فصل ۵

روش اجزاء محدود برای المانهای مستقیم[1]

محاسبه مستقیم ماتریس سختی وماتریس بار

[1] Straight Sided Elements

۵- روش اجزاء محدود برای المانهای مستقیم[2]، محاسبه مستقیم ماتریس سختی وماتریس بار

بر اساس روش ارائه شده در فصل قبل می‌توان ماتریسهای سختی و بار را برای دسته‌ای از المانها مستقیما محاسبه نمود. این المانهای ساده دارای انتگرال قابل محاسبه برای عملیات ریاضی منتج به ماتریس سختی و بار می‌باشند.

۵-۱ روش اجزا محدود در ارتباط با خمش تیر

بر اساس مبانی ارائه شده در فصول قبل می‌توان تابع انرژی پتانسیل کل را برای یک تیر خمش خالص تحت بار کسترده $P(x)$ بصورت زیر نوشت:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^L EI\,(w_{xx})^2\ dx - \ \int_0^L pw\ dx$$

w تابع تغییر شکل تیر می‌باشد که در فصل قبل این تابع را بر حسب درجات آزادی المان بدست آوردیم.نشان دادیم که تابع انرزی پتانسیل را می‌توان برحسب بردار درجات آزادی المان بصورت زیر نوشت:

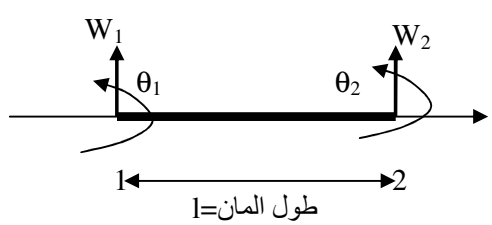
$$U^e = \frac{1}{2}\{\delta^e\}^T[K^e]\{\delta^e\}$$

$$W^e = \{F^e\}^T\{\delta^e\}$$

$$\pi_T = \sum_{i=1}^{nele}\ \left[\frac{1}{2}\{\delta^e\}^T[K^e]\{\delta^e\} - \{F^e\}^T\{\delta^e\}\right]$$

۵-۱-۱ بدست آوردن ماتریس سختی

المان دو گره‌ای زیر به طول l و سختی خمشی ثابتEI در فصل قبل توضیح داده شده است.



شکل ۵-۱ المان تیر خمشی دو گرهی با چهار درجه آزادی

[2] Straight Sided Elements

تابع تغییرمکان در داخل المان را نیز یک چند جمله ای در جه سه از xمطابق زیر در نظر گرفته شد:

$$w = a + bx + cx^2 + dx^3$$

رابطه بردار درجه آزادی با بردار ضرائب چند جمله‌ای را بصورت زیر نوشتیم:

$$\{\delta^e\}^T = [w_1 \quad \theta_1 \quad w_2 \quad \theta_2]$$

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix}$$

$$\{\delta^e\} = [T]\{\alpha\}$$

[T]ماتریس تبدیل است و با معکوس کردن [T] می توان ضرایب چندجمله ای را بر حسب درجات آزادی بدست آورد. قدم بعدی محاسبه انرژی پتانسیل کل المان بر حسب تابع تغییر مکان w(x) است.توجه شود که در روش اجزا محدود ما علاقه مند نیستیم تا معادله دیفرانسیل را به طور دقیق ارضا نماییم، بلکه علاقه مند به انرژی یا کار انجام شده هستیم.

تابع تغییرمکان را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$w(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 = \sum_{i=1}^{4} a_i x^{m_i} \qquad m_i = i - 1$$

$$m_i \xrightarrow{\text{در شکل برداری}} \{M\}^T = [0 \quad 1 \quad 2 \quad 3]$$

$$\frac{dw}{dx} = \sum_{i=1}^{4} a_i m_i x^{m_i - 1}$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \sum_{i=1}^{4} a_i m_i (m_i - 1) x^{m_i - 2}$$

حال برای انرژی کرنشی ذخیره شده در داخل المان داریم:

$$U_e = \frac{EI}{2}\int_0^l (\frac{d^2w}{dx^2})^2 dx = \frac{EI}{2}\int_0^l (\sum_{i=1}^{4} a_i m_i (m_i - 1) x^{m_i - 2})(\sum_{j=1}^{4} a_j m_j (m_j - 1) x^{m_j - 2}) dx$$

$$U_e = \frac{EI}{2}\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} a_i a_j m_i m_j (m_i - 1)(m_j - 1)\int_0^l x^{m_i + m_j - 4}) dx$$

$$U_e = \frac{EI}{2}\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} a_i a_j m_i m_j (m_i - 1)(m_j - 1)\left[\frac{x^{m_i + m_j - 3}}{m_i + m_j - 3}\right]_0^l$$

$$U_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} \bar{k}_{ij}\, a_i a_j = \frac{1}{2}\{\alpha\}^T \left[\bar{k}\right]\{\alpha\}$$

$$where \quad \bar{k}_{ij} = m_i m_j (m_i - 1)(m_j - 1)\left[\frac{EI \quad l^{m_i + m_j - 3}}{m_i + m_j - 3}\right]$$

توجه: متقارن است زیرا با تبدیل i و j به یکدیگر مقدارش تغییری نمی کند. $\bar{k}_{ij}$

مولفه های ماتریس سختی $\left[\bar{k}\right]$ بر حسب ضرایب جندجمله ای a_i است.

برای رسیدن به ماتریس سختی نهایی که بر حسب درجات آزادی المان است باید تبدیلات زیر صورت پذیرد و داریم:

$$U_e = \frac{1}{2}\{\alpha\}^T \left[\bar{k}\right]\{\alpha\} = \frac{1}{2}\left([T]^{-1}\{\delta^e\}\right)^T \left[\bar{k}\right]\left([T]^{-1}\{\delta^e\}\right)$$

$$U_e = \frac{1}{2}\{\delta^e\}^T \left(\left([T]^{-1}\right)^T \left[\bar{k}\right][T]^{-1}\right)\{\delta^e\}$$

$$U_e = \frac{1}{2}\{\delta^e\}^T \left[k^e\right]\{\delta^e\}$$

$$\left[k^e\right] = \left([T]^{-1}\right)^T \left[\bar{k}\right][T]^{-1}$$

توجه شود کهما در فصل قبل نشان دادیم که $\left[k^e\right]$ ماتریس سختی المان است و با دیدن عبارت بدست آمده برای U_e می توانیم آن را دریابیم. به عبارت دیگر $\left[k^e\right]$ همان ماتریس سختی المان بر حسب

تغییرمکان ها یا همان درجات آزادی المان $\{\delta^e\}$است و در پروسه اسمبل کردن از این ماتریس سختی استفاده می‌گردد

۵-۱-۲ بدست آوردن بردار بار سازگار

بردار بار سازگار، بردار معادل بارهای خارجی وارده روی المان میباشد که در روی درجات آزادی گره های المان توزیع شده اند و با استفاده از اصل کار مجازی قابل یافتن است.

انرژی پتانسیل بارهاW (یا همان V) عبارت است از:

$$W = \int_0^l p(x)w(x)dx$$

اگر بار وارد بر تیر را یکنواخت فرض کنیم ($p(x)=p_0$)

$$W = \int_0^l p(x)w(x)dx = p_0\int_0^l \sum_{i=1}^{4} a_i x^{m_i} dx = p_0 \sum_{i=1}^{4} a_i \frac{l^{m_i+1}}{m_i+1} = \{\alpha\}^T\{\bar{p}\}$$

$$\bar{p}_i = p_0 \frac{l^{m_i+1}}{m_i+1}$$

حال انرژی پتانسیل را بر حسب درجات آزادی $\{\delta^e\}$ بیان می کنیم.

$$W = \{\alpha\}^T\left\{\bar{p}\right\} = \left([T]^{-1}\{\delta^e\}\right)^T\left\{\bar{p}\right\} = \{\delta^e\}^T\left(\left([T]^{-1}\right)^T\left\{\bar{p}\right\}\right)$$

$$W = \{\delta^e\}^T\{p^e\}$$

$\{p^e\}$بردار بار سازگار برای تغییر مکان های کلی $\{\delta^e\}$است.

گام های محاسباتی برای محاسبه ماتریس سختی و بردار بار المان را می‌آوریم:

۱- برنامه نویسی برای ماتریس تبدیل $[T]$ و معکوس کردن آن.

۲- برنامه نویسی برای ماتریس سختی تبدیل نیافته $[\bar{k}]$ و بردار بار $\left\{\bar{p}\right\}$.

۳- تبدیل به $[k^e]$ و $[p^e]$ (قبل و بعد به ترتیب ضربدر $\left([T]^{-1}\right)^T$ و $[T]^{-1}$)

۵-۱-۳ روشی دیگر برای بدست آوردن ماتریس سختی

بدیهی است که اندازه ماتریس تبدیل [T] بستگی به درجه چند جمله ای‌دارد. بنابراین برای چند جمله ای های درجه بالاتر فرایند معکوس کردن ماتریس تبدیل [T] هزینه محاسباتی بالایی دارد و وقت زیادی از کامپیوتر می گیرد.

روش دیگری برای محاسبه $[k^e]$ وجود دارد که در آن، در تعداد زیادی از ضرب های ماتریسی صرفه جویی می شود.

در فصل قبل نشان دادیم که با حل چهار معادله و چهار مجهول ضرایب a,b,c,d را می توان بر حسب درجات آزادی $w_1,w_2,\theta_2,\theta_1$ بدست آورد. حال اگر جای ضرایب a,b,c,d مقدار آن ها بر حسب $w_1,w_2,\theta_2,\theta_1$ را در تابع تغییرمکان قرار دهیم:

$$w(x) = w_1 + \theta_1\ x + \left[\frac{w_2 - w_1}{l^2} - \frac{2\theta_1 + \theta_2}{l}\right] x^2 + \left[\frac{\theta_1 + \theta_2}{l^2} + 2\frac{w_1 - w_2}{l^3}\right] x^3$$

با به کارگیری سیستم مختصات بدون بعد $\xi = x/l$ ،توانستیم تابع تغییرمکان تیر را بر حسب ξبیان کنیم:

$$w(\xi) = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)\ w_1 + (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)\ l\theta_1 + (3\xi^2 - 2\xi^3)\ w_2 + (\xi^3 - \xi^2)\ l\theta_2$$

$$w(\xi) = \varphi_1(\xi)\ w_1 + \varphi_2(\xi)\ \theta_1 + \varphi_3(\xi)\ w_2 + \varphi_4(\xi)\ \theta_2$$

که ϕ_iها همان توابع درون یابی (اینترپلاسیون) یا توابع شکل می باشند.

ضرایب سختی بر اساس روابط زیر همچنین می توانند از یک راه ساده تر محاسبه شوند:

$$U_e = \frac{EI}{2}\int_0^l \left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\{\delta^e\}^T [K^e]\{\delta^e\}$$

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \qquad \{\varphi\} = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{Bmatrix} \qquad w = \sum w_i \varphi_i$$

$$U_e = \frac{EI}{2}\int_0^l \left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)^2 dx = \frac{EI}{2}\int_0^l \sum w_i \frac{d^2\varphi_i}{dx^2} \sum w_j \frac{d^2\varphi_j}{dx^2} dx =$$

$$\sum \sum \frac{1}{2}\int_0^l EI w_i w_j \frac{d^2\varphi_i}{dx^2}\frac{d^2\varphi_j}{dx^2} dx$$

$$k_{ij} = \int_0^l EI \frac{d^2\varphi_i}{dx^2}\frac{d^2\varphi_j}{dx^2} dx = \frac{EI}{l^4}\int_0^l \frac{d^2\varphi_i}{d\xi^2}\frac{d^2\varphi_j}{d\xi^2} l\, d\xi$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{1}{l^2}\frac{d^2}{d\xi^2} \qquad dx = l\, d\xi$$

$$k_{ij} = \frac{EI}{l^3}\int_0^l \varphi_i'' \varphi_j'' d\xi$$

۵-۲ المانهای الاستیسیته صفحه ای مستقیم

در فصول قبلی با سه دسته از معادلات در الاستیسیته صفحه ای به صورت زیر آشنا شدیم:

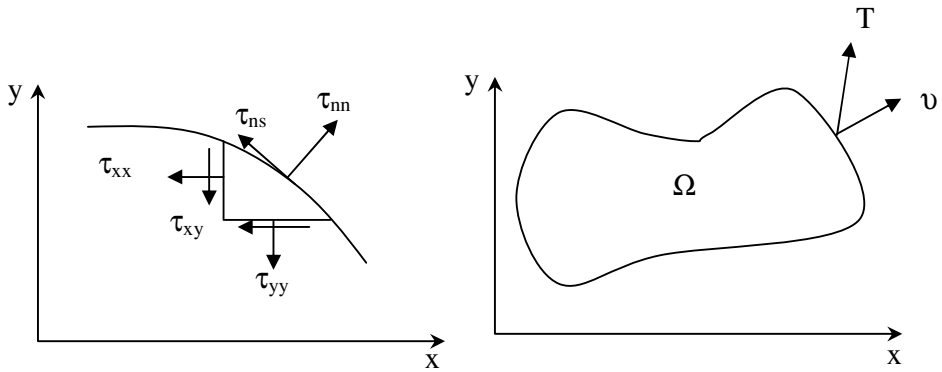
۵-۱

$$\tau_{ij,j} = f_i$$ روابط تعادل

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$ روابط تنش-کرنش

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$ روابط کرنش-تغییرمکان

برای حل یک مساله در الاستیسیته صفحه ای، معادلات بالا باید بر روی ناحیه دوبعدی Ω همراه با شرایط مرزی مساله ارضا شوند.



۵-۲ مسائل الاستیسیته صفحه ای در ناحیه دوبعدی Ω

در این حالت ما با سه نوع شرط مرزی مواجه هستیم:

۱- شرایط مرزی همگن:

۵-۲

$$\tau_{ij}\upsilon_j = 0 \qquad on\ S_F$$

$$u_i = 0 \qquad on\ S_D$$

که در آن:

υ_j =مولفه های بردار یکه عمود بر مرز

S_F =مرز بدون تنش

S_D =قسمتی از مرز که جابه جایی ها برابر صفر هستند

۲- شرایط مرزی همگن مخلوط(میکس شده):

$$\tau_{ij}\upsilon_j = 0 \qquad on\ S_F$$
$$u_i = 0 \qquad on\ S_D$$
$$\tau_{ij}\upsilon_j + \alpha_{ij}u_i = 0 \qquad on\ S_M$$

۳-۵

α_{ij}=ثابت هایی نظیر سختی فنر

S_M=قسمت هایی از مرز که شرایط میکس روی آن تعریف شده اند (مانند فنرها و یا تکیه گاه های الاستیک)

۳- شرایط مرزی غیر همگن:

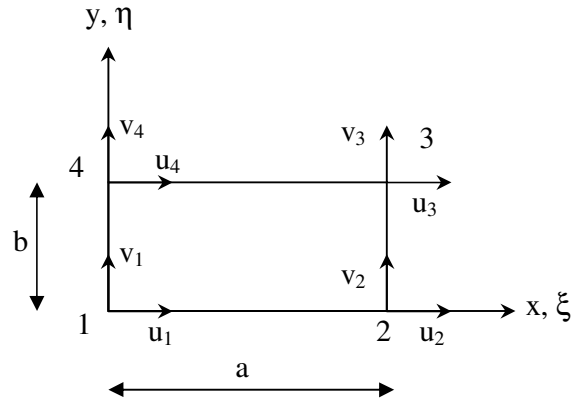
$$\tau_{ij}\upsilon_j = \overline{T}_i \qquad on\ S_T$$
$$u_i = \overline{u}_i \qquad on\ S_D$$
$$\tau_{ij}\upsilon_j + \alpha_{ij}u_i = \overline{C}_i \qquad on\ S_M$$

۴-۵

علامت بار نشان دهنده مقادیر مشخص کمیت ها است.

۵-۲-۱ المان های مستطیلی در تنش مسطحه

با توجه به اینکه این المان دارای چهارگره در هر گوشه است و هر گره نیز دارای دو درجه آزادی u,v (تغییرمکان افقی و قائم) است، یک المان ۸ گره ای محسوب می گردد.



$$\eta = \frac{y}{b}$$

$$\xi = \frac{x}{a}$$

۵-۳ المان های مستطیلی چهار گرهی در تنش مسطحه

۵-۲-۱-۱ تعیین تابع تغییر مکان

اگر توابع زیر به عنوان تابع تغییر مکان در داخل المان انتخاب شوند:

$$u(\xi,\eta) = a + b\xi + c\eta + d\xi\eta$$
$$v(\xi,\eta) = \underbrace{e + f\xi + g\eta}_{Linear} + \underbrace{h\xi\eta}_{bilinear}$$

عبارت$\xi\eta$ دوسویه[3] (دو خطی) است، زیرا برای مقادیر ثابتη ، u و v بر حسب ξ خطی هستند و همین طور برای مقادیر ثابت ξ ، u و v بر حسب η خطی هستند.

حال باید معیارهای همگرایی را برای این المان مورد بررسی قرار دهیم:

۱- حرکات صلب گونه:

دو انتقال (Constant) $u = a \quad v = e$

یک دوران (Constant) $\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial \xi} = c - f$

۲- کرنش ثابت:

u و v باید توابع خطی باشند، یعنی:

$$u = a + bx + cy \quad v = e + fx + gy$$

۳- همسانی فضایی:

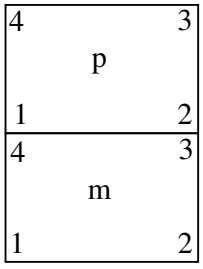
در نظر گرفتن جمله $\eta\xi$ به جای η^2 و ξ^2 سبب ارضای این شرط می گردد.

۴- پیوستگی:

چون مسائل مسطحه از نوع C^0 هستند (چرا؟) تنها پیوستگی خود توابع u و v باید رعایت شود.

ضرایب ثابتی که در تابع تغییرمکان وجود دارند باید شرایط پیوستگی توابع u و v را در بین المان ها ارضا نمایند.

به عنوان مثال در لبه ۱-۲ از شکل زیر داریم:



شکل ۵-۴ پیوستگی در مرز بین دو المان

$$u(\xi,\eta) = a + b\xi$$
$$v(\xi,\eta) = e + f\xi$$

در این حالت باید از پیوستگی توابع در نقاط گره ای ۱ و ۲ به صورت زیر، اطمینان حاصل کنیم:

[3] Bilinear

$$u_1^p = u_4^m \qquad u_2^p = u_3^m$$
$$v_1^p = v_4^m \qquad v_2^p = v_3^m$$

چون ۴ معادله و چهار مجهول وجود دارد پس می توان ضرایب a,b,e,f را طوری بدست آورد که شرایط بالا در تابع تغییر مکان برقرار باشد.پس نتیجه می شود که تابع تغییرمکان المان، شرایط سازگاری را ارضا می نماید.

حال می خواهیم ضرایب a تا h را بر حسب درجات آزادی المان بیان کنیم.از ارضای شرایط مرزی المان داریم:

$$u_1 = u(0,0) = a$$
$$u_2 = u(1,0) = a + b$$
$$u_3 = u(1,1) = a + b + c + d$$
$$u_4 = u(0,1) = a + c$$

$$v_1 = v(0,0) = e$$
$$v_2 = v(1,0) = e + f$$
$$v_3 = v(1,1) = e + f + g + h$$
$$v_4 = v(0,1) = e + g$$

با حل ضرایب مجهول بر حسب درجات آزادی:

$$a = e = (1-\xi)(1-\eta)$$
$$b = f = \xi(1-\eta)$$
$$c = g = \xi\eta$$
$$d = h = (1-\xi)\eta$$

حال می توان توابع تغییرمکان را بر حسب درجات- آزادی بیان کرد:

$$u(\xi,\eta) = (1-\xi)(1-\eta)\, u_1 + \xi(1-\eta)\, u_2 + \xi\eta\, u_3 + (1-\xi)\eta\, u_4$$
$$v(\xi,\eta) = (1-\xi)(1-\eta)\, v_1 + \xi(1-\eta)\, v_2 + \xi\eta\, v_3 + (1-\xi)\eta\, v_4$$

یا:

$$u(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{4} \varphi_i u_i \qquad v(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{4} \varphi_i v_i$$

که در آن توابع شکل عبارتند از:

$$\varphi_1 = (1-\xi)(1-\eta) \qquad \varphi_2 = \xi(1-\eta) \qquad \varphi_3 = \xi\eta \qquad \varphi_4 = (1-\xi)\eta$$

به راحتی می توان پیوستگی تغییرمکان ها را از توابع تغییرمکان بدست آمده در بالا مشاهده نمود، به عنوان مثال در مورد u داریم:

$$u^{p}(\xi,\eta) = (1-\xi)\, u_1^{p} + \xi\, u_2^{p} \quad along \quad edge \;\; 1-2 \;\; (\eta = 0)$$
$$u^{m}(\xi,\eta) = (1-\xi)\, u_4^{m} + \xi\, u_3^{m} \quad along \quad edge \;\; 3-4 \;\; (\eta = 1)$$

در مورد v نیز می توان به راحتی پیوستگی را مشاهده نمود.

۵-۲-۱-۲ ماتریس سختی

اگر u و v بدست آمده در بالا را در رابطه انرژی کرنشی قرار دهیم:

$$U^{e} = \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \iint_{\Omega} \left(u_x^{\,2} + v_y^{\,2} + 2\nu(u_x v_y) + \frac{1-\nu}{2}\left(u_y + v_x\right)^2 \right) d\Omega = \frac{1}{2}\left\{\delta^{e}\right\}^{T} [K^{e}] \left\{\delta^{e}\right\}$$

$$\left\{\delta^{e}\right\}^{T} = \left\{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4\right\}$$

$$U = \frac{Eabt}{2(1-\nu^2)} \int_0^1 \int_0^1 \left(\begin{array}{l} \frac{1}{a^2}\varphi_{i\xi}\varphi_{j\xi}u_i u_j + \frac{1}{b^2}\varphi_{i\eta}\varphi_{j\eta}v_i v_j + \frac{2\nu}{ab}\varphi_{i\xi}\varphi_{j\eta}u_i v_j + \\ \left(\frac{1-\nu}{2}\right)\left\{ \frac{1}{b^2}\varphi_{i\eta}\varphi_{j\eta}u_i u_j + \frac{2}{ab}\varphi_{i\eta}\varphi_{j\xi}u_i v_j + \frac{1}{a^2}\varphi_{i\xi}\varphi_{j\xi}v_i v_j \right\} \end{array} \right) d\xi\, d\eta$$

که در آن:

$$i = 1,2,3,4 \qquad \& \qquad j = 1,2,3,4$$

$$\varphi_{i\eta} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \quad \varphi_{i\xi} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \quad u_x^{\,2} = \left(\frac{1}{a}\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi}u_i\right)\left(\frac{1}{a}\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi}u_j\right)$$

با استفاده از قضیه اول کاستیگلیانو داریم:

$$F_i = \frac{\partial U_e}{\partial \delta_i}$$

که در آن:

U_eانرژی کرنشی المان

δ_iمولفه بردار درجه آزادی المان برابر جابه جایی

F_i نیروی تعمیم یافته متناظر با δ_i

به کمک رابطه بالا می توان درایه های ماتریس سختی را به راحتی به شکل زیر محاسبه نمود:

$$F^e{}_i = K^e{}_{i,j}\delta^e{}_j = \frac{\partial U_e}{\partial \delta_i}$$

$$K^e{}_{i,j} = \frac{\partial^2 U_e}{\partial \delta_i\, \partial \delta_j}$$

$$F_i^e = \frac{Eabt}{2(1-\nu^2)}\int_0^1\int_0^1\left(\frac{2}{a^2}\varphi_{i\xi}\varphi_{j\xi}u_j + \frac{2\nu}{ab}\varphi_{i\xi}\varphi_{j\xi}v_j + \left(\frac{1-\nu}{2}\right)\left\{\frac{2}{b^2}\varphi_{i\eta}\varphi_{j\eta}u_j + \frac{2}{ab}\varphi_{i\eta}\varphi_{j\eta}v_j\right\}\right)d\xi\, d\eta$$

به عنوان مثال در مورد درایه اول ماتریس سختی می توان نوشت:

$$K_{e1,1}u_1 = \frac{Eabt}{(1-\nu^2)}\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1}{a^2}\varphi_{1\xi}\varphi_{1\xi}u_1 + \left(\frac{1-\nu}{2b^2}\right)\{\varphi_{1\eta}\varphi_{1\eta}u_1\}\right)d\xi\, d\eta$$

$$\varphi_{1\xi} = -(1-\eta) \quad \varphi_{1\eta} = -(1-\xi)$$

بعد از انتگرال گیری:

$$K^e{}_{1,1} = \frac{Et}{12(1-\nu^2)}\left[4\frac{b}{a} + 2(1-\nu)\left(\frac{1-\nu}{2b^2}\right)\frac{a}{b}\right]$$

مقدار $\frac{b}{a}$ را با S نمایش داده و نسبت وجه می نامند.

اگر همین روال را برای تمام درایه های ماتریس به کار بگیریم، ماتریس سختی المان برابر زیر خواهد شد:

$$[K_e] = \frac{Et}{12(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} k_1 & & & & & & & \\ k_2 & k_3 & & & & SYM & & \\ k_8 & -k_5 & k_1 & & & & & \\ k_5 & k_{10} & -k_2 & k_3 & & & & \\ k_7 & -k_2 & k_4 & -k_5 & k_1 & & & \\ k_2 & k_9 & k_5 & k_6 & k_2 & k_3 & & \\ k_4 & k_5 & k_7 & k_2 & k_8 & -k_5 & k_1 & \\ k_5 & k_6 & k_2 & k_9 & k_5 & k_{10} & -k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = 4S + \frac{2}{S}(1-\nu) \qquad k_2 = \frac{3}{2}(1+\nu) \qquad k_3 = \frac{4}{3} + 2(1-\nu)S$$

$$k_4 = 2S - \frac{2}{S}(1-\nu) \qquad k_5 = -\frac{3}{2}(1-3\nu) \qquad k_6 = -\frac{4}{S} + (1-\nu)S$$

$$k_7 = -2S - \frac{1}{S}(1-\nu) \qquad k_8 = -4S + \frac{1}{S}(1-\nu) \qquad k_9 = -\frac{2}{S} - (1-\nu)S$$

$$k_{10} = \frac{2}{S} - 2(1-\nu)S$$

۵-۲-۱-۳ بردار بار تحت اثر وزن

فرض کنید که المان تحت بارهای کلی U_i و V_i در گره ها قرار دارد.

$$\{F^e\} = [K^e]\{\delta^e\}$$

$$\{F^e\}^T = \{U_1 \quad V_1 \quad U_2 \quad V_2 \quad U_3 \quad V_3 \quad U_4 \quad V_4\}$$

یادآوری می شود که:

$$\{F^e\}^T = \frac{\partial W^e}{\partial\{\delta^e\}}$$

برای محاسبه بردار بار سازگار برای المان باید بارگذاری وارد بر المان مثل نیروهای بدنی، تنش های مرزی و ... معین باشند.

حالتی را در نظر بگیرید که بار ثقلی با شدت $f_y=-\gamma$ (γ وزن مخصوص) بر المان وارد می شود در این حالت کار انجام شده برابر است با:

$$W_g{}^e = t\iint -\gamma\, v(\xi,\eta)dA = -t\int_0^1\int_0^1 \gamma \sum_i \varphi_i v_i\, abd\xi d\eta$$

به طور مثال:

$$F_1^e = \frac{\partial W_g{}^e}{\partial u_1} = 0$$

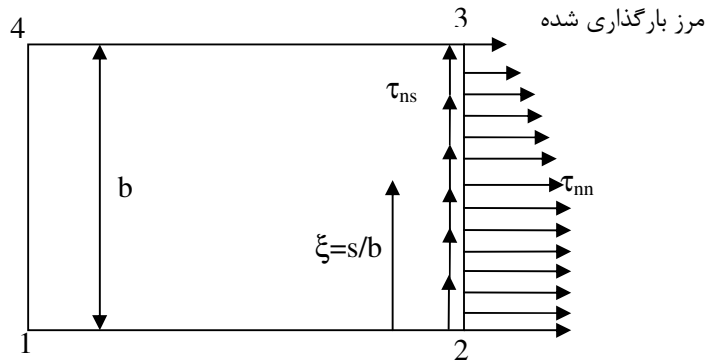
$$F_2{}^e = \frac{\partial W_g{}^e}{\partial v_1} = -t\int_0^1\int_0^1 \gamma\, \varphi_1\, abd\xi d\eta = -\frac{\gamma At}{4}$$

به طور مشابه:

$$\{F_g{}^e\}^T = -\frac{\gamma At}{4}\{0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1\}$$

۵-۲-۱-۳ بردار بار تحت اثر بار خارجی در مرزهای المان

حال فرض می کنیم که یکی از مرزهای المان مطابق شکل زیر بارگذاری شده است. بارگذاری نیز شامل هر دو تنش های نرمال و برشی است.



شکل ۵-۵ بار خارجی شامل تنش های نرمال و برشی در مرز المان

کار انجام شده توسط این تنش ها عبارت است از:

$$W_T = t\int_{S_T} \bar{T}_i u_i ds$$

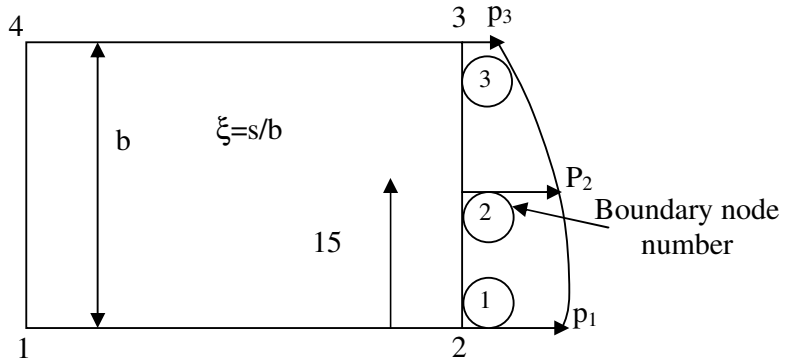
جهت مثبت در انتگرال روی مسیر بالا، در جهت مثلثاتی در نظر گرفته می شود.

حال اگر فرض کنیم که تنش ها به صورت سهموی بر روی لبه المان تغییر می کنند داریم:

$$p(s) = c_1 + c_2 s + c_3 s^2$$

با اعمال شرایط بر روی تابع :

$$p_1 = p(0) = c_1$$
$$p_2 = p(\frac{b}{2}) = c_1 + c_2\frac{b}{2} + c_3\frac{b^2}{4}$$
$$p_3 = p(b) = c_1 + c_2 b + c_3 b^2$$



شکل ۵-۶ توزیع سهموی بار خارجی در مرز المان

با حل c_1, c_2, c_3 بر حسب p_1, p_2, p_3:

$$p(\xi) = (1 - 3\xi + 2\xi^2)\, p_1 + (4\xi - 4\xi^2)\, p_2 + (-\xi + 2\xi^2)\, p_3$$

یا:

$$p(\xi) = \sum_{i=1}^{3} \phi_i(\xi)\, p_i$$

که در آن توابع شکل عبارتند از:

$$\phi_1 = (1 - 3\xi + 2\xi^2) \quad \phi_2 = (4\xi - 4\xi^2) \quad \phi_3 = (-\xi + 2\xi^2)$$

با تابع بدست آمده برای بار، تنش های نرمال و برشی می توانند بر حسب مقادیر این تنش ها بر روی گره های ۱ و ۲ و۳ تقریب زده شوند.

$$p_{x1} = \tau_{nn1} \qquad p_{x2} = \tau_{nn2} \qquad p_{x3} = \tau_{nn3}$$
$$p_{y1} = \tau_{ns1} \qquad p_{y2} = \tau_{ns2} \qquad p_{y3} = \tau_{ns3}$$

برای محاسبه کار این تنش ها در عبارت تابع پتانسیل باید توابع u و v نیز بر روی مرزی که این تنش ها وجود داشتند بر حسب درجات آزادی المان تعریف گردند.

$$u(\xi) = (1 - \xi)\, u_2 + \xi\, u_3$$
$$v(\xi) = (1 - \xi)\, v_2 + \xi\, v_3$$

$$W_T = bt\int_0^1 p_x(\xi)\, u(\xi)\, d\xi + \quad bt\int_0^1 p_y(\xi)\, v(\xi)\, d\xi$$

on int *egration, we obtain* :

$$W_T = \frac{bt}{6}\left[\left(p_{x1}+2p_{x2}\right)u_2 + \left(2p_{x2}+p_{x3}\right)u_3 + \left(p_{y1}+2p_{y2}\right)v_2 + \left(2p_{y2}+p_{y3}\right)v_3\right]$$

$$F_1^{eT} = F2_3^{eT} = F_7^{eT} = F_8^{eT} = 0$$

$$F_3^{eT} = \frac{\partial W_T}{\partial u_2} = \frac{bt}{6}\left(p_{x1}+2p_{x2}\right)$$

$$F_4^{eT} = \frac{\partial W_T}{\partial v_2} = \frac{bt}{6}\left(p_{y1}+2p_{y2}\right)$$

$$F_5^{eT} = \frac{\partial W_T}{\partial u_3} = \frac{bt}{6}\left(2p_{x2}+p_{x3}\right)$$

$$F_6^{eT} = \frac{\partial W_T}{\partial v_3} = \frac{bt}{6}\left(2p_{y2}+p_{y3}\right)$$

due to stresses on edge $2-3$ *only* :

$$\left\{F_T^{\,e}\right\}^T = \frac{bt}{6}\left[0 \quad 0 \quad \left(p_{x1}+2p_{x2}\right) \quad \left(p_{y1}+2p_{y2}\right) \quad \left(2p_{x2}+p_{x3}\right) \quad \left(2p_{y2}+p_{y3}\right) \quad 0 \quad 0\right]$$

then for this element, total load vector is then given by :

$$\left\{F^e\right\} = \left\{F_g^{\,e}\right\} + \left\{F_T^{\,e}\right\}$$

اگر بر روی مرزهای دیگر المان نیز بارگذاری وجود داشت باید به همین صورت بار و تغییرمکان را بر حسب درجات آزادی بر روی آن وجوه تعریف کرد.برای مثال اگر در مرز ۳-۴ هم بارگذاری داشته باشیم، سپس $F_1^{eT}= F_2^{eT} =F_3^{eT} =F_4^{eT}=0$ و بردار جدید $\{F_T^e\}$ برای مرز ۳-۴ باید به بردار $\{F_T^e\}$ در مرز ۲-۳ اضافه گردد.

۵-۲-۱-۴ کرنش ها و تنش ها در المان مستطیلی

یاد آور می شویم که مقادیر کرنشها را با توجه به مقادیر درجات آزادی المان و بر اساس روابط توابع تغییر مکان بصورت زیر محاسبه می شوند:

$$u(\xi,\eta) = (1-\xi)(1-\eta)\, u_1 + \xi(1-\eta)\, u_2 + \xi\eta\, u_3 + (1-\xi)\eta\, u_4$$
$$v(\xi,\eta) = (1-\xi)(1-\eta)\, v_1 + \xi(1-\eta)\, v_2 + \xi\eta\, v_3 + (1-\xi)\eta\, v_4$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{a}\left[-u_1 + u_2 + (u_1 - u_2 + u_3 - u_4)\eta\right]$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{b}\frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{1}{b}\left[-v_1 + v_4 + (v_1 - v_2 + v_3 - v_4)\xi\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{b}\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial \xi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b}\left(-u_1 + u_2\right) + \frac{1}{a}\left(-v_1 + v_2\right) + \\ \frac{1}{b}\left(u_1 - u_2 + u_3 - u_4\right)\xi + \\ \frac{1}{a}\left(v_1 - v_2 + v_3 - v_4\right)\eta \end{pmatrix}$$

از روی کرنش ها نیز تنش ها قابل محاسبه اند.

$$\{\tau\} = [D]\{\varepsilon\}$$

توجه شود که کرنش ε_{xx}بر حسب η خطی است و ε_{yy}نیز بر حسب ξ خطی است ولی γ_{xy} بر حسب هر دو متغیر خطی است. بنابراین کرنش ها در نقاط مرزی المانها پیوسته نیستند و بالطبع تنشها در مرزها پیوسته نیستند. پس مناسب است که مقادیر آن ها را در وسط المان ($\xi=\eta=0.5$) به صورت زیر محاسبه شود.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{2a}[-u_1 + u_2 + u_3 - u_4]$$
$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{2b}[-v_1 - v_2 + v_3 + v_4]$$
$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2b}(-u_1 - u_2 + u_3 + u_4) + \frac{1}{2a}(-v_1 + v_2 + v_3 - v_4)$$

و از روی آن ها تنش ها در مرکز المان محاسبه شوند.

۵-۲-۲ المان های مثلثی در تنش مسطحه

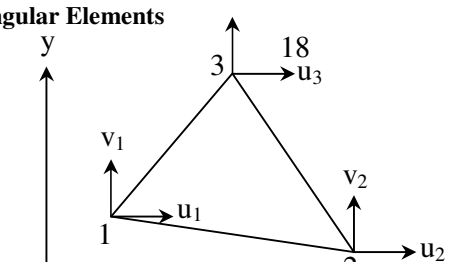
المانهای مثلثی، المانهای مناسب برای مشبندی جسم در حالتی که هندسه جسم دارای انحنا باشد، محسوب می‌شوند. در ادامه آن دسته از المانهائی که محاسبه ماتریس سختی مستقیم در آنها قابل محاسبه است را بررسی می‌کنیم.

۵-۲-۲-۱ المان مثلثی با تنش ثابت (C.S.T)[۴]

این المان المانی ضعیف است که با فرض تغییرمکان خطی برای توابع جابجائی در راستای افقی و قائم خواهیم داشت:

$$u(x, y) = a + bx + cy$$
$$v(x, y) = d + ex + fy$$

[4] **Constant Stress Triangular Elements**

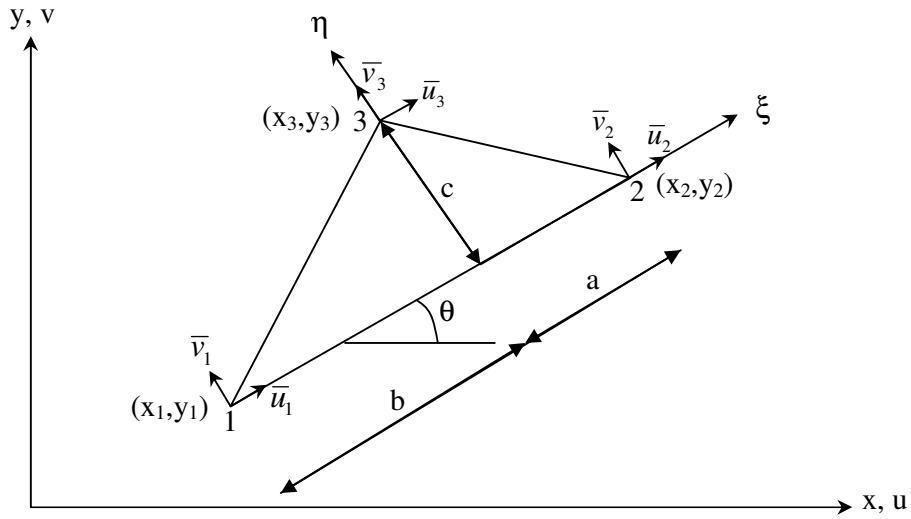


v_3

شکل ۵-۷ المان مثلثی با تنش ثابت

با توجه به اینکه المان دارای سه گره است و در هر گره دو درجه آزادی نیز تعریف شده است المان در کل دارای ۶ درجه آزادی خواهد بود و بنابراین برای تعریف تابع تغییرمکان به شش ضریب مجهول a, b, c, d, e, f نیاز است. در این جا نیز مانند روشی که برای المان های مستطیلی در نظر گرفتیم عمل می کنیم با این تفاوت که در اینجا روش کلی تری که شامل ماتریس تبدیل است در نظر گرفته می شود.

اگر در المان مثلثی مطابق شکل زیر مختصه های x و y به عنوان مختصات کلی و ξ و η در مختصات محلی تعریف شوند. همچنین مختصات نقاط گره ای ۱ و ۲ و ۳ به ترتیب با (x_1,y_1) , (x_2,y_2) , (x_3,y_3) بیان می شوند.



شکل ۵-۸ درجه آزادی در راستای دستگاه مختصات محلی

$$\cos\theta = \frac{x_2 - x_1}{(a+b)} = \frac{x_2 - x_1}{r}$$

$$\sin\theta = \frac{y_2 - y_1}{(a+b)} = \frac{y_2 - y_1}{r} \qquad r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$a = (x_2 - x_3)\cos\theta - (y_3 - y_2)\sin\theta = \frac{1}{r}[(x_2 - x_3)(x_2 - x_1) - (y_3 - y_2)(y_2 - y_1)]$$

$$b = (x_3 - x_1)\cos\theta + (y_3 - y_1)\sin\theta = \frac{1}{r}[(x_3 - x_1)(x_2 - x_1) + (y_3 - y_1)(y_2 - y_1)]$$

$$c = (y_3 - y_1)\cos\theta - (x_3 - x_1)\sin\theta = \frac{1}{r}[(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]$$

توابع تغییر مکان را به شکل زیر فرض می کنیم:

$$\bar{u}(\xi,\eta) = a_1 + a_2\xi + a_3\eta$$
$$\bar{v}(\xi,\eta) = a_4 + a_5\xi + a_6\eta$$

حال ضرایب مجهول بر حسب درجات آزادی المان بیان می شوند:

$$\bar{u}_1 = \bar{u}(-b,0) = -a_1 - ba_2 \qquad \bar{v}_1 = a_4 - ba_5$$
$$\bar{u}_2 = \bar{u}(a,0) = a_1 + aa_2 \qquad \bar{v}_2 = a_4 + aa_5$$
$$\bar{u}_3 = \bar{u}(0,c) = a_1 + ca_3 \qquad \bar{v}_3 = a_4 + ca_6$$

به کمک معادلات بالا و با حل درجات آزادی بر حسب ضرایب مجهول می توان روابط را به صورت ماتریسی زیر نوشت:

$$\{\bar{\delta}\} = [T]\{A\}$$

$$\{\bar{\delta}\}^T = \{\bar{u}_1 \quad \bar{v}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{u}_3 \quad \bar{v}_3\}$$
$$\{A\}^T = \{a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6\}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & -b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -b & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & c \end{bmatrix}$$

باید توجه داشت که ماتریس تبدیل [T] دارای دترمینان$\det[T]=-c^2(a+b)\neq 0$ است و معکوس پذیر می باشد.

$$\{A\}=[T]^{-1}\{\bar{\delta}\}$$

محاسبه انرژی کرنشی:

$$U_e=\frac{Et}{2(1-\nu^2)}\iint_A\left(\bar{u}_{,\xi}{}^2+\bar{v}_{,\eta}{}^2+2\nu\bar{u}_{,\xi}\bar{v}_{,\eta}+\frac{1-\nu}{2}\left(\bar{u}_{,\eta}+\bar{v}_{,\xi}\right)^2\right)d\xi d\eta$$

$$\bar{u}_{,\xi}=a_2 \qquad \bar{u}_{,\eta}=a_3 \qquad \bar{v}_{,\xi}=a_5 \qquad \bar{v}_{,\eta}=a_6$$

$$U_e=\frac{Et}{2(1-\nu^2)}\iint_A\left(a_2{}^2+a_6{}^2+2\nu a_2a_6+\frac{1-\nu}{2}\left(a_3{}^2+2a_3a_5+a_5{}^2\right)\right)d\xi d\eta$$

انتگرال فوق شامل اعداد ثابت است و همچنین دقت داریم که:

$$\iint_A d\xi d\eta=\frac{1}{2}(a+b)c$$

$$U_e=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\bar{k}_{ij}\ a_ia_j=\frac{1}{2}\{A\}^T[\bar{k}]\{A\}$$

$$k_{ij}a_j=\frac{\partial U_e}{\partial a_i}$$

به طور مثال:

$$k_{1j}a_j=\frac{\partial U_e}{\partial a_1} \quad k_{2j}a_j=\frac{\partial U_e}{\partial a_2}$$

و در نتیجه ماتریس سختی المان عبارت است از:

$$[\bar{k}]=\frac{Et(a+b)c}{2(1-\nu^2)}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&\nu\\0&0&\frac{1-\nu}{2}&0&\frac{1-\nu}{2}&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&\frac{1-\nu}{2}&0&\frac{1-\nu}{2}&0\\0&\nu&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

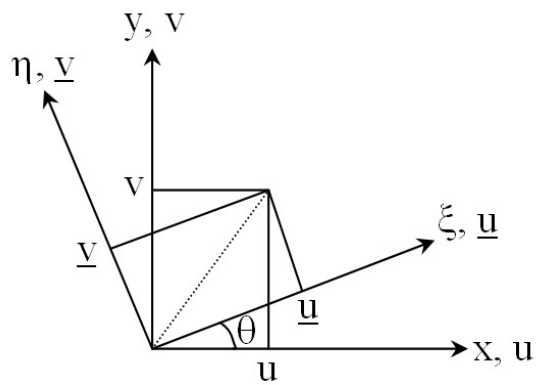
اکنون می خواهیم ماتریس را بر حسب جابه جایی ها در مختصات محلی بیان کنیم:

$$U_e=\frac{1}{2}\{\bar{\delta}\}^T[\underline{k}]\{\bar{\delta}\}=\frac{1}{2}\{\bar{\delta}\}^T\left([T]^{-1}\right)^T[\bar{k}][T]^{-1}\{\bar{\delta}\}$$

$$[\underline{k}] = \left([T]^{-1}\right)^T [\bar{k}][T]^{-1}$$

$[\underline{k}]$ ماتریس سختی در دستگاه مختصات محلی است.

حال تبدیل دیگری نیز صورت می دهیم و ماتریس سختی که بر حسب $\bar{u},\bar{v}$ در دستگاه ξ,η بود، بر حسب u,v در دستگاه x,y (دستگاه مختصات کلی) تعریف می کنیم. برای این منظور با توجه به شکل زیر، از روابط تبدیل دستگاه مختصات به صورت زیر بهره می گیریم:



شکل ۵-۹ ارتباط بین درجه آزادی محلی و کلی

$$u = \bar{u}\cos\theta - \bar{v}\sin\theta \quad v = \bar{u}\sin\theta + \bar{v}\cos\theta$$

یا:

$$\bar{u} = u\cos\theta + v\sin\theta \quad \bar{v} = -u\sin\theta + v\cos\theta$$

سوالی که ممکن است در اینجا ایجاد شود این است که چرا انتقال بین x, y با ξ, η در نظر گرفته نشد؟ جواب این سوال به این صورت است که چون حرکت انتقالی صلب گونه المان سبب تغییر انرژی کرنشی نخواهد شد.

$$\{\delta\}^T = \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3\}$$

$$\{\bar{\delta}\} = [R]\{\delta\}$$

$$[R] = \begin{bmatrix} [r] & [0] & [0] \\ [0] & [r] & [0] \\ [0] & [0] & [r] \end{bmatrix} \quad [r] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad [0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

با بازنویسی انرژی کرنشی:

$$U_e = \frac{1}{2}\{\bar{\delta}\}^T [\underline{k}]\{\bar{\delta}\} = \frac{1}{2}\left([R]\{\delta\}\right)^T [\underline{k}]\left([R]\{\delta\}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\{\delta\}^T [R]^T [\underline{k}][R]\{\delta\} = \frac{1}{2}\{\delta\}^T [k]\{\delta\}$$

$$[k] = [R]^T [\underline{k}][R] = [R]^T [T]^{-1^T} [\bar{k}][T]^{-1}[R]$$

($[k]$ماتریس سختی در دستگاه مختصات کلی است)

گام های محاسباتی را می توان به صورت زیر خلاصه کرد:

۱- تعیین مختصات کلی گره های المان (x_1,y_1) و (x_2,y_2) و(x_3,y_3)

۲- محاسبه $a,b,c,\ \theta$

۳- محاسبه ماتریس تبدیل $[T]$ و معکوس آن به صورت عددی

۴- محاسبه $[\bar{k}]$ و $[T]^{-1}[R]=[Q]$

۵- محاسبه $[k]=[Q]^T[\bar{k}][Q]$

۶- برگرداندن $[k]$ به مساله اصلی

دقت المان های مثلثی با تنش های ثابت:

مشاهده شد که در المان مثلثی قبل توابع u وv در x وy خطی هستند. خطای موجود در بسط تیلور این توابع بر حسب (l^2)است (l یک اندازه معمول از المان است). بنابراین خطای کرنش ها نیز بر حسب (l) است. همچنین خطای انرژی کرنشی نیز بر حسب (l^2)خواهد بود. به طور مثال اگر تعداد N المان بر روی طول Lاز یک مساله قرار داشته باشند خطای انرژی کرنشی بر حسب $(\frac{1}{N^2})$خواهد شد.

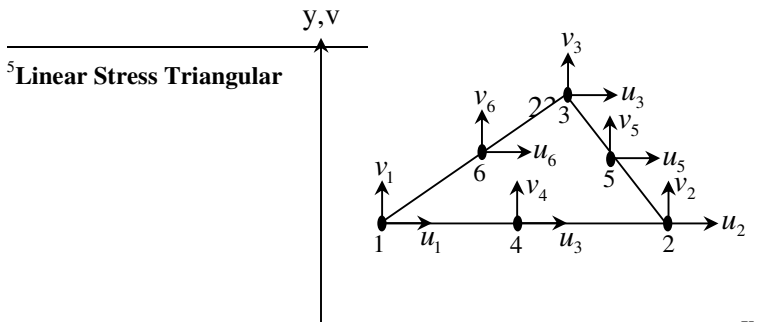
۵-۲-۲-۲ المان مثلثی با تنش خطی [5](L.S.T)

برای داشتن تنش های ثابت در المان لازم است که تغییرمکان ها به صورت درجه دوم یا سهموی تعریف شوند:

$$u(x,y)=a_1+a_2x+a_3y+a_4x^2+a_5xy+a_6y^2$$
$$v(x,y)=b_1+b_2x+b_3y+b_4x^2+b_5xy+b_6y^2$$

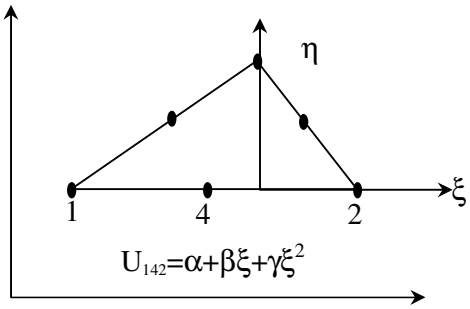
در این جا مطابق با شکل زیر ۱۲ درجه آزادی داریم (یک المان ۶ گره ای با دو درجه آزادی u,v در هر گره) بنابراین یک چندجمله ای کامل از درجه دوم حدس می زنیم. این چندجمله ای کامل شامل دوران های ثابت می باشد و اجازه می دهد که مرتبه خطا از بسط تیلور تابع تغییرمکان قابل محاسبه باشد. همچنین معیارهای همگرایی نظیر مودهای جسم صلب، کرنش ثابت و همسانی فضایی تابع تغییرمکان را نیز ارضا می کند.

[5]**Linear Stress Triangular**



شکل ۵-۱۰المان مثلثی با تنش خطی

در مورد پیوستگی تغییرمکان ها در مرز المان ها نیز می توان این طور توضیح داد که بر روی یک مرز از المان u و v هر کدام توابع درجه دوم از مختصات لبه المان هستند. حال با توجه به اینکه برای تعریف یک تابع درجه دو نیاز به سه نقطه (در این جا همان سه درجه آزادی روی هر لبه برای u یا v) داریم، ضرایب سهمی را می توان طوری بدست آورد که تابع پیوسته گردد. پس مشکلی از بابت پیوستگی وجود نخواهد داشت.

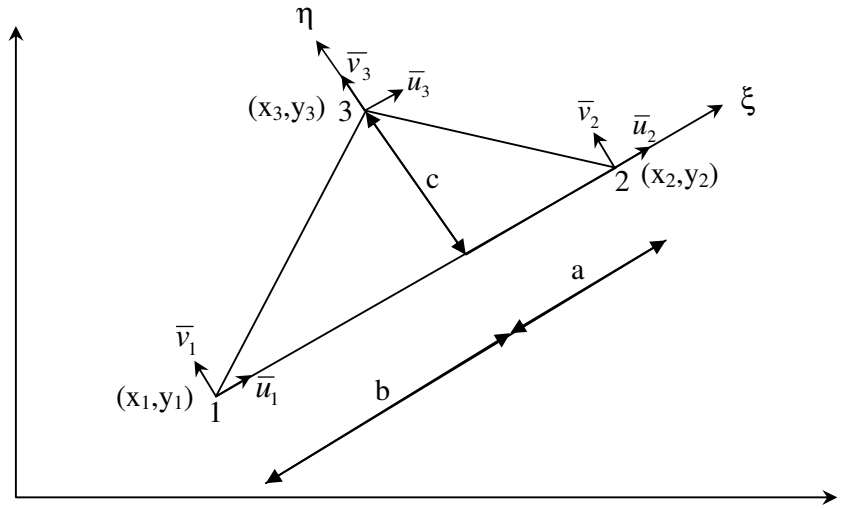


شکل ۵-۱۱ پیوستگی تغییر مکان در مرز المان

۵-۲-۲-۳ المان مثلثی با تنش سهموی (QST)[6]

سیستم مختصات (محلی) مانند حالتی است که برای المان مثلثی با تنش ثابت در نظر گرفتیم. یعنی در این حالت توابع تغییر مکان $\bar{u}(\xi,\eta)$, $\bar{v}(\xi,\eta)$ می‌باشند. برای اینکه تنش ها در داخل المان از درجه دوم باشند احتیاج داریم که توابع تغییرمکان از درجه سوم باشند.

[6] **Quadratic Stress Triangular**



شکل ۵-۱۲ درجه آزادی در راستای دستگاه مختصات محلی برای المان مثلثی با تنش سهموی

$$\bar{u}(x,y)=a_1+a_2\xi+a_3\eta+a_4\xi^2+a_5\xi\eta+a_6\eta^2+a_7\xi^3+a_8\xi^2\eta+a_9\xi\eta^2+a_{10}\eta^3$$

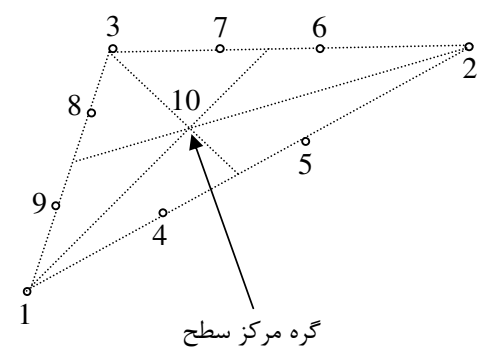
$$\bar{v}(x,y)=a_{11}+a_{12}\xi+a_{13}\eta+a_{14}\xi^2+a_{15}\xi\eta+a_{16}\eta^2+a_{17}\xi^3+a_{18}\xi^2\eta+a_{19}\xi\eta^2+a_{20}\eta^3$$

$$\bar{u}=\sum_{i=1}^{10}a_i\,\xi^{m_i}\,\eta^{n_i}\qquad \{m\}=[0\ \ 1\ \ 0\ \ 2\ \ 1\ \ 0\ \ 3\ \ 2\ \ 1\ \ 0]$$

$$\bar{v}=\sum_{i=1}^{10}a_{i+10}\,\xi^{m_i}\,\eta^{n_i}\qquad \{n\}=[0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 2\ \ 0\ \ 1\ \ 2\ \ 3]$$

برای بیان مختصه های تعمیم یافته $(a_1,a_2,...,a_{20})$ بر حسب درجات آزادی گره ای لازم است که درجات آزادی بر روی المان تعریف شوند.

حالت اول: می توان ده گره با دو درجه آزادی در هر گره، بدین صورت تعریف کرد که غیر از گره های موجود در گوشه دو گره میانی بر روی هر لبه المان وجود داشته باشد و همچنین یک گره نیز در مرکز سطح المان.



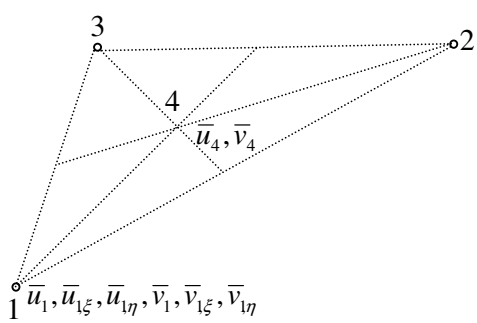
شکل۵-۱۳ المان مثلثی با تنش سهموی و دو گره میانی بر روی هر لبه المان و یک گره در مرکز سطح المان

$$\{\bar{\delta}\} = [T_a]\{A\}$$

$$\{\bar{\delta}\}^T = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & . & . & . & . & u_{10} & v_{10} \end{bmatrix}$$

$$\{A\}^T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & . & . & . & . & . & . & a_{20} \end{bmatrix}$$

حالت دوم: می توان چهار گره در المان تعریف کرد (سه گره در گوشه و یک گره در مرکز سطح المان)، بدین صورت که هر گره موجود در گوشه دارای شش درجه آزادی به صورت $\bar{u}, \bar{u}_{,\xi}, \bar{u}_{,\eta}, \bar{v}, \bar{v}_{,\xi}, \bar{v}_{,\eta}$ است و گره موجود در مرکز نیز دارای دو درجه آزادی به صورت $\bar{u}, \bar{v}$ می باشد. پس در مجموع ۱۸ درجه آزادی در گره های گوشه و ۲ درجه آزادی در گره میانی ۲۰ درجه آزادی گره ای که مطلوب ما بود را ایجاد می کنند.



شکل۵-۱۴ المان مثلثی با تنش سهموی و سه گره در گوشه با شش درجه آزادی و یک گره در مرکز سطح المان با دو درجه آزادی

برای این حالت نیز داریم:

$$\{\bar{\delta}\} = [T_b]\{A\}$$

$$\{\bar{\delta}\}^T = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 & \bar{u}_{1\xi} & \bar{u}_{1\eta} & \bar{v}_1 & \bar{v}_{1\xi} & \bar{v}_{1\eta} & . & . & \bar{u}_4 & \bar{v}_4 \end{bmatrix}$$

$$\{A\}^T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & . & . & . & . & . & . & a_{20} \end{bmatrix}$$

مقدار دترمینان غیر صفر ماتریس تبدیل $\left([T_b] = c^{14}(a+b)^{14} / 729\right)$ نشان می دهد که مشکلی از بابت معکوس کردن این ماتریس وجود نخواهد داشت و این المان می تواند در مسائل عملی به کار گرفته شود.

حال ماتریس سختی در مختصات محلی $[\bar{k}]$ برای این المان را بر حسب $(a_1, a_2, ..., a_{20})$ محاسبه می کنیم.

$$U_e = \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \iint_A \left(\bar{u}_{,\xi}{}^2 + \bar{v}_{,\eta}^2 + 2\nu \bar{u}_{,\xi}\bar{v}_{,\eta} + \frac{1-\nu}{2}\left(\bar{u}_{,\eta} + \bar{v}_{,\xi}\right)^2 \right) d\xi d\eta$$

$$\bar{u}_{,\xi} = \sum_{i=1}^{10} a_i m_i \xi^{m_i - 1} \eta^{n_i} \qquad \bar{u}_{,\xi}^2 = \sum_{i=1}^{10}\sum_{i=1}^{10} a_i a_j m_i m_j \xi^{m_i + m_j - 2} \eta^{n_i + n_j}$$

$$\iint_A \bar{u}_{,\xi}{}^2 d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{10}\sum_{i=1}^{10} a_i a_j m_i m_j \iint_A \xi^{m_i + m_j - 2} \eta^{n_i + n_j} d\xi d\eta$$

با یادآوری انتگرال زیر:

$$F(m,n) = \iint_A \xi^m \eta^n d\xi d\eta = c^{n+1}[a^{m+1} - (-b)^{m+1}] \frac{m!\,n!}{(m+n+2)!}$$

$$U_e = \frac{1}{2}\{A\}^T [\bar{k}]\{A\}$$

حال باید ماتریس سختی $[\bar{k}]$ را بر حسب درجات آزادی بیان کنیم و سپس فرم آن را در مختصات کلی بیاوریم.

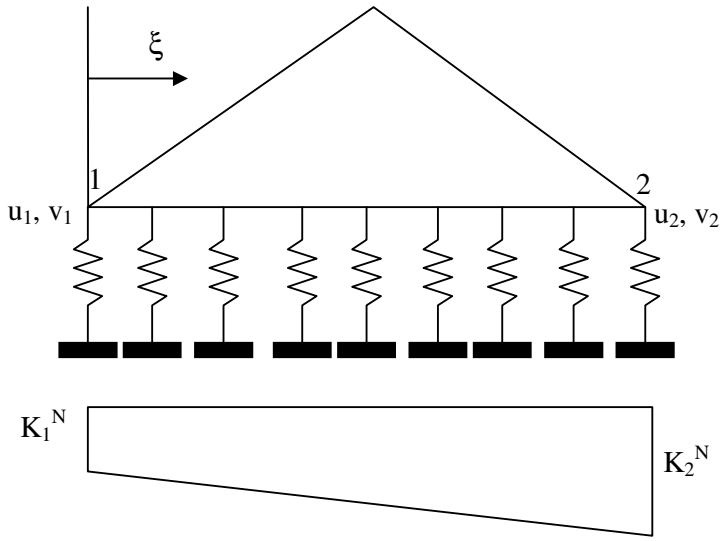
۵-۲-۳ شرایط مرزی همراه با فنر

از قبل یادآوری می شود که:

$$\pi = t\left[\frac{1}{2}\int_{\Omega}\tau_{ij}\varepsilon_{ij}d\Omega - \int_{\Omega}\bar{f}_i u_i d\Omega - \int_{S_T}\bar{T}_i u_i dS + \frac{1}{2}\int_{S_M}\alpha u_i u_i dS\right]$$

حال فرض کنید که مطابق شکل زیر، المان بر روی وجه ۱-۲ خود بر روی یک بستر الاستیک قرار گرفته است. مدول بستر به صورت فنرهایی با سختی ذیل تقریب زده می شود:

$$K^N(\xi) = K_1^{\ N}(1-\xi) + K_2^{\ N}\xi$$



شکل ۵-۱۵ اثر فنر در مرز المان

به عنوان مثال برای المان مثلثی با تنش ثابت (CST) تابع تغییرمکان در طول المان به صورت زیر خواهد بود:

$$v\ (\xi) = v_1(1-\xi) + v_2\xi$$

آخرین عبارت در سمت راست عبارت انرژی پتانسیل نیز می تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$U_B = \frac{1}{2}l\int_0^l K^N(\xi)\, v^2(\xi)d\xi$$

سهم نیروهای گره ای نیز به صورت زیر می باشد:

$$F_i^{\ B} = \frac{\partial U_B}{\partial \delta_i} \quad where \quad \{\delta\} = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3] = [\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3 \quad \delta_4 \quad \delta_5 \quad \delta_6]$$

$$F_2^{\ B} = \frac{\partial U_B}{\partial \delta_2} = \frac{\partial U_B}{\partial v_1} = l\int_0^l K(\xi)[v_1\,(1-\xi) + v_2\,\xi](1-\xi)d\xi$$

$$F_2^{\ B} = l\left\{\left[\frac{K_1^{\ N}}{4} + \frac{K_2^{\ N}}{12}\right]v_1 + \left[\frac{K_1^{\ N}}{12} + \frac{K_2^{\ N}}{12}\right]v_2\right\}$$

$$F_4^{\ B} = \frac{\partial U_B}{\partial \delta_4} = \frac{\partial U_B}{\partial v_2} = l\left\{\left[\frac{K_1^{\ N}}{12} + \frac{K_2^{\ N}}{12}\right]v_1 + \left[\frac{K_1^{\ N}}{12} + \frac{K_2^{\ N}}{4}\right]v_2\right\}$$

$$\begin{Bmatrix} F_2^{\ B} \\ F_4^{\ B} \end{Bmatrix} = l\begin{bmatrix} \left(\frac{K_1^{\ N}}{4} + \frac{K_2^{\ N}}{12}\right) & \left(\frac{K_1^{\ N}}{12} + \frac{K_2^{\ N}}{12}\right) \\ \left(\frac{K_1^{\ N}}{12} + \frac{K_2^{\ N}}{12}\right) & \left(\frac{K_1^{\ N}}{12} + \frac{K_2^{\ N}}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

در حالتی نیز که فنرهای مماسی بر روی لبه ۱-۲ وجود داشته باشند:

$$K^T(\xi) = K_1^{\ T}(1-\xi) + K_2^{\ T}\xi$$

$$u(\xi) = u_1(1-\xi) + u_2\xi$$

$$\begin{Bmatrix} F_1^B \\ F_3^B \end{Bmatrix} = l\begin{bmatrix} \left(\frac{K_1^T}{4} + \frac{K_2^T}{12}\right) & \left(\frac{K_1^T}{12} + \frac{K_2^T}{12}\right) \\ \left(\frac{K_1^T}{12} + \frac{K_2^T}{12}\right) & \left(\frac{K_1^T}{12} + \frac{K_2^T}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

پس اثر فنرها به صورت زیر در ماتریس سختی اضافه می شود:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} X & - & X & - & - & - \\ - & Y & - & Y & - & - \\ X & - & X & - & - & - \\ - & Y & - & Y & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix}$$

مساله نمونه:

۱- ماتریس سختی یک المان تیر محوری (خرپا) با سطح مقطع ثابت A و طول l را به دو روش زیر محاسبه کنید.

الف) با استفاده از روش انرژی، فرم تابع انرژی کرنشی.

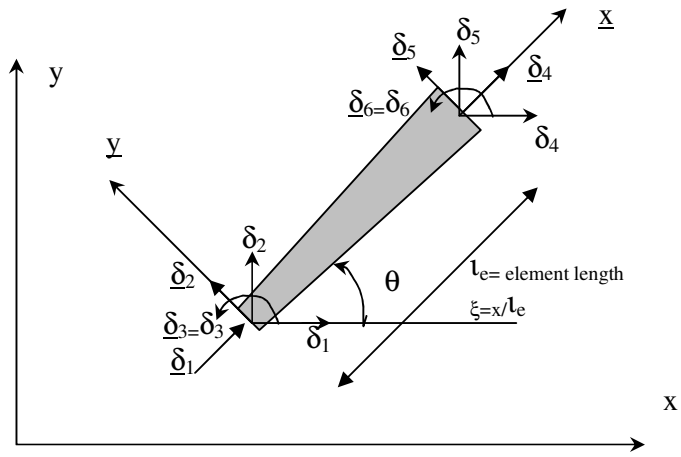
در این قسمت ابتدا تابع وابسته بر اساس تابع انرژی پتانسیل حدس زده می‌شود و سپس با جایگزینی تابع وابسته در فرم انرژی پتانسیل ماتریس سختی را محاسبه می‌کنیم.

ب) با استفاده از روش مستقیم، رابطه $[K^e] = \int_{V^e} [B]^T [C][B] dV^e$

در این قسمت نیز ابتدا تابع وابسته حدس زده می‌شود و سپس ماتریس معادل [C] و [B] را می‌یابیم و سپس با جایگزینی این ماتریسها در رابطه بالا ماتریس سختی را محاسبه می‌کنیم.

۲- ماتریس سختی یک المان تیر خمشی با سطح مقطع ثابت Aو مدول الاستیسیته Eو طول l را با استفاده از روش مستقیم، رابطه $[K^e] = \int_{V^e} [B]^T [C][B] dV^e$محاسبه کنید.

۳- یک المان تیر- ستون با مقطع متغیر با درجات آزادی محلی و کلی در شکل زیر نشان داده شده است.



δ_i =global DOF
$\underline{\delta}_i$ =local DOF

این المان دارای شش درجه آزادی ($\underline{\delta}_1, \underline{\delta}_2, \underline{\delta}_3, \underline{\delta}_4, \underline{\delta}_5, \underline{\delta}_5$) در راستای دستگاه مختصات محلی $\underline{x}$ و $\underline{y}$می‌باشد که نسبت به دستگاه مختصات کلی x و y به اندازه θ دوران دارد.

برای المان تیر-ستون با مقطع متغیر تقریب زیر را برای سطح و ممان اینرسی المان در طول آن داریم:

$$A(\xi) = (1-\xi)A_1 + \xi A_2$$
$$I(\xi) = (1-\xi)I_1 + \xi I_2$$

که در ان A_i و I_i بترتیب سطح مقطع و ممان اینرسی‌های مقاطع در گره i می‌باشد (i=1,2) .

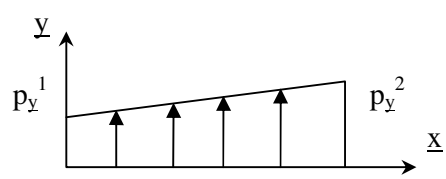
الف) برای تغییر مکان محوری خطی و تغییر مکان عرضی درجه سه، نشان دهید که ماتریس سختی المان در راستای مختصات محلی بصورت زیر می‌باشد (مدول الاستیسیته=E):

$$[K_A]=\begin{bmatrix} \frac{E}{2l_e}(A_1+A_2) & 0 & 0 & -\frac{E}{2l_e}(A_1+A_2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6E}{l^3_e}(I_1+I_2) & \frac{2E}{l^2_e}(2I_1+I_2) & 0 & \frac{6E}{l^3_e}(I_1+I_2) & \frac{2E}{l^2_e}(I_1+2I_2) \\ 0 & \frac{2E}{l^2_e}(2I_1+I_2) & \frac{E}{l_e}(3I_1+I_2) & 0 & -\frac{2E}{l^2_e}(2I_1+I_2) & \frac{E}{l_e}(I_1+I_2) \\ -\frac{E}{2l_e}(A_1+A_2) & 0 & 0 & \frac{E}{2l_e}(A_1+A_2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6E}{l^3_e}(I_1+I_2) & -\frac{2E}{l^2_e}(2I_1+I_2) & 0 & \frac{6E}{l^3_e}(I_1+I_2) & -\frac{2E}{l^2_e}(I_1+2I_2) \\ 0 & \frac{2E}{l^2_e}(I_1+2I_2) & \frac{E}{l_e}(I_1+I_2) & 0 & -\frac{2E}{l^2_e}(I_1+2I_2) & \frac{E}{l_e}(I_1+3I_2) \end{bmatrix}$$

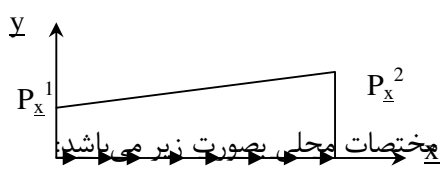
ب) تحت بار محوری و عرضی با تغییرات خطی زیر:

$$p_{\underline{y}}(\xi)=(1-\xi)p_{\underline{y}}^{\,1}+\xi\, p_{\underline{y}}^{\,2}$$

$$p_{\underline{x}}(\xi)=(1-\xi)p_{\underline{x}}^{\,1}+\xi\, p_{\underline{x}}^{\,2}$$



Transverse load



Axial load

نشان دهید که بردار بار در دستگاه مختصات محلی بصورت زیر می‌باشد:

$$\{p\}_{1\times6}^{\,T}=$$

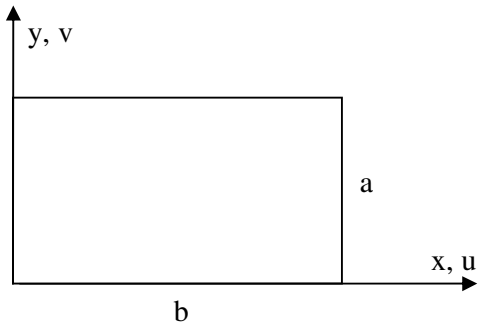
$$\left[\frac{l_e}{6}(2p_x^{\,1}+p_x^{\,2})\quad \frac{l_e}{20}(7p_y^{\,1}+p_y^{\,2})\quad \frac{l_e^2}{60}(3p_y^{\,1}+2p_y^{\,2})\quad \frac{l_e}{6}(p_x^{\,1}+2p_x^{\,2})\quad \frac{l_e}{20}(3p_y^{\,1}+7p_y^{\,2})\quad -\frac{l_e^2}{60}(2p_y^{\,1}+3p_y^{\,2})\right]$$

پ) ماتریس تبدیل درجات آزادی محلی هر گره به درجات آزادی کلی و همچنین ماتریس تبدیل درجات آزادی المان [T]، را نشان دهید. ضمنا مختصرا و بدون انجام عملیات روش تبدیل ماتریس سختی و بردار بار به مختصات کلی را شرح دهید.

توجه: انرژی کرنشی برای بار محوری (u به عنوان تغییر شکل محوری) و بار خمشی (w به عنوان تغییر شکل خمشی) بصورت زیر می‌باشد:

$$due\ to\ moment = \frac{1}{2}\int_0^l EIw_{xx}{}^2 dx \qquad due\ to\ axial = \frac{1}{2}\int_0^l EAu_x{}^2 dx$$

۴-المان مستطیلی شکل کرنش مسطح با نسبت ابعاد r=a/b و ضخامت واحد در شکل نشان داده شده است:



با فرض تابع تغییر شکل زیر:

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$$
$$v(x,y) = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy$$

اعضاء K_{11} ,K_{13}و K_{33} را محاسبه کنید. ماتریس سختی محاسبه شده برای حالت v = 0.2, r=1 در زیر آورده شده است.

$$\nu=0.2 \text{ and } r=1 \qquad [k] = \frac{E}{43.2}\begin{bmatrix} 22 & -13 & 2 & -11 & 7.5 & -1.5 & 1.5 & -7.5 \\ & 22 & -11 & 2 & 1.5 & -7.5 & 7.5 & -1.5 \\ & & 22 & -13 & -1.5 & 7.5 & -7.5 & 1.5 \\ & & & 22 & -7.5 & 1.5 & -7.5 & 1.5 \\ & & & & 22 & 2 & -13 & -11 \\ & & & & & 22 & -11 & -13 \\ & & & & & & 22 & 2 \\ \text{Symmetric} & & & & & & & 22 \end{bmatrix}$$

۵-در یک مسئله متقارن محوری، شکل زیر، تابع انرژی کرنشی بصورت زیر داده شده است:

$$U = \int_0^{2\pi}\int_0^L\int_{R1}^{R2} \frac{E(1-\upsilon)}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}[(\frac{\partial w}{\partial z})^2 + (\frac{\partial u}{\partial r})^2 + (\frac{u}{r})^2 + \frac{2\upsilon}{1-\upsilon}(\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{r}\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{(1-2\upsilon)}{2(1+\upsilon)}(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r})^2]rdrd\theta dz$$

در این دسته از مسائل برای کرنشها داریم:

$$\varepsilon_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z} \qquad \varepsilon_{rr}=\frac{\partial u}{\partial r} \qquad \varepsilon_{\theta}=\frac{u}{r} \qquad \gamma_{rz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}$$

ماتریس الاستیسیته هم بصورت زیر می باشد:

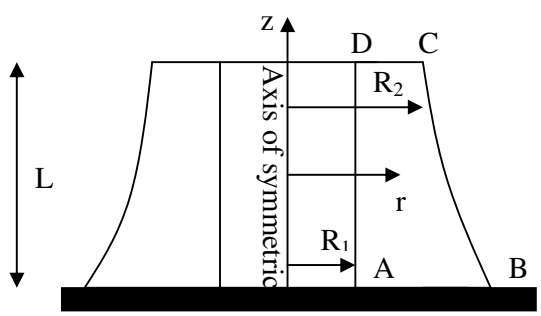
$$[C]=\frac{E(1-\upsilon)}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\begin{bmatrix} 1 & \frac{\upsilon}{(1-\upsilon)} & \frac{\upsilon}{(1-\upsilon)} & 0 \\ \frac{\upsilon}{(1-\upsilon)} & 1 & \frac{\upsilon}{(1-\upsilon)} & 0 \\ \frac{\upsilon}{(1-\upsilon)} & \frac{\upsilon}{(1-\upsilon)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\upsilon)}{2(1-\upsilon)} \end{bmatrix}$$

که در آن E مدول الاستیسیته و ν ضریب پواسون می‌باشد.در این مسئله برای حل به روش اجزاء محدود به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) تعداد مودهای صلب را تعیین نمائید.

ب) شرط پیوستگی در مرز المانها برای اطمینان از همگرائی را بیان کنید.

پ)با استفاده از روش مستقیم، رابطه $[K^e]=\int_{V^e}[B]^T[C][B]dV^e$ و برای حالت یک المان کلی با دانستن ماتریس[C] و تعیین[B]توضیح دهید که با جایگزینی این ماتریسها در رابطه بالا ماتریس سختی را چگونه محاسبه می‌کنیم.

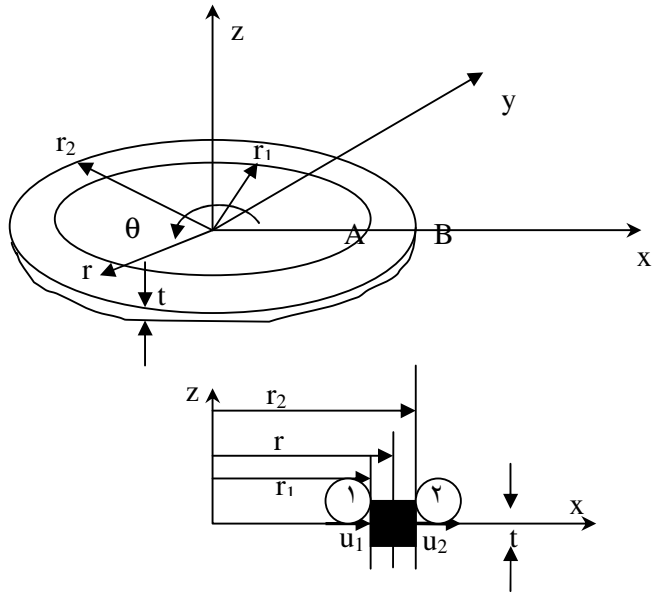


مسئله متقارن محوری: ایجاد جسم جامد تحت اثر دورانسطح ABCD حول محور z

۶- انرژی پتانسیل کل برای مسئله رینگ متقارن محوری بصورت زیر می‌باشد:

$$\pi=\frac{Et}{2(1-\nu^2)}\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}[(\frac{du}{dr})^2+2\nu(\frac{du}{dr})(\frac{u}{r})+(\frac{u}{r})^2]rdrd\theta-t\int_0^{2\pi}[(r_1p_iu(r_1)-r_2p_0u(r_2)]d\theta$$

که در آن E مدول الاستیسیته، ν ضریب پواسون، t ضخامت، r_1 شعاع داخلی،r_2 شعاع خارجی، u تغییر مکان در راستای r، p_i فشار داخلی رینگ، وp_oفشار خارجی رینگ می‌باشد(شکل زیر).



المان متقارن محوری رینگ

در این مسئله برای حل به روش اجزاء محدود به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) الف) تعداد مودهای صلب را تعیین نمائید.

ب) شرط پیوستگی u در مرز المانها برای اطمینان از همگرائی را بیان کنید.

پ) برای المان رینگ نشان داده شده با دو درجه آزادی برای u، ماتریس سختی را بدست بیاورید.

ج) برای وقتی که فشار p_i ثابت وفشار $p_o=0$ می‌باشد، بردار بار را بدست بیاورید.

ح) چه انتظاری برای ماتریس سختی در قسمت پ دارید اگر$r_1=0$شود و این مهم را چگونه حل می‌کنید.