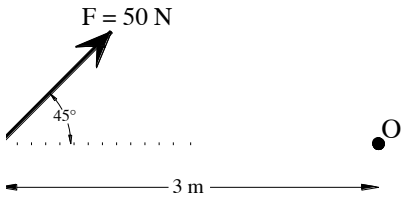
مبحث گشتاور

الف- تمرین‌های حل‌شده

تمرین الف-۱: **در شکل M-الف-۱ گشتاور نیروی F را حول نقطهٔ O محاسبه نمایید.**

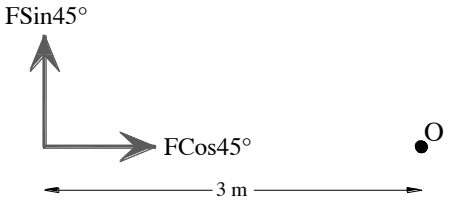


شکل M-الف-۱

پاسخ: گشتاور عبارت است از حاصلضرب مقدار نیرو در فاصلهٔ عمودی نقطه‌اثر آن تا مبدأ چرخش. ازاین‌رو برای حل این مسئله می‌توان از دو روش عمل کرد؛ روش نخست، استفاده از تجزیهٔ بردار F به دو مؤلفهٔ افقی و عمودی و محاسبهٔ یک‌به‌یک گشتاورها حول نقطهٔ O و روش دیگر، یافتن فاصلهٔ عمودی نقطه‌اثر F تا نقطهٔ O است.

الف- روش نخست: استفاده از تجزیهٔ بردار F به مؤلفه‌های خود:

مؤلفهٔ افقی که عبارت است از $F\cos 45^\circ$ گشتاوری حول نقطهٔ O ایجاد نمی‌کند، چراکه امتداد آن از مبدأ چرخش گذشته و عملاً فاصلهٔ عمودی از آن ندارد. بنابراین تنها، مؤلفهٔ عمودی است که گشتاوری ساعتگرد حول مبدأ یادشده ایجاد خواهد کرد:

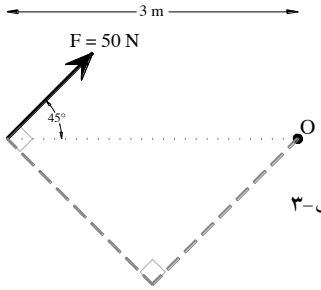


شکل M-الف-۲

$$\sum M_O = -(F\sin 45^\circ \times 3) + (F\cos 45^\circ \times 0) = -50\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times 3 = \boxed{-75\sqrt{2}\ \text{N.m}}$$

ب- روش دوم: فاصلهٔ عمودی نقطه‌اثر نیرو از مرکز چرخش را می‌یابیم:

در این روش، مطابق شکل M-الف-۳ ابتدا خطی عمود بر راستای نیرو و به سمت نقطهٔ O رسم نموده (خط BA) و پس از آن، از نقطهٔ O بر آن عمود می‌کنیم (خط OA). در مثلث به‌دست‌آمده، فاصلهٔ عمودی که منظور نظر ماست برابر است با طول AB.



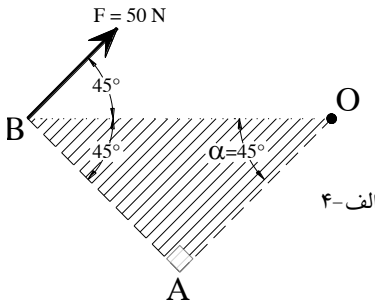
شکل M-الف-۳

برای به‌دست آوردن طول AB از قانون سینوس‌ها در مثلث OAB استفاده می‌کنیم (شکل M-الف-۴):

$$\frac{OB}{\sin\hat{A}} = \frac{AB}{\sin\alpha}$$

$$\hat{A}=90^\circ \Rightarrow \sin\hat{A}=1 \quad , \quad \alpha=45^\circ \Rightarrow \sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \overline{OB}=3\text{m}$$

$$AB=\frac{OB.\sin\alpha}{\sin\hat{A}}=\frac{3\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}=3\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

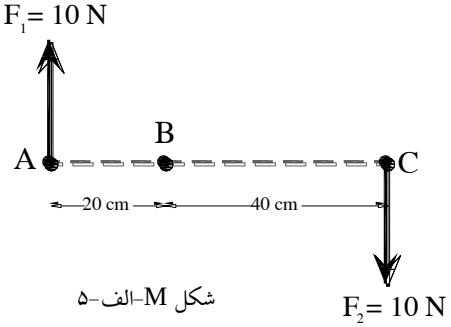


شکل M-الف-۴

اکنون که فاصلهٔ عمودی AB به‌دست آمد، مبادرت به محاسبهٔ گشتاور نیرو حول O می‌کنیم:

$$\sum M_O = -(F\times\overline{AB}) = -50\times 3\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{-75\sqrt{2}\ \text{N.m}}$$

تمرین الف-۲: **گشتاور نیروهای موجود در شکل را حول نقاط A، B و C محاسبه نمایید.**



شکل M-الف-۵

پاسخ: با کمی دقت می‌توان دریافت که با دو نیروی هم‌اندازه و مختلف‌الجهت روبرو هستیم که در حقیقت اثر کوپلی دارند و همچنین می‌دانیم که اثر زوج‌نیرو (کوپل) در همه جای صفحه یکسان است و ازاین‌رو در کلیهٔ نقاط یادشده، میزان گشتاور برابر بوده و مقدار آن مساوی است با $10\text{x}0.6=6\ \text{Nm}$ و در جهت ساعتگرد (علامت منفی).

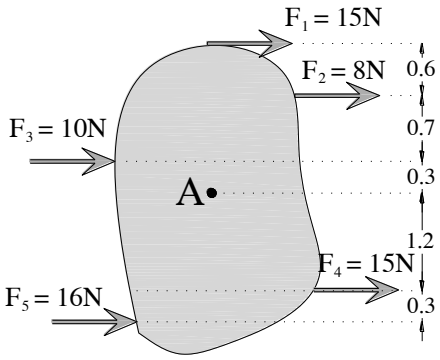
نکته: **اثر کوپل‌نیرو فارغ از اینکه اثر چرخشی را حول چه نقطه‌ای از فضا محاسبه می‌کنیم، همواره مقدار یکسانی داشته و این مقدار برابر است با حاصلضرب اندازهٔ نیرو در فاصلهٔ بین نیروها. به عبارت دیگر، مقدار اثر گشتاوری کوپل ارتباطی به مکان فیزیکی ندارد.**

با این‌وجود به منظور اثبات نکتهٔ یادشده، اقدام به محاسبهٔ گشتاور حول نقاط خواسته شده می‌کنیم و در نهایت خواهیم دید که مقدار تمامی آنها با هم برابر می‌شود.

$$\sum M_A = (F_1 \times 0) - (F_2 \times \overline{AC}) = -10 \times 0.6 = -6N.m$$

$$\sum M_B = -(F_1 \times \overline{AB}) - (F_2 \times \overline{BC}) = -(10 \times 0.2) - (10 \times 0.4) = -6N.m$$

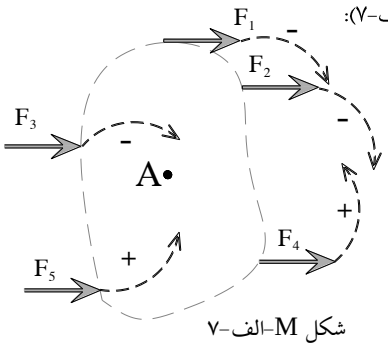
$$\sum M_C = -(F_1 \times \overline{AC}) + (F_2 \times 0) = -10 \times 0.6 = -6N.m$$



شکل M-الف-۶

تمرین الف-۳: یک جسم فرضی مطابق شکل M-الف-٦، در نقطهٔ A مفصل شده است. تعیین کنید این جسم تحت تأثیر نیروهای نمایش‌داده شده در چه جهتی دوران خواهد نمود؟

پاسخ: نخست جهت گشتاور ناشی از هر نیرو را تعیین نموده و سپس مبادرت به محاسبهٔ گشتاور هریک می‌کنیم (شکل M-الف-۷):

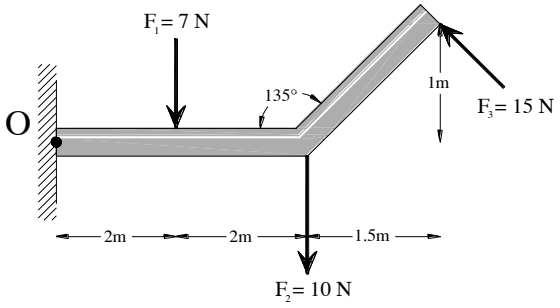


شکل M-الف-۷

$$\sum M_A = -(F_1 \times 1.6) - (F_2 \times 1) - (F_3 \times 0.3) + (F_4 \times 1.2) + (F_5 \times 1.5)$$
$$= -(15 \times 1.6) - (8 \times 1) - (10 \times 0.3) + (15 \times 1.2) + (16 \times 1.5)$$
$$= -24 - 8 - 3 + 18 + 24 = \boxed{+7}$$

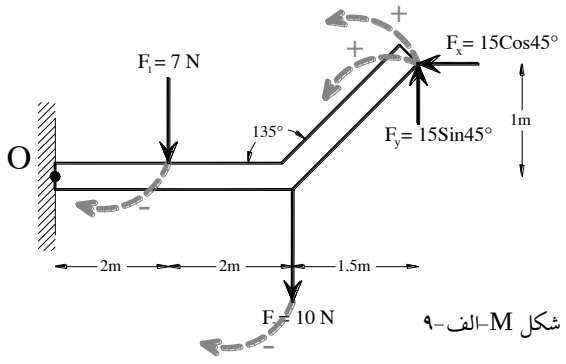
بنابراین، چون برایند گشتاور حول نقطهٔ A عددی با علامت مثبت به‌دست آمد، جسم حرکتی در خلاف جهت عقربه‌های ساعت (پادساعتگرد) خواهد داشت.

تمرین الف-۴: گشتاور نیروهای موجود در شکل را حول نقاط O محاسبه نمایید.



شکل M-الف-۸

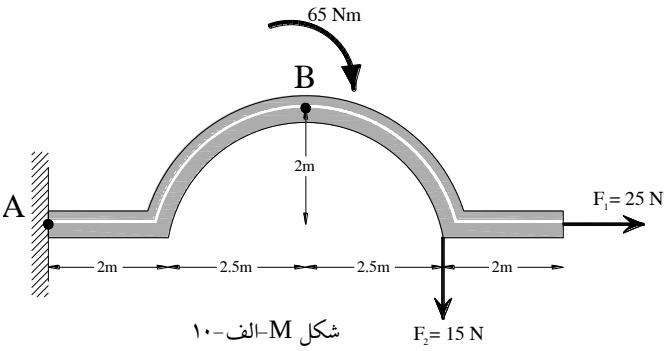
پاسخ: برای محاسبهٔ گشتاور، نیازمند دانستن فاصلهٔ عمودی نیروها از مبدأ سنجش گشتاور (نقطهٔ O) هستیم. دراین خصوص با نیروهای عمودی مشکلی نداریم. اما برای نیروی مورب می‌توانیم دو رویکرد را درپیش بگیریم؛ یکی تجزیهٔ آن به دو مؤلفهٔ افقی و عمودی و دیگری به‌دست آوردن فاصلهٔ عمودی آن (همچنان‌که در تمرین الف-۱ عمل کردیم). در کل، در چنین مواردی، روش اول توصیه می‌شود.



شکل M-الف-۹

$$\sum M_O = -(F_1 \times 2) - (F_2 \times 4) + (F_x \times 1) + (F_y \times 5.5)$$
$$= -(7 \times 2) - (10 \times 4) + (15Cos45^\circ \times 1) + (15Sin45^\circ \times 5.5)$$
$$= -14 - 40 + 15\frac{\sqrt{2}}{2} + 15\frac{\sqrt{2}}{2} \times 5.5 \approx \boxed{14.95Nm}$$

تمرین الف-۵: **در شکل مقابل، برایند گشتاور نیروها و کوپل حول نقاط A و B چقدر است؟**



شکل M-الف-۱۰

پاسخ: ابتدا حول نقطهٔ A گشتاور را محاسبه می‌کنیم. برای این نقطه، نیروی F_2 دارای اثر چرخشی است و کوپل نیز که در هر کجای صفحه اثر خود را برجای می‌گذارد. اما برای نقطهٔ A، نیروی F_1 دارای اثر چرخشی حول این نقطه نیست، چراکه امتداد آن از مرکز گشتاورگیری می‌گذرد و ازاین‌روست که فاصلهٔ عمودی از آن ندارد.

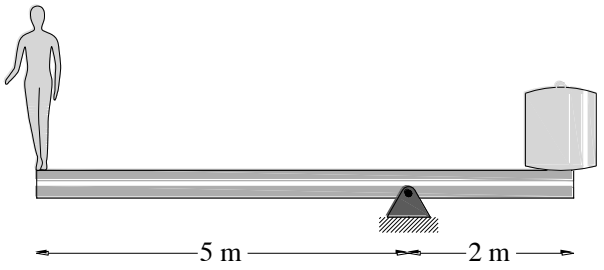
$$\sum M_A = -(F_2 \times 7) - 65 = -(15\times 7) - 65 = \boxed{-170\,Nm}$$

اما برای نقطهٔ B، هر سه عوامل موجود در سیستم دارای اثر چرخشی هستند:

$$\sum M_B = -(F_2 \times 2.5) + (F_1 \times 2) - 65$$
$$= -(15\times 2.5) + (25\times 2) - 65 = \boxed{-52.5\,Nm}$$

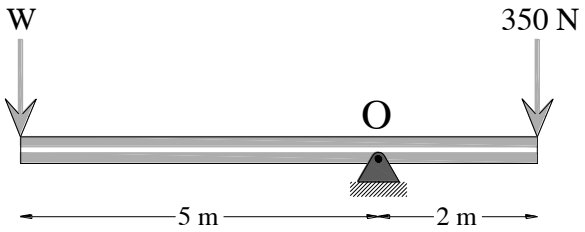
نکته: **محاسبهٔ گشتاور، تنها به اندازهٔ نیرو و فاصلهٔ عمودی نقطه‌اثر آن نیرو تا مرکز گشتاورگیری بستگی دارد و شکل و فرم سازه، هیچ تأثیری بر آن ندارد.**

تمرین الف-۶: **در یک سوی اهرمی، مطابق شکل M-الف-۱۱ وزنهٔ 350N قرار داده‌ایم. یک نفر با چه جرمی در سوی دیگر بایستد تا اهرم به حال تعادل قرار گیرد؟**



شکل M-الف-۱۱

پاسخ: اهرم تمایل به چرخش حول تکیه‌گاه مفصلی خود دارد. بنابراین، اگر قرار باشد متعادل بماند، باید گشتاورهای ایجادشده در دو طرف آن با یکدیگر برابر باشند. به بیان دیگر، می‌بایست تعادل چرخشی حاکم شود.



شکل M-الف-۱۲

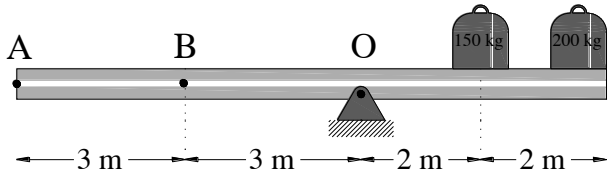
$$\sum M_O = 0 \Rightarrow -(350\times 2) + (W\times 5) = 0 \Rightarrow W = 140N$$
$$W = m.g \Rightarrow 140 = m\times 10 \Rightarrow \boxed{m = 14kg}$$

نکته: **همین خاصیت اهرم است که سبب می‌شود بتوان از این ابزار برای بلند کردن اجسام سنگین به‌واسطهٔ اعمال نیروی کم استفاده نمود.**

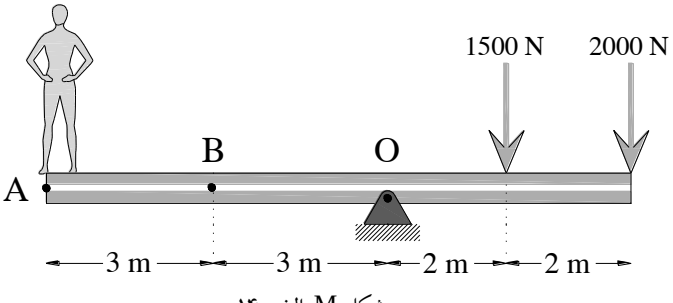
تمرین الف-۷: **در یک سمت اهرم، دو وزنه به جرم 200kg و 150kg قرار گرفته است. تعیین کنید:**

الف- کیفیت حرکت اهرم را اگر یک فرد به جرم 100kg در سوی دیگر و انتهای اهرم (نقطهٔ A) بایستد.

ب- فرد با چه جرمی در سوی دیگر و در نقطهٔ B بایستد تا اهرم نچرخد.



شکل M-الف-۱۳



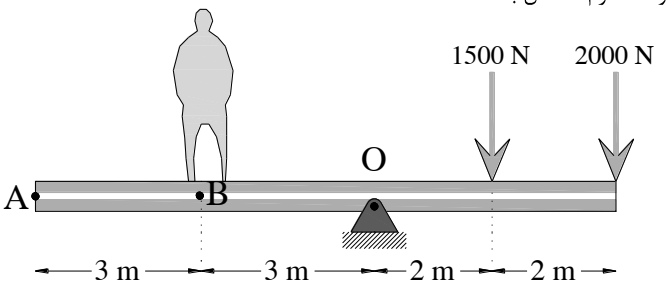
شکل M-الف-۱۴

$$\sum M_O = -(1500\times 2) - (2000\times 4) + (1000\times 6) = \boxed{-5000\ N.m}$$

پاسخ: الف- نخست گشتاور تولیدشده توسط وزنه‌ها را محاسبه می‌کنیم. قسمت الف که فرد در نقطهٔ A بایستد (شکل M-الف-۱۴):

بدین سبب که برایند گشتاور ایجاد شده حول نقطهٔ O مقداری منفی به‌دست آمده، طبق قرارداد، اهرم در جهت ساعتگرد شروع به چرخش خواهد نمود.

ب- برای پاسخ دادن به قسمت ب، باید برایند گشتاورها حول نقطهٔ O برابر صفر شود تا اهرم متعادل بماند.



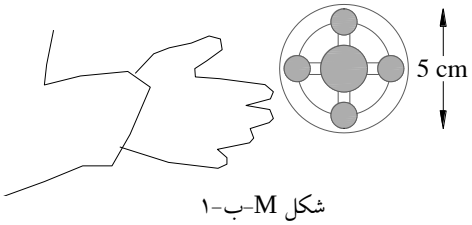
شکل M-الف-۱۵

$$\sum M_O = 0 \Rightarrow -(1500\times 2)-(2000\times 4)+(W\times 3)=0$$
$$\Rightarrow W\approx 3667N$$
$$W=m.g \Rightarrow 3667=m\times 10 \Rightarrow \boxed{m\approx 367kg}$$

با این وصف، جرم فرد باید حدود 367kg باشد تا اهرم متعادل باقی بماند.

ب- تمرین‌های بدون راه‌حل

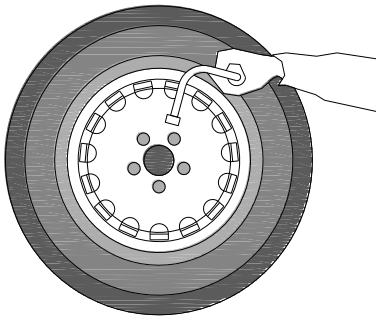
تمرین ب-۱: **برای باز کردن یک شیر آب به قطر 5cm، گشتاوری معادل 140N.cm لازم است. تعیین کنید به انگشتان چه نیرویی وارد می‌آید تا شیر باز شود؟**



شکل M-ب-۱

پاسخ: 28N

تمرین ب-۲: **تعمیرکاری قصد دارد تا با استفاده از آچار، چرخ یک اتومبیل را باز کند. وی باید برای بازشدن هر پیچ، 4.8Nm گشتاور وارد آورد. بدین منظور باید چه نیرویی بر آچار واردکند تا پیچ‌های به قطر 3cm چرخ باز شوند؟**



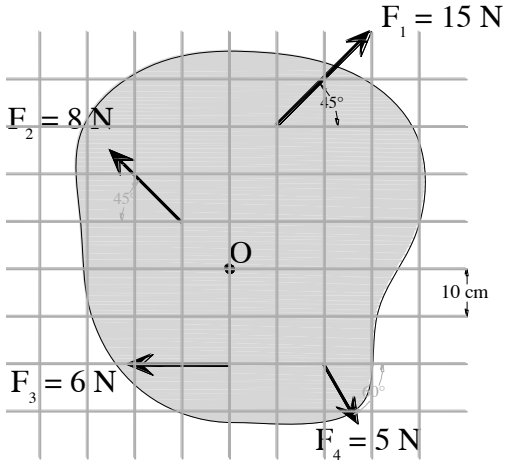
شکل M-ب-۲

پاسخ: 160N

ج- پرسش‌های چهارگزینه‌ای

تمرین ج-۱: **نتیجهٔ چرخشی ناشی از اعمال نیروهای مقابل بر جسم چه خواهد بود؟** ($\sqrt{3}\cong 1.7$ و $\sqrt{2}\cong 1.4$)

۱) 365 N.cm پادساعتگرد
۲) 365 N.cm ساعتگرد
۳) 670 N.cm پادساعتگرد
٤) 670 N.cm ساعتگرد

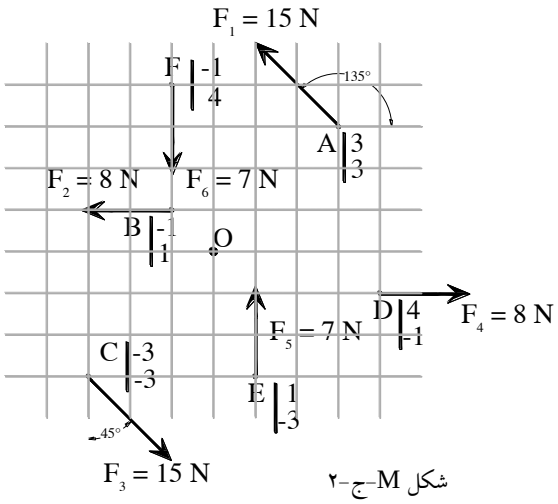


شکل M-ج-۱

پاسخ: گزینهٔ ۲

تمرین ج-۲: نتیجهٔ چرخشی اعمال نیروهای مقابل بر جسم چه خواهد بود؟ ($\sqrt{3}\cong 1.7$ و $\sqrt{2}\approx 1.4$)

۱) 60 N.m ساعتگرد
۲) 145 N.m ساعتگرد
۳) 30 N.m پادساعتگرد
٤) 156 N.m پادساعتگرد

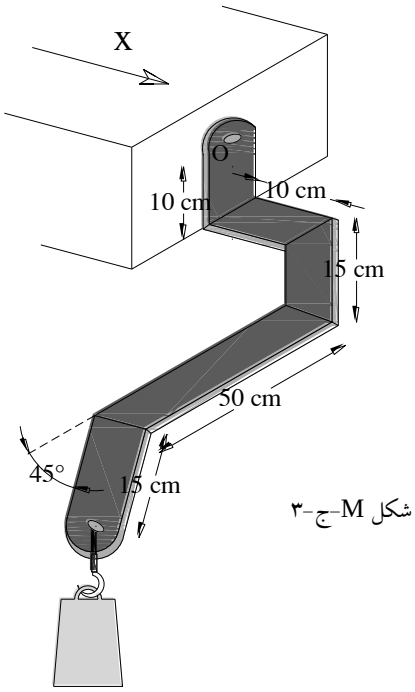


شکل M-ج-۲

پاسخ: گزینهٔ ۴

تمرین ج-۳: وزنهٔ 5kg آویخته‌شده به سگ‌دست تصویر مقابل، چه لنگری حول محور x در نقطهٔ O ایجاد می‌کند؟ ($\sqrt{3}\cong 1.7$ و $\sqrt{2}\approx 1.4$)

۱) 500 N.cm ساعتگرد
۲) 3750 N.cm ساعتگرد
۳) 3025 N.cm پادساعتگرد
٤) 5000 N.cm پادساعتگرد

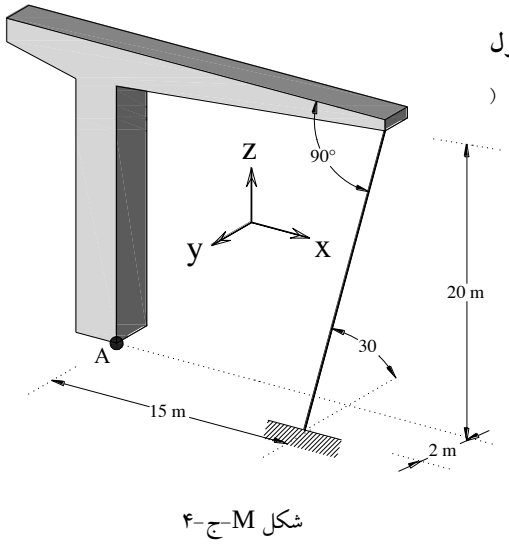


شکل M-ج-۳

پاسخ: گزینهٔ ۳

تمرین ج-۴: کابل متصل‌شده به جرثقیل با نیروی 100ton، چه گشتاوری حول محورهای مختصات در نقطهٔ A ایجاد می‌کند؟ (کابل، در صفحهٔ yz قرار دارد.) ($\sqrt{3}\cong 1.7$ و $\sqrt{2}\approx 1.4$)

۱) $M_y=750\,t.m\ ,\ M_x=100\,t.m\ ,\ M_z=1275\,t.m$
۲) $M_y=1500\,t.m\ ,\ M_x=200\,t.m\ ,\ M_z=0$
۳) $M_y=1275\,t.m\ ,\ M_x=1700\,t.m\ ,\ M_z=1275\,t.m$
٤) $M_y=750\,t.m\ ,\ M_x=1700\,t.m\ ,\ M_z=200\,t.m$



شکل M-ج-۴

پاسخ: گزینهٔ ۱