar{\nu})}$$

$$\frac{E\nu}{1-\nu^2} = \frac{\bar{E}\,\bar{\nu}}{(1+\bar{\nu})(1-2\bar{\nu})} \qquad (7)$$

$E \qquad \bar{E}$

در نتیجه با استفاده از رابطه (۷) مستقل از تغییر مورد نظر از ثابت‌های $\bar{E}$ و $\bar{\nu}$ به شرح زیر حاصل می‌گردد :

$$\bar{E} = E\,\frac{1+2\nu}{(1+\nu)^2} \qquad (8)$$

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{1+\nu}$$

بنابراین با استفاده از این مقادیر $\bar{E}$ و $\bar{\nu}$ چنانچه مسئله را در حالت کرنش مسطح حل کنیم، مانند آنست که روابط بین تنش و کرنش را در حالت تنش مسطح نوشته باشیم و جواب‌های به دست آمده از این روش، در واقع جواب‌های مسئله تنش مسطح می‌باشد.

به عبارت دیگر چنانچه حل مسئله‌ای را در حالت کرنش مسطح داشته باشیم و بخواهیم جواب‌های همان مسئله را در حالت تنش مسطح به دست آوریم [منظور از جواب‌ها همان ۸ مجهول ذکر شده در سطر دوم صفحه ۱۷۷ می‌باشد]، کافی است که به جای E و ν مقادیر $\frac{E(1+2\nu)}{(1+\nu)^2}$ و $\frac{\nu}{1+\nu}$ قرار دهیم تا جواب‌های مسئله تنش مسطح به دست آید.

به همین ترتیب چنانچه از رابطه (۱۵) بند ۷-۴ استفاده کنیم داریم :

$$\nabla^4\phi = \frac{2\bar{\nu}-1}{1-\bar{\nu}}\,\nabla^2 V$$

به جای $\bar{\nu}$ از رابطه ۸ مقدار مربوطه را قرار می‌دهیم :

$$(9)\qquad \nabla^4\phi = \frac{2\frac{\nu}{1+\nu}-1}{1-\frac{\nu}{1+\nu}}\,\nabla^2 V \Rightarrow \nabla^4\phi = (\nu-1)\nabla^2 V$$

رابطه فوق را می‌توان مستقیماً نیز با استفاده از روابط (۱) تا (۶) نیز به دست آورد. به این ترتیب که :

از روابط (۲) مشتق می‌گیریم :

$$(10)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} &= \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\sigma_{xx}}{\partial y^2} - \nu\frac{\partial^2\sigma_{yy}}{\partial y^2}\right)\\ \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\sigma_{yy}}{\partial x^2} - \nu\frac{\partial^2\sigma_{xx}}{\partial x^2}\right)\\ \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x\partial y} &= \frac{1+\nu}{E}\,\frac{\partial^2\sigma_{xy}}{\partial x\partial y} \end{aligned}$$

روابط (۱۰) را در معادله سازگاری (۶) قرار می‌دهیم :

$$(11)\qquad \frac{\partial^2\sigma_{xx}}{\partial y^2} - \nu\frac{\partial^2\sigma_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\sigma_{yy}}{\partial x^2} - \nu\frac{\partial^2\sigma_{xx}}{\partial x^2} = 2(1+\nu)\frac{\partial^2\sigma_{xy}}{\partial x\partial y}$$

حال از معادلات تعادل (۱) مشتق می‌گیریم :

$$(12)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2\sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\sigma_{xy}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial f_x}{\partial x} &= 0\\ \frac{\partial^2\sigma_{xy}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\sigma_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial f_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

از جمع کردن روابط (۱۲) می‌توان $2\frac{\partial^2\sigma_{xy}}{\partial x\partial y}$ را به دست آورد:

$$2\frac{\partial^2\sigma_{xy}}{\partial x\partial y} = -\frac{\partial^2\sigma_{xx}}{\partial x^2} - \frac{\partial f_x}{\partial x} - \frac{\partial^2\sigma_{yy}}{\partial y^2} - \frac{\partial f_y}{\partial y} \qquad (۱۳)$$

از قرار دادن (۱۳) در رابطه سازگاری (۱۱) داریم:

$$\frac{\partial^2\sigma_{xx}}{\partial y^2} - \nu\frac{\partial^2\sigma_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\sigma_{yy}}{\partial x^2} - \nu\frac{\partial^2\sigma_{xx}}{\partial x^2} = (1+\nu)\left[-\frac{\partial^2\sigma_{xx}}{\partial x^2} - \frac{\partial f_x}{\partial x} - \frac{\partial^2\sigma_{yy}}{\partial y^2} - \frac{\partial f_y}{\partial y}\right] \qquad (۱۴)$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}) = -(1+\nu)\left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\right) \qquad (۱۵)$$

مجموعه ۳ معادله شماره‌های (۱) و (۱۵) سه معادله مستقل هستند که می‌توان از آن سه مجهول σ_{xx} ، σ_{yy} و σ_{xy} را به دست آورد. برای اینکه تعداد مجهولات در هر نقطه از جسم را به یک مجهول کاهش دهیم از تابع کمکی به اسم تابع تنش ایری استفاده می‌کنیم. تابع تنش ایری به نحوی در نظر گرفته می‌شود که معادلات تعادل به خودی خود اقناع شوند.

تابع پتانسیل نیروهای حجمی را $V(x,y)$ می‌نامیم. به نحوی که:

$$(۱۶) \qquad f_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad f_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

در این صورت معادلات تعادل (۱) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$(۱۷) \qquad \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{xx}-V) + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} \equiv 0, \qquad \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_{yy}-V) \equiv 0$$

حال تابع تنش ایری را به شرح زیر تعریف می‌کنیم تا معادلات تعادل (۱۷) در کلیه نقاط جسم صادق باشد:

$$(۱۸) \qquad \sigma_{xx}-V = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}, \qquad \sigma_{yy}-V = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}, \qquad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}$$

از قرار دادن تنش‌ها برحسب تابع تنش ایری در معادله سازگاری (۱۵) داریم:

$$(۱۹) \qquad \nabla^2\left[\left(V+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)+\left(V+\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)\right] = -(1+\nu)\left(-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$\nabla^4\phi = (\nu-1)\,\nabla^2 V$$

۷-۷- مراحل حل مسائل تنش مسطح با استفاده از تابع تنش ایری:

در مرحله اول با توجه به توزیع نیروهای حجمی f_x و f_y تابع پتانسیل نیروهای حجمی $V(x,y)$ را به دست می‌آوریم به طوری که:

$$f_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$f_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

در گام دوم تابع تنش ایری $\phi(x,y)$ را حدس می‌زنیم به طوری که:

$$\nabla^4 \phi \equiv (\nu-1)\nabla^2 V$$

باشد.

گام سوم: توزیع تنش‌ها را در جسم تعیین می‌کنیم:

$$\sigma_{xx} = V + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

$$\sigma_{yy} = V + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$$

گام چهارم: با توجه به شرایط مرزی روی سطح S_T ثابت‌های مربوط به توزیع تنش‌ها را به دست می‌آوریم. در این گام چنانچه لازم باشد می‌توان از اصل سن‌ونان بهره گرفت. اما در صورتی که در این مرحله با تناقض برخورد کردیم تابع تنش ایری مناسب حدس زده نشده و مجدداً باید به گام دوم برگشت.

گام پنجم: با استفاده از روابط کرنش-تنش، کرنش‌ها را به دست آورده:

$$e_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy})$$

$$e_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx})$$

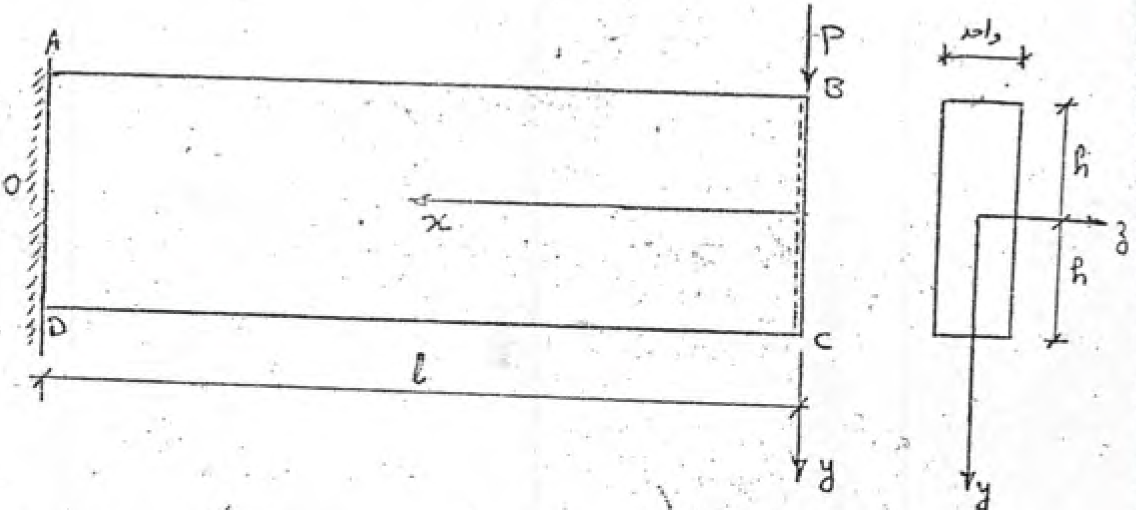
$$e_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy}$$

$$e_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

$$e_{xz} = e_{yz} = 0$$

گام ششم: با توجه به روابط کرنش-تغییرمکان $e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ مؤلفه‌های تغییرمکان را به دست آورده و از شرایط مرزی روی سطح S_u ثابت‌های مربوطه را به دست می‌آوریم.

۸-۷- مثال ۱: تیر کنسولی به طول l و ارتفاع $2h$ تحت اثر بار P در رأس کنسول قرار گرفته است. عرض مقطع تیر را واحد در نظر می‌گیریم. ابعاد l و $2h$ نسبت به عرض مقطع به حد کافی بزرگ می‌باشد که بتوان تیر را در حالت کرنش مسطح فرض کرد. توزیع تنش، کرنش و مؤلفه‌های تغییرمکان را به‌دست آورید. از وزن تیر صرف‌نظر می‌شود.



حل: با توجه به اینکه از نیروهای حجمی صرف‌نظر شده است، تابع پتانسیل نیروهای حجمی $V=0$ در نظر گرفته می‌شود.

تابع تنش ایری را به صورت زیر حدس می‌زنیم:

$$\Phi = ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4 + fxy$$

که در آن ضرایب a تا f ثابت در نظر گرفته شده‌اند.

برای اینکه تابع Φ تابع تنش ایری باشد باید داشته باشیم:

$$\nabla^4\Phi \equiv 0 \Rightarrow \frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4} \equiv 0$$

$$24a + 4c + 24e \equiv 0 \Rightarrow c = -6(a+e)$$

توزیع تنش را به‌دست می‌آوریم:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 2cx^2 + 6dxy + 12ey^2$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 12ax^2 + 6bxy + 2cy^2$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} = -3bx^2 - 4cxy - 3dy^2 - f$$

اعمال شرایط حدی روی سطح S_t:

روی سطح AB و DC:

$$\forall x \in [0, l] \qquad y = \pm h$$

$$\sigma_{ij} n_j = T_i \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{yy} = 0 \\ \sigma_{xy} = 0 \end{cases}$$

$$\sigma_{yy}\Big]_{y=\pm h} = 12ax^2 \pm 6bhx + 2ch^2 \equiv 0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

$$\sigma_{xy}\Big]_{y=\pm h} = -3bx^2 \mp 4chx - 3dh^2 - f \equiv 0 \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=0 \\ 3dh^2+f=0 \end{cases}$$

$$c = -6(a+e) \qquad \Rightarrow e=0$$

بنابراین تا اینجا تابع تنش ایری را می‌توان به صورت زیر نوشت:

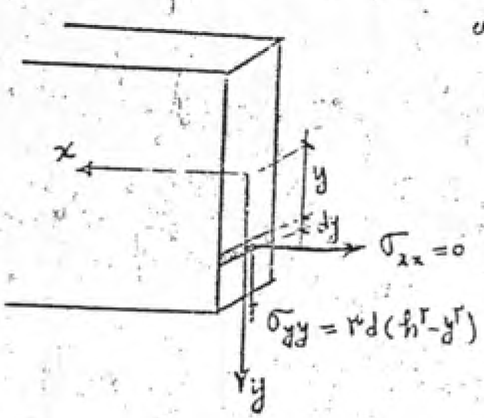
$$\phi = dxy^3 - 3dh^2xy$$

و تنش‌ها عبارتند از:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 6dxy \\ \sigma_{yy} = 0 \\ \sigma_{xy} = -3dy^2 + 3dh^2 = 3d(h^2-y^2) \end{cases}$$

شرایط حدی روی سطح BC:

با استفاده از اصل سن‌ونان باید برآیند تنش‌های اعمال شده بر سطح BC معادل برش P باشد:



$$\text{نیروی محوری} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx}\Big]_{x=0} dy = 0$$

$$\text{گشتاور} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx}\Big]_{x=0} y\, dy = 0$$

$$\text{نیروی برشی} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy}\Big]_{x=0} dy = P$$

$$\Rightarrow 3d \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (h^2-y^2)\, dy = P \Rightarrow d = -\frac{P}{4h^3}$$

بنابراین توزیع تنش در جسم برابر است با:

$$\sigma_{xx} = -\frac{3}{2}\frac{P}{h^3}xy$$

$$\sigma_{yy} = 0$$

$$\sigma_{xy} = \frac{3P}{4h}\left(\frac{y^2}{h^2}-1\right)$$

جواب دقیق با جواب به دست آمده از روابط مقاومت مصالح یکی می‌باشد.

ممان اینرسی مقطع این تیر عبارتست از $I = \frac{2h^3}{3}$ که با جایگزینی آن در توزیع تنش‌ها داریم:

$$\sigma_{xx} = -\frac{P}{I}xy$$

$$\sigma_{yy} = 0$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{P}{2I}(h^2-y^2)$$

توزیع کرنش ها :

$$e_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) = -\frac{Pxy}{EI}$$

$$e_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) = \frac{\nu Pxy}{EI}$$

$$e_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G} = -\frac{P}{4GI}(h^2-y^2)$$

تعیین مؤلفه های تغییرمکان :

$$e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{Pxy}{EI} \Rightarrow u_x = -\frac{Px^2y}{2EI} + f_1(y)$$

$$e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\nu Pxy}{EI} \Rightarrow u_y = \frac{\nu Pxy^2}{2EI} + f_2(x)$$

$$e_{xy} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{P}{4GI}(h^2-y^2) \equiv -\frac{Px^2}{4EI} + \frac{\nu Py^2}{4EI} + \frac{1}{2}\frac{df_1(y)}{dy} + \frac{1}{2}\frac{df_2(x)}{dx}$$

رابطهٔ فوق را با جدا سازی توابع x و توابع y به صورت زیر می توان نوشت :

$$-\frac{df_2(x)}{dx} + \frac{Px^2}{2EI} - \frac{Ph^2}{2GI} = \frac{df_1(y)}{dy} - \frac{Py^2}{2GI} + \frac{\nu Py^2}{2EI}$$

که از آن نتیجه می شود :

$$\frac{df_1(y)}{dy} - \frac{Py^2}{2GI} + \frac{\nu Py^2}{2EI} = A \qquad \Rightarrow \qquad \frac{df_1(y)}{dy} = A + \frac{Py^2}{2GI} - \frac{\nu Py^2}{2EI}$$

$$-\frac{df_2(x)}{dx} + \frac{Px^2}{2EI} - \frac{Ph^2}{2GI} = A \qquad \qquad \frac{df_2(x)}{dx} = -A + \frac{Px^2}{2EI} - \frac{Ph^2}{2GI}$$

از انتگرال گیری روابط فوق داریم :

$$f_1(y) = Ay + \frac{Py^3}{6GI} - \frac{\nu Py^3}{6EI}$$

$$f_2(x) = -Ax + \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Ph^2}{2GI}x$$

با جایگزینی $f_1(y)$ و $f_2(x)$ در روابط مربوط به u_x و u_y حاصل می شود :

$$u_x = -\frac{Px^2y}{2EI} + \frac{Py^3}{6GI} - \frac{\nu Py^3}{6EI} + Ay + B$$

$$u_y = \frac{\nu Pxy^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Ph^2x}{2GI} - Ax + C$$

ثابتهای A ، B و C با توجه به شرایط گیرداری در انتهای تیر تعیین می شوند. اگر تغییرمکان در نقطهٔ O صفر باشد :

$$x = l\ ;\ y = 0 \qquad u_x = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$u_y = 0 \Rightarrow C - Al = \frac{Ph^2 l}{2GI} - \frac{Pl^3}{6EI}$$

برای جلوگیری از دوران انتهای تیر دو حالت زیر را می توان درنظر گرفت:

حالت اول : محور تیر در نقطهٔ O دوران نکند :

$$x=l\ ;\ y=0 \qquad \frac{\partial u_y}{\partial x}=0$$

$$\left.\frac{\partial u_y}{\partial x}\right]_{\substack{x=l\\y=0}} = \frac{3Pl^2}{6EI}-\frac{Ph^2}{2GI}-A=0 \Longrightarrow \begin{cases} A=\dfrac{P}{2I}\left(\dfrac{l^2}{E}-\dfrac{h^2}{G}\right)\\ C=\dfrac{Pl^3}{3EI}\end{cases}$$

در اینصورت :

$$\begin{cases} u_x=-\dfrac{Px^2y}{2EI}+\dfrac{Py^3}{6GI}-\dfrac{\nu Py^3}{6EI}+\dfrac{Py}{2I}\left(\dfrac{l^2}{E}-\dfrac{h^2}{G}\right)\\ u_y=\dfrac{\nu Pxy^2}{2EI}+\dfrac{Px^3}{6EI}-\dfrac{Pl^2x}{2EI}+\dfrac{Pl^3}{3EI}\end{cases}$$

در لبهٔ آزاد تیر، برای تار خنثی یعنی نقطهٔ $x=0\ ;\ y=0$ خیز تیر عبارت است از :

$$\left.u_y\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = \frac{Pl^3}{3EI}$$

که با نتایج مقاومت مصالح یکی است.

• حالت دوم : اگر لبهٔ تیر در نقطهٔ O را گیردار در نظر بگیریم، به عبارت دیگر تغییر شکل یافتهٔ AD در نقطهٔ O مماس بر امتداد قائم باقی بماند خواهیم داشت :

$$x=l\ ;\ y=0 \qquad \frac{\partial u_x}{\partial y}=0$$

$$\left.\frac{\partial u_x}{\partial y}\right]_{\substack{x=l\\y=0}} = -\frac{Pl^2}{2EI}+A=0 \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{Pl^2}{2EI}\\ C=\dfrac{Ph^2l}{2GI}+\dfrac{Pl^3}{3EI}\end{cases}$$

و در نتیجه :

$$\begin{cases} u_x=-\dfrac{Px^2y}{2EI}+\dfrac{Py^3}{6GI}-\dfrac{\nu Py^3}{6EI}+\dfrac{Py}{2I}\left(\dfrac{l^2}{E}\right)\\ u_y=\dfrac{\nu Pxy^2}{2EI}+\dfrac{Px^3}{6EI}-\dfrac{Pl^2x}{2EI}+\dfrac{Pl^3}{3EI}+\dfrac{Ph^2}{2GI}(l-x)\end{cases}$$

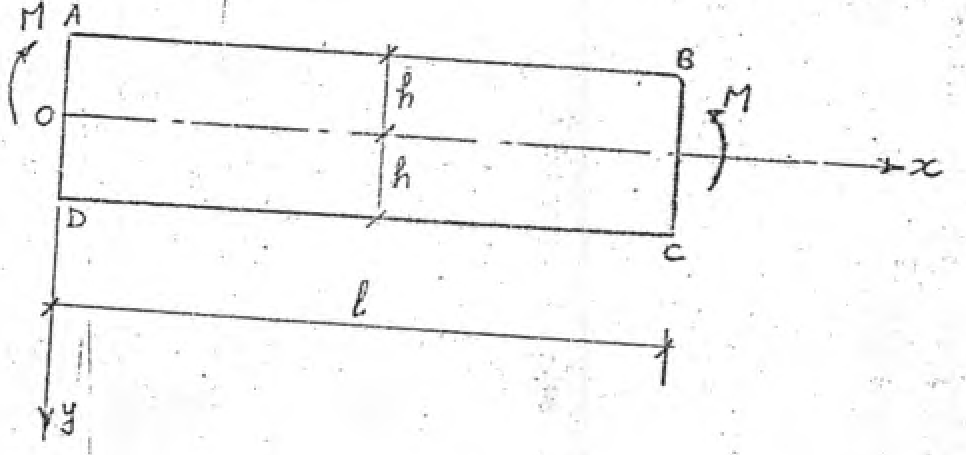
مقایسهٔ این روابط با حالت قبل این نتیجه را می‌دهد که براثر دوران محور تیر در حالت دوم، خیز به اندازهٔ $\dfrac{Ph^2}{2GI}(l-x)$ بیشتر از حالت اول است. علاوه برآن مخرج G نشان می‌دهد که این تغییر شکل اضافی ناشی از تغییر شکل‌های حاصله از تنش‌های برشی می‌باشد.

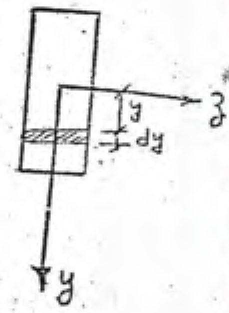
در حالت دوم خیز در انتهای آزاد تیر بصورت زیر می‌باشد :

$$\left.u_y\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = \frac{Pl^3}{3EI}+\frac{Ph^2l}{2GI}=\frac{Pl^3}{3EI}\left\{\underbrace{1}_{\text{مربوط به خمش}}+\underbrace{3(1+\nu)\frac{h^2}{l^2}}_{\text{مربوط به برش}}\right\}$$

۷-۹- مثال ۲: مسئله خمش خالص تیر.

قطعه تیری به طول l، ارتفاع $2h$ و عرض واحد (عرض نسبت به دو لبه دیگر خیلی کوچک است، به نحوی که بتوان مسئله را در حالت تنش مسطح تحلیل کرد) را که در دو انتهای آن لنگرهای خمشی M مطابق شکل اثر می‌کند را در نظر می‌گیریم. مطلوب است تعیین: توزیع تنش، کرنش و مؤلفه‌های تغییرمکان. رابطه بین لنگر خمشی M و خیز تیر را نیز به دست آورید. از نیروهای حجمی (وزن) صرف‌نظر می‌شود.





حل: تابع تنش ایری را به صورت زیر حدس می‌زنیم:

$$\Phi = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

برای اینکه تابع فوق یک تابع تنش ایری باشد داریم:

$$\nabla^4\phi = \frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\phi}{\partial y^4} \equiv 0$$

توزیع تنش‌های مربوط به تابع ϕ را به دست می‌آوریم:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 2cx + 6d\cdot y$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 6ax + 2by$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = -2bx - 2cy$$

اعمال شرایط مرزی تنش‌ها:

روی لبه‌های AB و CD:

$$y = \pm h \quad \forall x \in [0, l]$$

$$\sigma_{yy} \equiv 0 \Rightarrow 6ax \pm 2bh \equiv 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\sigma_{xy} \equiv 0 \Rightarrow -2bx \mp 2ch = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

روی لبه‌های AD و BC با توجه به اصل سن ونان داریم:

$$\int_{-h}^{+h} \sigma_{xx} y (dy) = M$$

نیروی محوری $N = \int_{-h}^{+h} \sigma_{xx}(dy) = 0$ نیروی برشی $T = \int_{-h}^{+h} \sigma_{xy}(dy) = 0$

$$M=\int_{-h}^{+h} 6d\cdot y^2\cdot dy = 2d\cdot y^3\Big]_{-h}^{+h} = 2d\,(h^3+h^3) = 4dh^3 \Rightarrow d=\frac{M}{4h^3}$$

$$N=\int_{-h}^{+h} 6d\cdot y\cdot dy = 3d\cdot y^2\Big]_{-h}^{+h} = 0$$

$$T=\int_{-h}^{+h} (-2bx-2cy)\,dy = 0$$

درنتیجه توزیع تنش درجسم به صورت زیر می‌گردد:

$$\sigma_{xx}=\frac{3M}{2h^3}\,y$$

$$\sigma_{yy}=0$$

$$\sigma_{xy}=0$$

$$\sigma_{xz}=\sigma_{yz}=\sigma_{zz}=0$$

اگر ممان اینرسی مقطع را با I نشان دهیم:

$$I=\frac{(2h)^3}{12}=\frac{2h^3}{3}$$

درنتیجه:

$$\sigma_{xx}=\frac{My}{I}$$

این رابطه در مقاومت مصالح رابطه‌ی شناخته شده‌ای است.

تعیین کرنشها:

$$e_{xx}=\frac{1}{E}(\sigma_{xx}-\nu\sigma_{yy})=\frac{My}{EI}$$

$$e_{yy}=\frac{1}{E}(\sigma_{yy}-\nu\sigma_{xx})=-\frac{\nu My}{EI}$$

$$e_{xy}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy}=0$$

$$e_{zz}=-\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})=-\frac{\nu My}{EI}$$

$$e_{xz}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{xz}=0$$

$$e_{yz}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{yz}=0$$

تعیین مؤلفه‌های تغییرمکان:

$$e_{xx}=\frac{\partial u_x}{\partial x}=\frac{My}{EI} \Rightarrow u_x=\frac{Mxy}{EI}+f_1(y)$$

$$e_{yy}=\frac{\partial u_y}{\partial y}=-\frac{\nu My}{EI} \Rightarrow u_y=-\frac{\nu My^2}{2EI}+f_2(x)$$

$$e_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \Rightarrow 0=\frac{1}{2}\left[\frac{Mx}{EI}+\frac{df_1(y)}{dy}+\frac{df_2(x)}{dx}\right]$$

$$\frac{Mx}{EI} + \frac{df_2(x)}{dx} = -\frac{df_1(y)}{dy}$$

موقعی تابعی از x می‌تواند با تابعی از y متحد باشد که هرکدام از آنها مقدار ثابت باشند پس:

$$\frac{Mx}{EI} + \frac{df_2(x)}{dx} = A \Rightarrow f_2(x) = -\frac{Mx^2}{2EI} + Ax + B$$

$$-\frac{df_1(y)}{dy} = A \Rightarrow f_1(y) = -Ay + C$$

در نتیجه در میان سطح تیر داریم:

$$u_x = \frac{Mxy}{EI} - Ay + C$$

$$u_y = -\frac{\nu My^2}{2EI} - \frac{Mx^2}{2EI} + Ax + B$$

ثابتهای A ، B و C با توجه به شرایط حدی مربوط به تغییر مکانها تعیین می‌گردند.

لازم به ذکر است که در اینجا u_x و u_y را در میان سطح تیر (در روی صفحه xy) به دست آورده‌ایم و همین دلیل f_1 و f_2 را فقط تابع x و y در نظر گرفتیم. در حالیکه در نقاط دیگر ($z \neq 0$)، f_1 علاوه بر تابع y، تابع z نیز می‌گردد و همین ترتیب $f_2(x,z)$ را می‌داشتیم.

برای تعیین u_z، از رابطه:

$$e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{\nu My}{EI} \Rightarrow u_z = -\frac{\nu Myz}{EI} + f_3(x,y)$$

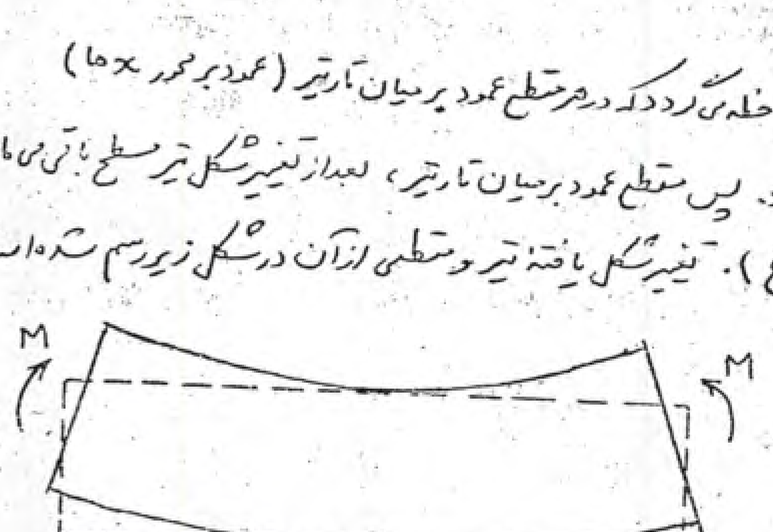
چون میان سطح تیر (صفحه $z=0$) صفحه تقارن جسم است پس:

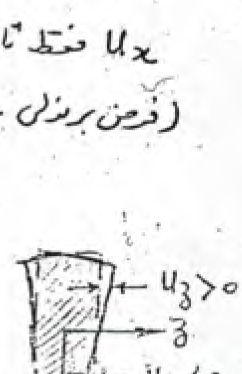
$$z=0 \quad \forall x,y \quad u_z \equiv 0 \Rightarrow f_3(x,y) \equiv 0$$

بنابراین:

$$u_z = -\frac{\nu Myz}{EI}$$

با توجه به مقادیر u_x، ملاحظه می‌گردد که در هر مقطع عمود بر میان تار تیر (عمود بر محور x ها) u_x فقط تابع خطی y می‌گردد. پس مقطع عمود بر میان تار تیر، بعد از تغییر شکل تیر مسطح باقی می‌ماند (فرض برنولی - در مقاومت مصالح). تغییر شکل یافته تیر و مقطعی از آن در شکل زیر رسم شده است.





خیز تیر در روی میان تار (تار خنثی) عبارتست از :

$$u_y\Big]_{y=0} = -\frac{\nu M x_0}{2EI} - \frac{Mx^2}{2EI} + Ax + B$$

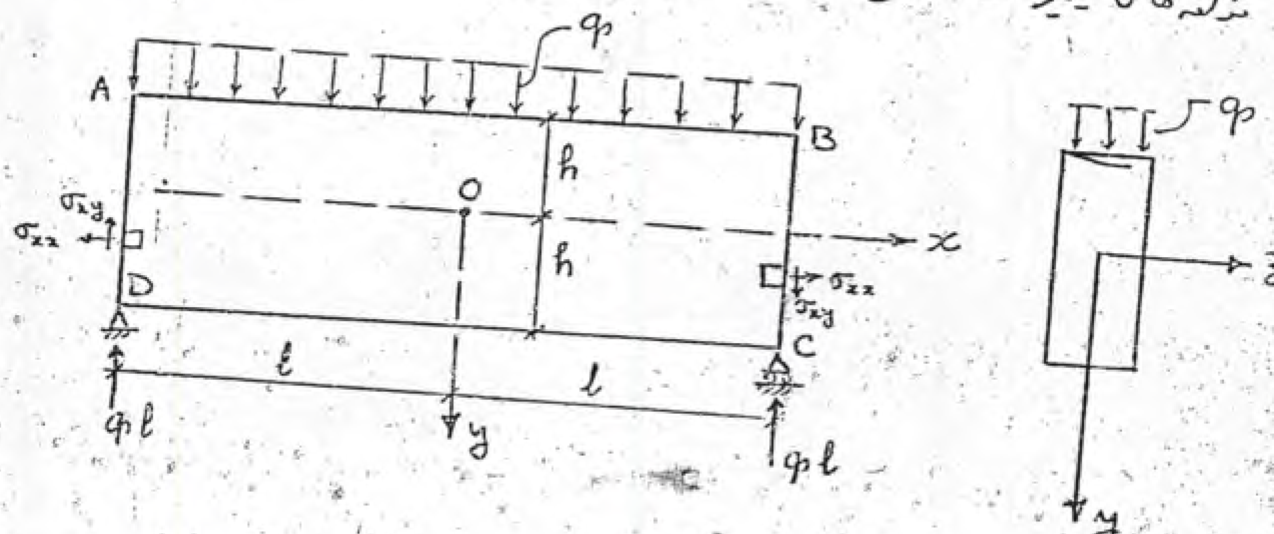
چنانچه از آن دو بار نسبت به x مشتق بگیریم داریم :

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = -M/EI$$

که رابطه است شناخته شده در مقاومت مصالح.

۷-۱۰- مثال ۳ : مسئله تیر ساده تحت اثر بار گسترده یکنواخت - حالت تنش مسطح - تحت اثر بار گسترده یکنواخت

تیر ساده ای به طول $2l$ و ارتفاع $2h$ و عرض واحد - در حالت تنش مسطح - تحت اثر بار گسترده یکنواخت به شدت q در واحد سطح مطابق شکل قرار گرفته است. مطلوبست تعیین توزیع تنش، کرنش و مؤلفه های تغییر مکان. نتایج به دست آمده را با مقاومت مصالح مقایسه کنید. از وزن تیر صرفنظر شود.



حل : تابع تنش ایری را به صورت زیر در نظر می گیریم :

$$\phi = ax^2 + bx^2y + cy^3 + dx^2y^3 + ey^5$$

برای اینکه تابع فوق یک تابع تنش ایری باشد :

$$\nabla^4\phi = \frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\phi}{\partial y^4} \equiv 0$$

$$2(12dy) + 120ey \equiv 0 \Rightarrow d = -5e$$

در نتیجه :

$$\phi = ax^2 + bx^2y + cy^3 - 5ex^2y^3 + ey^5$$

توزیع تنشها :

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 6cy - 30ex^2y + 20ey^3$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 2a + 2by - 10ey^3$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = -2bx + 30exy^2$$

اعمال شرایط حدی مربوط به تنشها :

- روی سطح AB : $\forall x \in [-l, l]\ ,\quad y=-h$

$$\sigma_{xy}\equiv 0 \Rightarrow -2bx+30exh^2\equiv 0 \Rightarrow b=15eh^2$$

$$\sigma_{yy}\equiv -q \Rightarrow 2a-2bh+10eh^3\equiv -q \Rightarrow a-bh=-5eh^3-\frac{q}{2}$$

$$a=10eh^3-\frac{q}{2}$$

- روی سطح CD : $\forall x \in]-l, +l[\ ,\quad y=+h$

$$\sigma_{xy}\equiv 0 \Rightarrow -2bx+30exh^2\equiv 0 \Rightarrow b=15eh^2$$

$$\sigma_{yy}\equiv 0 \Rightarrow 2a+2bh-10eh^3\equiv 0 \Rightarrow a=-bh+5eh^3=-10eh^3$$

از تساوی دو مقدار a حاصل داریم :

$$10eh^3-\frac{q}{2}=-10eh^3 \Rightarrow e=\frac{q}{40h^3}$$

چنانچه ممان اینرسی مقطع تیر $I=\frac{2h^3}{3}$ را در نظر بگیریم :

$$e=\frac{q}{60I}\ ;\quad b=15eh^2=\frac{qh^2}{4I}\ ;\quad a=\frac{q}{4}-\frac{q}{2}=-\frac{q}{4}$$

می گردد.

- روی سطح BC : با توجه به اینکه عکس العمل تیر ql می باشد، از اصل سن ونان استفاده کرده و روابط زیر را داریم :

$$\text{خمش}\ M=\int_{-h}^{+h}\sigma_{xx}\Big]_{x=l} y\,dy=0 \Rightarrow \int_{-h}^{+h}(6cy^2-30el^2y^2+20ey^4)\,dy=0$$

$$\text{نیروی محوری}\ N=\int_{-h}^{+h}\sigma_{xx}\Big]_{x=l} dy=0 \Rightarrow \int_{-h}^{+h}(6cy-30el^2y+20ey^3)\,dy=0$$

$$\text{برش}\ T=\int_{-h}^{+h}\sigma_{xy}\Big]_{x=l} dy=-ql \Rightarrow \int_{-h}^{+h}(-2bl+30ely^2)\,dy=-ql$$

$$M=0 \Rightarrow 2c(h^3+h^3)-10el^2(h^3+h^3)+4e(h^5+h^5)=0$$

$$ch^3-5el^2h^3+2eh^5=0 \Rightarrow c=5el^2-2eh^2=\frac{q}{60I}(5l^2-2h^2)$$

$$N=0 \Rightarrow 3c(h^2-h^2)-15el^2(h^2-h^2)+5e(h^4-h^4)=0 \quad ✓$$

$$T=-ql \Rightarrow -2bl(h+h)+10el(h^3+h^3)=-ql$$

$$-4b\ell h + 20e\ell h^3 = -q\ell \Rightarrow -4\left(\frac{qh^2}{4I}\right)\ell h + 20\left(\frac{q}{60I}\right)\ell h^3 = -q\ell$$

$$-q\frac{h^3}{I}\ell + q\frac{h^3}{3I}\ell = -q\ell \Rightarrow -\frac{2}{3}q\frac{h^3}{I}\ell = -q\ell$$

و چون $I=\frac{2h^3}{3}$ بود پس رابطه بالا به $-q\ell=-q\ell$ منجر می‌گردد. این نتیجه بدیهی است، زیرا توزیع تنشهایی را که به دست آورده‌ایم معادلات تعادل را اقناع می‌کند، و وقتی تمام اجزای تیر در حال تعادل باشند، بدیهی است که کل تیر نیز باید در حال تعادل باشد به عبارتی عکس العمل تکیه گاهها باید برابر با $q\ell$ گردد.

- روی سطح AD: $x=-\ell \qquad y\in[-h,+h]$

خمش $\quad M=\int_{-h}^{+h}\sigma_{xx}\Big]_{x=-\ell} y\,dy=0 \Rightarrow \int_{-h}^{+h}(6cy-30e\ell^2y+20ey^3)y\,dy=0$

که نتیجه جدیدی را به ما می‌دهد.

نیروی محوری $\quad N=\int_{-h}^{+h}\sigma_{xx}\Big]_{x=-\ell}dy=\int_{-h}^{+h}(6cy-30e\ell^2y+20ey^3)\,dy=0$

که خود به خود اقناع می‌گردد.

برش $\quad T=\int_{-h}^{+h}\sigma_{xy}\Big]_{x=-\ell}dy=+q\ell \Rightarrow \int_{-h}^{+h}(2b\ell-30e\ell y^2)\,dy=+q\ell$

این رابطه نیز پس از ساده کرده منجر به $q\ell=q\ell$ می‌گردد. زیرا کل تیر در حال تعادل است.

حال با قراردادن ثابتهای a، b، c، d و e در رابطهٔ توزیع تنشها، مقادیر تنشها به شرح زیر به دست می‌آید:

$$\sigma_{xx}=\frac{q}{2I}\left[(\ell^2-x^2)y+\frac{2}{3}y^3-\frac{2}{5}h^2y\right]$$

$$\sigma_{yy}=\frac{q}{2I}\left(h^2y-\frac{y^3}{3}-\frac{2}{3}h^3\right)$$

$$\sigma_{xy}=-\frac{q}{2I}(h^2-y^2)x$$

$$\sigma_{zz}=\sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0$$

چون جسم در حالت تنش مسطح است؛

- بررسی توزیع تنشهای σ_{xx}:

- تنش σ_{xx} از مجموع دو جمله که یکی تابع خطی y و دیگری تابع درجهٔ ۳ از y است تشکیل شده است:

$$\sigma_{xx}=\frac{q}{2I}(\ell^2-x^2)y+\frac{q}{2I}\left(\frac{2}{3}y^3-\frac{2}{5}h^2y\right)$$

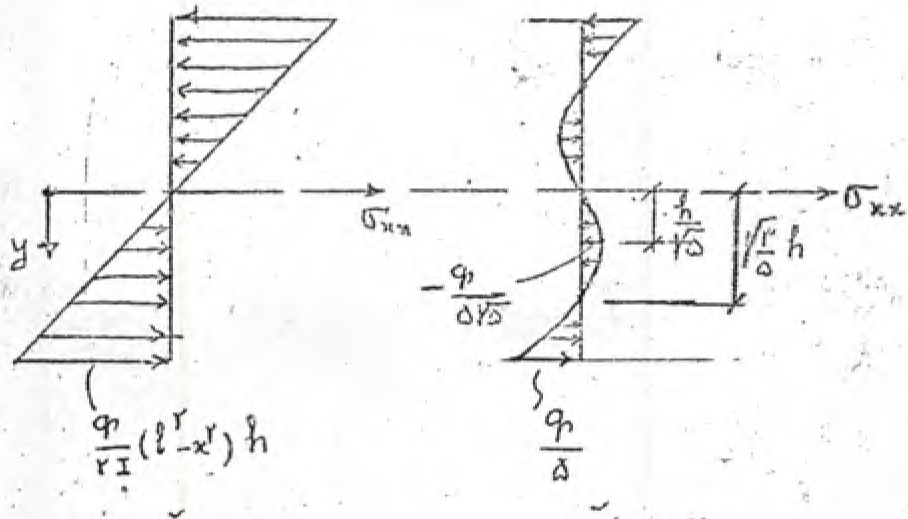
جملهٔ اول همان نتیجه ای است که از مقاومت مصالح به دست می‌آید. لازم به ذکر است که هرچه به تکیه گاهها نزدیکتر شویم، اثر جملهٔ دوم بر روی تنش σ_{xx} بیشتر می‌گردد.

در نقاط دور از تکیه‌گاه‌ها، می‌توان از جملهٔ دوم در برابر جملهٔ اول صرف‌نظر کرد که

$$l^2 \gg \frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}h^2 y$$

باشد، به عبارتی موقعی که $h \ll l$ گردد، نتایج مقاومت مصالح دقت کافی دارند (توزیع تنش σ_{xx} در مقطع تیر خطی خواهد بود).

در شکل زیر منحنی هر یک از جملات σ_{xx} در مقطع تیر ($x=$ ثابت) رسم شده است:



جملهٔ اول (خطی)　　　　　　جملهٔ دوم (غیرخطی)

بنابراین باید دقت کرد که در مورد تیر تیغه‌ها (l به h) و در محل‌های نزدیک به تکیه‌گاه‌ها توزیع تنش در ارتفاع تیر خطی نیست.

• بررسی توزیع تنش‌های σ_{xy}:

تنش σ_{xy}: عیناً نتیجه‌ای است که از مقاومت مصالح به دست می‌آید.

$$\sigma_{xy} = \frac{\text{ممان استاتیک بخش از مقطع} \times \text{نیروی برشی}}{\text{ممان اینرسی کل مقطع}} = -\frac{q}{2I}(h^2-y^2)x$$

توزیع تنش در مقطع تیر به صورت سهمی است، و حداکثر آن در محل $y=0$ می‌باشد:

$$(\sigma_{xy})_{max} = -\frac{q h^2}{2I}x = -\frac{q h^2 x}{2\times\frac{2}{3}h^3} = -\frac{3}{4}\frac{q}{h}x$$

در حالی که متوسط تنش برشی مساوی است با:

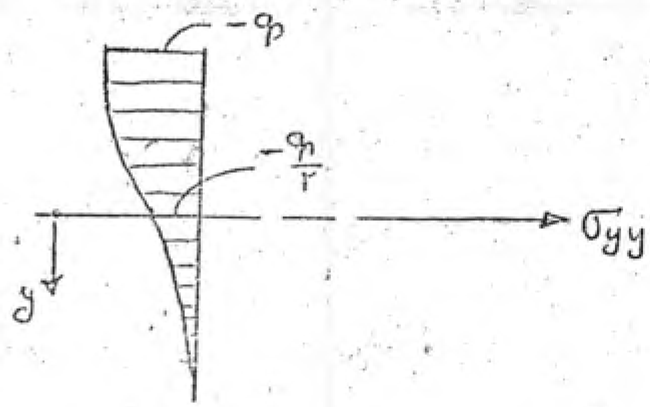
$$(\sigma_{xy})_{\text{متوسط}} = -\frac{qx}{2h}$$

بنابراین حداکثر تنش برشی ۱٫۵ برابر متوسط تنش برشی در مقطع تیر است.

• بررسی توزیع تنش‌های σ_{yy}:

حداکثر تنش σ_{yy} (از نظر قدر مطلق) در روی سطح فوقانی تیر اتفاق می‌افتد. ملاحظه می‌گردد که σ_{yy}

همیشه فشاری است ($\sigma_{yy} < 0$) و در روی سطح تحتانی تیر نیز $\sigma_{yy} = 0$ است. توزیع تنش σ_{yy} مستقل از x است. در شکل زیر توزیع تنش σ_{yy} در مقطع تیر رسم شده است:



– تعیین توزیع کرنشها:

$$e_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) = \frac{q}{2EI}\Big[(l^2 - x^2 - \frac{2}{5}h^2 - \nu h^2)y + \frac{2+\nu}{3}y^3 + \frac{2}{3}\nu h^3\Big]$$

$$e_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) = \frac{q}{2EI}\Big[(h^2 - \nu l^2 + \nu x^2 + \frac{2}{5}\nu h^2)y - \frac{2\nu+1}{3}y^3 - \frac{2}{3}h^3\Big]$$

$$e_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G} = -\frac{q}{4GI}(h^2 - y^2)x$$

– تعیین مؤلفه های تغییر مکان:

$$e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \Rightarrow u_x = \frac{q}{2EI}\Big[(l^2 x - \frac{x^3}{3} - \frac{2}{5}h^2 x - \nu h^2 x)y + \frac{2+\nu}{3}xy^3 + \frac{2}{3}\nu h^3 x\Big] + f$$

$$e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \Rightarrow u_y = \frac{q}{2EI}\Big[(h^2 - \nu l^2 + \nu x^2 + \frac{2}{5}\nu h^2)\frac{y^2}{2} - \frac{2\nu+1}{12}y^4 - \frac{2}{3}h^3 y\Big] +$$

$$e_{xy} \equiv \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\Big)$$

$$-\frac{q}{4GI}(h^2 - y^2)x \equiv \frac{q}{4EI}\Big[l^2 x - \frac{x^3}{3} - \frac{2}{5}h^2 x - \nu h^2 x + (2+\nu)xy^2\Big] + \frac{1}{2}\frac{df_1(y)}{dy} + \frac{q}{4EI}\Big[2\nu x \cdot \frac{y^2}{2}\Big] + \frac{1}{2}\frac{df_2(x)}{dx}$$

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ضریب ارتجاعی برشی جسم است. در تساوی بالا جملات x و y را باید از هم جدا کرد.

جزء xy^2 را جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$xy^2 \text{ ضریب جملات } = \frac{q}{4GI}xy^2 - \frac{q}{4EI}(2+\nu)xy^2 - \frac{q}{4EI}\nu xy^2 = \frac{qxy^2}{I}\Big[\frac{1+\nu}{2E} - \frac{2+\nu}{4E} - \frac{\nu}{4E}\Big]$$

$$= \frac{qxy^2}{4EI}\Big[4 + 4\nu - 2 - \nu - \nu\Big] = 0$$

حال جملات دارای x، و جملات y را از هم جدا می‌کنیم:

$$-\frac{q}{4GI}h^2x-\frac{q}{4EI}l^2x+\frac{q}{4EI}\frac{x^3}{3}+\frac{q}{4EI}\frac{2}{5}h^2x+\frac{q}{4EI}\nu h^2x-\frac{1}{2}\frac{df_2(x)}{dx}=\frac{1}{2}\frac{df_1}{dy}$$

وقتی این دو طرف به ازای کلیه مقادیر x و y می‌تواند برقرار باشد که طرفین مساوی مقدار ثابتی مثل A باشند:

$$\frac{1}{2}\frac{df_1(y)}{dy}=A \Rightarrow \frac{df_1(y)}{dy}=2A \qquad f_1(y)=2Ay+B$$

$$\frac{1}{2}\frac{df_2(x)}{dx}=-A-\frac{q}{4GI}h^2x-\frac{q}{4EI}l^2x+\frac{q}{12EI}x^3+\frac{q}{10EI}h^2x+\frac{q}{4EI}\nu h^2x$$

$$f_2(x)=-2Ax-\frac{q}{4GI}h^2x^2-\frac{q}{4EI}l^2x^2+\frac{q}{24EI}x^4+\frac{q}{10EI}h^2x^2+\frac{q}{4EI}\nu h^2x^2+C$$

بدین ترتیب مؤلفه‌های تغییرمکان u_x و u_y می‌شوند:

$$u_x=\frac{q}{2EI}\left[\left(l^2x-\frac{x^3}{3}-\frac{2}{5}h^2x-\nu h^2x\right)y+\frac{2+\nu}{3}xy^3+\frac{2}{3}\nu h^3x\right]+2Ay+B$$

$$u_y=\frac{q}{120EI}\left[30\left(h^2-\nu l^2+\nu x^2+\frac{2}{5}\nu h^2\right)y^2-5(2\nu+1)y^4-40h^3y+5x^4+30(\nu h^2-l^2)x^2+12h^2x^2\right]-\frac{q}{4GI}h^2x^2-2Ax+C$$

برای تعیین ثابتهای A، B و C می‌توانیم از شرایط مربوط به تغییرمکان در نقاط C و D شکل صفحه ۱۸۸ استفاده کنیم، زیرا نقاط C و D بعلت وجود عکس‌العملهای ql بسرعت به حالت پلاستیک می‌رسند. بهمین دلیل برای حل این مسئله فرض می‌کنیم که نقطه O، مبدأ مختصات در جهت y ها به اندازه $u_y=\delta$ و در جهت x ها فاقد هرگونه حرکت است. ضمناً تغییر شکل یافته تیر بعلت تقارن نسبت به محور y ها، باید متقارن باقی بماند که این امر منجر به افقی ماندن مماس در مبدأ مختصات به تغییر شکل یافته خط میان تار تیر می‌گردد.

پس سه شرط زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x=0\ ;\ y=0 \qquad \begin{cases} u_x=0 \\ u_y=\delta \\ \dfrac{\partial u_y}{\partial x}=0 \end{cases}$$

$$u_x\Big]_{\substack{x=0\\y=0}}=B=0$$

$$u_y\Big]_{\substack{x=0\\y=0}}=C=\delta$$

$$\left.\frac{\partial u_y}{\partial x}\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = -2A = 0$$

که از آنها نتیجه می‌شود: $A=0$ ، $B=0$ و $C=\delta_0$ بنابراین:

$$u_x = \frac{q}{2EI}\left[\left(l^2x - \frac{x^3}{3} - \frac{2}{5}h^2x - \nu h^2x\right)y + \frac{2+\nu}{3}xy^3 + \frac{2}{3}\nu h^3x\right]$$

$$u_y = \delta_0 - \frac{q}{4GI}h^2x^2 + \frac{q}{120EI}\left[30\left(h^2 - \nu l^2 + \nu x^2 + \frac{2}{5}\nu h^2\right)y^2 - 5(2\nu+1)y^4 - 40h^3y + 5x^4 + 30(\nu h^2 - l^2)x^2 + 12h^2x^2\right]$$

از جملات مربوط به u_x ملاحظه می‌گردد که به ازای $x=cte$ ، u_x با وجود جملهٔ $\frac{2+\nu}{3}xy^3$ تابع درجه سوم y است. بنابراین در حالت کلی فرض برنولی، یعنی مسطح ماندن مقطع تیر، بعد از تغییر شکل صادق نیست. لکن به شرط جملهٔ $\frac{2+\nu}{3}xy^3$ قابل صرفنظر کردن است اگر $l \gg h$ گردد.

تغییر شکل میان تار تیر را به دست می‌آوریم.

$$u_y\Big]_{y=0} = \delta_0 - \frac{q}{4GI}h^2x^2 + \frac{q}{120EI}\left[5x^4 + 30(\nu h^2 - l^2)x^2 + 12h^2x^2\right]$$

و تغییر مکان وسط AD و وسط BC ، در نقاط به مختصات $x=\pm l$ و $y=0$ می‌شود:

$$\delta_1 = \delta_0 - \frac{qh^2l^2}{4GI} + \frac{q}{120EI}\left[-25l^4 + (30\nu + 12)h^2l^2\right]$$

اگر مبدأ محاسبهٔ خیز را به نحوی در نظر بگیریم که $\delta_1=0$ باشد، یعنی خیز از خط راستی که وسط AD و وسط BC را بعد از تغییر شکل تیر بهم وصل می‌کند محاسبه گردد، در این صورت:

$$\delta_1 = 0 \Rightarrow \delta_0 = \frac{qh^2l^2}{4GI} + \frac{q}{120EI}\left[25l^4 - (30\nu + 12)h^2l^2\right]$$

می‌گردد. اگر u_y را برای میان تار تیر بنویسیم می‌شود:

$$u_y\Big]_{y=0} = \delta_1 + \frac{qh^2l^2}{4GI} - \frac{qh^2x^2}{4GI} + \frac{q}{120EI}\left[25l^4 - 30\nu h^2l^2 - 12h^2l^2 + 5x^4 + 30\nu h^2x^2 - 30l^2x^2 + 12h^2x^2\right]$$

به عبارتی:

$$u_y\Big]_{y=0} = \delta_1 + \frac{qh^2}{4GI}(l^2 - x^2) + \left\{\frac{5ql^4}{24EI} + \frac{qx^4}{24EI} - \frac{ql^2x^2}{4EI}\right\} + \frac{q}{120EI}\left[12h^2(x^2 - l^2) + 30\nu h^2(x^2 - l^2)\right]$$

در حالیکه خیز تیر با استفاده از روابط مقاومت مصالح

$$u_y]_{y=0} = \frac{5ql^4}{24EI} + \frac{qx^4}{24EI} - \frac{ql^2x^2}{4EI}$$

می‌باشد. جملات دیگری که در رابطه خیز - در تئوری الاستیسیته ظاهر گردیده‌اند، جمله δ_0 که ناشی از تغییر مکان قائم بیان به ترتیب در سطح تکیه‌گاهها، و جمله دوم $\frac{qh^2}{4GI}(l^2-x^2)$ ناشی از تغییر شکل برشی تیر، و جمله

$$\frac{q}{120EI}\left[12h^2(x^2-l^2)+30\nu h^2(x^2-l^2)\right]$$

جمله است که در صورتیکه $h \ll l$ باشد در برابر بقیه جملات قابل صرفنظر کردن می‌باشد.

$u_y]_{y=0}$ را می‌توان با توجه به رابطه:

$$u_y]_{y=0} = \delta_0 - \frac{qh^2x^2}{4GI} + \frac{q}{120EI}\left[5x^4 + 30(\nu h^2 - l^2)x^2 + 12h^2x^2\right]$$

با قرار دادن $G=\frac{E}{2(1+\nu)}$ به صورت زیر نوشت:

$$u_y]_{y=0} = \delta_0 + \frac{q}{24EI}\left[x^4 - 6l^2x^2 - 6\nu h^2x^2 - \frac{48}{5}h^2x^2\right]$$

حال اگر دوبار نسبت به x از رابطه بالا مشتق بگیریم، انحنای تیر در سطح تار به دست می‌آید:

$$\rho = -\frac{\partial^2(u_y]_{y=0})}{\partial x^2} = -\frac{q}{24EI}\left[12x^2 - 12l^2 - 12\nu h^2 - \frac{96}{5}h^2\right]$$

به عبارتی:

$$\rho = \frac{q}{EI}\left[\frac{l^2-x^2}{2} + h^2\left(\frac{\nu}{2}+\frac{4}{5}\right)\right]$$

لنگر خمشی در مقطعی به فاصله x برابر است با: $M = q\frac{l^2-x^2}{2}$، لذا:

$$M = EI(\rho - \bar{\rho})$$

که در آن $\bar{\rho} = \frac{qh^2}{EI}\left(\frac{\nu}{2}+\frac{4}{5}\right)$ انحنای ناشی از برش می‌باشد و چنانچه $h^2 \ll l^2$ باشد قابل صرفنظر کردن است.

۷-۱۱- نکته: در غیاب نیروهای حجمی، توزیع تنش در یک مسئله در حالت کرنش مسطح، برای تنشهای σ_{xx}، σ_{yy} و σ_{xy}، با توزیع تنش در همان مسئله در حالت تنش مسطح یکی است.

(اثبات به عهده دانشجو)

۷ - ۱۲ - مسائل دوبعدی تئوری ارتجاعی در مختصات قطبی در حالت کرنش مسطح

وقتی که جسم در حالت کرنش مسطح باشد، و هدف جهت سهولت محاسبات استفاده از مختصات قطبی برای تعیین مجهولات جسم، یعنی تانسورهای تنش، کرنش و مؤلفه های تغییرمکان باشد، مجدداً روابط زیر را داریم:

• مؤلفه های تغییرمکان مستقل از z بوده و عبارتند از:

$$u_r(r,\theta) \qquad u_\theta(r,\theta) \qquad u_z \equiv 0 \qquad (۱)$$

• روابط کرنش - تغییرمکان:

$$\begin{aligned}
e_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\
e_{\theta\theta} &= \frac{1}{r}\left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) \\
e_{r\theta} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right) \qquad (۲) \\
e_{rz} &= e_{\theta z} = e_{zz} = 0
\end{aligned}$$

• روابط تنش - کرنش:

$$\begin{aligned}
e_{zz} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta})\right] = 0 \Rightarrow \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}) \\
e_{rr} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{rr} - \nu(\sigma_{\theta\theta}+\sigma_{zz})\right] = \frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\sigma_{rr} - \nu(1+\nu)\sigma_{\theta\theta}\right] \\
e_{\theta\theta} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{\theta\theta} - \nu(\sigma_{rr}+\sigma_{zz})\right] = \frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\sigma_{\theta\theta} - \nu(1+\nu)\sigma_{rr}\right] \\
e_{rz} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{rz} = 0 \Rightarrow \sigma_{rz} = 0 \\
e_{\theta z} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{\theta z} = 0 \Rightarrow \sigma_{\theta z} = 0 \qquad (۳) \\
e_{r\theta} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{r\theta}
\end{aligned}$$

که از عکس کردن آنها داریم:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{rr}\\ \sigma_{\theta\theta}\\ \sigma_{r\theta}\end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & 1-2\nu\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}e_{rr}\\ e_{\theta\theta}\\ e_{r\theta}\end{Bmatrix} \qquad (۴)$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta})$$

و در نتیجه با توجه به مستقل بودن کرنش ها نسبت به z تنش ها نیز مستقل از z می باشند.

• از معادلات تعادل فقط دو معادله باقی می‌ماند:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + f_r = \rho \ddot{u}_r$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r}\sigma_{r\theta} + f_\theta = \rho \ddot{u}_\theta \qquad (5)$$

در اینجا f_r و f_θ که مستقل از z هستند به ترتیب نیروهای حجمی در جهت r و در جهت θ در واحد حجم می‌باشند، ρ جرم مخصوص و $\ddot{u}$ شتاب است. از این به بعد فرض می‌شود که جسم فاقد شتاب است (در صورت وجود شتاب $f_r - \rho\ddot{u}_r$ و $f_\theta - \rho\ddot{u}_\theta$، به نیروهای حجمی خواهند بود و محدودیتی از این لحاظ ایجاد نمی‌کنند).

• معادله سازگاری: از شش رابطه سازگاری (صفحه ۳۴) فقط یک رابطه باقی می‌ماند:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 e_{rr}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 e_{\theta\theta}}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial e_{\theta\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial e_{rr}}{\partial r} = 2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 e_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial e_{r\theta}}{\partial \theta}\right) \qquad (6)$$

چنانچه مجهولات اصلی مسئله را σ_{rr}، $\sigma_{\theta\theta}$ و $\sigma_{r\theta}$ در نظر بگیریم، در این صورت معادله سازگاری نقش مهمی را بازی می‌کند. بنابراین معادله سازگاری را با توجه به روابط بین تنش-کرنش، بر حسب تنش‌ها می‌نویسیم:

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\sigma_{rr} - \nu(1+\nu)\sigma_{\theta\theta}\right] + \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\sigma_{\theta\theta} - \nu(1+\nu)\right.$$
$$= 2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\frac{1+\nu}{E}\sigma_{r\theta}$$

که با ساده کردن آن داریم:

$$\frac{1+\nu}{r^2}\frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial \theta^2} - \frac{1+\nu}{r}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{\nu}{r^2}\frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{\nu}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} + (1-\nu)\frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial r^2} + \frac{2(1-\nu)}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r}$$
$$- \nu\frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial r^2} - \frac{2\nu}{r}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = \frac{2}{r}\frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta}$$

به عبارتی:

$$\frac{1-\nu}{r^2}\frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial \theta^2} - \frac{1+\nu}{r}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{\nu}{r^2}\frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{2-\nu}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} + (1-\nu)\frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial r^2} - \nu\frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial r^2} =$$
$$= \frac{2}{r}\frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} \qquad (7)$$

حال با توجه به روابط (۷) و (۵)، سه معادله و سه مجهول داریم. این سه رابطه را با حذف $\sigma_{r\theta}$ در دو رابطه و دو مجهول تبدیل می‌کنیم.

اولین رابطه تعادل (۵) را در نظر گرفته :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + f_r = 0$$

دو طرف آن اپراتور $\left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\right)$ را تأثیر می‌دهیم :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial r^2} + \cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta}} - \cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta}} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} + \cancel{\frac{1}{r^2}\sigma_{rr}} - \cancel{\frac{1}{r^2}\sigma_{rr}} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r}$$
$$- \cancel{\frac{1}{r^2}\sigma_{\theta\theta}} + \cancel{\frac{1}{r^2}\sigma_{\theta\theta}} - \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}f_r + \frac{\partial f_r}{\partial r} = 0$$

و از آن داریم :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} = -\frac{2}{r}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r}f_r - \frac{\partial f_r}{\partial r} \qquad (8)$$

بهمین ترتیب دومین رابطه تعادل را در نظر می‌گیریم :

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r}\sigma_{r\theta} + f_\theta = 0$$

دو طرف آن اپراتور $\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)$ را تأثیر می‌دهیم :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} = 0$$

و از آن داریم :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} \qquad (9)$$

از جمع کردن روابط (۸) و (۹) داریم :

$$\frac{2}{r}\frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} = -\frac{2}{r}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r}f_r - \frac{\partial f_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} \qquad (10)$$

ملاحظه می‌شود که سمت چپ رابطه (۱۰) با سمت راست رابطه (۷) یکی است پس معادله سازگاری بصورت زیر درمی‌آید :

$$\frac{1-\nu}{r^2}\frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial \theta^2} - \frac{1+\nu}{r}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{\nu}{r^2}\frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{2-\nu}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} + (1-\nu)\frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial r^2} - \nu\frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial r^2} =$$
$$= -\frac{2}{r}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r}f_r - \frac{\partial f_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r}$$

و ساده شده آن عبارتست از :

$$\frac{1-\nu}{r^2}\frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial \theta^2} + \frac{1-\nu}{r^2}\frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{1-\nu}{r}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1-\nu}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} + (1-\nu)\frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial r^2} + (1-\nu)\frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial r^2} =$$

$$= -\frac{1}{r} f_r - \frac{\partial f_r}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial f_\theta}{\partial \theta}$$

رابطهٔ فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

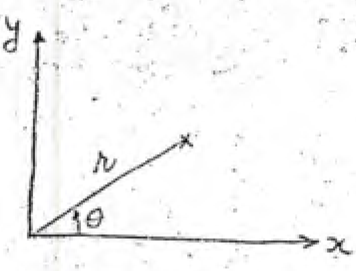
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = -\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial f_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + \frac{f_r}{r}\right) \qquad (11)$$

عبارت $\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ در واقع چیزی بجز لاپلاسین، ∇^2 نیست، در رابطهٔ (11) در واقع معادلهٔ سازگاری بلترامی میشل در این حالت خاص می‌باشد

بنابراین برای تعیین توزیع تنش در یک جسم دوبعدی در حالت کرنش مسطح باید سه معادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + f_r = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r}\sigma_{r\theta} + f_\theta = 0 \\ \nabla^2(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = -\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial f_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + \frac{f_r}{r}\right) \end{cases} \qquad (12)$$

۸-۱۲-۱ استفاده از تابع تنش ایری



ارتباط بین مختصات کارتزین و قطبی به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

و عکس آن می‌شود:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \operatorname{Arctg}\frac{y}{x} \qquad (1)$$

با توجه به اینکه مشتقات زیر را داریم:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r} = \cos\theta$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{r} = \sin\theta \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial x} = \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{-y}{x^2} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{1}{r}\sin\theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial y} = \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{r^2} = \frac{1}{r}\cos\theta$$

قاعدهٔ زنجیری می‌توانیم مشتق یک تابع دلخواه (θ و r) را بر حسب مشتقات آن نسبت به x و y ، به این شکل تعیین کنیم :

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial \theta}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial \theta}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial r}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial \theta}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial \theta}=\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta} \qquad (۳)$$

و همین ترتیب با تأثیر اپراتورهای $\frac{\partial}{\partial x}$ و $\frac{\partial}{\partial y}$ بر روی خودشان می‌توان مشتقات زیر را به دست آورد :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

$$=\cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\sin^2\theta\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\sin2\theta\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial r}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\cos^2\theta\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)-\sin2\theta\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial r}\right)$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)=-\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\mp\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\right.$$

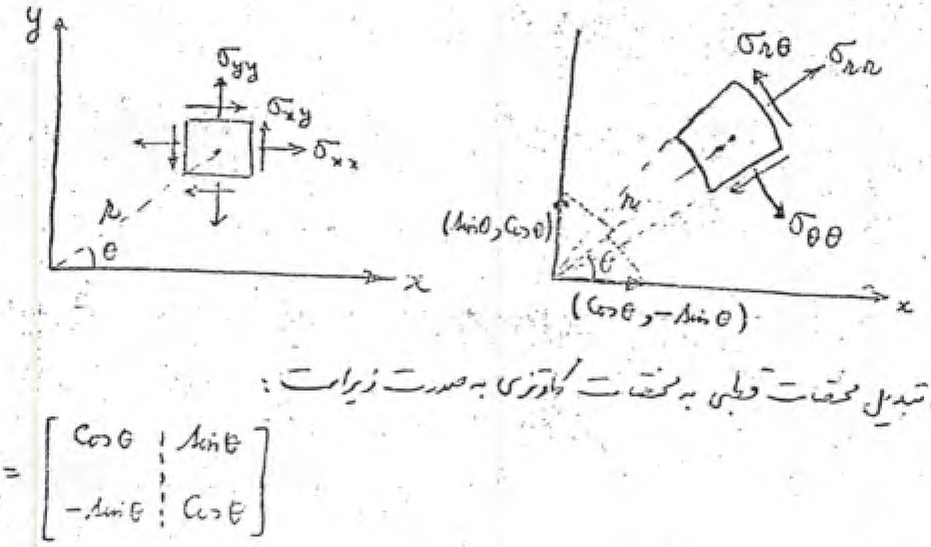
$$=\sin\theta\cos\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\mp\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

(۴)

از روابط بالا ملاحظه می‌گردد که اپراتور لاپلاس برابر است

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \qquad (۵)$$

برای اینکه ارتباط بین مؤلفه‌های تنش در دو دستگاه مختصات قطبی و کارتزین را به دست آوریم ، با توجه به شکل زیر



ماتریس تبدیل مختصات قطبی به مختصات کارتزین به صورت زیر است :

$$T=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

بنابراین داریم :

$$\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_{rr} & \sigma_{r\theta}\\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} \qquad (۶)$$

و از آن نتیجه می‌شود :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{rr}\cos^2\theta + \sigma_{\theta\theta}\sin^2\theta - \sigma_{r\theta}\sin 2\theta$$
$$\sigma_{yy} = \sigma_{rr}\sin^2\theta + \sigma_{\theta\theta}\cos^2\theta + \sigma_{r\theta}\sin 2\theta \qquad (7)$$
$$\sigma_{xy} = (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})\sin\theta\cos\theta + (\sin^2\theta - \cos^2\theta)\,\sigma_{r\theta}$$

و ارتباط بین نیروهای حجمی در دو دستگاه مختصات به قرار زیر است :

$$f_x = f_r\cos\theta - f_\theta\sin\theta$$
$$f_y = f_r\sin\theta + f_\theta\cos\theta \qquad (8)$$

اگر دو رابطهٔ اول (۷) را با هم جمع کنیم داریم :

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} \qquad (9)$$

به عبارتی رابطهٔ (۹) نشان می‌دهد که مجموع دو تنش عمودی وارده بر صفحات متعامد در هر نقطه، بستگی به انتخاب صفحات متعامد نداشته، و یا به بیانی دیگر یکی از تغییرناپذیرهای تانسور تنش است.

بدین ترتیب سومین رابطه، در رابطهٔ (۱۲) مبحث ۷-۱۲، در واقع چیزی به جز بیان معادلهٔ سازگاری که در مختصات کارتزی به شکل

$$\nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\right) \qquad (10)$$

بود، نیست. تا به این جا رابطه‌ها را بررسی کردیم. همانطور که در حل مسئله در دستگاه مختصات کارتزی از تابع تنش ایری استفاده می‌کردیم، باید در دستگاه مختصات قطبی نیز به آن عمل نماییم.

ارتباط بین تابع تنش ایری و مؤلفه‌های تنش در دستگاه مختصات کارتزی به صورت زیر بود :

V = تابع پتانسیل نیروهای حجمی :

$$f_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$
$$f_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$
$$\sigma_{xx} = V + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}$$
$$\sigma_{yy} = V + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \qquad (11)$$
$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}$$

$$r\,\frac{d\phi}{dr} = C_1\left(\frac{1}{2}r^2\ln r - \frac{1}{4}r^2\right) + \frac{1}{2}C_2 r^2 + C_3$$

طرفین رابطه را در $\frac{dr}{r}$ ضرب کرده و انتگرال می‌گیریم:

$$\phi = \frac{1}{2}C_1\left(\frac{1}{2}r^2\ln r - \frac{1}{4}r^2\right) - \frac{C_1}{8}r^2 + \frac{1}{4}C_2 r^2 + C_3\ln r + C_4$$

$$\phi = (C_3)\ln r + \left(\frac{1}{4}C_1\right)r^2\ln r + \left(\frac{1}{4}C_2 - \frac{1}{8}\right)r^2 + (C_4)$$

با نامگذاری ثابت‌های حاصل به ترتیب بصورت A، B، C و D داریم:

$$\phi = A\ln r + B r^2\ln r + C r^2 + D \tag{12}$$

و از آنجا تنش‌ها بشرح زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\phi}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = \dfrac{1}{r}\dfrac{d\phi}{dr} = \dfrac{A}{r^2} + B(1+2\ln r) + 2C \\ \sigma_{\theta\theta} = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial r^2} = \dfrac{d^2\phi}{dr^2} = -\dfrac{A}{r^2} + B(3+2\ln r) + 2C \\ \sigma_{r\theta} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial\phi}{\partial\theta} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial r\partial\theta} = 0 \end{cases} \tag{13}$$

از روابط کرنش تنش (صفحه ۱۹۶ - رابطه ۳) داریم:

$$e_{rr} = \frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\sigma_{rr} - \nu(1+\nu)\sigma_{\theta\theta}\right] = \frac{1+\nu}{E}\left\{\left[\frac{A}{r^2} + B(1+2\ln r) + 2C\right](1-\nu) + \nu\left[\frac{A}{r^2} - B(3+2\ln r) - 2C\right]\right\} = \frac{1+\nu}{E}\left[\frac{A}{r^2} + B(1-4\nu) + 2B(1-2\nu)\ln r + 2C(1-2\nu)\right]$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\sigma_{\theta\theta} - \nu(1+\nu)\sigma_{rr}\right] = \frac{1+\nu}{E}\left[-\frac{A}{r^2} + B(3-4\nu) + 2B(1-2\nu)\ln r + 2C(1\right.$$

$$e_{r\theta} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{r\theta} = 0 \tag{14}$$

$$e_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = \nu\left[4B(1+\ln r) + 4C\right]$$

و با توجه به روابط کرنش - تغییر مکان (صفحه ۱۹۶ - رابطه (۲)) می‌توان مؤلفه‌های تغییر مکان‌ها را بدست آورد:

۳ - حالت خاص این مسأله کرنش مسطح در مختصات قطبی در غیاب نیروهای حجمی

در اینحالت ارتباط بین تنشهای مختصات کارتزین و مختصات قطبی که قبلاً بصورت رابطه (۷) بیان شد می‌باشد که می‌توان آنها را بصورت ماتریسی زیر نوشت:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & \sin 2\theta \\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} \qquad (1)$$

ارتباط بین تابع تنش اری $\phi(x,y)$ و تنشهای مختصات کارتزین به شرح زیر است:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \qquad (2)$$

که با توجه به اینکه $x(r,\theta)$ و $y(r,\theta)$ می‌باشد و با استفاده از روابط (۴) مبدل می‌توان آنرا بصورت زیر نوشت:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & \sin 2\theta \\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \phi}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \\ \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \\ \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial \phi}{\partial \theta} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} \end{Bmatrix} \qquad (3)$$

با مقایسه رابطه (۱) و (۳) نتیجه می‌گیریم که ارتباط بین تابع تنش اری $\phi(r,\theta)$ و تنشها به قرار زیر است:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} \end{aligned} \qquad (4)$$

سه رابطه فوق معادلات تعادل را بخودی خود اقناع می‌کنند. معادلات تعادل به قرار زیر است:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \\ &\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r}\sigma_{r\theta} = 0 \end{aligned} \qquad (5)$$

و معادله سازگاری که در غیاب نیروهای حجمی به صورت

$$\nabla^2(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = 0 \qquad (6)$$

است با توجه به روابط (۴) به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\nabla^2\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}\right]=0$$

به عبارتی :

$$\nabla^4\phi=0 \qquad (7)$$

بدین ترتیب با استفاده از تابع تنش ایری $\phi(r,\theta)$، در رابطه (۴)، در واقع مجهول مسئله در هر نقطه به یک مجهول و آنهم تعیین تابع تنش ایری تبدیل می‌گردد (به جای سه مجهول مؤلفه‌های تانسور تنش).

چون رابطه (۷) معادله سازگاری می‌باشد، و سازگاری باید برای کلیه نقاط جسم برقرار باشد پس

$$\nabla^4\phi\equiv 0 \qquad (8)$$

می‌باشد.

• حالت خاص ۲ـ اگر در جسمی بارگذاری و شرایط مرزی به گونه‌ای است که از قبل بدانیم پخش تنش در جسم مستقل از θ است:

در اینصورت ϕ را مستقل از θ، و فقط تابع r در نظر می‌گیریم. معادله (۸) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\nabla^4\phi\equiv 0 \iff \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}+\frac{d^2}{dr^2}\right)^2\phi\equiv 0 \qquad (9)$$

اپراتور ∇^2 در اینصورت می‌تواند به یکی از دو صورت زیر نوشته شود:

$$\nabla^2\equiv\frac{1}{r}\frac{d}{dr}+\frac{d^2}{dr^2}\equiv\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right) \qquad (10)$$

در نتیجه معادله دیفرانسیل (۸) به صورت زیر در می‌آید:

$$\nabla^4\phi\equiv 0 \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\phi}{dr}\right)\right]\right\}\equiv 0 \qquad (11)$$

که با یک بار انتگرال‌گیری داریم:

$$r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\phi}{dr}\right)\right]=C_1$$

و با انتگرال‌گیری مجدد (از حاصلضرب رابطه بالا در $\frac{dr}{r}$) داریم:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\phi}{dr}\right)=C_1\ln r+C_2$$

با توجه به اینکه :

$$\int r\ln r\,dr=\frac{1}{2}r^2\ln r-\frac{1}{4}r^2$$

در نتیجه، مجدداً از رابطه فوق انتگرال می‌گیریم:

$$e_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r}=\frac{1+\nu}{E}\left[\frac{A}{r^2}+B(1-4\nu)+2B(1-2\nu)\ln r+2C(1-2\nu)\right]$$

$$u_r=\frac{1+\nu}{E}\left[-\frac{A}{r}+B(1-4\nu)r+2B(1-2\nu)(r\ln r-r)+2C(1-2\nu)r+f_1(\theta)\right]$$

$$e_{\theta\theta}=\frac{1}{r}\left(u_r+\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right)\Rightarrow \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}=r\,e_{\theta\theta}-u_r$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}=\frac{1+\nu}{E}\left[B(4-4\nu)r-f_1(\theta)\right]$$

$$u_\theta=\frac{1+\nu}{E}\left[4B(1-\nu)r\theta-\int f_1(\theta)d\theta+f_2(r)\right]$$

$$e_{r\theta}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}\right)\equiv 0$$

در کلیه نقاط $e_{r\theta}=0$ است پس:

که با جایگزینی u_r و u_θ در رابطه بالا داریم:

$$\frac{1}{r}\cdot\cancel{\frac{1+\nu}{E}}\frac{df_1(\theta)}{d\theta}+\cancel{\frac{1+\nu}{E}}\left[4B(1-\nu)\theta+\frac{df_2(r)}{dr}\right]-\cancel{\frac{1+\nu}{E}}\left[4B(1-\nu)\theta-\frac{1}{r}\int f_1(\theta)d\theta+\frac{1}{r}f_2(r)\right]\equiv 0$$

طرفین رابطه فوق را در r ضرب کرده و توابع r و θ را به طرفین اتحاد منتقل می‌کنیم:

$$\frac{df_1(\theta)}{d\theta}+\int f_1(\theta)d\theta\equiv f_2(r)-r\frac{df_2(r)}{dr}$$

وقتی اتحاد فوق می‌تواند برقرار باشد که هر یک از طرفین رابطه مقدار ثابت F باشد:

$$f_2(r)-r\frac{df_2(r)}{dr}=F$$

$$\frac{df_1(\theta)}{d\theta}+\int f_1(\theta)d\theta=F \qquad (15)$$

برای حل معادلات (15)، $\int f_1(\theta)d\theta=M(\theta)$ در نظر گرفته می‌شود:

$$f_2(r)-r\frac{df_2(r)}{dr}=F \Rightarrow f_2(r)=F+Gr$$

$$\frac{d^2M(\theta)}{d\theta^2}+M(\theta)=F \Rightarrow M(\theta)=H\sin\theta+K\cos\theta+F$$

در نتیجه:

$$f_1(\theta)=\frac{dM(\theta)}{d\theta}=H\cos\theta-K\sin\theta$$

با جایگزینی مقادیر $f_1(\theta)$ و $f_2(r)$ در u_r و u_θ مؤلفه‌های تغییر مکان بدست می‌آید:

$$u_r = \frac{1+\nu}{E}\left[-\frac{A}{r} - Br + 2B(1-2\nu)\, r\ln r + 2C(1-2\nu)\, r + H\cos\theta - K\sin\theta\right]$$

$$u_\theta = \frac{1+\nu}{E}\left[4B(1-\nu)\, r\theta - H\sin\theta - K\cos\theta + Gr\right] \qquad (16)$$

• حالت خاص ۳: اگر در جسمی شرایط به نحوی باشد که پخش تنش و مؤلفه‌های تغییرمکان مستقل از θ باشند [کرنش مسطح - در غیاب نیروهای حجمی].

در این صورت کلیهٔ روابط حالت خاص قبلی (صفحهٔ ۲۰۳ تا ۲۰۶) صادق است و علاوه بر آن رابطهٔ (۱۶) باید مستقل از θ باشد. بنابراین ضرایب زیر بالاجبار باید صفر باشند:

$$H = 0$$
$$K = 0$$
$$B = 0$$

در نتیجه توزیع تنش، کرنش و مؤلفه‌های تغییرمکان به صورت زیر در می‌آیند:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \dfrac{A}{r^2} + 2C \\ \sigma_{\theta\theta} = -\dfrac{A}{r^2} + 2C \\ \sigma_{r\theta} = 0 \end{cases} \qquad (17)$$

$$\begin{cases} e_{rr} = \dfrac{1+\nu}{E}\left[\dfrac{A}{r^2} + 2C(1-2\nu)\right] \\ e_{\theta\theta} = \dfrac{1+\nu}{E}\left[-\dfrac{A}{r^2} + 2C(1-2\nu)\right] \\ e_{r\theta} = 0 \end{cases} \qquad (18)$$

$$\begin{cases} u_r = \dfrac{1+\nu}{E}\left[-\dfrac{A}{r} + 2C(1-2\nu)\, r\right] \\ u_\theta = \dfrac{1+\nu}{E}\cdot Gr \end{cases} \qquad (19)$$

ملاحظه می‌شود که u_θ در واقع بیانگر دوران صلب حول محور z می‌باشد، چنانچه تنها تغییر شکل‌ها مورد نظر باشد، این حرکت صلب، چون ایجاد تنش یا کرنش ای نمی‌کند، $G=0$ در نظر گرفته می‌شود.

$$u_\theta = 0 \qquad (20)$$