فصل ۳

روشهای ریاضی درحل تقریبی معادلات

۳-۱ مقدمه

۳-۲ روشهای ریاضی برای حل مستقیم معادلات دیفرانسیل تحت شرایط مرزی

۳-۲-۱ روش باقیمانده وزنی با استفاده از یک تابع امتحانی

۳-۲-۲ حل به روش پهلوی هم گذاری نقاط

۳-۲-۳ حل به روش باقیمانده وزنی (گالرکین)

۳-۲-۴ فرم ضعیف روش باقیمانده وزنی

۳-۲-۵ مقایسه بین روش معادله دیفرانسیل، باقیمانده وزنی و فرم ضعیف

۳-۲-۶ نتایج روش استفاده از فرم ضعیف

۳-۲-۷ توابع حدس تکه ای پیوسته در فرم ضعیف

۳-۲-۷-۱ استفاده از تابع تقریب در فرم ضعیف شده

۳-۲-۷-۲ اجزا محدود میله یک بعدی

۳-۲-۸ خلاصه ای از روش اجزا محدود با استفاده از شکل باقیمانده وزنی

۳-۳ روش حل ریاضی معادلات بر اساس پایا کردن یک فانکشنال

۳-۳-۱ روش یافتن جواب تقریبی با استفاده از روش انرژی

۳-۳-۲ توابع امتحانی تکه ای پیوسته-روش اجزا محدود

۳-۴ روش کلی برای تحلیل اجزا محدود

۳-۱ مقدمه

اینکه وقعیتهای خارجی را میتوان با مدلهای ریاضی بیان کرد، مختصرا توضیح داده شد. در فصل دوم روشهای یافتن معادلات حاکم بر سیستمهای مکانیکی در مکانیک کاربردی مختصرا مورد بررسی قرار گرفت. دو روش جهت یافتن معادلات حاکم بر سیستمها ارائه شد. روش اول که کلاس مکانیک برداری بود، استفاده مستقیم از قانون دوم نیوتن را در یافتن معادلات حاکم در بر داشت. در روش دوم که مکانیک تحلیلی است با استفاده از تابع فانکشنال که همان فرم انرژی پتانسیل برای سیستمهای مکانیکی می‌باشد و اکسترمم کردن آن به معادلات حاکم بر سیستم و شرایط مرزی مربوطه رسیدیم. این فصل روش حل ریاضی معادلات حاصله را بر اساس هر کدام از دو روش فوق شامل می‌شود. ابتدا روشهای ریاضی برای حل مستقیم معادلات دیفرانسیل و شرایط مرزی مربوطه و سپس روشهای ریاضی حل معادلات بر اساس پایا کردن تابع فانکشنال ارائه میگردد.

۳-۲ روشهای ریاضی برای حل مستقیم معادلات دیفرانسیل تحت شرایط مرزی

استفاده از مکانیک برداری منجر به یافتن معادلات حاصله بصورت معادلات دیفرانسیل حاکم تحت شرایط مرزی مختلف می گردد. لذا در بررسی بسیاری از مسائل مهندسی ما با یک معادله دیفرانسیل پاره ای سرو کار داریم که برای یافتن جواب مساله باید این معادله که معادله دیفرانسیل حاکم بر مساله گفته می شود حل گردد. حل دقیق یا تحلیلی بسیاری از این معادلات به سادگی امکان پذیر نیست و از پیچیدگی بسیار بالایی برخوردار است. از این رو روش هایی برای بدست آوردن جواب تقریبی برای این معادلات ابداع شده اند که از مهمترین آن می‌توان روش های باقیمانده وزنی[1]را نام برد.

روش باقیمانده وزنی گالرکین[2] نیز جزء یکی از روشهای باقیمانده وزنی است و در کاربرد های اجزا محدود از مقبولیت بالایی برخوردار است. ما در این فصل ابتدا روش گالرکین را که از روش های باقیمانده وزنی است را معرفی میکنیم و از دسته ای از توابع امتحانی[3] که در سرتاسر قلمرو حل معتبرند استفاده می کنیم. سپس شکل ضعیف همان مسائل را معرفی می کنیم و در آخر نیز مفهوم تقریب توابع امتحانی تکه ای را که تنها در بخش کوچکی از محدوده حل معتبر هستند را بیان می کنیم که منجر به فرمول بندی به روش اجزامحدود می گردد.

[1] Weighted Residual Methods
[2] Galerkin
[3] Trial function

۳-۲-۱ روش باقیمانده وزنی با استفاده از یک تابع امتحانی

یک مساله کلی مهندسی را که در فرم یک معادله دیفرانسیل(بر روی ناحیه V) بیان شده است و شرایط مرزی مشخصی را (روی مرز S) ارضا می کند را در نظر بگیرید. برای یافتن یک جواب تقریبی برای این معادله دیفرانسیل گام های زیر باید دنبال شوند:

۱- یک تابع حدس (یا امتحانی) را به عنوان جواب مساله در نظر می گیریم به عنوان مثال در یک مساله یک بعدی تابع چند جمله ای زیر را می توان به عنوان یک تابع حدس انتخاب نمود:

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots \qquad ۱-۳$$

در اینجا باید متذکر شد که انتخاب تابع حدس دلخواه است و به شرط آنکه شرایط مرزی مساله را نیز بتواند ارضا کند می تواند هر فرمی (چندجمله ای، مثلثاتی و ...) را داشته باشد ولی عموما از چند جمله ای ها استفاده می شود زیرا انجام عملیات ریاضی (مشتق و انتگرال) بر روی آن ها ساده تر است.

۲- تابع حدس زده شده در بالا، در شرایط کلی نه معادله دیفرانسیل حاکمه را در داخل قلمرو (V) حل ارضا میکند و نه شرایط مشخص شده روی مرز (S) را ارضا میکند. با جایگذاری تابع حدث جهت ارضا کردن شرایط مرزی آن را در داخل معادله دیفرانسیل قرار می دهیم تا مقدار باقیمانده یا همان خطا (Rd) رابدست آوریم.

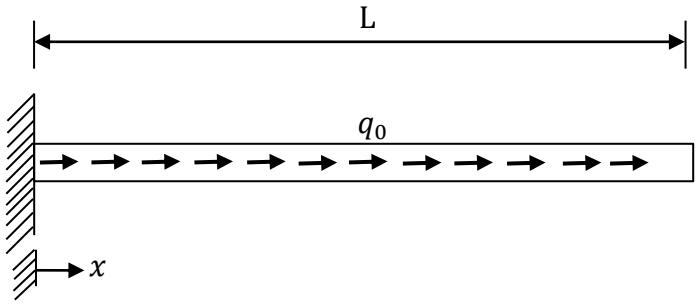
۳- حال باید ضرایب مجهول موجود در تابع حدس طوری محاسبه گردند تا مقدار باقیمانده یا همان خطا حاصله در محدوده دامنه مسئله کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

در این فرایند اگر مقدار باقیمانده یا همان خطا در کل قلمرو حل برابر صفر بدست بیاید ما به جواب دقیق دست پیدا کرده ایم ولی عموما امکان صفر شدن مقدار باقیمانده روی کل قلمرو حل وجود ندارد و باید این مقدار باقیمانده را روی کل ناحیه حداقل نماییم.

در روش اجزا محدود تابع حدس به نحوی انتخاب میگردد تا شرایط مرزی ارضا گردند و تنها خطای حاصله در دامنه مسئله باید مینیمم گردد. در روش المانهای مرزی انتخاب تابع حدس بر اساس ارضا معادلات دیفرانسیل و نه شرایط مرزی صورت می پذیرد.

اکنون مثال هایی برای روشن شدن روش بالا برای بدست آوردن جواب تقریبی معادلات دیفرانسیل آورده می شود.

مثال۱– میله منشوری زیر را که مطابق شکل تحت بار محوری یکنواخت با شدت q_0 قرار گرفته است را در نظر بگیرید با آسانی با مینیمم کردن انرژی پتانسیل کل می توان نشان داد تغییر شکل میله توسط معادله دیفرانسیل زیر بیان می شود:



شکل ۳-۱ میله تحت بار محوری یکنواخت

$$EA\frac{d^2u}{dx^2} + q_0 = 0$$

شرایط مرزی نیز برابر است با:

$$u(0) = 0 \qquad \& \qquad \frac{du}{dx}(L) = 0$$

ما به دنبال پیدا کردن یک جواب تقریبی مطابق آنچه قبلا ذکر شد برای این مساله هستیم.

گام۱: جواب امتحانی را به صورت زیر حدس می زنیم:

$$u(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

با اعمال کردن شرایط مرزی روی تابع حدس داریم:

$$u(0) = 0 \ \rightarrow \ c_0 = 0$$

$$\frac{du}{dx}(L) = 0 \ \rightarrow \ c_1 = -2Lc_2$$

پس تابع حدس به صورت زیر در خواهد آمد:

$$u(x) = c_2(x^2 - 2Lx)$$

چون جواب حدس زده شده تنها بر حسب یک ثابت مجهول (c_2) بیان شده است از آن به عنوان حل یک پارامتری[1] یاد می شود. در این مسائل تعداد ضرایب نامعین موجود در تابع حدس یکی بیشتر از تعداد شرایط مرزی است، تعمیم این نکته می تواند به ما کمک کند تا در هنگام انتخاب تابع حدس بفهمیم چه تعداد از جملات از تابع حدس را باید استفاده کنیم.

گام۲: محاسبه خطای باقیمانده[2] در داخل قلمرو حل (با جایگذاری جواب حدس زده شده در داخل معادله دیفرانسیل)

$$R_d = EA\frac{d^2u}{dx^2} + q_0 = EA(2c_2) + q_0$$

گام۳: مینیمم کردن مقدار باقیمانده. به راحتی با برابر قرار دادن $R_d=0$ ثابت نامعین موجود در معادله به صورت زیر محاسبه می شود:

$$c_2 = -\frac{q_0}{2EA}$$

دقت شود که اگر R_d تابعی از x می شد دیگر نمی توانستیم یک ثابت را پیدا کنیم تا R_d را صفر کند.

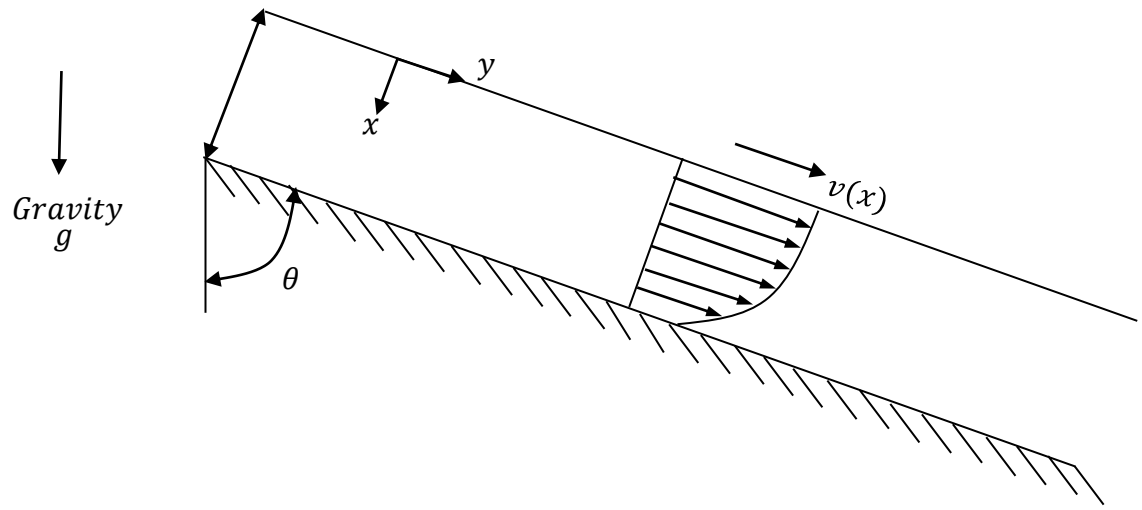
جواب نهایی برابر است با:

$$u(x) = \frac{q_0}{2EA}(2xL - x^2)$$

جواب نهایی مساله به فرم زیر خواهد بود و با توجه به اینکه خطا یا مقدار باقیمانده صفر شد پس جواب بدست آمده همان جواب دقیق خواهد بود.

[1]One Parameter Solution
[2]Weighted Residual

مثال۲- معادله دیفرانسیل حاکم بر یک جریان لایه ای دائمی کاملا گسترده بر روی یک سطح صاف مایل برای یک سیال لزج نیوتنی توسط رابطه زیر بیان می شود:



شکل ۳-۲ جریان لایه‌ای در سطح شیب‌دار

$$\mu\frac{d^2v}{dx^2}+\rho g cos\theta=0$$

که در آن: μ=لزجت سیال ، v=سرعت سیال ، ρ=چگالی سیال ، g=شتاب گرانش زمین و θ=زاویه سطح مایل با امتداد قائم است.

شرایط مرزی به صورت زیر بیان می شوند:

$$\frac{dv}{dx}(0)=0 \quad \leftarrow \quad \text{(تنش برشی صفر)}$$

$$v(L)=0 \quad \leftarrow \quad \text{(عدم لغزش)}$$

برای پیدا کردن توزیع سرعت با استفاده از روش باقیمانده وزنی داریم.

گام۱:حدس یک تابع :

$$v(x)=c_0+c_1x+c_2x^2$$

با اعمال شرایط مرزی داریم:

$$v(L)=0 \;\rightarrow\; c_0=-L^2c_2$$

$$\frac{dv}{dx}(0)=0^7\rightarrow\; c_1=0$$

در نتیجه تابع حدس به صورت زیر در می آید:

$$u(x) = c_2(x^2 - L^2)$$

گام۲: محاسبه خطای باقیمانده

$$R_d = \mu(2c_2) + \rho g cos\theta$$

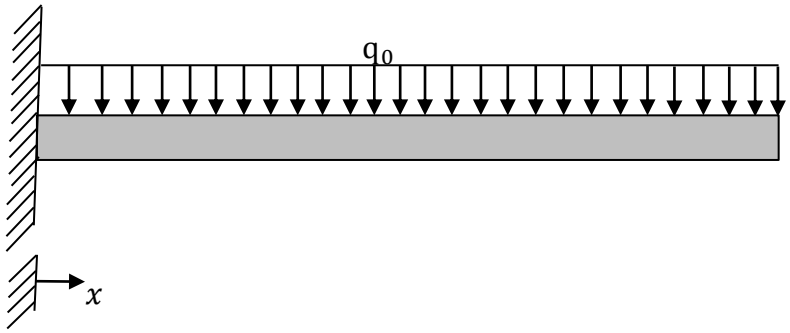
گام ۳: مینیمم کردن مقدار باقیمانده. که در اینجا می توان R_d را برابر صفر قرار داد و به جواب دقیق مساله مطابق زیر رسید:

$$c_2 = \frac{-\rho g cos\theta}{2\mu}$$

جواب نهایی به صورت زیر می باشد:

$$v(x) = \frac{\rho g cos\theta}{2\mu}(L^2 - x^2)$$

مثال ۳: یک تیر طره را با بار گسترده یکنواخت با شدت q_0 در نظر بگیرید، معادله دیفرانسیل حاکم بر مساله به سادگی با مینیمم کردن انرژی پتانسیل کل به صورت زیر خواهد شد:



شکل ۳-۳ تیر طره را با بار گسترده یکنواخت

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} - q_0 = 0$$

شرایط مرزی نیز به صورت زیر بیان می شوند، که دو شرط اول بیانگر شیب و خیز صفر در تکیه گاه هستند و دو شرط بعدی برش و ممان صفر در انتهای آزاد را بیان می کنند.

$$v(0) = 0 \qquad \& \qquad \frac{dv}{dx}(0) = 0$$

$$\frac{d^2v}{dx^2}(L) = 0 \qquad \& \qquad \frac{d^3v}{dx^3}(L) = 0 \qquad (EI = cte)$$

گام۱: انتخاب تابع حدس:

$$v(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4$$

با اعمال کردن شرایط مرزی روی تابع حدس داریم:

$$v(0) = 0 \rightarrow c_0 = 0 \qquad \& \qquad \frac{dv}{dx}(0) = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

$$\frac{d^2v}{dx^2}(L) = 0 \rightarrow 2c_2 + 6c_3L + 12c_4L^2 = 0 \qquad \& \qquad \frac{d^3v}{dx^3}(L) = 0 \rightarrow 6c_3 + 24c_4L = 0$$

$$\Longrightarrow \quad c_0 = 0 \quad \& \quad c_1 = 0 \quad \& \quad c_2 = -3c_3L - 6c_4L^2 \quad \& \quad c_3 = -4c_4L = 0$$

حال تابع حدس را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$v(x) = c_4(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)$$

ملاحظه می شود که استفاده از یک تابع حدس که تمام شرایط مرزی را ارضا کند می تواند کار طاقت فرسایی باشد به همین منظور در آینده فرم ضعیف را معرفی می کنیم که در آن ما تنها به دنبال ارضای شرایط مرزی ضروری (شرایط مرزی مربوط به تغییرمکان ها) هستیم.

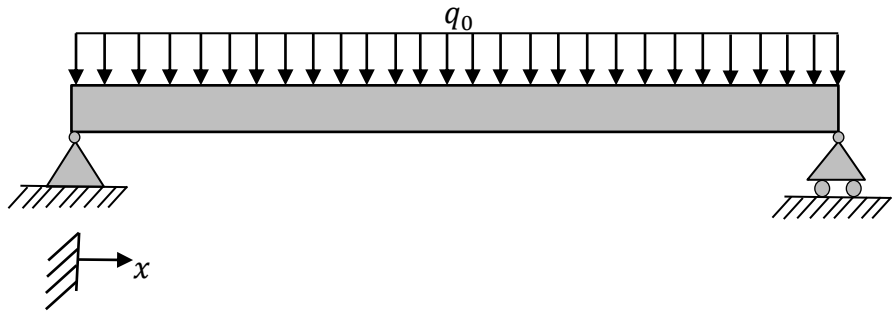
گام۲: محاسبه خطای باقیمانده با جایگذاری جواب حدس زده شده در داخل معادله دیفرانسیل:

$$R_d = 24EI(c_4) - q_0$$

گام۳: مینیمم کردن مقدار باقیمانده. با برابر قرار دادن $R_d=0$ ثابت نامعین موجود در معادله محاسبه شده و جواب بدست آمده نیز جواب دقیق معادله خواهد بود:

$$c_4 = \frac{q_0}{24EI}$$

مثال۴- تیر دو سر ساده زیر را که تحت بار گسترده یکنواخت q_0 قرار دارد را در نظر بگیرید معادله دیفرانسیل حاکم بر مساله مشابه مثال قبل به صورت زیر بیان می گردد:



شکل ۳-۴ تیر دوسر ساده با بار گسترده یکنواخت

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} - q_0 = 0$$

شرایط مرزی نیز عبارتند از:

$$v(0) = 0 \qquad \& \qquad v(L) = 0$$

$$\frac{d^2v}{dx^2}(0) = 0 \qquad \& \qquad \frac{d^3v}{dx^2}(L) = 0 \qquad (EI = cte)$$

گام۱: تابع حدس را به صورت زیر و در فرم مثلثاتی انتخاب می کنیم:

$$v(x) = C\ sin(\frac{\pi x}{L})$$

ملاحظه می شود که این تابع حدس یک پارامتری تمام شرایط مرزی را ارضا می کند.

گام۲: محاسبه خطای باقیمانده با جایگذاری جواب حدس زده شده در داخل معادله دیفرانسیل:

$$R_d(x) = C(\frac{\pi}{L})^4 EI\ sin(\frac{\pi x}{L}) - q_0$$

گام۳: مینیمم کردن مقدار باقیمانده. در این جا ملاحظه می شود که بر خلاف مثال های پیشین مقدار باقیمانده بر حسب x بوده و بنابر این در یک x خاص می توانیم مقدار R_d را برابر صفر قرار دهیم و امکان صفر شدن آن در تمام محدوده حل وجود ندارد در اینجا از روشی بهره می گیریم که **تکنیک پهلوی هم گذاری**

نقاط[1] نامیده می شود. در این روش R_d را به ازای نقاطی برابر صفر قرار می دهیم که تعداد این نقاط برابر تعداد ضرایب نامعین موجود در تابع حدس (پس از اعمال شرایط مرزی) است.

۳-۲-۲ حل به روش پهلوی هم گذاری نقاط

اگر در نقطه $x = L/4$ مقدار R_d را برابر صفر قرار دهیم داریم:

$$R_d(x) = C\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 EI\, sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - q_0 = 0$$

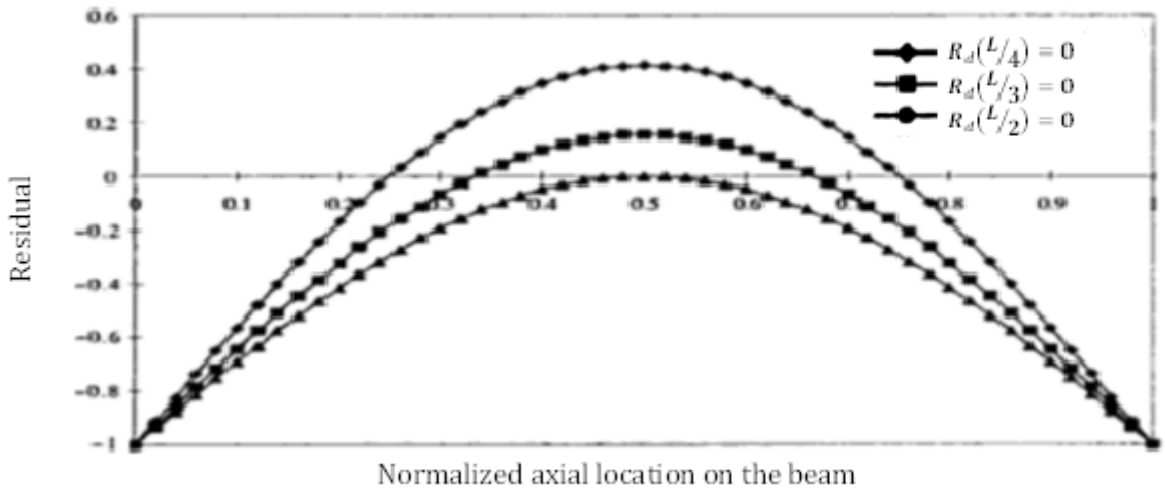
$$C = \frac{\sqrt{2}}{\pi^4}\frac{q_0 L^4}{EI}$$

جواب در این حالت عبارت است از:

$$v(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^4}\frac{q_0 L^4}{EI}\, sin(\frac{\pi x}{L})$$

اگر در نقاط دیگر مثل $x = L/3$ و $x = L/2$ نیز R_d را برابر صفر قرار دهیم و جواب های بدست آمده را که جوابهای تقریبی هستند (چون R_d را در کل قلمرو حل صفر نکرده اند) را با جواب دقیق که از مقاومت مصالح SOM[2] بدست می آید مقایسه کنیم. در شکل ۳-۵ مقدار خطای حاصله با هم مقایسه شده‌اند.

[1] Point Collocation Technique
[2] Strenght Of Material



شکل ۳-۵ مقایسه خطا در جوابهای مختلف روش پهلوی هم گذاری

می توان برای رسیدن به جواب حدسی بهتر برای مساله یک جمله دیگر را به تابع حدس اضافه کنیم با توجه به تقارن مساله حول خط $x = L/2$ تابع حدس را به صورت زیر اصلاح می کنیم:

$$v(x) = asin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \ bsin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$$

با این تابع حدس دو جمله ای مقدار باقیمانده به صورت زیر بدست می آید:

$$R_d(x) = a\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 EI\ sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + b\left(\frac{3\pi}{L}\right)^4 EI\ sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) - q_0 = 0$$

چون دو ثابت مجهول داریم که باید تعیین شوند باید مقدار R_d را در دو نقطه برابر صفر قرار دهیم،(مثلا در $x = L/3$ و $x = L/4$)

$$a\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 EI\ sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + b\left(\frac{3\pi}{L}\right)^4 EI\ sin(\pi) - q_0 = 0$$

$$R_d\left(\frac{L}{4}\right) = 0\ \rightarrow\ a\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 EI\ sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + b\left(\frac{3\pi}{L}\right)^4 EI\ sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) - q_0 = 0$$

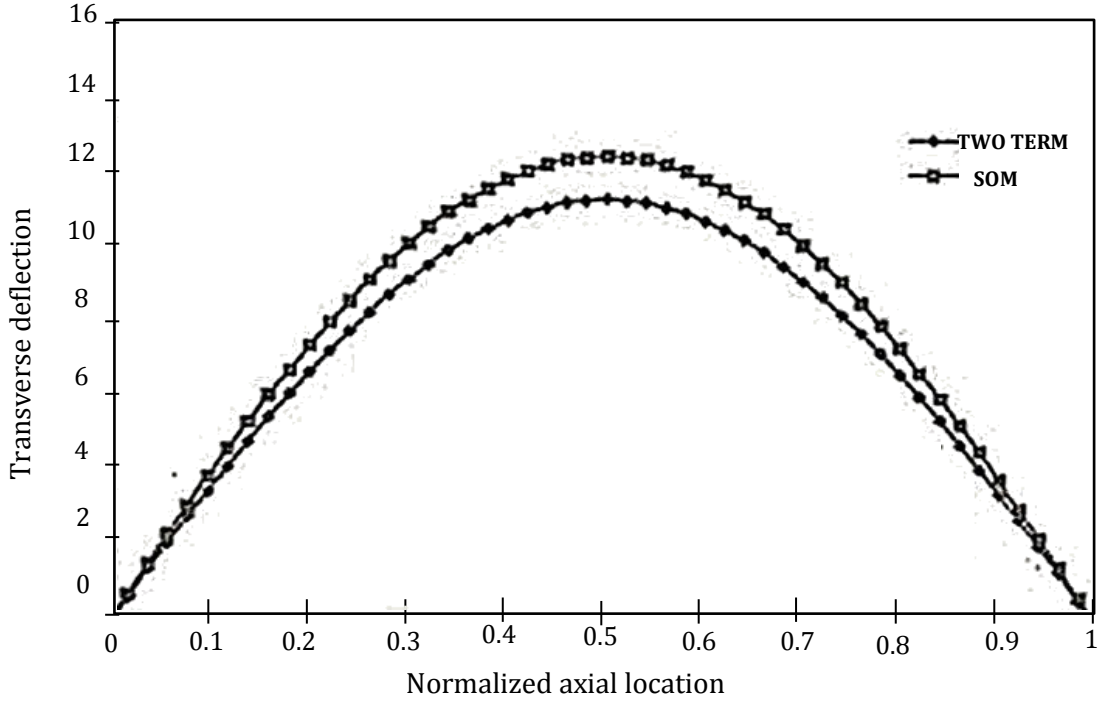
با حل این دو معادله و دو مجهول داریم:

$$\begin{cases} a = \dfrac{2}{\sqrt{3}\pi^4}\ \dfrac{q_0 L^4}{EI} \\ b = 0.00003289\ \dfrac{q_0 L^4}{EI} \end{cases}$$

جواب نیز به صورت زیر است:

$$v(x) = \frac{q_0 L^4}{EI}[\frac{2}{\sqrt{3}\pi^4}\ sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) +\ 0.00003289\ sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)]$$

با رسم جواب تقریبی بدست آمده همراه با جواب دقیق مساله ملاحظه می شود که اگرچه این جواب بهتر از حالت قبلی (جواب یک پارامتری) ولی هنوز با جواب دقیق اختلاف دارد.



شکل ۳-۶ مقایسه جواب دقیق و روش پهلوی هم گذاری با دو پارامتر

۳-۲-۳ حل به روش باقیمانده وزنی (گالرکین)

حال ما به دنبال این هستیم تا به جای اینکه مقدار باقیمانده را در نقاط خاصی از محدوده حل صفر کنیم، مقدار باقیمانده یا خطا را به ازای تمام نقاط موجود در قلمرو حل مینیمم کنیم. این تکنیک را روش باقیمانده وزنی می نامند. برای این منظور باید به تعداد ثابت های نامعین موجود در تابع حدس (پس از اعمال شرایط مرزی) مقدار انتگرال زیر روی سرتاسر محدوده حل صفر گردد. مثلا برای یک تابع حدس دو پارامتری دو انتگرال باید نوشته شوند.

$$\int_0^L \mathrm{W_i(x)R_d(x)}\, dx = 0 \qquad ۳-۲$$

که در آن $w_i(x)$ تابع وزنی است که می تواند به شرط غیرصفر و انتگرال پذیر بودن به صورت دلخواه انتخاب گردد. تعداد $w_i(x)$ ها نیز برابر با تعداد ثابت های نامعین موجود در تابع حدس (پس از اعمال شرایط مرزی) است. گالرکین ایده ای را بیان کرد که در آن $w_i(x)$ ها برابر همان توابع حدس باشند.

بنابراین برای حل مثال قبل با روش گالرکین داریم:

$$R_d(x) = C(\frac{\pi}{L})^4 EI\, sin(\frac{\pi x}{L}) - q_0$$

$$\int_0^L \underbrace{[sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)]}_{W(x)}\underbrace{[C\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 EI\, sin(\frac{\pi x}{L}) - q_0]}_{R_d(x)}dx = 0$$

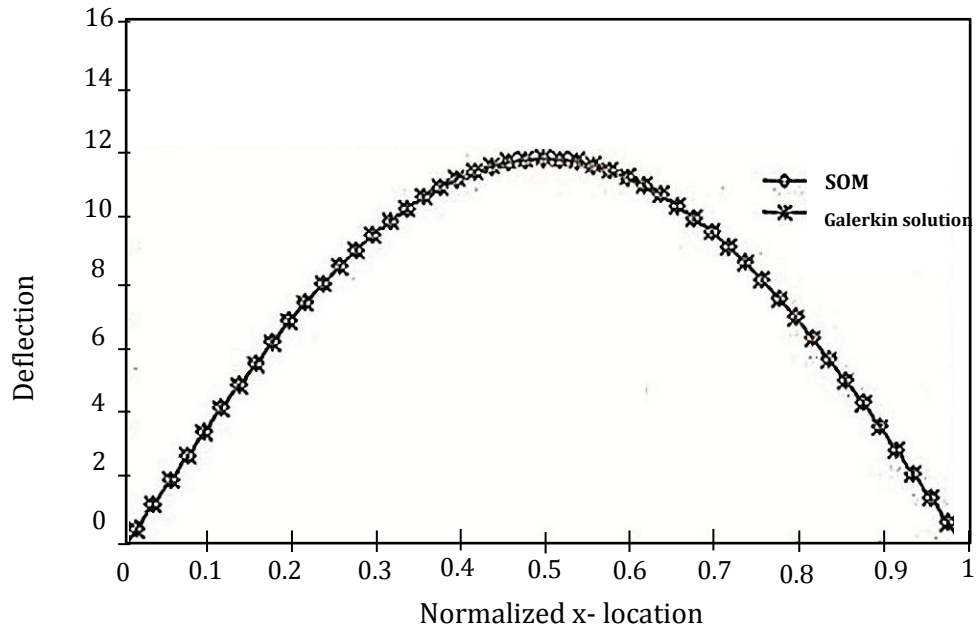
$$C\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 EI \int_0^L sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = \int_0^L q_0\, sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx$$

$$C = 0.013071\, \frac{q_0 L^4}{EI}$$

جواب بدست آمده از این روش نیز به صورت زیر است:

$$v(x) = 0.013071 \frac{q_0 L^4}{EI}\, sin(\frac{\pi x}{L})$$

شکل زیر جواب بدست آمده از این روش را با جواب دقیق مساله مقایسه می کند، ملاحظه می شود جواب خیلی به جواب واقعی نزدیک شده است. به طور مثال خطای موجود بین جواب دقیق و روش گالرکین در وسط دهانه تیر برابر 0.38 درصد است.



شکل ۳-۷ مقایسه جواب دقیق و روش گالرکین

در حالت کلی اگر تابع حدس به صورت زیر بیان شده باشد:

$$f(x) = \Phi(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i N_i\,(x) \qquad ۳-۳$$

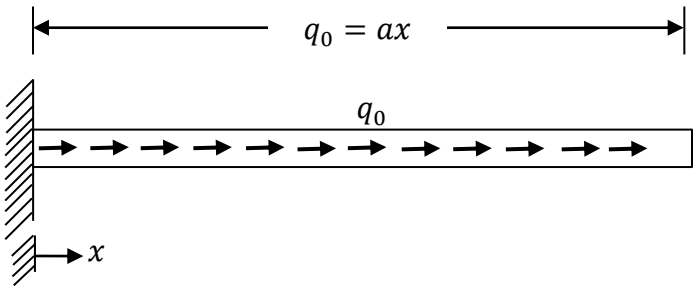
که در آن $\Phi(x)$ و $N_i(x)$ توابعی معلوم از x هستند که شرایط مرزی را نیز برای f(x) ارضا نموده اند. برای محاسبه $W_i(x)$ نیز داریم:

$$W_i(x) = \frac{\partial f}{\partial C_i} = N_i(x) \qquad ۴-۳$$

در اینجا ذکر این نکته ضروری است که روش گالرکین محدود به مسائل مکانیک سازه نمی گردد و می تواند برای بدست آوردن جواب تقریبی برای هر معادله دیفرانسیلی به کار گرفته شود.

مثال۵- یک میله را تحت بار محوری که بار به صورت خطی در طول آن تغییر می کند را در نظر بگیرید.

معادله دیفرانسیل حاکم به صورت زیر خواهد بود.



شکل ۳-۸ میله تحت بار محوری با تغییر خطی

$$EA\frac{d^2u}{dx^2} + ax = 0$$

شرایط مرزی نیز عبارتند از:

$$u(0) = 0 \qquad \& \qquad EA\,\frac{du}{dx}(L) = 0 \qquad (EA\ = cte)$$

گام۱: حدس یک تابع جواب. اگر این مثال را با مثال۱ مقایسه کنیم با توجه به بار انتظار می رود درجه تابع حدس در این جا یک مرتبه بالاتر از آن جا باشد.

$$u(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$$

با اعمال شرایط مرزی داریم:

$$u(0) = 0 \ \rightarrow \ c_0 = 0$$

$$\frac{du}{dx}(L) = 0 \ \rightarrow \ c_1 + 2c_2L + 3c_3L^2 = 0 \quad \rightarrow \ c_1 = -2c_2L - 3c_3L^2$$

بدین ترتیب

$$u(x) = c_2(x^2 - 2Lx) + c_3(x^3 - 3L^2x)$$

گام۲: محاسبه مقدار باقیمانده.

$$R_d(x) = EA(2c_2 + 6c_3x) + ax$$

گام۳: مینیمم کردن مقدار باقیمانده با توجه به فرمول گالرکین.

$$\int_0^L (x^2 - 2Lx)[EA(2c_2 + 6c_3x) + ax]dx = 0$$

$$\int_0^L (x^3 - 3L^2x)[EA(2c_2 + 6c_3x) + ax]dx = 0$$

با محاسبه ضرایب از دو معادله و دو مجهول بالا به جواب خواهیم رسید:

$$c_2 = 0 \quad \rightarrow \quad c_3 = -\frac{a}{6EA}$$

جواب مساله عبارت است از:

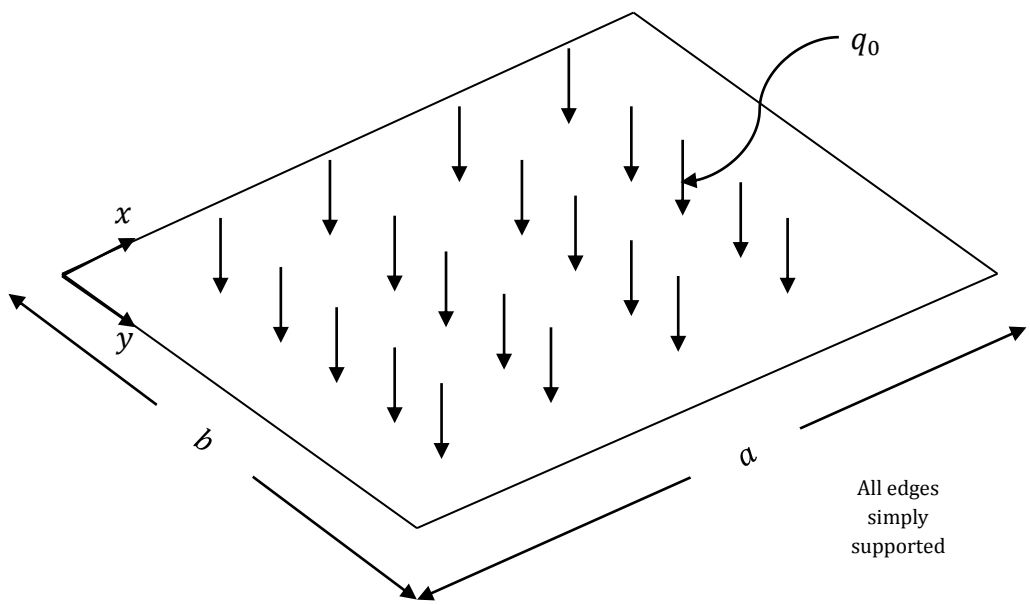
$$u(x) = \frac{a}{6EA}(3L^2x - x^3)$$

میتوان در بیان کلی، روش باقیمانده وزنی را بصورت زیر بیان کرد.

$$u = \phi + \sum_{i=1}^{n} C_i N_i \qquad ۵-۳$$

$$\int_\Omega W_i R_d \, d\Omega = 0 \qquad for\ i = 1,2,\dots,n \quad and \quad W_i = N_i \qquad ۶-۳$$

مثال۶– برای نشان دادن کاربرد روش گالرکین در مورد مسائل پیچیده تر، یک صفحه مستطیلی با تکیه گاه های ساده را تحت بار یکنواخت q_0 در نظر بگیرید. معادله ی دیفرانسیل حاکم به صورت زیر بیان می شود:



شکل ۳-۹ صفحه مستطیلی با تکیه گاه های ساده تحت بار یکنواخت q_0

$$\frac{Eh^3}{12(1-\upsilon^2)}\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right]-q_0=0$$

و شرایط مرزی نیز عبارتند از:

$$w(0,y)=w(a,y)=0 \qquad \& \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \quad for\ x=0\,,a$$

$$w(x,0)=w(x,b)=0 \qquad \& \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \quad for\ y=0\,,b$$

گام۱: حدس یک تابع جواب به صورت مثلثاتی که با اعمال شرایط مرزی به صورت یک تابع حدس یک پارامتری به صورت زیر در می آید:

$$w(x,y) = C\, sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

گام۲: محاسبه خطای باقیمانده با جایگذاری جواب حدس زده شده در داخل معادله دیفرانسیل:

$$R_d(x,y) = C\frac{Eh^3}{12(1-v^2)}[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2]^2\, sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) - q_0$$

گام۳: مینیمم کردن مقدار باقیمانده با توجه به فرمول گالرکین.

$$\int_0^b\int_0^a sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\left[C\frac{Eh^3}{12(1-v^2)}\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2\right]^2 sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) - q_0\right] dxdy = 0$$

$$C = \left(\frac{16q_0}{\pi^2}\right)\left(\frac{12(1-v^2)}{Eh^3}\right)[\frac{1}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}]^2$$

تابع تغییرمکان صفحه برابر است با:

$$w(x,y) = \left(\frac{16q_0}{\pi^2}\right)\left(\frac{12(1-v^2)}{Eh^3}\right)[\frac{1}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}]^2\, sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

اگر قرار دهیم a=b برای یک صفحه مربعی خیز در مرکز صفحه برابر است با:

$$w_{center} = \left(\frac{4}{\pi^6}\right)\left(\frac{12(1-v^2)}{Eh^3}\right)(q_0 a^4)$$

۳-۲-۴ فرم ضعیف[1] روش باقیمانده وزنی

با انتگرال گیری جز به جز از فرم باقیمانده وزنی می توان به فرم ضعیف رسید. با این کار شرط پیوستگی روی تابع حدس کاهش می یابد و انتخاب های بیشتری را می توان برای تابع حدس به کار برد. برای روشن شدن مطلب این روش را در غالب یک مثال توضیح می دهیم:

مثال۷– می خواهیم فرم ضعیف را برای مثال۵ بدست بیاوریم.

معادله دیفرانسیل حاکم و شرایط مرزی به صورت زیر بودند:

$$EA\frac{d^2u}{dx^2}+ax=0$$

$$u(0)=0 \qquad \& \qquad EA\,\frac{du}{dx}(L)=0 \qquad (EA\ =cte)$$

اگر u را به عنوان جواب تقریبی حدس زده شده برای تابع درنظر بگیریم و آن را در داخل معادله دیفرانسیل جایگزین کنیم مقدار باقیمانده به صورت زیر محاسبه می شود:

$$R_d(x)=EA\frac{d^2u}{dx^2}+ax$$

اگر W(x) را به عنوان تابع وزنی در نظر بگیریم بیان باقیمانده وزنی مساله به صورت زیر خواهد بود:

$$\int_0^L W(x)\left[EA\frac{d^2u}{dx^2}+ax\right]dx=0$$

$$\int_0^L W(x)EA\frac{d^2u}{dx^2}dx\ +\int_0^L W(x)ax\,dx\ =0$$

$$\int_0^L W(x)d(EA\frac{du}{dx})\ +\int_0^L W(x)ax\,dx\ =0$$

با انتگرال گیری جز به جز برای اولین انتگرال داریم:

$$W(x)EA\frac{du}{dx}\Big]_0^L-\int_0^L EA\frac{du}{dx}\frac{dW}{dx}dx+\int_0^L W(x)ax\,dx=0$$

$$P=EA\frac{du}{dx}\ (axial\ force\ at\ the\ section)$$

[1] Weak Form

$$W(L)P_L - W(0)P_0 - \int_0^L EA\frac{du}{dx}\frac{dW}{dx}dx + \int_0^L W(x)ax\,dx = 0$$

۷-۳

در عبارت اصلی باقیمانده وزنی ما $\frac{d^2u}{dx^2}$ را داشتیم در حالی که در حالت ضعیف شده $\frac{du}{dx}$ به وجود آمد. بنابراین در عبارت اصلی باقیمانده وزنی تابع حدس u باید حداقل از چندجمله ای مرتبه دو باشد در حالی که در حالت اصلاح شده (ضعیف) u می تواند خطی باشد. بنابراین شرایط مرزی نیرویی (طبیعی) از داخل فرم اصلی باقیمانده وزنی بیرون رفته اند. اصولا لفظ ضعیف نیز بدین خاطر آورده شده است که فرم ضعیف احتیاج به پیوستگی ضعیف تری نسبت به فرم اصلی دارد.

از شرایط مرزی طبیعی داریم(در انتهای آزاد میله نیروی محوری صفر است): $P_L = 0$

همچنین چون $u(0) = 0$ پس باید تابع $w(0) = 0$ باشد.

در نتیجه فرم ضعیف به صورت زیر در می آید:

$$\int_0^L EA\frac{du}{dx}\frac{dW}{dx}dx = \int_0^L W(x)ax\,dx$$

$$u(0) = 0 \quad \& \quad W(0) = 0$$

۸-۳

در جدول زیر سه روش معادل فرمول بندی مساله را نشان می دهد:

Differential Equation	Weighted Residual Statement	Weak Form
$EA\frac{d^2u}{dx^2} + ax = 0$	$\int_0^L W(x)[EA\frac{d^2u}{dx^2} + ax]\,dx = 0$	$\int_0^L EA\frac{du}{dx}\frac{dW}{dx}dx = \int_0^L W(x)ax\,dx$
$\frac{du}{dx}(L) = 0 \,\&\, u(0) = 0$	$\frac{du}{dx}(L) = 0 \;\&\; u(0) = 0$	$u(0) = 0 \;\&\, W(0) = 0$

۹-۳

برای رسیدن به جواب در حالت ضعیف داریم:

$$u(x) = c_1 x + c_2 x^2$$

$$for\ W_1: \qquad W_1 = x \quad , \quad W_2 = x^2$$

$$\int_0^L EA(c_1 + 2c_2 x)(1)\, dx = \int_0^L (x)(ax)\, dx$$

$$EA(c_1 L + c_2 L^2) = \frac{aL^3}{3}$$

$$for\ W_2:$$

$$\int_0^L EA(c_1 + 2c_2 x)(2x)\, dx = \int_0^L (x^2)(ax)\, dx$$

$$EA\left(\frac{c_1 L^2 + 4c_2 L^3}{3}\right) = \frac{aL^4}{4}$$

در نتیجه:

$$c_1 + c_2 L = \frac{aL^2}{3EA}$$

$$c_1 + \frac{4}{3} c_2 L = \frac{aL^2}{4EA}$$

با حل دو معادله و دو مجهول داریم:

$$c_1 = \frac{7aL^2}{12EA}$$

$$c_1 = -\frac{aL}{4EA}$$

حل عبارت است از:

$$u(x) = \frac{aL}{12EA}(7Lx - 3x^2)$$

ما در اینجا از یک تابع درجه دو برای تابع حدس استفاده کردیم ولی از مثال۵ به یاد داریم که جواب دقیق از درجه سه بود. حال اگر تابع حدس را درجه دو فرض می کردیم و از روش گالرکین استفاده می کردیم به جواب

$$u(x) = \frac{5aL}{16EA}(2Lx - x^2)$$

می رسیدیم. با رسم این سه جواب (روش دقیق، روش گالرکین و روش فرم ضعیف) در مقابل هم به این نتیجه می رسیم که تقریب فرم ضعیف خیلی بهتر از روش گالرکین است.

۳-۲-۵ مقایسه بین روش معادله دیفرانسیل، باقیمانده وزنی و فرم ضعیف

تغییرشکل محوری یک میله را که توسط معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی زیر بیان می شود را در نظر بگیرید.

$$EA\frac{d^2u}{dx^2} + q = 0$$

$$u(0) = u_0 \qquad \& \qquad EA\,\frac{du}{dx}(L) = P_L$$

برای پیداکردن جواب تقریبی برای این معادله دیفرانسیل ما روش باقیمانده وزنی را به صورت زیر به کار بردیم:

$$\int_0^L W(x)[EA\frac{d^2u}{dx^2} + q]\,dx = 0$$

$$u(0) = u_0 \qquad \& \qquad EA\,\frac{du}{dx}(L) = P_L$$

که به نتایج زیر رسیدیم:

۱- اگر تابع u جواب دقیق مساله باشد آنگاه در شکل باقیمانده وزنی به طور ضمنی به ازای هر تابع وزنی $w(x)$ مقدار R_d در داخل پرانتز برابر صفر خواهد شد، که در این حالت مقدار خطا یا باقیمانده در سرتاسر ناحیه مینیمم می گردد.

۲- برای هر معادله دیفرانسیلی (خطی یا غیر خطی- معمولی یا پاره ای و غیره) می توان روش باقیمانده وزنی را به کار برد.

۳- روش باقیمانده وزنی تنها معادل معادله دیفرانسیل است وکاری با شرایط مرزی ندارد و تابع حدس قبل از جایگزینی در معادله حاکم جهت یافتن خطا ی حاصله باید شرایط مرزی را ارضا کرده باشد و به تعداد لازم برای معادله دیفرانسیل حاکم مشتق پذیر باشد.

۴- تابع وزنی $W(x)$ در عمل می تواند هر تابع غیر صفر و انتگرال پذیری باشد و با انتخاب n تابع وزنی مختلف میتواند به تعداد n معادله برای محاسبه ضرایب c_i دست یافت.

۵- عموما تابع وزنی ***W(X)*** الزامات پیوستگی کمتری را نسبت به ***u(X)*** احتیاج دارد. مثلا در مثال قبل **u** به علت وجود جمله $\frac{d^2u}{dx^2}$ باید دو مرتبه مشتق پذیر باشد ولی ***W*** پیوستگی خاصی را لازم ندارد. هدف از به کارگیری انتگرال جز به جز و رسیدن به شکل ضعیف توزیع یکنواخت شرایط پیوستگی بین تابع حدس **u** و تابع وزنی **W** است.

$$W(x)EA\frac{du}{dx}\Big]_0^L - \int_0^L EA\frac{du}{dx}\frac{dW}{dx}dx + \int_0^L W(x)q\,dx = 0$$

چون $u(0) = u_0$ است پس باید داشته باشیم $W(0) = 0$

$$\int_0^L EA\frac{du}{dx}\frac{dW}{dx}dx = \int_0^L W(x)q\,dx + W(L)P_L$$

۳-۲-۶ نتایج روش استفاده از فرم ضعیف

۱- در روش ضعیف که با انتگرال گیری جز به جز از فرم اصلی روش باقیمانده وزنی حاصل می شود، از مرتبه مشتق تابع حدس (**u**)کاسته شد و در عوض به مرتبه مشتق تابع وزنی (**W**)افزوده شد.

۲- برای تمام معادله دیفرانسیل هایی که ما در اینجا با آن ها سروکار داریم و دارای مرتبه زوج هستند با گرفتن انتگرال جز به جز به تعداد کافی قادر خواهیم بود تا شرط پیوستگی (یا مشتقگیری) برابر را برای تابع حدس و تابع وزنی ایجاد نماییم.

۳- چون شرایط مرزی طبیعی به طور واضحی با گرفتن انتگرال گیری جز به جز بدست می‌آیند. ما می توانیم مستقیما شرایط مرزی طبیعی معلوم را جایگزین با شرایط مرزی ضروری کنیم. فقط شرایط مرزی ضروری باقیمانده باید به وسیله تابع حدس از معادله فرم ضعیف ارضا شوند.

۴- ما در اینجا قادر خواهیم بود تا از تعداد بیشتری از تابع حدس با مرتبه پایین تر در مقایسه با فرم اصلی باقیمانده وزنی (روش گالرکین) استفاده کنیم.

۵- فرم ضعیف می تواند برای باقیمانده وزنی هر معادله دیفرانسیل مرتبه دو و بالاتر به کار گرفته شود.

۶- در جاهایی که شرایط مرزی ضروری معلوم وجود دارند تابع وزنی ما باید در تمام این نقاط مقدار صفر را داشته باشد یعنی تابع وزنی باید شرایط مرزی ضروری همگن معلوم را ارضا نماید. تابع وزنی می تواند به صورت یک تغییرمکان مجازی تلقی شود و بنابر این باید با تکیه گاه ها سازگار باشد و باید در شرایط مرزی تغییرمکان معلوم برابر با صفر باشد.

مثال۷- یک تیر دو سر ساده با بار یکنواخت را همانند مثال۴ در نظر میگیریم.

معادله دیفرانسیل حاکم:

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} - q = 0$$

شرایط مرزی:

$$v(0) = 0 \ \text{(ضروری)} \qquad \& \qquad v(L) = 0 \ \text{(ضروری)}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2}(0) = 0 \ \text{(طبیعی)} \qquad \& \qquad \frac{d^2v}{dx^2}(L) = 0 \ \text{(طبیعی)} \qquad (EI = cte)$$

اگر $v(x)$ را به عنوان تابع حدس و $W(x)$ را به عنوان تابع وزنی در نظر بگیریم، فرم باقیمانده وزنی به صورت زیر خواهد بود:

$$\int_0^L W(x)(EI\frac{d^4v}{dx^4} - q)\,dx$$

با دوبار انتگرال گیری جز به جز داریم:

$$W(x)EI\frac{d^3v}{dx^3}\Big]_0^L - \left[\frac{dW(x)}{dx}EI\frac{d^2v}{dx^2}\Big]_0^L + \int_0^L EI\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2W(x)}{dx^2}\,dx\right] = \int_0^L W(x)q\,dx$$

دقت داریم که در این حالت مرتبه مشتق تابع حدس و تابع وزنی در محدوده دامنه، هر دو باهم برابر شده است.

با توجه به اینکه ممان در دو سر تیر صفر است می توانیم این شرط مرزی طبیعی را در معادله جایگذاری کنیم.

$$\int_0^L EI\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2W(x)}{dx^2}\,dx + W(x)EI\frac{d^3v}{dx^3}\Big]_0^L = \int_0^L W(x)q\,dx$$

با توجه به شرط مرزی ضروری، صفر بودن خیز در دو انتها تابع وزنی نیز باید در آنجا صفر باشد و در نتیجه داریم:

$$\int_0^L EI\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2W(x)}{dx^2}dx = \int_0^L W(x)q\,dx$$

$$v(0) = v(L) = 0$$

$$W(0) = W(L) = 0$$

مشاهده می شود که در اینجا تابع حدس باید تنها دو بار مشتق پذیر باشد این در حالی است که در فرم باقیمانده وزنی تابع حدس حداقل باید چهار بار مشتق پذیر می بود. با انتخاب یک تابع حدس مرتبه دو داریم:

$$v(x) = c_0x(L-x)$$

این تابع شرط مرزی ضروری تغییر مکان در دو انتهای تیر را ارضاء می‌کند. بکارگیری روش گالرکین می‌توان تابع وزنی را همان تابع حدس المان انتخاب نمود.

$$w(x) = x(L-x)$$

که شرط تابع وزنی را در دو انتها دوباره ارضاء می‌کند. با فرض بار گسترده یکنواخت q_0 و با به کارگیری فرم ضعیف داریم:

$$\int_0^L EIc_0(-2)(-2)\,dx = \int_0^L (x)(L-x)q_0\,dx$$

$$(4EIL)c_0 = \frac{q_0L^3}{6}$$

$$c_0 = \frac{q_0L^2}{24EI}$$

پس جواب به شکل زیر در می آید:

$$v(x) = \frac{q_0L^2}{24EI}x(L-x)$$

جواب دقیق مساله نیز به صورت زیر است:

$$v(x) = \frac{q_0x}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3)$$

تقریب ما برای ما ماکزیمم خیز در وسط تیر ۲۰ درصد با جواب واقعی تفاوت دارد این در حالی است که شیب در دو انتهای جواب تقریبی با جواب دقیق مطابقت دارد.

توجه به این نکته ضروری است که ممکن است خود تابع به خوبی تقریب زده شده باشد. ولی مشتق های تابع که ممکن است مفهوم فیزیکی خاصی برای ما داشته باشند(مثلا $M = EIv''$ یا $\sigma = EAu''$) به خوبی تقریب زده نشده باشند، پس باید دقت شود که آن ها نیز به خوبی تقریب زده شوند.

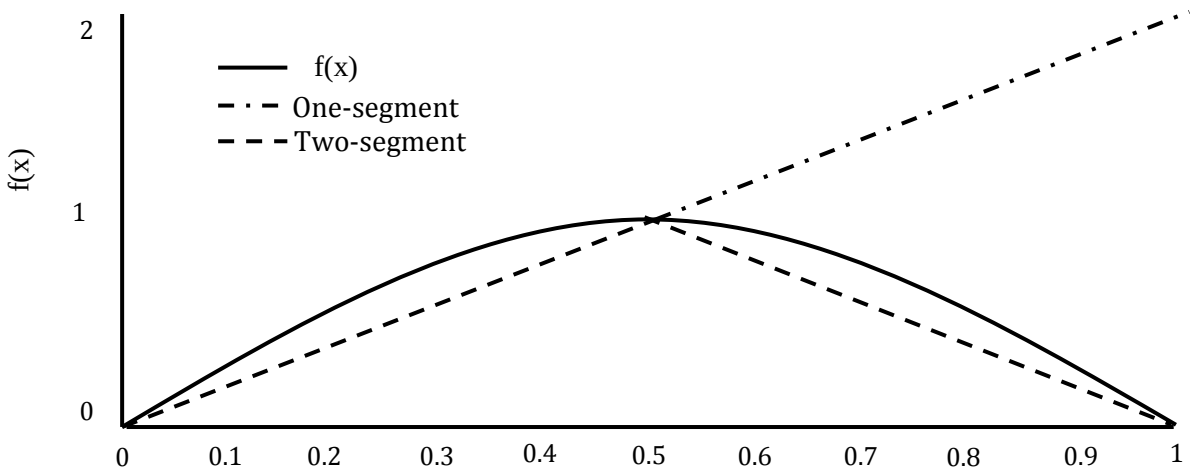
۳-۲-۷ توابع حدس تکه ای پیوسته[1] در فرم ضعیف

این روش در واقع یک نوع برازش منحنی (تقریب منحنی با تعدادی خط) است که در آن ما به جای تعریف تنها یک تابع حدس در کل محدوده حل، قلمرو حل را به ناحیه هایی تقسیم کرده و برای هر ناحیه یک تابع حدس را در نظر می گیریم. البته باید از پیوستگی متغیر ها و مشتقات آن ها در نقاط مرزی اطمینان حاصل شود.

همانطور که قبلا مشاهده شد روش عمومی تکنیک باقی مانده وزنی شامل حدس یک تابع جواب امتحانی و کمینه کردن مقدار باقیمانده در قلمرو حل بود و در همین راستا روش گالرکین نحوه انتخاب تابع وزنی مناسب را در اختیار ما قرار داد. ما نیز توابع امتحانی گوناگونی مثل چندجمله ای، مثلثاتی و ... را به کار گرفتیم. اگرچه در هر مورد تابع امتحانی انتخاب شده شرایط مرزی مساله را ارضا می نمود و در کل محدوده حل اعتبار داشت. هنگامیکه ماهیت روش باقیمانده وزنی را در نظر می گیریم که در آن با انتخاب یک تابع حل امتحانی سعی در نزدیک کردن آن تا حد امکان به جواب دقیق معادله دیفرانسل و شرایط مرزی داده شده را داریم، در می یابیم که در واقع این کار همان فرایند برازش منحنی[2] است. واضح است که این روش در واقع همان روش استفاده از توابع قطعه-قطعه است که هرچه تعداد قطعه ها بیشتر باشد تقریب بهتری حاصل می گردد. شکل۳-۱۰ این ایده پایه ای را در مورد تابع $f(x) = \sin(\pi x / L)$ که توسط قطعه های از خط راستی تقریب زده می شود را نمایش می دهد. از آنجایی که یک خط راست با داشتن دو نقطه رسم می شود می توانیم اولین تقریب را با گذراندن یک خط راست از نقاط $x = 0$ و $x = L/2$ شروع کنیم که البته واضح است برای $x > L/2$ تقریب اصلا

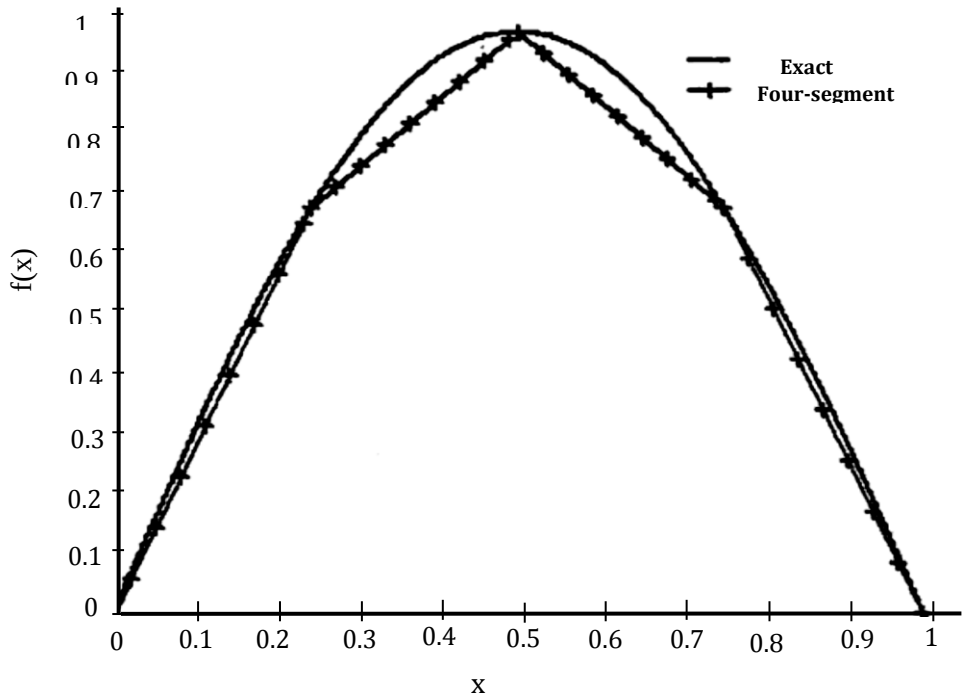
[1] Piece-wise Cintinuous
[2] Curve Fiting

خوبی نیست. حال اگر این بار به جای استفاده از تنها یک خط راست از دو خط راست استفاده کنیم بدین صورت که یک خط در محدوده $0<x<L/2$ و دیگری در محدوده $L/2<x<L$ تابع مورد نظر را تقریب بزند، تقریب بهتری حاصل می شود.



شکل ۳-۱۰ تقریب تابع با استفاده از یک و دو خط مستقیم

طبیعی است که تقریب دوم بهتر از تقریب اول است که تنها با یک خط صورت می گرفت و با افزایش بیشتر قطعات (خطوط راست) دقت تقریب بالا خواهد رفت که این موضوع را می توان در شکل ۳-۱۱ که تقریب توسط چهار خط صورت گرفته مشاهده نمود.



شکل ۳-۱۱ تقریب تابع با استفاده از چهار خط مستقیم

تابع امتحانی قطعه-قطعه پیوسته می تواند یک ایده اساسی برای تقریب شکل ضعیف معادله حاکم بر مساله باشد. البته زمانیکه ما یک تابع امتحانی قطعه-قطعه پیوسته را در نظر می گیریم باید مطمئن باشیم که متغیر میدانی(متغیر وابسته) مورد نظر و مشتقاتش در نقاط اتصالی شرط پیوستگی را ارضا می کنند. از آنجایی که جواب دقیق، پیوستگی متغیر میدانی و **تمام** مشتقاتش را به همراه دارد ما نیز انتظار داریم بتوانیم مشتقات را تنها تا یک درجه ای برای جواب تقریبی خود ارضا نماییم، که این خود منجر به ایجاد یک خطای ذاتی در حل می گردد. در اینجا ما قصد داریم یک جواب با دقت قابل قبول را با استفاده از توابع امتحانی مناسب (مانند چندجمله ای های ساده) تعریف شده در روش قطعه-قطعه در سرتاسر قلمرو حل بدست آوریم.

این توابع را در اینجا در یک زیرناحیه[1] بر حسب مقادیر تابع در دو انتهای این زیرناحیه تعریف می کنیم. برای مثال برای شکل ۳-۱۰ این توابع را به صورت زیر تعریف می کنیم:

برای حالتی که از یک خط استفاده شود داریم:

[1] Sub-domain

$$f(X) \approx \left[\frac{f(0.5)-f(0)}{0.5-0}\right] X = f(0.5)*2X \qquad 0<X<1$$

در حالتی که از دو خط برای تقریب استفاده شد نیز داریم:

$$f(X) \approx f(0.5)*2X \qquad 0<X<0.5$$

$$f(X) \approx f(0.5)+\left[\frac{0-f(0.5)}{1-0.5}\right](X-0.5) \qquad 0.5<X<1$$

و به همین صورت برای حالتی که از چهار خط استفاده شود(شکل ۳-۱۱)داریم:

$$f(X) \approx f(0.25)*4X \qquad 0<X<0.25$$

$$f(X) \approx f(0.25)+\left[\frac{f(0.5)-f(0.25)}{0.5-0.25}\right](X-0.25) \qquad 0.25<X<0.5$$

$$f(X) \approx f(0.5)+\left[\frac{f(0.75)-f(0.5)}{0.75-0.5}\right](X-0.5) \qquad 0.5<X<0.75$$

$$f(X) \approx f(0.75)+\left[\frac{f(1)-f(0.75)}{1-0.75}\right](X-0.75) \qquad 0.75<X<1$$

برای حالاتی که از دو خط و چهار خط استفاده شد اگر از یک مختصات محلی x که در سمت چپ انتهای هر زیرناحیه ثابت شده است استفاده شود، نوشتن توابع مطابق زیر راحت تر خواهد شد.

برای تقریب دو خطی مطابق شکل ۳-۱۲ $(l = L/2)$:

اولین زیر ناحیه: $f(x) \approx [1-(x/l)]f(0)+(x/l)f(0.5) \qquad 0<x<l$

دومین زیر ناحیه: $f(x) \approx [1-(x/l)]f(0.5)+(x/l)f(1) \qquad 0<x<l$

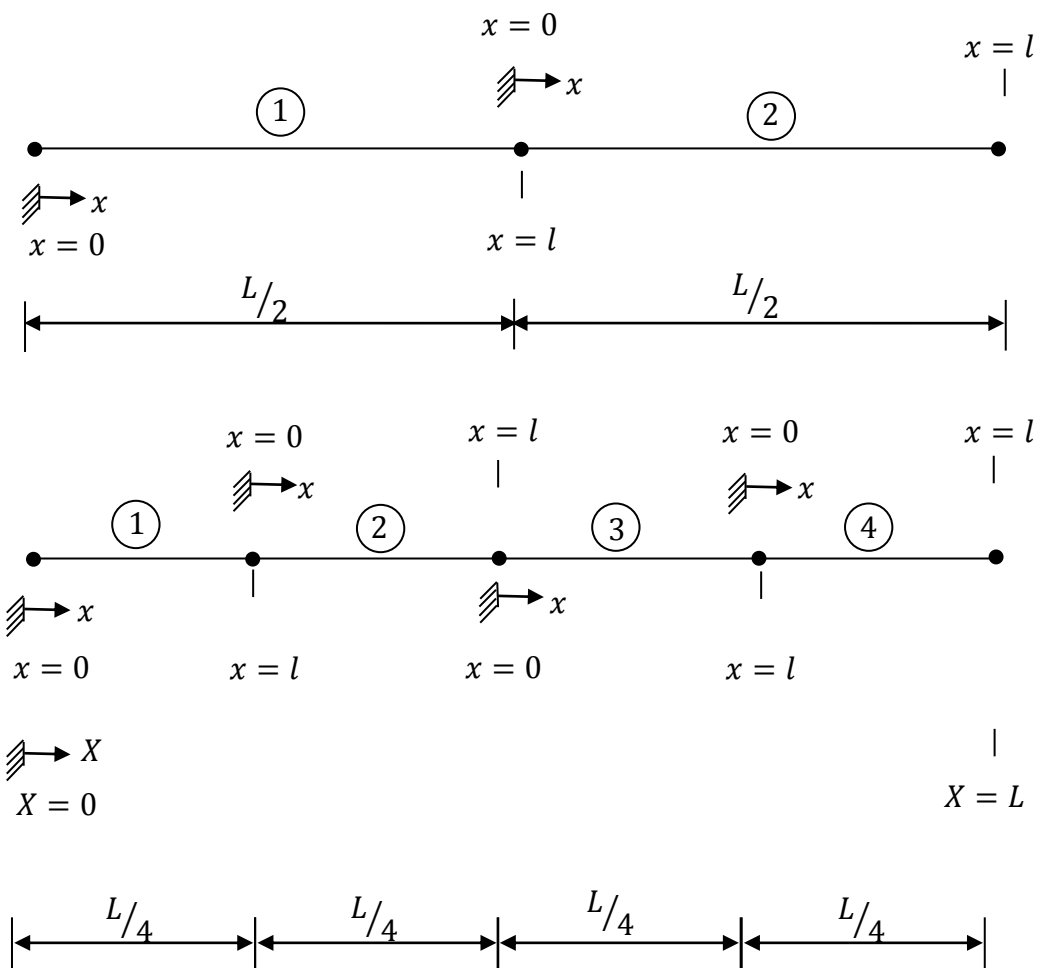
برای تقریب چهار خطی مطابق شکل ۳-۱۲ $(l = L/4)$:

زیر ناحیه اول: $0 < x < l$ $\quad f(x) \approx [1-(x/l)]f(0) + (x/l)f(0.25)$

زیر ناحیه دوم: $0 < x < l$ $\quad f(x) \approx [1-(x/l)]f(0.25) + (x/l)f(0.5)$

زیر ناحیه سوم: $0 < x < l$ $\quad f(x) \approx [1-(x/l)]f(0.5) + (x/l)f(0.75)$

زیر ناحیه چهارم: $0 < x < l$ $\quad f(x) \approx [1-(x/l)]f(0.75) + (x/l)f(1)$



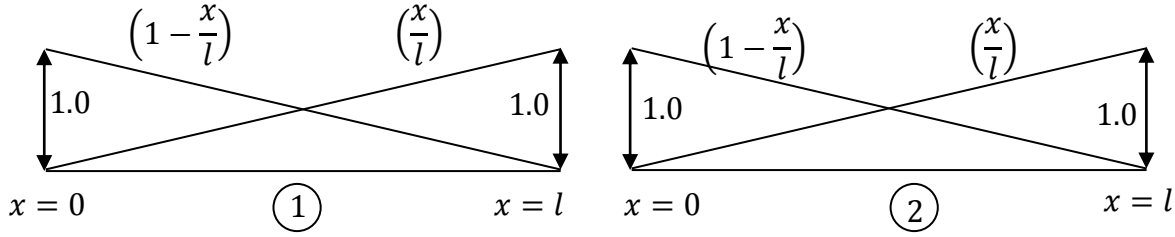
شکل ۳-۱۲ استفاده از دستگاه مختصات محلی

همانطور که مشاهده شده توانستیم توسط توابع مشخصه[1] $[1-(x/l)]$ و $[x/l]$مقادیر تابع در درون هر زیرناحیه را بر حسب مقادیر انتهایی آن درون یابی کنیم. همچنین در این حالت به راحتی می توان برای هر تعداد زیر ناحیه (مثلا n تا) تقریب تابع را انجام داد، در این حالت به عنوان مثال برای قطعه خط kام تابع درون یابی به صورت زیر بیان می شود:

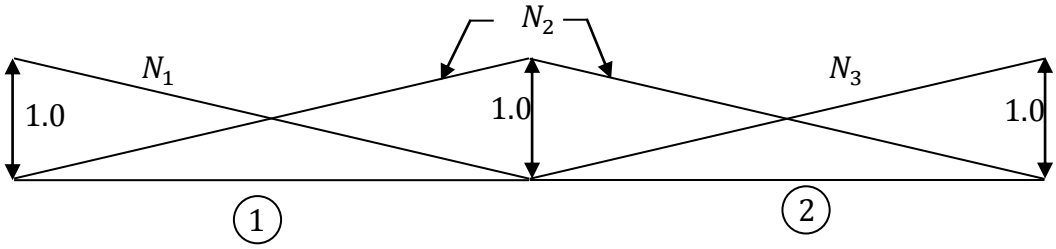
$$f(x) \approx [1-(x/l)]\, f_{k-1} + (x/l)\, f_k \qquad 0 < x < l = L/n$$

توابع مشخصه $[1-(x/l)]$ و $[x/l]$ که برای درون یابی استفاده شدند را *توابع درون یابی*[2] یا *توابع شکل*[3] می نامند، زیرا آن ها شکل تغییرات تابع را در داخل هر زیرناحیه تعیین می کنند. در این نوشته علامت $N_i(1,2,...)$برای این توابع استفاده خواهد شد. این توابع مشخصه بر حسب مقادیر معینی از تابع مثل f_k مقادیر تابع در داخل هر نقطه مثل p واقع در ناحیه $0 < X < L$ را مشخص می کنند. شکل ۳-۱۳ این توابع را برای حالت دو خطی که قبلا مورد بحث قرار گرفت نشان می دهد. قسمت (a) توابع درون یابی را به صورت مجزا برای دو زیر ناحیه نشان می دهد در حالی که قسمت (b) آن ها را به صورت کامل برای کل ناحیه $(0 < X < L)$ نشان می دهد. شکل ۳-۱۴ نیز این توابع را برای حالتی که از چهار قطعه خط استفاده شد را نشان می دهد.

[1] Characteristic Functions
[2] Interpolate Functions
[3] Shape Functions

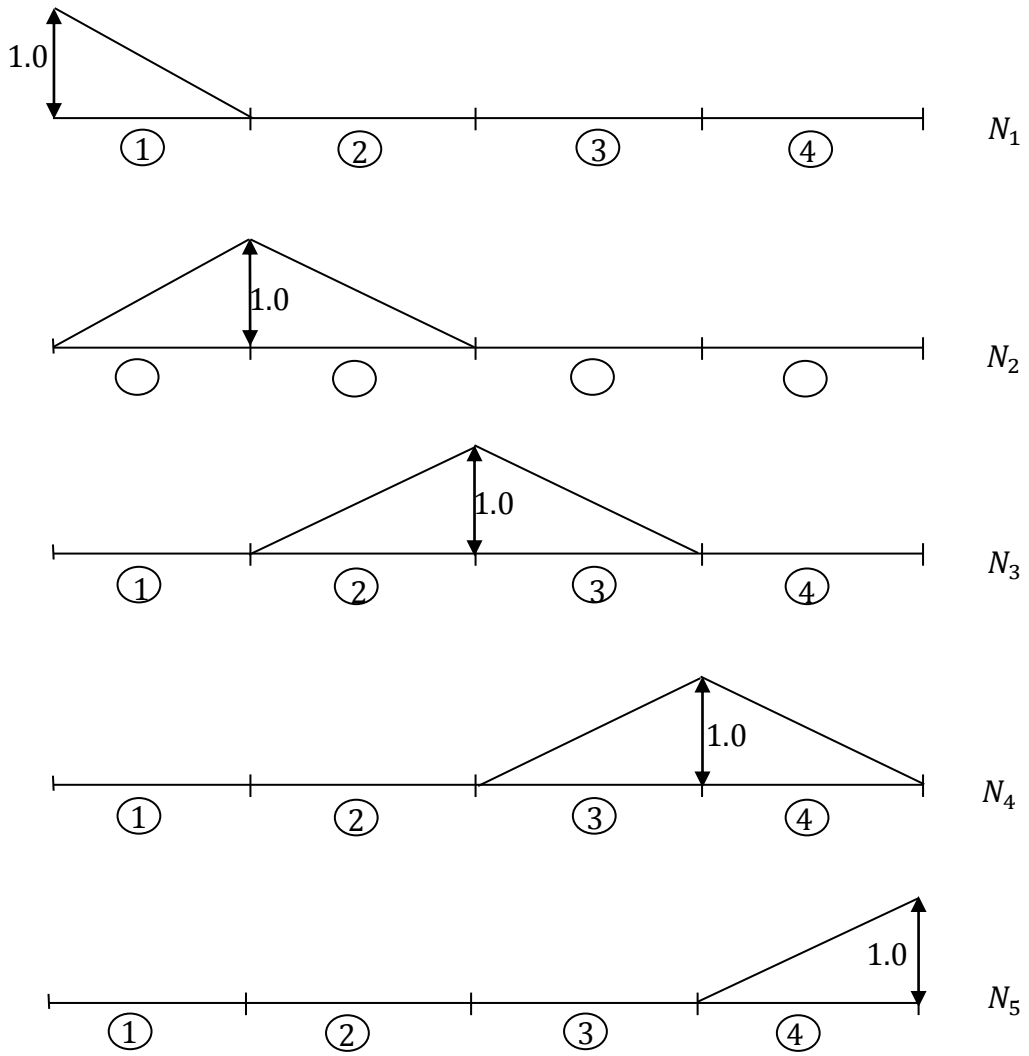


a) Interpolation function within each sub-



b) Compact representation of shape function

شکل ۳-۱۳ توابع شکل خطی



شکل ۳-۱۴ توابع شکل خطی برای تقریب چهار خطی

همانطور که مشاهده می شود به تعداد توابع شکل N_k مقادیر تابع f_k در درون یابی مورد استفاده قرار گرفت. از آنجایی که توابع شکل انتخابی توسط ما خطی بودند هر تابع شکل N_k در داخل هر زیر ناحیه حالت کم شدن و زیاد شدن دارد. هر تابع شکل N_k در روی نقطه $x = x_k$ مقدار یک را اختیار می کند (زیرا در این نقطه باید مقدار تابع برابر f_k باشد) و بر روی بقیه نقاط انتهایی $(x = x_j, j \neq k)$ مقدار صفر را خواهد داشت. یعنی به صورت خلاصه داریم:

$$N_k = \begin{cases} 1 & x = x_k \\ 0 & x \neq x_k \end{cases}$$

دیگر نکته پر اهمیت در درون یابی که در اینجا صورت گرفت این بود که، هر مقدار f_k تنها در مقادیر تابع در هر دو طرف زیرناحیه مشارکت داده می شود، به عبارت دیگر تنها در دو زیر ناحیه ای که به هم متصل شده اند. (در واقع از ارضای شرط پیوستگی تابع اطمینان حاصل می شود.)

۳-۲-۷-۱ استفاده از تابع تقریب در فرم ضعیف شده

از روش گالرکین به خاطر داریم که برای حالتی که تنها یک تابع وجود داشت باید مقدار انتگرال $\int W_i(x)R_d(x)dx$ را بر روی کل قلمرو حل $(0 < X < L)$ محاسبه می شد. حال در این حالت که توابع درون یابی را در نظر گرفتیم این رابطه باید به صورت زیر مورد استفاده قرار بگیرد:

$$\sum_{i=1}^{n} \int W_i(x) R_d(x) dx \quad , n = number \quad of \quad elements \qquad ۳-۱۰$$

درون یابی مقادیر تابع در یک نقطه درونی از مقادیر تابع در نقاط انتهایی زیر ناحیه ها، دو مزیت دارد اولی ارضای شرط پیوستگی در نقاط اتصالی زیرناحیه ها بود و دومی اینکه شرایط مرزی ضروری به راحتی ارضا می شوند. چون شکل ضعیف معادل معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی طبیعی حاکم بر مساله است، شرایط مرزی ضروری یا هندسی باید در داخل تابع امتحانی ارضا شوند و بنابراین مزیت دوم بدست می آید.

لازم به ذکر است که ضرایب مجهول که بوسیله شکل ضعیف ارضا می شدند در واقع همان مقادیر متغیر میدانی f_k در انتهای زیرناحیه ها هستند. اگر ما محیط فیزیکی مساله $(0 < X < L)$ را به تعداد n زیرناحیه گسسته

کنیم، تعداد $n+1$ مجهول از مقادیر تابع وجود دارد که باید با ارضای شکل ضعیف محاسبه شوند. در واقع $n+1$ معادله جبری شکل می گیرد که می توان آن ها را در فرم ماتریسی $[A]\{f\}=\{b\}$ بیان کرد و $n+1$ تابع وزنی که در واقع همان توابع درون یابی هستند، در روش حل گالرکین به کار برده می شوند. این توابع درون یابی یا توابع وزنی همان هایی هستند که در شکل های ۳-۱۳ و ۳-۱۴ به کار برده شدند. مشاهده می شود که این توابع در حال تکرار کردن خود از یک زیرناحیه به زیر ناحیه دیگر هستند. بنابراین مناسب است که محاسبات مثل $\int W_i(x)R_d(x)dx$ یا شکل ضعیف آن را تنها برای یک زیرناحیه انجام دهیم و با گرفتن مجموع ($\sum$) نتایج را برای کل زیر ناحیه ها انجام دهیم. توجه داریم که مشارکت هر زیر ناحیه در المان های ماتریس $[A]$

توسط ضرایبی است که در هر زیر ناحیه مثل k در f_k و f_{k+1} ضرب می شدند تا تابع درون یابی را ایجاد کنند.

بنابراین فرایند یافتن مجموع باقیمانده وزنی یا شکل ضعیف آن در کل قلمرو حل به صورت چشم گیری ساده می شود و به صورت زیر قابل خلاصه شدن است:

- محاسبه مقدار $\int W_i(x)R_d(x)dx$ یا شکل ضعیف آن تنها برای یک زیر ناحیه kام برای رسیدن به سطح مشارکت یک زیر ناحیه در مقدار باقیمانده وزنی.
- تعیین ضرایب ماتریس های $[A]$ و $\{b\}$ به وسیله جایگذاری مناسب سهم مشارکت هر زیر ناحیه در ردیف ها و ستون های مربوطه.
- حل دستگاه معادلات جبری با $n+1$ مجهول و محاسبه مجهولات مساله که در واقع همان مقادیر تابع f_k در انتهای زیرناحیه ها است.

زمانیکه مقادیر تابع در انتهای هر زیر ناحیه مشخص شود به راحتی به کمک توابع درون یابی می توان مقدار تابع را در هر نقطه در داخل زیرناحیه ها نیز بدست آورد.

فرایند ذکر شده در بالا در واقع همان ماهیت روش اجزا محدود است. هر کدام از زیرناحیه ها در واقع یک *المان محدود*[1] نامیده می شود (که متمایز از المان دیفرانسیلی است که در مکانیک پیوسته استفاده می شوند). نقاط انتهایی هر زیرناحیه یا المان نیز *گره*[2] نامیده می شود. المان هایی نیز وجود دارند که گره های آن ها تنها در نقاط انتهایی نیست ، مثلا علاوه بر گره های انتهایی یک گره در وسط آن ها نیز قرار دارد که بعدا در مورد آن ها بحث می شود. مقادیر مجهول تابع f_k در انتهای هر زیرناحیه نیز به عنوان *درجات آزادی گره ای*[3] شناخته می شود. یک المان اجزا محدود کلی می تواند مقادیر تابع و همچنین مشتقاتش را به عنوان درجات آزادی گره ای قبول می کند. سهم مشارکت هر زیر ناحیه در شکل ضعیف به عنوان *معادلات سطح المان*[4] شناخته می شود. پروسه ساختن ضرایب ماتریس های $[A]$ و $\{b\}$ را به عنوان فرایند *اسمبل کردن*[5] (مونتاژکردن) - یعنی چیدمان مناسب معادلات تک تک المان ها برای ایجاد معادلات سیستم می شناسند.

اکنون فرمول بندی اجزا محدود بر اساس شکل ضعیف در یک مثال ساده توضیح داده می شود. در این مثال با یک میله یک بعدی مواجه هستیم که در آن از المان های خطی دو گره ای استفاده شده و تغییر مکان محوری u به عنوان درجه آزادی گره ای در هر گره تعریف می گردد. این یک المان بسیار کاربردی در تحلیل شبکه های خرپایی پیچیده است که زمانی که با یک المان محدود تیر یک بعدی، ترکیب می گردد می تواند برای حل بسیاری از مسائل پیچیده از جمله سازه های قابی و شاسی اتومبیل و ... استفاده شود.

[1] Finite Element
[2] Node
[3] Nodal Degrees Of Freedom (D.O.F)
[4] Element Level Equation
[5] Assembly

۳-۲-۷-۲ اجزا محدود میله یک بعدی

اگر دوباره مثال قبلی رادر نظر بگیریم که در آن مساله را با روش فرم ضعیف حل کردیم، اما اکنون می خواهیم به کمک توابع درون یابی تعریف شده به صورت تکه‌ای، مساله را حل نماییم.

از معادله حاصله شکل ضعیف مساله به صورت زیر است:

$$[W(X)AE\frac{d\hat{u}}{dX}]_0^L - \int_0^L AE\frac{d\hat{u}}{dX}\frac{dW}{dX}dX + \int_0^L W(X)q(x)dX = 0$$

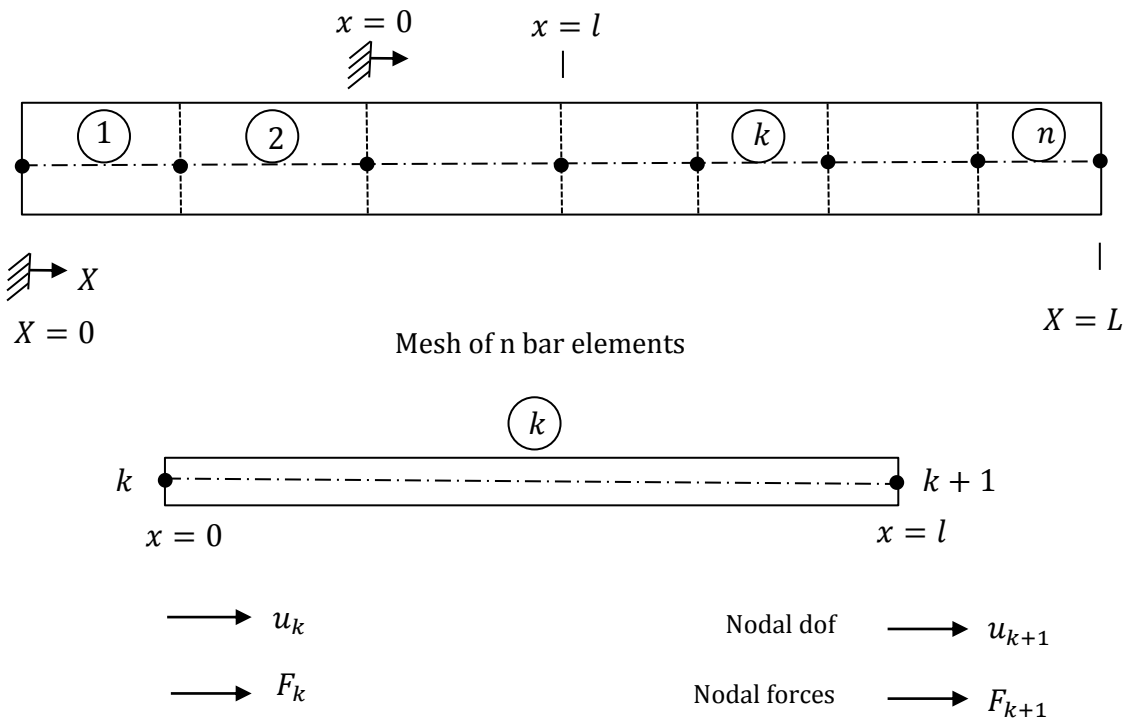
متغیر X نشان دهنده *مختصات کلی*[1] است که محدوده تغییرات آن از ابتدا تا انتهای عضو است $(0 < X < L)$

متغیر x نیز *مختصات محلی*[2] را مشخص می کند که محدوده تغییرات آن از ابتدا تا انتهای المان است $(0 < x < l)$. با بازنویسی رابطه قبل داریم:

$$\int_0^L AE\frac{d\hat{u}}{dX}\frac{dW}{dX}dX = \int_0^L W(X)q(X)dX + [W(X)AE\frac{d\hat{u}}{dX}]_0^L$$

حال مطابق شکل ۳-۱۵ میله را به تعداد n المان با طول های مساوی تقسیم می کنیم. شکل ۳-۱۵ نیز یک المان از میله به طول l را نشان می دهد که دارای دو گره است و درجه آزادی هر گره در واقع همان تغییرشکل محوری میله u است.

[1] Global Coordinate
[2] Local Coordinate



شکل ۳-۱۵ مش برای المان میله ای و المان میله‌ای

برای این n المان در مش موجود رابطه را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\int_0^l AE\frac{d\hat{u}}{dx}\frac{dW}{dx}dx=\sum_{k=1}^{n}\int_0^l W(x)q(x)dx+\sum_{k=1}^{n}[W(x)AE\frac{d\hat{u}}{dx}]_0^l}$$

توجه داریم که حد انتگرال ها تغییر کرد و در واقع به جای انتگرال گیری بر روی کل عضو، مجموع انتگرال بر روی هر المان استفاده می شود.

اگر تابع درون یابی تغییرمکان محوری در هر المان را به صورت زیر بیان کنیم:

$$\hat{u}(x)=\left(1-\frac{x}{l}\right)\hat{u}_k+\left(\frac{x}{l}\right)\hat{u}_{k+1}$$

یا در فرم ماتریسی:

$$\hat{u}(x) = [N]\{\hat{u}\}^k$$

$[N]$ و $\{\hat{u}\}^k$ به ترتیب آرایه های تابع شکل و درجات آزادی گره ای هستند که اندازه آن ها وابسته به نوع المان در نظر گرفته شده دارد. که در مورد این مثال به صورت زیر قابل تعریف اند:

$$[N] = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{l}\right) & \left(\frac{x}{l}\right) \end{bmatrix}$$

$$\{\hat{u}\}^k = \begin{Bmatrix} \hat{u}_k \\ \hat{u}_{k+1} \end{Bmatrix}$$

و برای بازنویسی فرم ضعیف باید داشته باشیم:

$$\frac{d\hat{u}}{dx} = -\frac{1}{l}\hat{u}_k + \frac{1}{l}\hat{u}_{k+1} = \frac{\hat{u}_{k+1} - \hat{u}_k}{l} = [B]\{\hat{u}\}^k$$

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix}$$

حال بر اساس تابع تغییر مکان حدس زده شده برای یک المان میتوانیم سهم المان kام را در فرم ضعیف محاسبه کنیم:

$$W_1(x) = 1 - \frac{x}{l} \qquad \frac{dW_1}{dx} = -\frac{1}{l}$$
$$W_2(x) = \frac{x}{l} \qquad \frac{dW_2}{dx} = \frac{1}{l}$$

حال سمت چپ فرم ضعیف را بازنویسی می کنیم:

$$\int_0^l AE\frac{d\hat{u}}{dx}\frac{dW_1}{dx}dx = \int_0^l AE\left(\frac{\hat{u}_{k+1} - \hat{u}_k}{l}\right)\left(-\frac{1}{l}\right)dx = \frac{AE}{l}(\hat{u}_k - \hat{u}_{k+1})$$

$$= \frac{AE}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \hat{u}_k \\ \hat{u}_{k+1} \end{Bmatrix}$$

$$\int_0^l AE\frac{d\hat{u}}{dx}\frac{dW_2}{dx}dx=\int_0^l AE(\frac{\hat{u}_{k+1}-\hat{u}_k}{l})(\frac{1}{l})dx=\frac{AE}{l}(\hat{u}_{k+1}-\hat{u}_k)$$

$$=\frac{AE}{l}[-1 \qquad 1]\begin{Bmatrix}\hat{u}_k\\ \hat{u}_{k+1}\end{Bmatrix}$$

برای نوشتن ترم اول سمت راست معادله احتیاج به تعریف بارگذاری خارجی وارد بر میله داریم که آن را با شدت ثابت فرض می کنیم.

$$q(x)=q_0$$

$$\int_0^l W_1(x)q(x)dx=\int_0^l(1-\frac{x}{l})(q_0)dx=\frac{q_0 l}{2}$$

$$\int_0^l W_2(x)q(x)dx=\int_0^l(\frac{x}{l})(q_0)dx=\frac{q_0 l}{2}$$

دقت داریم که هر گونه توزیع باری را می توان به صورت بالا به *بارهای معادل گره ای*[1] تبدیل نمود.

ترم دوم سمت راست که در واقع همان شرایط مرزی طبیعی مساله را در بر دارد نیز به صورت زیر نوشته می شود:

$$[W_1(x)AE\frac{d\hat{u}}{dx}]_0^l=\left[(1-\frac{x}{l})P\right]_0^l=-P_0$$

$$[W_2(x)AE\frac{d\hat{u}}{dx}]_0^l=\left[(\frac{x}{l})P\right]_0^l=P_l$$

[1] Equivalent Nodal Force

توجه داریم که ترم $AE\frac{d\hat{u}}{dx}$ بیان کننده نیروی محوری داخل المان است، پس P_0 و P_l نیروی محوری در دو انتهای المان را مشخص خواهند کرد. همچنین دقت داریم که برایند نیروها در دو انتهای المان از جمع نیروی محوری گره و نیروی ناشی از بارگذاری بدست می آید، که در واقع این همان معادله تعادل یک المان تنها است.

حال می توانیم فرم ضعیف را از جمع روابط بالا به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\frac{AE}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \hat{u}_k \\ \hat{u}_{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_0 l/2 \\ q_0 l/2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -P_0 \\ P_l \end{Bmatrix}$$

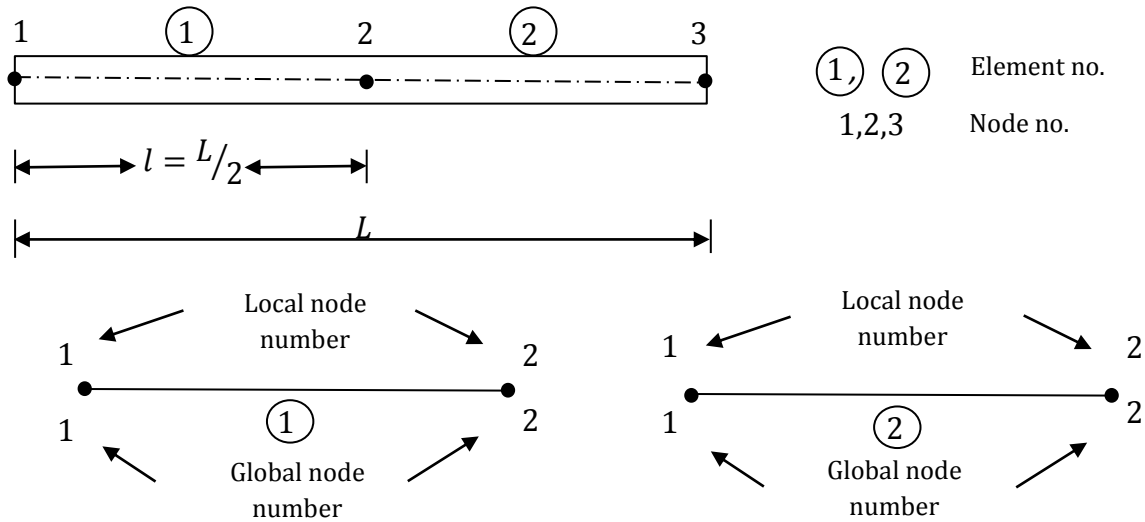
سمت چپ و راست رابطه بالا *ماتریس های مشخصه*[1] یا *معادلات مشخصه*[2] را برای المان میله مشخص می کنند.

در معادلات بالا سختی محوری میله است و سمت راست نیز تعادل بارهای ناشی از بارگذاری و نیروی محوری در دو سر المان را مشخص می کند. با در نظر گرفتن این موضوع که رابطه بالا در واقع همان رابطه نیرو-تغییرشکل[3] را برای یک عضو محوری (میله) بیان می کند، ماتریس سمت راست را به عنوان ماتریس سختی المان و بردارهای سمت راست را به عنوان بردارهای نیروهای گره ای المان تعریف می کنیم.

تا کنون محاسبات برای یک المان خاص صورت می گرفت، حال باید تک تک المان ها با هم جمع زده شوند تا به معادله کل سیستم برسیم (عملیات اسمبل کردن). برای بهتر روشن شدن این عملیات به مثال زیر توجه شود.

[1] Characteristic Matrices
[2] Characteristic Equations
[3] Force-Deflection

مثال ۳-۱۶ (اسمبل کردن). یک میله به طول $L = 2l$ را در نظر بگیرید که مطابق شکل ۳-۱۶ به دو المان تقسیم شده است.

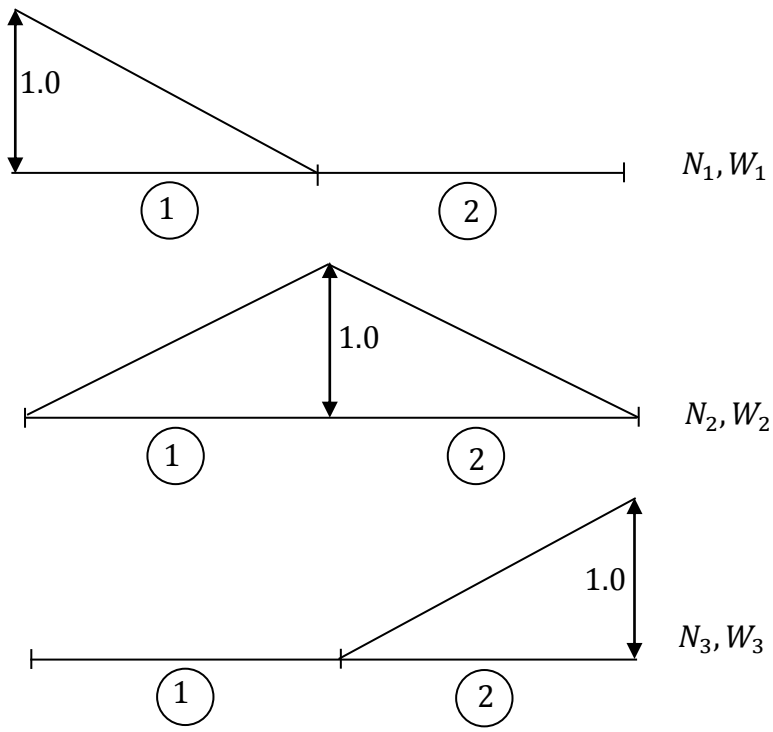


شکل ۳-۱۶ اسمبل کردن یک المان میله‌ای

همانطور که قبلا هم ذکر شد فرم ضعیف معادله دیفرانسیل حاکم بر مساله به صورت زیر است:

$$\int_0^L AE \frac{d\hat{u}}{dX}\frac{dW}{dX}dX = \int_0^L W(X)q(X)dX + [W(X)AE\frac{d\hat{u}}{dX}]_0^L$$

توابع وزنی یا همان توابع شکل نیز در شکل ۳-۱۷ آمده اند.



شکل ۳-۱۷ توابع شکل

توابع وزنی به صورت زیر بیان می شوند:

$$W_1(x) = 1 - \frac{x}{l} \qquad 0 < x < l \qquad in \;\; 1st \;\; element$$
$$W_1(x) = 0 \qquad in \;\; 2nd \;\; element$$

$$W_2(x) = \frac{x}{l} \qquad 0 < x < l \qquad in \;\; 1st \;\; element$$
$$W_2(x) = 1 - \frac{x}{l} \qquad 0 < x < l \qquad in \;\; 2nd \;\; element$$

$$W_3(x) = 0 \qquad in \;\; 1st \;\; element$$
$$W_3(x) = \frac{x}{l} \qquad 0 < x < l \qquad in \;\; 2nd \;\; element$$

دقت داشتیم که چون تعداد المان های انتخابی دوتا بود با سه متغیر میدانی u_1, u_2, u_3 مواجه هستیم که احتیاج به سه تابع وزنی دارند تا با حل سه معادله و سه مجهول مساله حل شود.

حال سمت چپ فرم ضعیف مساله را بازنویسی می کنیم:

$$\int_0^L AE\frac{d\hat{u}}{dX}\frac{dW_1}{dX}dX = \sum_1^2\int_0^l AE\frac{d\hat{u}}{dx}\frac{dW_1}{dx}dx = \int_0^l AE(\frac{u_2-u_1}{l})(-\frac{1}{l})dx + 0$$

$$= \frac{AE}{l}(u_1 - u_2)$$

$$\int_0^L AE\frac{d\hat{u}}{dX}\frac{dW_2}{dX}dX = \sum_1^2\int_0^l AE\frac{d\hat{u}}{dx}\frac{dW_2}{dx}dx = \int_0^l AE(\frac{u_2-u_1}{l})(\frac{1}{l})dx + \int_0^l AE(\frac{u_3-u_2}{l})(-\frac{1}{l})dx$$

$$= \frac{AE}{l}[(-u_1+u_2)+(u_2-u_3)]$$

$$\int_0^L AE\frac{d\hat{u}}{dX}\frac{dW_3}{dX}dX = \sum_1^2\int_0^l AE\frac{d\hat{u}}{dx}\frac{dW_3}{dx}dx = 0 + \int_0^l AE(\frac{u_3-u_2}{l})(\frac{1}{l})dx$$

$$= \frac{AE}{l}(u_3 - u_2)$$

ترم اول سمت راست معادله عبارت است از:

$$\int_0^L W_1(X)q(X)dX = \sum_1^2\int_0^l W_1 q_0 dx = \int_0^l (1-\frac{x}{l})q_0 dx + 0 = \frac{q_0 l}{2}$$

$$\int_0^L W_2(X)q(X)dX = \sum_1^2\int_0^l W_2 q_0 dx = \int_0^l (\frac{x}{l})q_0 dx + \int_0^l (1-\frac{x}{l})q_0 dx = \frac{q_0 l}{2} + \frac{q_0 l}{2}$$

$$\int_0^L W_3(X)q(X)dX = \sum_1^2\int_0^l W_3 q_0 dx = 0 + \int_0^l (\frac{x}{l})q_0 dx = \frac{q_0 l}{2}$$

ترم دوم سمت راست معادله نیز عبارت است از:

$$[W_1(X)AE\frac{d\hat{u}}{dX}]_0^L=\sum_1^2[W_1(X)AE\frac{d\hat{u}}{dX}]_0^l=\left[(1-\frac{x}{l})P\right]_0^l+0=-P_0^{(1)}$$

توجه: اندیس بالایی در مورد نیروها شماره المان و اندیس پایینی ابتدا یا انتهای المان را مشخص می کند.

$$[W_2(X)AE\frac{d\hat{u}}{dX}]_0^L=\sum_1^2[W_2(x)AE\frac{d\hat{u}}{dx}]_0^l=\left[(\frac{x}{l})P\right]_0^l+\left[(1-\frac{x}{l})P\right]_0^l=P_l^{(1)}-P_0^{(2)}$$

$$[W_3(X)AE\frac{d\hat{u}}{dX}]_0^L=\sum_1^2[W_3(x)AE\frac{d\hat{u}}{dx}]_0^l=0+\left[(\frac{x}{l})P\right]_0^l=P_l^{(2)}$$

حال می توان معادلات سیستم را به فرم ماتریس زیر بیان کرد:

$$\frac{AE}{l}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1+1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}q_0l/2\\ q_0l/2+q_0l/2\\ q_0l/2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}-P_0^{(1)}\\ P_l^{(1)}-P_0^{(2)}\\ P_l^{(2)}\end{Bmatrix}$$
$$=\begin{Bmatrix}q_0l/2\\ q_0l/2+q_0l/2\\ q_0l/2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}F_1\\ F_2\\ F_3\end{Bmatrix}$$

با در نظر گرفتن سیستم معادلات بالا می توان به نتایج زیر رسید:

۱. معادلات سیستم می توانند به راحتی با جایگذاری مناسب معادلات المان ها در یک سیستم ماتریسی بدست بیایند.

۲. چون هر المان میله ای را می توان معادل با یک فنر به سختی $\frac{AE}{l}$ در نظر گرفت، مش بندی المان های میله را می توان به صورت مجموعه ای از فنر ها دید که در نقاط گره ای به یکدیگر متصل شده اند و چون تغییر مکان این فنر ها در نقاط اتصالی با هم برابر است، اتصال به صورت موازی بوده و سختی معادل در یک گره به صورت مجموع سختی های دو المان مجاور در آن گره بیان می شود. (این موضوع را می توان به راحتی در گره ۲ در مثال قبل مشاهده نمود.)

۳. اولین جمله در سمت راست نیروهای معادل گره ای را بیان می کند و مشاهده می شود که در نقاط اتصالی این مقدار برای دو المان مجاور با هم جمع می شود.

۴. دومین جمله از سمت راست نیز نیروی محوری خالص در مقطع را بیان می دارد که شامل هر نیروی متمرکز خارجی اعمالی(F) در مقطع و همچنین نیروهای عکس العمل داخلی است که در نمودار جسم آزاد یک المان تنها ممکن است دیده شوند. اگرچه باید توجه داشته باشیم که وقتی که ما عمل اسمبل کردن را برای رسیدن به معادلات کل سیستم انجام می دهیم نیروهای عکس العمل داخلی همدیگر را خنثی کرده (بر طبق قانون دوم نیوتن) و نیروهای خارجی اعمالی بر روی گره ها باقی می مانند.

۵. هر کدام از معادلات سیستم تعادل نیروها در گره ها را بیان می کند. بنابراین با توجه به اینکه سازه از مجموعه ای از المان ها که در نقاط گره ای به هم متصل شده اند ساخته شده ما معادله دیفرانسل تعادل محیط پیوسته را با معادلات جبری تعادل که تنها در گره ها به کار می روند، جایگزین نمودیم. حال این سوال مهم پیش می آید که آیا معادلات تعادل در نقاط داخلی المان ها هم ارضا می شوند؟ در حالت کلی می توان نشان داد که در یک اجزا محدود کلی نمی توان ارضای معادلات تعادل در داخل نقاط داخلی المان ها را گارانتی کرد.

۶. باز هم یادآور می شویم که فرم ضعیف تنها معادل معادله دیفرانسیل حاکم بر مساله و همچنین شرایط مرزی طبیعی است. بنابراین معادلات اجزا محدود ارائه شده در قبل که از فرم ضعیف بدست آمدند تا زمانیکه شرایط مرزی ضروری را نداشته باشیم قابل حل نخواهند بود. منظور از شرایط مرزی ضروری در اینجا هم همان مقادیر معلوم برای جابه جایی است.

۳-۲-۸ خلاصه ای از روش اجزا محدود با استفاده از شکل باقیمانده وزنی

مراحل زیر پروسه لازم جهت انجام فرمولاسیون یک مسئله در روش اجزاء محدود را نشان می‌دهد.

۱. شکل باقیمانده وزنی مساله را می نویسیم.

۲. به کمک انتگرال گیری جز به جز فرم ضعیف معادله حاکم بر مساله را بدست می آوریم. انتگرال گیری جز به جز باید به تعداد دفعات مناسب انجام شود تا جایی که مشتقات به طور مناسبی بین متغیر میدانی و توابع وزنی تقسیم شوند. شکل ضعیف در واقع همان معادله دیفرانسیل حاکم بر مساله و شرایط مرزی طبیعی را در بر دارد.

۳. شکل ضعیف را به صورت یک مجموع برای المان n ام می نویسیم.

۴. المان محدود را تعریف می کنیم. (هندسه المان ها، گره ها و درجات آزادی)

۵. توابع شکل یا درون یابی را بدست آورده و از روی آن ها توابع وزنی را نیز بدست می آوریم.

۶. معادلات سطح المان را به وسیله جایگزینی مقادیر گام قبل در فرم ضعیف بدست می آوریم.

۷. برای یک مش بندی خاص معادلات سیستم را از روی اسمبل کردن معادلات سطح المان بدست می آوریم.

۸. شرایط مرزی مساله را اعمال کرده و مجهولات مساله را محاسبه می کنیم.

۳-۳ روش حل ریاضی معادلات بر اساس پایا [1] (اکسترمم) کردن یک فانکشنال

در بخش قبل در مورد حل ریاضی معادلات دیفرانسیل با استفاده از روش گالرکین و فرم ضعیف روش باقیمانده وزنی بحث شد. بحث ما مطابق معمول با مشخص کردن یک معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی آن شروع می شد. اگرچه آغاز کردن فرمول بندی روش اجزا محدود از معادله دیفرانسیل کاملا عمومی است، در بسیاری از مواقع این معادله دیفرانسیل از پایا کردن یک تابع فانکشنال بدست می آید. برای مدت زیادی است که روش های انرژی، به صورت یک شیوه رایج برای حل اکثر مسائل در مکانیک سازه به کار می رود و مناسب خواهد بود که اصل انرژی پتانسیل کل پایا برای فرمول بندی معادلات دیفرانسیل حاکم به کار برده شود. معادلات اجزا محدود با شروع از اصل حاکم بر پایا شدن یک فانکشنال گسترش یافته اند، که کاربرد زیادی در مسائل مکانیک سازه، انتقال حرارت، مکانیک سیالات و ... دارد.

لازم به ذکر است که معادلات اجزا محدود به طور سیستماتیک به سادگی می توانند از شکل معادله دیفرانسیل یا فرم فانکشنال بدست بیایند. با داشتن فرم فانکشنال همواره می توان معادله دیفرانسیل معادل را بدست آورد ولی بعضی از معادلات دیفرانسیل دارای فرم فانکشنال معادل نیستند و یا فرم فانکشنال مطابق با آن ها دارای مفهوم فیزیکی خاصی نیست. اگرچه به طور سنتی فرم فانکشنال برای معرفی روش اجزا محدود به کار برده می شود، باید توجه شود که خود روش اجزا محدود نیازمند وجود یک فانکشنال نیست.

تابع فانکشنال در مسائل مکانیک سازه ها همان تابع پتانسیل کل می باشد. بر اساس قضیه مینیمم انرژی پتانسیل نتیجه گرفتیم که از میان تمام تابع های تغییرمکان قابل حصول در نزدیکی تعادل، تابعی که انرژی پتانسیل کل را پایا می سازد تابع جواب می باشد، که این شرط معادل شرط تعادل در سیستم می باشد. نشان دادیم که پایا نمودن تابع فانکشنال (انرژی پتانسیل کل) همسان با معادله ریاضی حاکم بر سیستم تحت شرایط مرزی ان می باشد.

در ادامه نیز بر روی یافتن جواب تقریبی برای مسائل مینیمم کردن یک فانکشنال بحث خواهیم کرد. قضیه انرژی پتانسیل مینیمم یا همان پایا شدن پتانسیل کل که از قضایای معروف در مکانیک سازه است مطرح می گردد و قضیه رایلی-ریتز[2] در ارتباط با پیدا کردن جواب تقریبی برای این قاعده به کار گرفته می شود. ما در ابتدا از یک تابع امتحانی یکتا که در سرتاسر قلمرو حل معتبر است استفاده می کنیم و سپس توابع امتحانی تکه

[1] Stationary
[2] Rayliegh-Ritz

ای پیوسته را برای یک فانکشنال داده شده به کار می گیریم،که منجر به فرمول بندی روش اجزا محدود می گردد.

۳-۳-۱ روش یافتن جواب تقریبی با استفاده از روش انرژی

در فصل دوم فرم کلی انرژی پتانسیل برای یک جسم الاستیک خطی را به صورت زیر نشان دادیم:

$$\pi = U - W$$
$$U = Strain\ Energy$$
$$W = -P = Potential\ Energy\ of\ the\ Applied\ Loads\,(body\ forces\ and\ surface\ traction)$$
$$\pi = \iiint_V \chi(u,v,w)dV - \iiint_V \left(\bar{F}_{Bx}u + \bar{F}_{By}v + \bar{F}_{Bz}w\right)dV - \iint_{S_T}\left(\bar{F}_{Tx}u + \bar{F}_{Ty}v + \bar{F}_{Tz}w\right)dS_1$$

که در آن U انرژی کرنشی و W انرژی پتانسیل ناشی از بارهای اعمالی خارجی (نیروهای جرمی و نیرو های سطحی) می‌باشد. S_T سطحی است که نیروهای سطحی روی آن تعریف شده اند. χ (u,v,w) انرژی کرنشی در واحد حجم است (چگالی انرژی کرنشی). دو انتگرال آخری، کار انجام شده توسط نیروهای خارجی که شامل نیروهای جرمی $\bar{F}_{Bx},\bar{F}_{By},\bar{F}_{Bz}$ و نیروهای سطحی $\bar{F}_{Tx},\bar{F}_{Ty},\bar{F}_{Tz}$ است، را بیان می کنند. علامت بار نیز نشان دهنده مشخص بودن مقادیر پارامترها است.

انرژی کرنشی را می‌توان بر حسب روابط ارائه شده بصورت زیر نوشت:

$$\chi(u,v,w) = \int \{\sigma\}^T d\{\varepsilon\} = \int \{\varepsilon\}^T [C] d\{\varepsilon\} = \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T [C]\{\varepsilon\}$$
$$\pi = \frac{1}{2}\iiint_V \left(\{\varepsilon\}^T [C]\{\varepsilon\} - 2\{U\}^T \{\bar{F}_B\}\right)dV - \iint_{S_1}\{U\}^T \{\bar{F}_T\}dS_1$$

۳-۱۱

که در آن:

$$\{U\}^T = \{u \quad v \quad w\}$$
$$\{\bar{F}_B\}^T = \{\bar{F}_{Bx} \quad \bar{F}_{By} \quad \bar{F}_{Bz}\}$$
$$\{\bar{F}_T\}^T = \{\bar{F}_{Tx} \quad \bar{F}_{Ty} \quad \bar{F}_{Tz}\}$$

در روش انرژی مانند روش قبلی (باقیمانده وزنی) شروع حل با استفاده از حدس توابع آزمایشی می باشد، سپس با جایگذاری توابع آزمایشی در فرم انرژی پتانسیل کل سیستم (تابع فانکشنال π) سعی در یافتن ضرایب مجهول آن توابع خواهیم داشت. در فصل دوم توضیح داده شد که بر اساس قضیه مینیمم انرژی پتانسیل، واریاسیون اول تابع انرژی پتانسیل کل (پایا کردن) معادل با پائینترین سطح انرژی یک سیستم مکانیکی می‌باشد و منجر به یافتن معادله تعادل و شرایط مرزی مربوطه می‌گردد.

۳-۳-۱-۱ روش رایلی-ریتز

اکنون روش رایلی-ریتز را برای محاسبه جواب تقریبی بر اساس قضیه انرژی پتانسیل به کار می گیریم. یکی از روش های یافتن ضرایب تغییر مکان روش رایلی-ریتز می باشد. در فصل قبل نشان دادیم که در وایاسیونهای متفاوت برای تغییرمکان های کوچک انرژی پتانسیل کل باید پایا گردد (واریاسیون اول یا قانون انرژی پتانسیل پایا[1]). در روش رایلی-ریتز واریاسیون در میدان تغییرمکان با تغییرات کوچک در ضرایب C_i رخ می دهد. در نتیجه این روش شامل مراحل زیر است:

گام ۱: *فرض یک میدان جابه جایی.* این میدان می تواند به صورت زیر بیان شود:

$$\phi(x)+\sum_{i=1}^{n} C_i N_i \qquad ۱۲-۳$$

که در آن:

N_i تابع شکل

C_iها ضرایب مجهول تابع تغییرمکان هستند.

میدان جابه جایی فرض شده در بالا باید شرایط **ضروری** مساله را ارضا نماید.

گام ۲: *محاسبه انرژی پتانسیل کل.* برای سیستم مورد نظر، پتانسیل کل بر اساس میدان جابه جایی فرض شده در گام قبل محاسبه می شود.

[1] Principle of Stationary Total Potential (PSTP)

گام ۳: *تنظیم و حل سیستم معادلات.* برای سیستم مورد نظر، انرژی پتانسیل کل بر اساس میدان جابه جایی فرض شده در گام قبل محاسبه می شود. با در نظر گرفتن تغییرمکان های کوچک انرژی پتانسیل کل باید پایا گردد (واریاسیون اول یا قانون انرژی پتانسیل پایا[1]). در مطالعه ما واریاسیون در میدان تغییرمکان با تغییرات کوچک در ضرایب C_i رخ می دهد، در نتیجه داریم:

$$\frac{\partial \Pi_T}{\partial C_i} = 0 \qquad i = 1, 2, ..., n$$

۱۳-۳

رابطه بالا در واقع ضرایب نامعین را تعیین می کند.

$\Pi_T =$ پتانسیل نیروهای خارجی V + انرژی کرنشی داخلی در سازه U

اگر δ تغیرمکان کلی را بیان کند داریم:

$$\frac{d\Pi_T}{d\delta} = 0$$

۱۴-۳

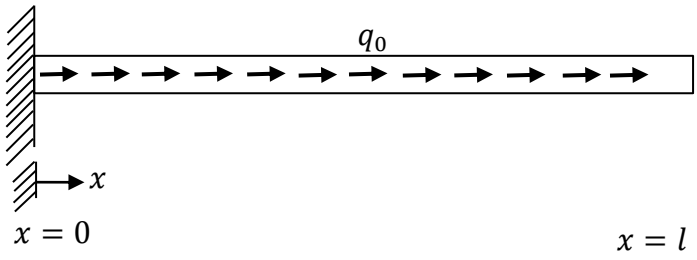
بنابراین برای یک سازه با چندین درجه آزادی $(\delta_1, \delta_2, \delta_3, ..., \delta_n)$ نیز داریم:

$$\frac{d\Pi_T}{d\delta_i} = 0 \qquad i = 1, 2, ..., n$$

۱۵-۳

[1] Principle of Stationary Total Potential (PSTP)

مثال۳-۱۷ *میله تحت بار یکنواخت*زیر را که در انتهای سمت چپ خود دارای تکیه گاه است و در انتهای سمت راست نیز آزاد است را در نظر بگیرید.



شکل ۳-۱۸ *میله تحت بار یکنواخت*

معادله دیفرانسیل حاکم بر مساله عبارت است از:

$$AE\frac{d^2u}{dx^2}+q=0$$

شرایط مرزی نیز عبارتند از:

$$u(0)=0$$
$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=L}=0$$

ما در قسمت های قبلی از روش گالرکین مساله را حل نمودیم، اکنون می خواهیم از روش رایلی-ریتز به حل مساله بپردازیم.

برای تغییرمکان کلی به شکل $u(x)$ داریم:

انرژی کرنشی ذخیره شده در میله: $U=\int_0^L\left[\frac{1}{2}AE(\frac{du}{dx})^2\right]dx$

پتانسیل نیروهای خارجی: $P=-\int_0^L q_0 u dx-P_L u(L)$

ترم دوم در عبارت پتانسیل خارجی، به علت نیروی متمرکز خارجی در سمت راست میله است که در حالت کلی می تواند وجود داشته باشد که در مساله ما برابر صفر است (اعمال شرط مرزی نیرویی) و داریم:

$$P = -\int_0^L q_0 u dx$$

پس باید به دنبال تابع $u(x)$ باشیم که شرایط مرزی ضروری را ارضا نماید $(u(0)=0)$ و سبب مینیمم شدن تابع پتانسیل زیر می شود:

$$\Pi_T = \int_0^L \left[\frac{1}{2} AE(\frac{du}{dx})^2 - q_0 u \right] dx$$

باید توجه شود که شرط مرزی طبیعی $(\frac{du(L)}{dx}=0)$ در داخل تابع پتانسیل بالا در نظر گرفته شده است و تنها باید ارضا شدن شرط مرزی ضروری مد نظر باشد. و این موضوع سبب گردید تا شرایط پیوستگی برای تابع (تنها یک بار مشتق پذیر بودن) در مقایسه با فرم معادله دیفرانسیل کاهش یابد. اکنون با استفاده از روش رایلی-ریتز مساله را حل می کنیم.

قدم۱: یک میدان برای تغییرمکان به صورت زیر فرض می کنیم:

$$u(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

حال شرط مرزی ضروری را روی آن اعمال می کنیم:

$$u(0) = 0 \qquad \rightarrow \qquad u(x) = c_1 x + c_2 x^2$$

قدم۲: تابع پتانسیل کل را محاسبه می کنیم:

$$\Pi_T = \int_0^L \left[\frac{1}{2} AE(\frac{du}{dx})^2 - q_0 u \right] dx$$

$$\Pi_T = \int_0^L \left[\frac{1}{2} AE(c_1 + 2c_2 x)^2 - q_0 (c_1 x + c_2 x^2) \right] dx$$
$$= \frac{AE}{2}[c_1{}^2 L + \frac{4c_2^2}{3L^3} + 2c_1 c_2 L^2] - q_0 \frac{c_1 L^2}{2} - q_0 \frac{c_2 L^3}{3}$$

گام ۳: تنظیم و حل سیستم معادلات. با استفاده از اصل انرژی پتانسیل داریم:

$$\frac{\partial \Pi_T}{\partial c_i} = 0 \qquad i = 1, 2$$

$$\frac{\partial \Pi_T}{\partial c_1}=0 \qquad \rightarrow \qquad =\frac{AE}{2}[2c_1\ L+2c_2L^2]-\frac{q_0L^2}{2}=0$$

$$\frac{\partial \Pi_T}{\partial c_2}=0 \qquad \rightarrow \qquad =\frac{AE}{2}[\frac{8c_2L^3}{3}+2c_1L^2]-\frac{q_0L^3}{3}=0$$

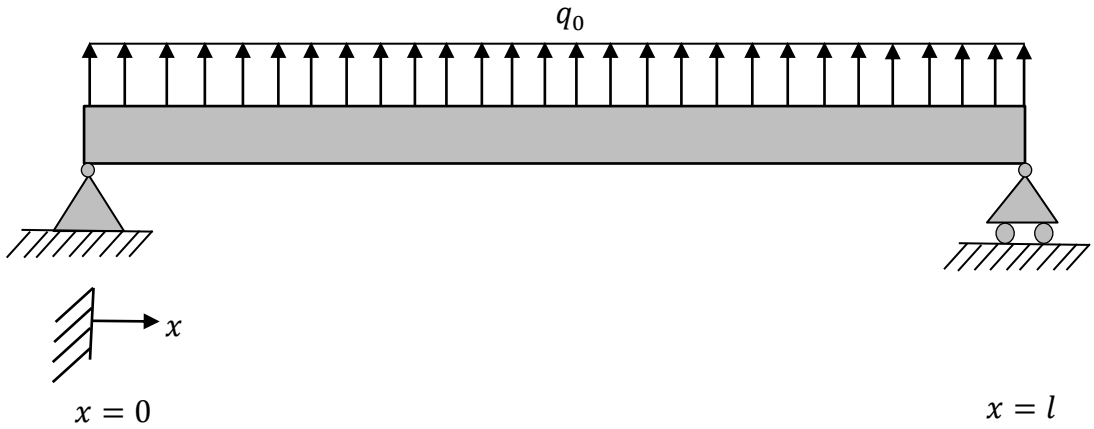
با حل معادلات ضرایب نامعین (c_1,c_2) به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$c_1=\frac{q_0L}{AE} \qquad , \qquad c_2=-\frac{q_0}{2AE}$$

پس تابع جواب به صورت زیر در خواهد آمد:

$$u(x)=\frac{q_0}{2AE}(2Lx-x^2)$$

مثال۳-۱۸ برای تیر دو سر ساده تحت بار گسترده یکنواخت تابع تغییر شکل $v(x)$ را پیدا کنید.



شکل ۳-۱۹ تیر دو سر ساده تحت بار گسترده یکنواخت

انرژی کرنشی ذخیره شده در تیر:

$$U=\int_0^L\left[\frac{1}{2}EI\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2\right]\,dx$$

پتانسیل نیروهای خارجی:

$$P = -\int_0^L q_0 v dx$$

پس پتانسیل کل به صورت زیر در می آید:

$$\Pi_T = \int_0^L \left[\frac{1}{2} EI \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 - q_0 v \right] dx$$

قدم۱: میدان تغییرمکان به صورت زیر فرض می شود:

$$u(x) = c_1 \sin(\frac{x\pi}{L})$$

این تابع شرایط مرزی ضروری را نیز می کند. $\left(u(0) = u(L) = 0\right)$

قدم۲: تابع پتانسیل کل عبارت است از:

$$\Pi_T = \int_0^L \left[\frac{EI}{2} \left(-c_1 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \sin(\frac{x\pi}{L}) \right)^2 - q_0 c_1 \sin(\frac{x\pi}{L}) \right] dx$$
$$= \frac{\pi^4 EI}{4L^3} c_1^{\,2} - \frac{2q_0 L}{\pi} c_1$$

قدم ۳: تنظیم و حل سیستم معادلات. با استفاده از اصل انرژی پتانسیل داریم:

$$\frac{\partial \Pi_T}{\partial c_1} = 0$$

$$\frac{\pi^4 EI}{2L^3} c_1 - \frac{2q_0 L}{\pi} = 0$$

با حل معادله بالا ضریب نامعین (c_1)به صورت زیر محاسبه می شود:

$$c_1 = 0.01307 \frac{q_0 L^4}{EI}$$

بنابراین تابع جواب به شکل زیر است:

$$u(x) = 0.01307 \frac{q_0 L^4}{EI} \sin(\frac{x\pi}{L})$$

مشاهده می شود که جواب بالا با جواب بدست آمده از روش گالرکین که قبلا محاسبه شد یکی است. در روش گالرکین بیان باقیمانده وزنی اصلی تنها معادل با معادله دیفرانسیل است و بنابراین نیاز است تا تابع امتحانی تمام شرایط مرزی ضروری و طبیعی را ارضا نماید. اما روش انرژی (رایلی-ریتز) بر مبنای یک فانکشنال کار می کند که در صورت وجود نیروهای خارجی اثر آن ها در داخل ترم پتانسیل نیروهای خارجی این فانکشنال دیده می شود و تنها در این روش باید ارضای شرایط مرزی ضروری را در نظر گرفت. در حالت کلی اگر هر دو بیان معادله دیفرانسیل و فرم فانکشنال برای یک مساله موجود باشند، آنگاه روش گالرکین و روش رایلی-ریتز نتایج یکسانی را نتیجه خواهند داد هرگاه مساله تنها دارای شرایط مرزی ضروری باشد و توابع شکل یکسانی نیز استفاده شده باشند.

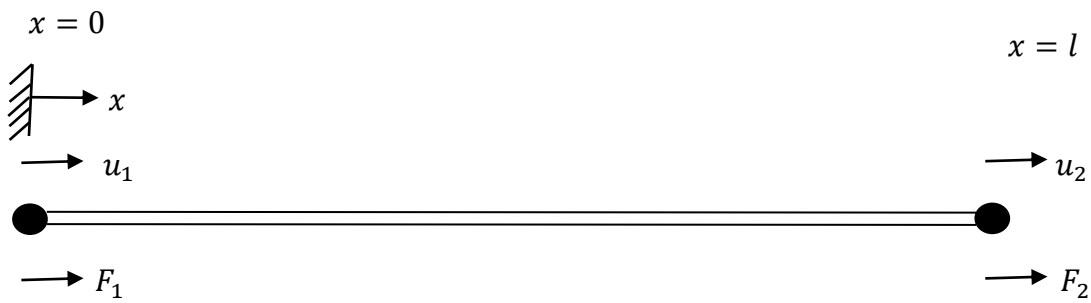
۳-۳-۲ توابع امتحانی تکه ای پیوسته-روش اجزا محدود

تا اینجا ما تنها از یک تابع پیوسته که در سرتاسر قلمرو حل معتبر بود استفاده کردیم. هنگامیکه ماهیت روش انرژی پتانسیل(رایلی-ریتز) را در نظر می گیریم، مشاهده می کنیم که فرض یک تابع امتحانی و تلاش برای نزدیک کردن این تابع تا حد امکان به جواب واقعی در واقع همان فرایند *برازش منحنی* است که قبلا نیز در مورد آن بحث شد. به سادگی مشخص است که فرایند برازش منحنی با افزایش تعداد قطعه ها (پاره خط ها) دقیق تر می گردد؛ ما نیز از این خاصیت استفاده کرده و با تعریف توابع تکه ای پیوسته که در سرتاسر قلمرو حل اعتبار دارند، به جای یک تابع تنها، از این مزیت استفاده می کنیم. اکنون ما بر روی تکنیکی که منجر به فرمول بندی معادلات اجزا محدود از روی اصل واریاسیون می گردد، بحث می کنیم. یادآوری می شود که برای محاسبه انرژی پتانسیل کل (Π_T) باید بر روی کل ناحیه حل انتگرال می گرفتیم. حال که از توابع تکه ای پیوسته استفاده کردیم می توانیم این انتگرال را بر روی هر زیرناحیه محاسبه نماییم و با جمع زدن در واقع محاسبات را روی کل قلمرو حل گسترش دهیم.

اکنون برای تشریح بهتر موضوع، مساله میله یک بعدی که در قسمت قبل بررسی شد را در نظر می گیریم و در انتها به همان نتایج می رسیم.

۳-۳-۲-۱ فرمول بندی المان میله ای بر مبنای پایا شدن یک فانکشنال

یک المان میله ای معمول دو گره ای با درجه آزادی تغییرمکان محوری u در هر گره را مطابق با شکل زیر در نظر می گیریم:



شکل ۳-۲۰ فرمول‌بندی المان میله‌ای

تابع درون یابی را مانند فصل قبل به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)u_1 + \left(\frac{x}{l}\right)u_2$$

انرژی کرنشی ذخیره شده در داخل المان عبارت است از:

$$U^e = \int_0^l \left[\frac{AE}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right] dx = \frac{AE}{2}\left(\frac{u_2 - u_1}{l}\right)^2$$

در حالتیکه نیروهای گسترده و نیروهای متمرکز خارجی بر میله اثر کنند نیز پتانسیل نیروهای خارجی در المان برابر است با:

$$P^e = -\int_0^L q_0 u dx - F_1 u_1 - F_2 u_2$$

در این مساله نیز که بار گسترده ثابت است داریم:

$$P^e = -\frac{q_0 l}{2}(u_1 + u_2) - F_1 u_1 - F_2 u_2$$

پتانسیل کل در داخل المان نیز عبارت است از:

$$\Pi_T^e = U^e + P^e = \frac{AE}{2}\left(\frac{u_2 - u_1}{l}\right)^2 - \frac{q_0 l}{2}(u_1 + u_2) - F_1 u_1 - F_2 u_2$$

۱۶-۳

برای رسیدن به پتانسیل کل سازه باید مجموع پتانسیل کل را برای هر المان محاسبه نماییم.

$$\Pi_T = \sum_{i=1}^{n} \Pi_T^e$$

۱۷-۳

با استفاده از اصل پایا شدن انرژی پتانسیل کل و با فرض تغییرات کوچک تغییرمکان داریم:

$$\frac{\partial \Pi_T}{\partial u_i} = 0 \qquad i = 1, 2, ..., n$$

۱۸-۳

پس از بکارگیری رابطه بالا در رابطه ۳-۱۶، معادلات جبری خطی بر حسب درجات آزادی گره ای بدست می آیند، که می توان آن ها را در فرم $[k]\{\delta\} = \{F\}$ بیان کرد. سهم هر المان در این سیستم معادلات کلی با استفاده از رابطه ۳-۱۷ برای انرژی پتانسیل یک المان یعنی معادله ۳-۱۵ بدست میآید. بدین‌ترتیب داریم:

$$\frac{\partial \Pi_T^e}{\partial u_1} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{AE}{l}\left(\frac{u_1 - u_2}{l}\right) = \frac{q_0 l}{2} + F_1$$

$$\frac{\partial \Pi_T^e}{\partial u_2} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{AE}{l}\left(\frac{u_2 - u_1}{l}\right) = \frac{q_0 l}{2} + F_2$$

در فرم ماتریسی معادلات به صورت زیر در می آیند:

$$\frac{AE}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_0 l / 2 \\ q_0 l / 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

ملاحظه می شود که این همان نتیجه بدست آمده از فرم ضعیف روش باقیمانده وزنی است که از یک معادله دیفرانسیل حاکم بر مساله شروع می شد. (توجه شود که علامت مثبت F_1 با $-P_0$ در آن جا یکی است) فرایند اسمبل کردن المان ها نیز دقیقا به همان صورتی است که قبلا ذکر شد.

۳-۴ روش کلی برای تحلیل اجزا محدود

روش کلی برای تحلیل اجزا محدود به صورت زیر می‌باشد:

گام ۱

- با استفاده از معادله دیفرانسیل مساله، فرم باقیمانده ضعیف را می نویسیم. با به کارگیری انتگرال گیری جز به جز به تعداد کافی فرم ضعیف معادله دیفرانسیل را بدست می آوریم. فرم ضعیف را برای مجموع n المان بازنویسی می کنیم.

  و یا:

- فرم فانکشنال را برای مجموع n المان می نویسیم.

گام ۲

- نوع المان ها را تعریف می کنیم (هندسه، تعداد گره و درجات آزادی)
- توابع شکل یا درون یابی را بدست می آوریم.

گام ۳

- معادلات سطح المان را به وسیله جایگزینی این توابع شکل در داخل فرم ضعیف یا شکل فانکشنال مساله محاسبه می کنیم.

گام ۴

- قلمرو حل مساله را به المان هایی تقسیم می کنیم و برای این مش بندی معادلات سیستم را به وسیله اسمبل کردن معادلات سطح المان بدست می آوریم.

گام ۵

- شرایط مرزی معلوم را در معادلات جایگزین کرده و به محاسبه مجهولات می پردازیم.

مسائل نمونه

۱- معادله پواسون حاکم بر مسائل انتقال حرارت در یک ناحیه مربع تحت شرایط مرزی زیر داده شده است:

$$-k\nabla^2 T = c_0$$
$$T = 0 \;\; on\ sides \quad x = 1 \quad and \quad y = 1$$
$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad insulated\ on\ sides \quad x = 0 \quad and \quad y = 0$$

الف) این مسئله را با استفاده از تقریب یک پارامتری در روش گالرکین حل کنید.

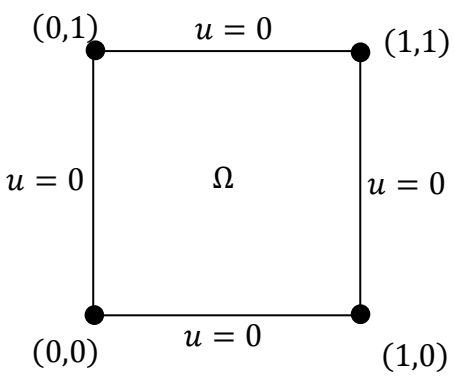
راهنمائی: از تابع حدس زیر استفاده نمائید:

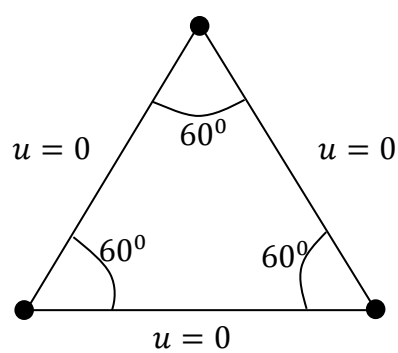
$$T(x, y) = c_1(1 - x^2)(1 - y^2)$$

ب) این مسئله را با استفاده از فرم ضعیف شده حل نمائید.

۲- ا با استفاده از تقریب یک پارامتری در روش گالرکین مسئله زیر را در ناحیه مربعی واحد و مثلثی واحد، حل کنید.

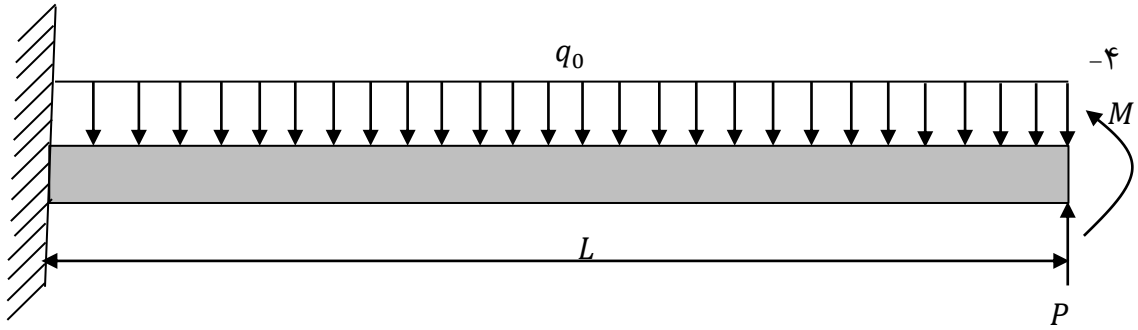
$$-\nabla^2 u = 1\, on\ unit\ square$$
$$u = 0 \;\; on\ sides$$





فقط مسئله مربع را به هردو روش الف) با استفاده از تابع تقریبی مثلثاتی و ب) با استفاده از تابع تقریبی جبری حل نمائید.

۳- فرم ضعیف مسئله زیر را یافته و سپس مسئله را حل نمائید.



$$EI\frac{d^4v}{dx^4} - q = 0$$

تحت شرایط مرزی زیر:

$$v(0) = 0 \ (\text{ضروری}) \qquad \& \qquad EI\ \frac{d^3v}{dx^3}(L) = P \ (\text{طبیعی})$$

$$\frac{dv}{dx}(0) = 0 \ (\text{ضروری}) \qquad \& \qquad EI\ \frac{d^2v}{dx^2}(L) = M \ (\text{طبیعی}) \qquad (EI = cte)$$

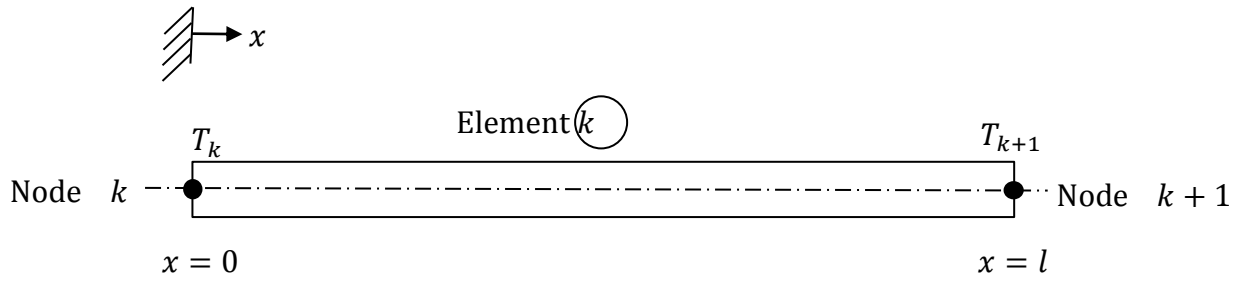
۴- معادله دیفرانسیل حاکم بر مساله انتقال حرارت یک بعدی با یک منبع حرارتی ثابت در حالت دائمی توسط معادله زیر بیان می گردد.

$$K\frac{d^2T}{dX^2} + q_0 = 0$$

که در آن K ضریب هدایت حرارتی مصالح است و فرض ما بر این است که با دما تغییر نمی کند و دما را مشخص کرده و q_0 نیز حرارت داخلی منبع در واحد حجم را بیان می کند.

الف- فرم ضعیف (weak form) معادله حاکم بر مساله را بدست آورید.

ب- ثابت کنید معادلات سطح المان برای المان نشان داده شده در شکل زیر به صورت ذیل است:



$$\frac{K}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} T_k \\ T_{k+1} \end{Bmatrix} = (q_0)\begin{Bmatrix} l/2 \\ l/2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -Q_0 \\ Q_l \end{Bmatrix}$$

که در آن ماتریس سمت چپ ماتریس هدایت المان نامیده می شود و اولین بردار سمت راست شار حرارتی معادل گره ای را نشان می دهد آخرین بردار سمت راست نیز شار حرارتی خالص در گره ها را نشان می دهد (شرایط مرزی طبیعی بر روی آن اعمال می شود).

۵- برای تیر یکسر گیردار به طول L تحت بار کسترده q_0 ثابت و با تابع زیر از روش انرژی حل نمائید.

$$v(x) = c_1(1-\cos(\frac{\pi x}{2L}))$$