

فصل ۷

روش اجزا محدود برای مسائل الاستیسیته صفحه ای

۷-۱- مقدمه ای بر الاستیسیته صفحه ای

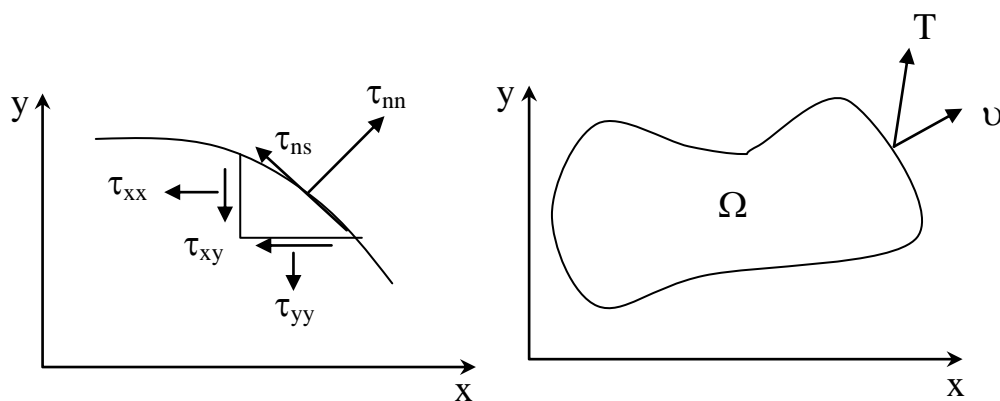
در این مقدمه دوباره روابط الاستیسیته را که در فصول قبلی بیان شد، جهت استفاده برای توسعه المانهای جدید که در حالت کلی میتوانند دارای وجوه منحنی هم باشند، ارائه میگردد. ما با سه دسته از معادلات در الاستیسیته صفحه ای به صورت زیر آشنا شدیم:

$$\tau_{ij,j} = f_i \quad \text{روابط تعادل}$$

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{روابط تنش-کرنش}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{روابط کرنش-تغییر مکان}$$

برای حل یک مساله در الاستیسیته صفحه ای، معادلات بالا باید بر روی ناحیه دوبعدی Ω همراه با شرایط مرزی مساله ارضا شوند.



۷-۱ مسائل الاستیسیته صفحه ای در ناحیه دوبعدی Ω

در این حالت ما با سه نوع شرط مرزی مواجه هستیم:

۱- شرایط مرزی همگن:

$$\tau_{ij} \nu_j = 0 \quad \text{on } S_F$$

$$u_i = 0 \quad \text{on } S_D$$

که در آن:

ν_j = مولفه های بردار یکه عمود بر مرز

S_F = مرز بدون تنش

S_D = قسمتی از مرز که جابه جایی ها برابر صفر هستند

۲- شرایط مرزی همگن مخلوط (میکس شده):

$$\begin{aligned}\tau_{ij} \nu_j &= 0 & \text{on } S_F \\ u_i &= 0 & \text{on } S_D \\ \tau_{ij} \nu_j + \alpha_{ij} u_i &= 0 & \text{on } S_M\end{aligned}$$

α_{ij} = ثابت هایی نظیر سختی فنر

S_M = قسمت هایی از مرز که شرایط میکس روی آن تعریف شده اند (مانند فنرها و یا تکیه گاه های الاستیک)

۳- شرایط مرزی غیر همگن:

$$\begin{aligned}\tau_{ij} \nu_j &= \bar{T}_i & \text{on } S_T \\ u_i &= \bar{u}_i & \text{on } S_D \\ \tau_{ij} \nu_j + \alpha_{ij} u_i &= \bar{C}_i & \text{on } S_M\end{aligned}$$

علامت بار نشان دهنده مقادیر مشخص کمیت ها است.

حال اگر شرایط مرزی را برای یک مسئله خاص به صورت زیر فرض کنیم:

$$\begin{aligned}\tau_{ij} \nu_j &= \bar{T}_i & \text{on } S_T \\ u_i &= 0 & \text{on } S_u \\ \tau_{ij} \nu_j + \alpha_{ij} u_i &= 0 & \text{on } S_M\end{aligned}$$

انرژی پتانسیل برای این مسئله با شرایط مرزی بالا عبارت است از: (t = ضخامت):

$$\pi = t \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} \tau_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} f_i u_i d\Omega - \int_{S_T} \bar{T}_i u_i dS + \frac{1}{2} \int_{S_M} \alpha u_i u_i dS \right] \quad ۱-۷$$

انتگرال آخر اثر فنر در مرزهای المانها را نشان می دهد. اگر بر روی مرزها فنر وجود داشته باشد، اثر فنرهای روی مرز باید با اضافه کردن یک ترم به انرژی کرنشی در نظر گرفته می شود.

تابع انرژی کرنشی \mathbf{U} در فصول قبل مورد بررسی قرار گرفت و فرم تانسوری آن نیز در حالت کلی بیان شد. در مسائل الاستیسیته دوبعدی و هنگامیکه t ثابت باشد، برای متغیر مستقل \mathbf{x} و \mathbf{y} و متغیرهای وابسته \mathbf{u} و \mathbf{v} داریم:

$$U = \frac{1}{2} t \iint_{\Omega} (\tau_{xx} \varepsilon_{xx} + \tau_{yy} \varepsilon_{yy} + \gamma_{xy} \varepsilon_{xy}) dx dy$$

به کمک روابط تنش-کرنش، تنش ها را بر حسب کرنش ها در حالت تنش مسطحه بیان می کنیم:

$$U = \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \iint_{\Omega} \left(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + 2\nu \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy}^2 \right) dx dy$$

کرنش ها را نیز بر حسب تغییرمکان ها می نویسیم:

$$U = \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \iint_{\Omega} \left(u_x^2 + v_y^2 + 2\nu u_x v_y + \frac{1-\nu}{2} (u_y + v_x)^2 \right) dx dy$$

رابطه بالا برای حالت تنش مسطحه بدست آمد، حال اگر بخواهیم رابطه را در حالت کرنش مسطحه داشته باشیم لازم به تکرار محاسبات نیست و با تبدیل ساده گفته شده در بالا می توان این کار را صورت داد.

لازم به ذکر است که از فرم تابع انرژی پتانسیل می شود دریافت که مسئله الاستیسیته صفحه ای از نوع C^0 می باشد. با این آشنائی از قبل به سراغ المانها در حالت کلی در الاستیسیته صفحه ای می رویم.

۷-۲ روابط کینماتیک برای تحلیل اجزا محدود مسائل تنش مسطحه و کرنش مسطحه

روابط کینماتیک برای تحلیل اجزا محدود مسائل تنش مسطحه و کرنش مسطحه روابط اساسی هستند. لذا با مرور دوباره روابط فصول قبل سعی در یادآوری این روابط برای استفاده در روش اجزاء محدود داریم.

با توجه به تعریف کرنش داریم:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad \{\varepsilon\} = [L]\{U\}$$

که در آن $[L]$ ماتریس اپراتور خطی است. تنش ها

نیز توسط ماتریس الاستیسیته $[D]$ که قبلا بدست آمد به تنش ها مربوط می شوند. دقت داریم که این ماتریس برای حالات تنش مسطحه و کرنش مسطحه متفاوت است.

$$\{\tau\} = [C]\{\varepsilon\}$$

حال اگر توابع تغییرمکان در داخل هر المان به صورت زیر تقریب زده شوند:

$$u(x, y) = \varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + \dots + \varphi_n u_n$$

$$v(x, y) = \varphi_1 v_1 + \varphi_2 v_2 + \dots + \varphi_n v_n$$

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi_n & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \varphi_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix}$$

$$\{U\} = [C] \{\delta^e\}$$

$$\{\varepsilon\} = [L][C] \{\delta^e\}$$

$$\{\tau\} = [C] \{\varepsilon\} = [C][L][C] \{\delta^e\}$$

$$\{\tau\}^T = ([C] \{\varepsilon\})^T = \{\delta^e\}^T ([L][C])^T [C] \quad \text{note: } [C]^T = [C]$$

معادلات کسب شده در قبل را در داخل رابطه انرژی کرنشی جایگزین کرده و انرژی کرنشی را برای یک المان محاسبه می کنیم:

$$U_e = \frac{t}{2} \iint_{\Omega^e} [\{\delta^e\}^T ([L][C])^T [C]] [[L][C] \{\delta^e\}] d\Omega^e$$

تعریف می کنیم:

$$[B] = [L][C]$$

پس خواهیم داشت:

$$U_e = \frac{t}{2} \{\delta^e\}^T \iint_{\Omega^e} [B]^T [C] [B] d\Omega^e \{\delta^e\}$$

دقت داریم که $\{\delta^e\}$ مستقل از x, y است.

در این جا فرض می شود که شرایط مرزی همگن هستند، پس دو انتگرال آخری در رابطه ۷-۱ وجود نخواهند داشت. ترم مربوط به نیروهای جرمی نیز عبارت است از:

$$\int_{\Omega^e} \{\bar{f}\}^T \{U\} d\Omega^e = t \int_{\Omega^e} \{U\}^T \{\bar{f}\} d\Omega^e$$

که در آن:

$$\{\bar{f}\} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_x \\ \bar{f}_y \end{Bmatrix}$$

پس داریم:

$$t \int_{\Omega^e} \{U\}^T \{\bar{f}\} d\Omega^e = t \{\delta^e\}^T \int_{\Omega^e} [\varphi]^T \begin{Bmatrix} \bar{f}_x \\ \bar{f}_y \end{Bmatrix} d\Omega^e = W^e$$

رابطه بالا در واقع کار انجام شده توسط نیروهای بدنی یا همان انرژی پتانسیل ناشی از آن ها است.
حال می توان انرژی پتانسیل کل المان را به صورت زیر بیان کرد:

$$\pi_e = \frac{t}{2} \{\delta^e\}^T \iint_{\Omega^e} [B]^T [C] [B] d\Omega^e \{\delta^e\} - t \{\delta^e\}^T \int_{\Omega^e} [\varphi]^T \{\bar{f}\} d\Omega^e$$

به کمک حساب تغییرات:

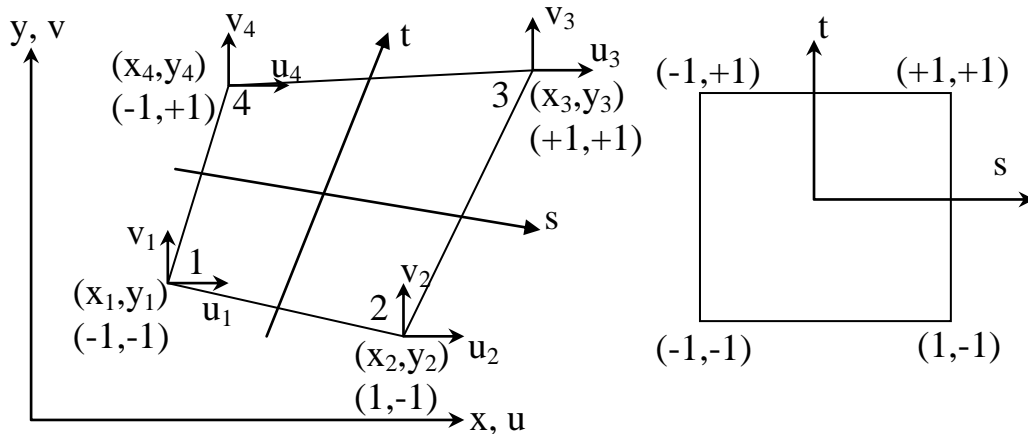
$$\delta \pi_e = \delta \{\delta^e\}^T \left[\left(t \iint_{\Omega^e} [B]^T [C] [B] d\Omega^e \right) \{\delta^e\} - \left(t \int_{\Omega^e} [\varphi]^T \{\bar{f}\} d\Omega^e \right) \right]$$

$$\boxed{[K^e] \{\delta^e\} - \{\bar{F}_e\} = 0}$$

در این قسمت پروسه کلی برای توسعه المانهای ایزوپارامتری در محیط تنش و یا کرنش مسطح را قدم به قدم توضیح می دهیم.

۷-۳-۱ المان های چهار ضلعی چهار گره ای ایزوپارامتری

شکل زیر یک المان چهار ضلعی را به همراه المان اصلی نشان می دهد.



المان واپیچیده (خمیده)

المان اصلی (مادر)

شکل ۷-۲ المان های چهار ضلعی ایزو پارامتریک

توابع شکل را در مختصات محلی بر حسب s, t میتوان به صورت زیر نوشت:

$$N_1 = (1-s)(1-t)/4 \quad -1 \leq s \leq +1 \quad -1 \leq t \leq +1$$

$$N_2 = (1+s)(1-t)/4$$

$$N_3 = (1+s)(1+t)/4$$

$$N_4 = (1-s)(1+t)/4$$

تبدیل مختصات را هم می توان بصورت زیر نوشت:

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^4 N_i y_i$$

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i$$

$$v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i$$

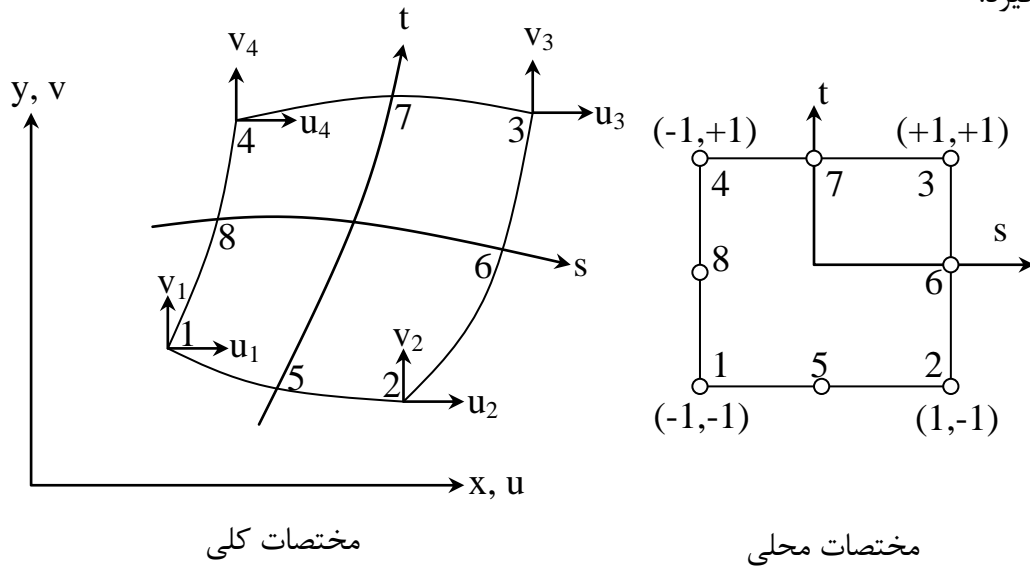
تقریب تغییر مکان ها را برای متغیرهای وابسته بصورت زیر نوشت:

که در آن u_i, v_i درجات آزادی گره i در سیستم مختصات کلی x, y هستند. می توان دریافت که این المان، المان ایزوپارامتریک است.

توجه شود که x, y توابع خطی بر حسب s, t توجه شود که لبه های مستقیم مختصات محلی در المان مادر و در المان خمیده پس از تبدیل این لبه ها همچنان مستقیم باقی می ماند. با این تبدیلات می توان به سراغ ایجاد این المان رفت. پروسه ایجاد المان کلی می باشد و می توان برای همه نوع المان این پروسه را بکار برد. این پروسه را بطور کامل برای المان بعدی خواهیم آورد.

۷-۳-۲ المان های چهار ضلعی هشت گره ای پارامتری (الاستیسیته صفحه ای)

در این جا یک بحث دقیق برای این المان های هشت گره ای بر روی المان های ایزوپارامتریک صورت می گیرد.



s, t در اینجا مختصه های خمیده هستند

شکل ۷-۳ المان های چهار ضلعی هشت گره ای پارامتری

توابع شکل در مختصات محلی برای المان هشت گره ای عبارتند از:

$$N_1 = -(1-s)(1-t)(1+s+t) / 4$$

$$N_5 = (1-s^2)(1-t) / 2$$

$$N_2 = -(1+s)(1-t)(1-s+t) / 4$$

$$N_6 = (1-t^2)(1+s) / 2$$

$$N_3 = -(1+s)(1+t)(1-s-t) / 4$$

$$N_7 = (1-s^2)(1+t) / 2$$

$$N_4 = -(1-s)(1+t)(1+s-t) / 4$$

$$N_8 = (1-t^2)(1-s) / 2$$

با انتخاب تبدیل مختصات زیر:

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i x_i = f(s, t)$$

$$y = \sum_{i=1}^8 N_i y_i = g(s, t)$$

تغییر مکان ها نیز از روابط زیر بدست می آیند:

$$u = \sum_{i=1}^8 N_i u_i$$

$$v = \sum_{i=1}^8 N_i v_i$$

هر دو معادله بالا برای تغییرمکان ها و مختصات ها شرایط پیوستگی بخش قبل و در نتیجه معیارهای همگرایی را ارضا می نمایند.

۷-۳-۲-۱- مشخصات المان جهت محاسبه ماتریس سختی

تغییرمکان های مستقل برای المان هشت گره ای که دارای شانزده درجه آزادی می باشد را به صورت زیر بیان می نماییم:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ . \\ . \\ u_8 \\ v_8 \end{Bmatrix}$$

$$\{U\} = [N]\{\delta\} \quad \{U\}^T = [u \quad v] \quad \{\delta\}^T = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad . \quad . \quad u_8 \quad v_8]$$

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\} \quad [B] = [L][N]$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & . & . & . \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & . & . & . \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & . & . & . \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ . \\ . \\ u_8 \\ v_8 \end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\}_{3 \times 1} = [B]_{3 \times 16} \{\delta\}_{16 \times 1}$$

اما N_i ها تابعی از s, t و همچنین x, y نیز تابعی از s, t هستند پس به کمک قاعده زنجیره ای داریم:

$$\frac{\partial N_i}{\partial s} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial s} \\ \frac{\partial N_i}{\partial t} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

ماتریس $[J]$ ماتریس ژاکوبین نامیده می شود و می تواند به صورت صریح بر حسب مختصه های محلی s, t و همچنین x_i, y_i محاسبه گردد. سمت چپ معادله بالا همچنین می تواند با استفاده از توابع شکل بدست آید.

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial s} x_i \quad \frac{\partial x}{\partial t} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial t} x_i$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial s} y_i \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial t} y_i$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial N_i}{\partial s} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial s} y_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial t} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial t} y_i \end{bmatrix} =$$

$$[J]_{2 \times 8} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial s} & \frac{\partial N_2}{\partial s} & \frac{\partial N_3}{\partial s} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial N_1}{\partial t} & \frac{\partial N_2}{\partial t} & \frac{\partial N_3}{\partial t} & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ x_8 & y_8 \end{bmatrix}$$

با معکوس کردن ماتریس $[J]$ داریم:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial s} \\ \frac{\partial N_i}{\partial t} \end{Bmatrix}$$

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix} = [I]$$

و بعد خواهیم داشت:

$$\begin{array}{ll}
 \frac{\partial N_1}{\partial s} = (1-t)(2s+t)/4 & \frac{\partial N_1}{\partial t} = (1-s)(2t+s)/4 \\
 \frac{\partial N_2}{\partial s} = (1-t)(2s-t)/4 & \frac{\partial N_2}{\partial t} = (1+s)(2t-s)/4 \\
 \frac{\partial N_3}{\partial s} = (1+t)(2s+t)/4 & \frac{\partial N_3}{\partial t} = (1+s)(2t+s)/4 \\
 \frac{\partial N_4}{\partial s} = (1+t)(2s-t)/4 & \frac{\partial N_4}{\partial t} = (1-s)(2t-s)/4 \\
 \frac{\partial N_5}{\partial s} = -s(1-t) & \frac{\partial N_5}{\partial t} = -(1-s^2) \\
 \frac{\partial N_6}{\partial s} = (1-t^2)/2 & \frac{\partial N_6}{\partial t} = -t(1+s) \\
 \frac{\partial N_7}{\partial s} = -s(1+t) & \frac{\partial N_7}{\partial t} = (1-s^2)/2 \\
 \frac{\partial N_8}{\partial s} = -(1-t^2)/2 & \frac{\partial N_8}{\partial t} = -t(1-s)
 \end{array}$$

همچنین باید توجه کرد که $dx dy = \det[J] ds dt$.

توجه شود که $\det[J] = \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)}$ تبدیل مشتقات بر حسب x, y نسبت به s, t را بیان می کند.

اکنون به رابطه $\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\}$ باز می گردیم و ماتریس $[B]$ را محاسبه می کنیم.

$$\begin{Bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{i,s} \\ N_{i,t} \end{Bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} I_{11}N_{1,s} + I_{12}N_{1,t} & 0 & same & same & . & . & . \\ 0 & I_{21}N_{1,s} + I_{22}N_{1,t} & with & with & . & . & . \\ I_{21}N_{1,s} + I_{22}N_{1,t} & I_{11}N_{1,s} + I_{12}N_{1,t} & N_2 & N_2 & . & . & . \end{bmatrix}$$

تنش ها در حالت مسطحه نیز عبارتند از:

$$\{\tau\} = [C]\{\varepsilon\}$$

$$\{\tau\} = \begin{Bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\{\tau\} = [C]\{\varepsilon\} = [C][B]\{\delta\}$$

۷-۳-۲-۲- ماتریس سختی

ماتریس سختی این المان با توجه به تبدیلات بالا به صورت زیر محاسبه می شود:

$$[k]_{16 \times 16} = t \iint_A [B]^T_{16 \times 3} [C]_{3 \times 3} [B]_{3 \times 16} dx dy$$

$$dx dy = \det[J] ds dt$$

حدود انتگرال نیز با توجه به استفاده از مختصات طبیعی عبارت است از:

$$[k]_{16 \times 16} = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T_{16 \times 3} [C]_{3 \times 3} [B]_{3 \times 16} \det[J] ds dt \quad ۷-۳-۲-۲$$

مقدار $\det[J]$ $[B]^T_{16 \times 3} [C]_{3 \times 3} [B]_{3 \times 16}$ در انتگرال بالا یک تابع پیچیده از s, t است. اگرچه حدود انتگرال ساده است ولی در هنگام انتگرال گیری بر حسب s, t ممکن است با یک تابع پیچیده مواجه شویم. برای المانهای ساده (مستقیم) انتگرال گیری ماتریس سختی می تواند بصورت دقیق صورت بگیرد، ولی لزوم بحث انتگرال گیری عددی نیز در این جا مطرح می گردد.

۷-۳-۲-۳- توضیح در مورد دترمینان ماتریس J

شرایطی که در آن برای لبه های منحنی المان، نگاشت ما یک به یک است زمانی اتفاق می افتد که علامت دترمینان $[J]$ در تمام نقاط موجود در قلمرو حل یعنی صفحه s, t تغییر نکند. پیچیدگی های شدید ممکن است سبب تغییر علامت دترمینان ماتریس J شوند.

۷-۳-۲-۴- نیروهای جرمی

فرض کنید که نیروهای جرمی (جرمی) با شدت p_x, p_y در واحد حجم نیز در مساله وجود داشته باشند.

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix}$$

در الاستیسیته صفحه ای کار انجام شده توسط $\{p\}$ عبارت است از:

$$W = t \iint_A [u \quad v] \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} dA = t \iint_A \{U\}^T \{p\} dA$$

$$\{U\} = [N] \{\delta\}$$

$$W = t \iint_A \{\delta\}^T [N]^T \{p\} dA = \{\delta\}^T \{f_b\}$$

$$\{f_b\}^T = [f_{b1} \quad f_{b2} \quad f_{b3} \quad f_{b4} \quad \cdot \quad \cdot \quad f_{b16}]$$

$$\{\delta\}^T = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad u_8 \quad v_8]$$

برای بار ثقلی داریم:

$$p_x = 0$$

$$p_y = -\gamma$$

γ وزن واحد حجم مواد است.

بردار بار سازگار $\{f_b\}$ از انتگرال زیر بدست می آید:

$$\{f_b\} = t \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N]^T \{p\} \det[J] ds dt$$

برای بار های ثابت نیز خواهیم داشت:

$$\{f_b\} = t \{p\}^T \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N] \det[J] ds dt$$

جواب دقیق انتگرال بالا می تواند توسط محاسبات دستی بدست آید.

ولی هنگامیکه $\{p\}$ ثابت نیست باید ابتدا آن را به صورت زیر بر حسب مقادیر گره ای بیان کرد و سپس انتگرال گیری را انجام داد.

$$p_x = \sum_{i=1}^8 N_i p_{xi}$$

$$p_y = \sum_{i=1}^8 N_i p_{yi}$$

۷-۳-۲-۵- تنش مرزی مشخص (شرایط مرزی تنش)

کار انجام شده به وسیله تنش های مرزی عبارت است از:

$$W_T = t \int_{S_T} \bar{T}_i u_i ds$$

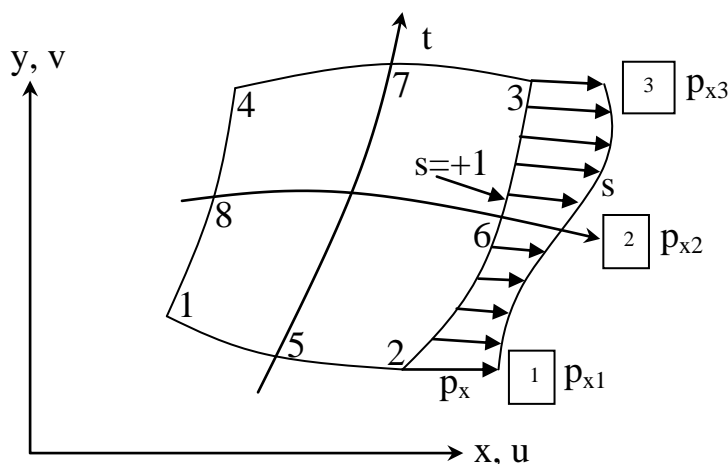
$$W_T = t \int_{S_T} \{U\}^T \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} ds = \{\delta\}^T \{f_s\}$$

در رابطه بالا $\{f_s\}$ بردار بار به علت تنش های مرزی است و p_x, p_y تنش در جهات x, y بر روی مرز را در دستگاه کلی بیان می کنند. S_T نیز قسمتی از مرز است که تنش ها در آن جا مشخص اند. بردار تغییر مکان $\{U\}$ نیز از رابطه زیر بدست می آید:

$$\{U\} = [N_s] \{\delta\}$$

$[N_s]$ نیز ماتریسی شبیه به $[N]$ که مقادیر آن بر روی مرز مورد بررسی تعریف می شود. همانطور که قبلا هم ذکر شد بردار تنش را در صورت ثابت نبودن باید بر حسب مقادیر آن بر روی گره هایی که اثر می کند بر حسب توابع شکل بیان نمود. به طور مثال در مورد شکل زیر توابع شکل مورد نیاز برای بیان تنش های افقی در مرز $s=1$ عبارتند از:

$$N_2 = -\frac{t}{2}(1-t) \quad N_6 = (1-t^2) \quad N_3 = \frac{t}{2}(1+t)$$



گره های مرزی موقتا اختصاص داده شده

i

شکل ۷-۴ تنش مرزی در وجه المان های چهار ضلعی هشت گره ای پارامتری

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_6 \\ v_6 \end{Bmatrix}$$

با تبدیل مختصات در مرز داریم:

$$\{U\} = [N^s] \{\delta^s\}$$

$$x = N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_6 x_6$$

$$y = N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_6 y_6$$

تقریب p_x برای تنش در مرز را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\bar{p}_x = N_2 p_{x1} + N_3 p_{x3} + N_6 p_{x2}$$

دیفرانسیل طول در مرز نیز عبارت است از:

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

اما باید دقت شود که x, y در معادلات بالا تابعی از t هستند (زیرا در وجه ۳-۶-۲ تنها t تغییر می‌کند) بنابراین می‌توان نوشت:

$$dS = dl = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dt$$

توجه شود که در وجه ۳-۶-۲ داریم:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{dx}{dt}$$

به همین شکل اگر بار تنش مرزی در جهت قائم علاوه بر بار تنش افقی نیز داشتیم.

$$\bar{p}_y = N_2 p_{y1} + N_3 p_{y3} + N_6 p_{y2}$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{p}_x \\ \bar{p}_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{x1} \\ p_{y1} \\ p_{x3} \\ p_{y3} \\ p_{x2} \\ p_{y2} \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{p}\} = [N^s] \{p^i\}$$

$$W_T = t \int_{-1}^{+1} \underbrace{\{\delta^s\}^T [N^s]^T [N^s] \{p^i\}}_{at\ s=+1} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dt$$

$$\{f_s\} = t \int_{-1}^{+1} \underbrace{[N^s]^T [N^s] \{p^i\}}_{at\ s=+1} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dt$$

$$\{f_s\}^T = \begin{bmatrix} f_{s3} & f_{s4} & f_{s5} & f_{s6} & f_{s11} & f_{s12} \end{bmatrix}$$

در صورت وجود بار در وجوه دیگر المان، همین فرایند می تواند برای وجوه دیگر نیز به کار برده شود. فقط باید به ثابت بودن s, t بر روی بعضی وجوه دقت نمود.

۷-۴- انتگرالگیری عددی

انتگرال گیری برای محاسبه ماتریس سختی و بردار بار ممکن است به صورت تحلیلی (حل بسته^۱) و به کمک استفاده از یک جدول انتگرال گیری صورت بگیرد. این روش ممکن است خیلی آسان نبوده و یا خیلی زمانبر باشد. روش دیگری که خصوصا در حالاتی که انتگرال شکل پیچیده ای دارد ممکن است مورد استفاده قرار بگیرد، استفاده از روش انتگرال گیری عددی است. از میان روش های موجود در انتگرال گیری عددی، روش نیوتن^۲ و روش گوس^۳ که از روش های مرسوم است را در این جا مختصرا مورد بررسی قرار می دهیم.

۷-۴-۱ روش نیوتن برای انتگرالگیری عددی

در این روش با تقسیم دامنه به فواصل مساوی و دانستن این نقاط تقسیم به عنوان داده مسئله به سراغ یافتن سطح زیر منحنی داخل انتگرال می پردازیم. برای یافتن سطح زیر انتگرال ابتدا مقادیر تابع داخل انتگرال را در نقاط تقسیمی محاسبه نموده و سپس یک منحنی از تمام این نقاط گذرانده و حاصل انتگرال را براساس این منحنی تقریبی محاسبه می نمائیم. با دانستن مقادیر تابع داخل انتگرال در n نقطه می توان یک چند جمله ای از درجه $n-1$ را تشکیل داد. این روش را روش نیوتن می نامیم.

۷-۴-۲ روش گوس برای انتگرالگیری عددی

در این روش بجای تقسیم دامنه به فواصل مساوی در ابتدا و دانستن این نقاط به عنوان داده مسئله، خود این نقاط که مقدار تابع داخل انتگرال در آنها را محاسبه می نمائیم، هم مجهول مسئله می باشند. در این روش می توان نوشت:

$$I = \int_{-1}^{+1} f(s) ds = \sum_{i=1}^n H_i f(s_i) \quad ۷-۳$$

در روابطه بالا n تعداد نقاط گوسی، H_i ثابت وزنی و s_i مختصات نقاط گوسی می باشند. برای n نقطه انتگرالگیری، ما $2n$ مجهول (H_i, s_i) داریم و بدین ترتیب یک چند جمله ای درجه $2n-1$ را می توان از همه این نقاط گذراند تا جواب دقیق انتگرال محاسبه شود. برای این چندجمله ای این روند منجر به ایجاد خطایی از مرتبه $O(\Delta^{2n})$ می گردد. در نتیجه اگر $f(s)$ یک چندجمله ای درجه $2n-1$ باشد، برای محاسبه انتگرال، حداقل n نقطه گوسی لازم است تا جواب انتگرال دقیق باشد.

¹ Closed Form

² Newton-Cotes Quadrature

³ Gauss Quadrature

روش گوس روش موثرتری و دارای دقت بیشتری در مقایسه با روش نیوتن می باشد لذا برای تعداد نقاط انتگرالگیری برابر این روش در محاسبه عددی انتگرال بصره می باشد. به همین دلیل روش گوس در محاسبه عددی انتگرال برای روش اجزاء محدود کاربرد دارد.

در خصوص تعداد نقاط انتگرالگیری در روش گوس مسلم است که کاربرد تعداد بیشتر نقاط گوسی در محاسبه عددی انتگرال سبب افزایش دقت انتگرالگیری می گردد. از طرف دیگر تعداد نقاط کم انتگرالگیری ممکن است باعث دقت ناکافی در محاسبه گردد و یا حتی انتگرالگیری را امکانپذیر نسازد. از این حالت با حالت ناپایداری نام می برند که شرح داده خواهد شد.

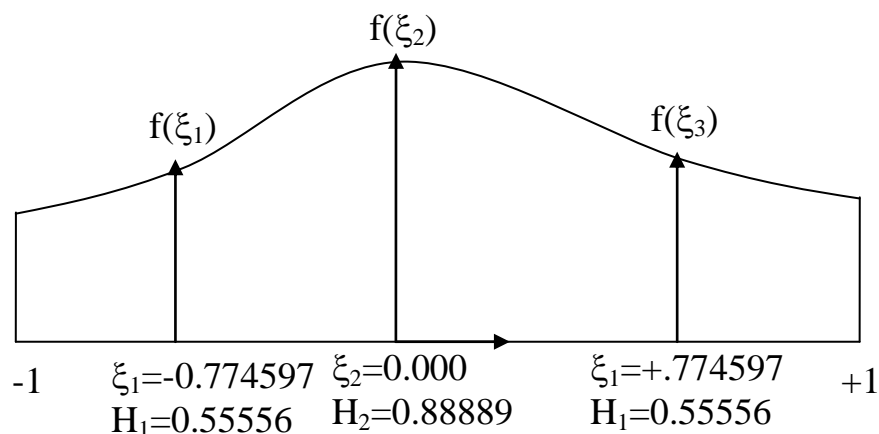
درجه تابع داخل انتگرال می تواند تعداد نقاط انتگرالگیری را معین نماید. فرض کنید که تابع داخل انتگرال از یک چندجمله ای درجه ۵ باشد که می خواهیم بصورت عددی این انتگرالگیری را انجام دهیم. مثلاً مطابق شکل زیر برای یک چندجمله ای درجه ۵ با داشتن ۳ نقطه گوسی و ثابت وزنی متناظر با

آن ها جواب دقیق حاصل خواهد داشت. یا مثلاً $\int_{-1}^1 (a+bs) ds$ با داشتن گوس تک نقطه ای به جواب

دقیق می رسد و $\int_{-1}^1 (a+bs+cs^2) ds$ نیاز به دو نقطه گوسی دارد. لازم به ذکر است که اگر مثلاً برای

محاسبه $\int_{-1}^1 (a+bs) ds$ از دو نقطه گوسی بهره بگیریم باز به جواب دقیقی که توسط یک نقطه گوسی

بدست آورده بودیم، می رسیم.



$$I = 0.55556f(-0.774597) + 0.88889f(0.000) + 0.55556f(+0.774597)$$

شکل ۷-۵ انتگرالگیری عددی با سه نقطه گوس

در محاسبه ضرائب با استفاده از یک سری عملیات ریاضی و تعیین تابع چند جمله ای می توان اقدام به حل این مسئله نمود. از جدول ذیل می توان مختصات نقاط گوسی و ثابت های وزنی مربوطه را برحسب تعداد نقاط انتگرالگیری بدست آورد.

جدول ۷-۱ مختصات نقاط گوسی و ثابت های وزنی برحسب تعداد نقاط انتگرالگیری

$\pm S$	n	H
0	$n = 1$	2.000 000 000 000 000
$1/\sqrt{3}$	$n = 2$	1.000 000 000 000 000
$\sqrt{0.6}$	$n = 3$	5/9 8/9
0.000 000 000 000 000	$n = 4$	
0.861 136 311 594 953		0.347 854 845 137 454
0.339 981 043 584 856		0.652 145 154 862 546
	$n = 5$	
0.906 179 845 938 664		0.236 926 885 056 189
0.538 469 310 105 683		0.478 628 670 499 366
0.000 000 000 000 000		0.568 888 888 888 889
	$n = 6$	
0.932 469 514 203 152		0.171 324 492 379 170
0.661 209 386 466 265		0.360 761 573 048 139
0.238 619 186 083 197		0.467 913 934 572 691

تمرین: اعداد مربوط به ردیف اول و دوم و سوم جدول ($n=1, n=2, n=3$) را از راه اثبات ریاضی بدست آورید.

۷-۴-۳ انتگرال گیری عددی گاوس بر روی یک مستطیل

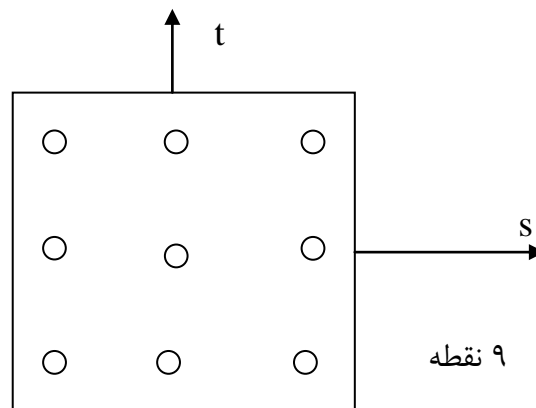
در انتگرالگیری دو بعدی در فضای داریم:

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(s, t) ds dt = \int_{-1}^{+1} \sum_{i=1}^n H_i f(s_i, t) dt = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_i H_j f(s_i, t_j) \quad ۷-۴$$

به طور مثال در مورد $n=3$ باز از همان جدول قبل استفاده می کنیم. در این حالت نیز جواب برای چندجمله ای های درجه ۵ در هر راستای s, t دقیق است. به طور مثال اگر بخواهیم با سه نقطه گوسی

مقدار $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [C] [B] \det[J] ds dt$ را برای رسیدن به ماتریس سختی المان $[K]$ محاسبه نماییم.

باید مقدار $f(s, t) = [B]^T [C] [B] \det[J]$ را در سه نقطه گوسی محاسبه نماییم و با ضرب آن در ثابت های وزنی به محاسبه انتگرال بپردازیم.



شکل ۶-۷ انتگرالگیری دو بعدی با ۹ نقطه انتگرالگیری

در حالت سه بعدی نیز روش گوس شامل سه سیگما و سه ثابت وزنی خواهد بود.

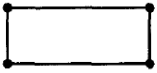



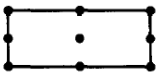
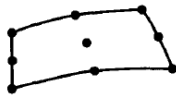
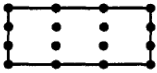
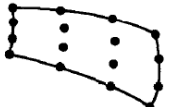
۴-۴-۷ توضیح در مورد انتگرال گیری عددی

در حالت کلی برای المانها در مدل اجزاء محدود که بر اساس تغییر مکان می باشد، توصیه می گردد تا از انتگرالگیری کامل استفاده گردد. انتگرالگیری کامل یعنی حاصل انتگرالگیری به روش عددی برابر گردد با حاصل حل تحلیلی انتگرال برای حالتی که انتگرال قابل محاسبه باشد. لازم به ذکر است که حل تحلیلی انتگرال فقط برای المانهای مستقیم امکان پذیر می باشد. در خصوص المانهای منحنی استفاده از انتگرال گیری عددی بر اساس جدول ۷-۱ باعث محاسبه کامل انتگرال برای المان نخواهد شد. خطای حاصله با بکاربردن تعداد کافی نقاط انتگرالگیری برای المانی که دارای انحنای زیاد یا واپیچیدگی زیاد نباشد، قابل قبول خواهد بود. لذا در این حالت برای المانهایی که دارای انحناء زیاد نباشند می توان مشابه المانهای بدون انحناء بر اساس توصیه جدول ۷-۲ برای المانهای دو بعدی تنش و کرنش مسطح و المان متقارن محوری عمل کرد. در حالت المانهای با انحناء زیاد ویا آنالیزهای غیر خطی باید از تعداد نقاط گوسی بیشتری استفاده نمود.

در نهایت استفاده از انتگرال گیری عددی به جای انتگرال گیری دقیق ممکن است منجر به ایجاد خطاهایی گردد که ما در قدم اول به دنبال کاهش این مقادیر خطا تا حد ممکن هستیم که این کار ممکن است خیلی به صرفه نباشد. بنابراین ملاحظه برای حداقل شرایط انتگرال گیری که اجازه همگرایی را دهد، باید در نظر گرفته شود.

اگر عبارت داخل انتگرال یک چند جمله ای نباشد اما نسبت دو چندجمله ای باشد روش گوس منجر به یک جواب تقریبی می گردد. حال هر چه تعداد نقاط گوسی بیشتری در نظر گرفته شود دقت بهبود خواهد یافت. در این حالت همگرایی به سمت جواب دقیق ممکن است به صورت یکنواخت نباشد.

جدول ۷-۲ توصیه نقاط انتگرالگیری برای المانهای تنش و کرنش مسطح و متقارن محوری

تعداد نقاط	نوع المان	
4-node		2×2
4-node distorted		2×2
8-node		3×3
8-node distorted		3×3
9-node		3×3
9-node distorted		3×3
16-node		4×4
16-node distorted		4×4

با انتگرال گیری عددی ماتریس سختی تکین یا غیرعادی ممکن است به وجود بیاید که نتیجه مرتبه پایین انتگرال است، که سبب غیر عملی شدن انتگرال گیری می شود. در حالت کلی حداقل باید تعداد نقاط انتگرال گیری به اندازه ای باشد که منجر به ایجاد تعدادی روابط غیرمستقل بزرگتر مساوی از تعداد کل مجهولات شوند.

اگر دوباره المان ایزوپارامتری هشت گره ای صفحه ای که قبلا مورد بحث قرار گرفت را در نظر بگیریم. ماتریس سختی این المان که یک ماتریس 16×16 است که با انتگرال گیری از عبارت $[B]^T [C] [B] \det[J]$ بدست می آید. با توجه به مقارن بودن ماتریس تنها ۱۳۶ درایه از ۲۵۶ درایه متفاوت از یکدیگرند. هر کدام از این درایه ها به صورت $f(s, t)$ هستند و باید بر روی سطح المان انتگرال گیری شوند. در برنامه نویسی کامپیوتری یک قانون انتگرال گیری p نقطه ای نیازمند p پاس در میان یک حلقه انتگرال است. هر پاس نیازمند محاسبه $[B], \det[J]$ در مختصات نقاط گوسی است، و همچنین محاسبه حاصلضرب $[B]^T [C] [B] \det[J]$ و ضرب آن در ثابت های وزنی. هر پاس یک سهمی از ماتریس $[K]$ را تشکیل می دهد و هنگامیکه p پاس موجود تمام شد

ماتریس $[K]$ به صورت کامل محاسبه شده است. واضح است که این عملیات هزینه محاسباتی بالایی را در بر دارد.

برای یک المان با شکل کلی هرکدام از درایه های ماتریس $[J] \det[B][C]^T[B]$ خارج قسمت دو چند جمله ای بر حسب (s, t) است. چندجمله ای در مقسوم علیه از مقدار $[J]^{-1}$ ناشی می شود وقتی که $[J]$ معکوس می شود $\det[J]$ مقسوم علیه هر ضریبی در J^{-1} می شود و بنابراین در مخرج هر درایه ای از ماتریس $[B]$ ظاهر می شود. انتگرال گیری تحلیلی برای $[K]$ مستلزم استفاده از فرمول های طاقت فرسایی خواهد بود. انتگرال گیری عددی ساده تر است ولی در حالت کلی دقیق نخواهد بود، به این منظور $[K]$ تنها به طور تقریبی بدون در نظر گرفتن تعداد نقاط، انتگرال گیری می شود. حال سوالی که در ذهن ما ایجاد می شود این است که از نظر محاسباتی باید نقاط کمتری را در نظر بگیریم یا از دیدگاه داشتن دقت زیاد تعداد نقاط گوسی را افزایش دهیم؟ جواب این سوال را می توان در ادامه یافت.

۷-۴-۵ دقت در انتگرال گیری و ناپایداری ها

یک مدل اجزای محدود معمولاً دقت کافی را ندارد، و معمولاً دچار خطای زیاد سخت در نظر گرفتن سازه است. زیاد سخت گرفتن سازه معمولاً با در نظر گرفتن نقاط گوسی بیشتر بحرانی تر می شود زیرا نقاط اضافی جملات مرتبه بالاتری در ماتریس سختی را سبب می شوند. این جملات در مقایسه با جملات مرتبه پایین تر در مقابل بعضی از مدهای تغییر شکل مقاومت ایجاد می کنند و در نتیجه سبب سخت تر شدن المان ها می گردند. به همین منظور دقت بالاتر در انتگرال گیری برای محاسبه ماتریس سختی معمولاً سبب دقت پایین تر در جواب اجزای محدود می گردد و همچنین هزینه محاسباتی را نیز افزایش می دهد. به عبارت دیگر استفاده از نقاط گوسی خیلی کم، سبب تولید یک شرایط نامطلوب می گردد که با اسمهای گوناگونی نظیر ناپایداری، مود تکین ساختگی^۴، مکانیزم، مود کینماتیک، مود انرژی صفر و مود ساعت شنی^۵ شناخته می شوند.

ناپایداری زمانی اتفاق می افتد که یک مود تغییر شکل یا تعداد بیش از یک مود با کرنش صفر در تمام نقاط گوسی اتفاق بیفتند. یکی از مهمترین ملاحظات نقطه گوسی به عنوان سنسورهای کرنش است. اگر نقاط گوسی هیچ کرنشی را در یک مود تغییر شکل مشخص حس نکنند در واقع ماتریس سختی هیچ مقاومتی در برابر آن مود تغییر شکل از خود نشان نداده است.

یک توضیح ساده در مورد ناپایداری در ادامه تشریح می شود. المان های صفحه ای چهار گره ای نشان داده شده در شکل زیر به وسیله قانون تک نقطه ای گوس انتگرال گیری

^۴ Spurious singular mode

^۵ Hourglass mode

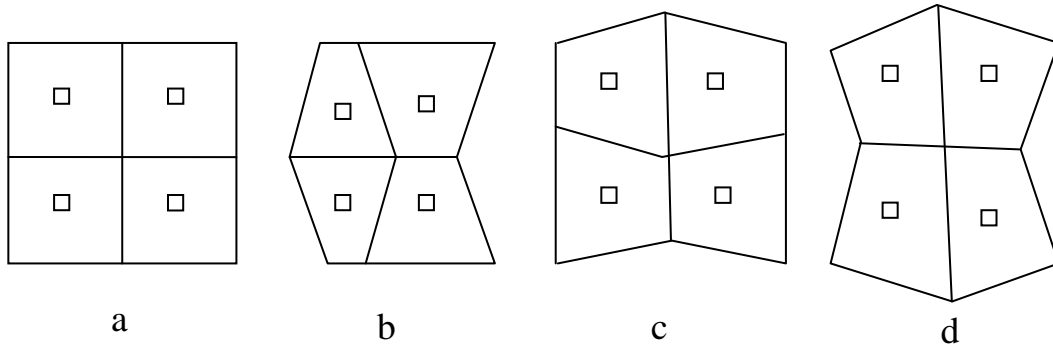
می شوند. در پایین ترین المان سمت چپ با یک ثابت c سه ناپایداری به شکل های زیر نشان داده شده است.

$$b) u = cxy, \quad v = 0$$

$$c) u = 0, \quad v = -cxy$$

$$c) u = cy(1-x), \quad v = cx(y-1)$$

به راحتی می توان چک کرد که هر کدام از میدان های تغییرمکان بالا سبب ایجاد کرنش های صفر ($\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \gamma_{xy} = 0$) در نقاط گوسی ($x = y = 0$) می شوند.



شکل ۷-۷ مود تغییر شکل ناپایدار

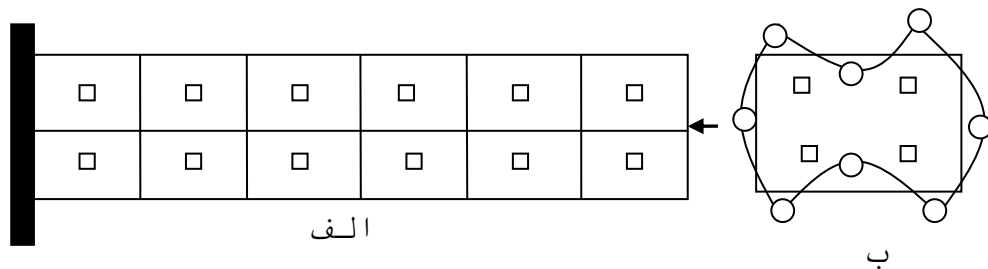
(a) صفحه تغییر شکل نیافته ۲ در ۲ المان های مربعی چهار گره ای (نقاط گوسی نیز با مربع های کوچک نمایش داده شده اند)
(d,c,b) مودهای تغییرمکان ناپایداری را نمایش می دهند

المان های غیرمستطیلی نیز به همین صورت رفتار می کنند. حتی اگر مش برای جلوگیری از حرکت های صلب گونه، به اندازه کافی دارای تکیه گاه باشد باز این مودها اتفاق خواهند افتاد. مودهایی که در آن ها نقاط گوسی دارای کرنش صفر می شوند و بنابراین انرژی کرنشی صفر می گردد. در این حالت مدل اجزا محدود هیچ مقاومتی در برابر بارگذاری هایی که این مود ها را ایجاد می کنند نخواهد داشت. ماتریس سختی کل در این حالت بدون در نظر گرفتن سازه بارگذاری شده تکیه^۶ خواهد شد.

هنگامیکه تکیه گاه ها به اندازه ای هستند که سبب غیرتکین شدن ماتریس سختی می شوند یک ناپایداری در درسر دهنده ممکن است رخ دهد. در شکل زیر تمام درجات آزادی در تکیه گاه بسته شده اند و هر المانی توسط یک نقطه گوسی انتگرال گیری می شود. قیود ایجاد شده توسط تکیه گاه با بیشتر شدن فاصله از تکیه گاه کمتر و کمتر می گردند.

⁶ Singular

شکل زیر مش بندی المان های هشت گره ای مربعی که در تکیه گاه ثابت شده اند را نشان می دهد. نقاط گوسی با مربع های کوچک نمایش داده شده اند. ناپایداری ساعت شنی در مورد موده های تغییر مکان در یک المان هشت گره ای که توسط چهار نقطه گوسی انتگرال گیری شده است را می توان داشت شکل ۷-۸. ب. یک المان صفحه ای هشت گره ای که ماتریس سختی آن توسط چهار نقطه گوسی انتگرال گیری شده است ناپایداری ساعت شنی^۷ را از خود نشان داده است.



شکل ۷-۸ ناپایداری ساعت شنی در المان هشت گره ای با چهار نقطه گوسی

در این حالت هیچ راهی وجود ندارد که دو المان مجاور بتوانند این مود را نشان دهند در حالیکه به هم متصل نیز باقی مانده اند شکل ۷-۸ الف.

۷-۴-۶ محاسبات تنش و نقاط گوسی

تنش های محاسبه شده اغلب در نقاط گوسی خیلی دقیق تر هستند. این امر سبب می شود که محل مستعد بیشترین دقت ها همان نقاط گوسی باشند که برای انتگرال گیری ماتریس سختی استفاده شدند.

به طور خلاصه در عمل رایج است که یک گوس مرتبه دو (چهار نقطه ای) برای انتگرال گیری ماتریس $[K]$ برای المان های صفحه ای چهار و هشت گره ای استفاده می شود و تنش ها و کرنش ها نیز در همین نقاط محاسبه می شوند. به طور مشابه در المان های سه بعدی نیز اغلب از گوس هشت نقطه ای برای محاسبه انتگرال سختی و محاسبات تنش استفاده می شود. تنش در گره ها و مکان های دیگر المان نیز به وسیله درون یابی یا برون یابی از تنش نقاط گوسی قابل محاسبه خواهد بود.

⁷ Hourglass instability

۷-۵ تنش ها و کرنش های اولیه

اثرات تنش و کرنش اولیه در روش اجزاء محدود باید لحاظ گردد. در این قسمت بدنبال یافتن این اثر در فرمول روش اجزاء محدود هستیم. قبلا نشان دادیم که تنش ها از رابطه زیر قابل حصول اند:

$$\{\tau\} = [C]\{\varepsilon\}$$

در حالت کلی جسم می تواند دارای کرنش های اولیه ای مثل $\{\varepsilon_0\}$ باشد که به علت تغییرات دما، انقباض بتن و ... به وجود آمدند. علاوه بر این تنش های اولیه ای $\{\tau_0\}$ (نظیر تنش های پس ماند و ...) نیز می توانند در جسم وجود داشته باشند. برای مثال این تنش ها می توانند اندازه گیری شوند اما پیش بینی آن ها بدون داشتن اطلاعات کامل از تاریخچه جسم غیرممکن است. در این حالات که تنش ها و کرنش های اولیه در جسم وجود دارد باید تنش ها و کرنش ها را به صورت خالص در رابطه هوک در نظر گرفت:

$$\begin{aligned}\{\tau\} - \{\tau_0\} &= [C](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) \\ \{\tau\} &= [C]\{\varepsilon\} - [C]\{\varepsilon_0\} + \{\tau_0\}\end{aligned}$$

انرژی کرنشی در این حالت به صورت زیر بیان می شود:

$$U_e = \frac{1}{2}t \int_{\Omega^e} \{\bar{\varepsilon}\}^T \{\tau\} d\Omega^e$$

$$\{\bar{\varepsilon}\} = \{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}$$

$$U_e = \frac{1}{2}t \int_{\Omega^e} (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\})^T [C](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) d\Omega^e + t \int_{\Omega^e} (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\})^T \{\tau_0\} d\Omega^e$$

با بسط عبارت فوق داریم:

$$U_e = \frac{1}{2}t \int_{\Omega^e} \left(\underbrace{\{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\}}_* - \underbrace{\{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon_0\}}_{**} - \underbrace{\{\varepsilon_0\}^T [C] \{\varepsilon\}}_{**} + \{\varepsilon_0\}^T [C] \{\varepsilon_0\} \right) d\Omega^e + t \int_{\Omega^e} \{\varepsilon\}^T \{\tau_0\} d\Omega^e - t \int_{\Omega^e} \{\varepsilon_0\}^T \{\tau_0\} d\Omega^e$$

اولین جمله سمت چپ (*) همان عبارتی است که قبلا هم بدست آمده بود:

$$U_e = \frac{t}{2} \int_{\Omega^e} \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} d\Omega^e$$

جملات دوم و سوم (**) نیز با هم برابرند.

$$U_e = \frac{1}{2}t \int_{\Omega^e} \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} d\Omega^e - t \int_{\Omega^e} \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon_0\} d\Omega^e + \frac{t}{2} \int_{\Omega^e} \{\varepsilon_0\}^T [C] \{\varepsilon_0\} d\Omega^e + t \int_{\Omega^e} \{\varepsilon\}^T \{\tau_0\} d\Omega^e - t \int_{\Omega^e} \{\varepsilon_0\}^T \{\tau_0\} d\Omega^e$$

$$\begin{aligned}
& t \int_{\Omega^e} \{\tau_0\}^T \{\varepsilon\} d\Omega^e - t \int_{\Omega^e} \{\varepsilon_0\}^T [C] \{\varepsilon\} d\Omega^e = t \int_{\Omega^e} \left(\{\tau_0\}^T - \{\varepsilon_0\}^T [C] \right) [L][\varphi] d\Omega^e \{\delta^e\} \\
& = \{\bar{F}_e\}^T \{\delta^e\} = t \int_{\Omega^e} \{\bar{f}\}^T [L][\varphi] d\Omega^e \{\delta^e\} = t \int_{\Omega^e} \{\bar{f}\}^T [B] d\Omega^e \{\delta^e\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\bar{f}\}^T &= \{\tau_0\}^T - \{\varepsilon_0\}^T [C] \\
\{\bar{F}_e\} &= t \int_{\Omega^e} [B]^T (\{\tau_0\} - [C]\{\varepsilon_0\}) d\Omega^e
\end{aligned}$$

انرژی پتانسیل کل عبارت است از:

$$\pi_e = \frac{1}{2} \{\delta^e\}^T [K^e] \{\delta^e\} + \{\bar{F}_e\}^T \{\delta^e\} - \{F_e\}^T \{\delta^e\} + \text{Constants}$$

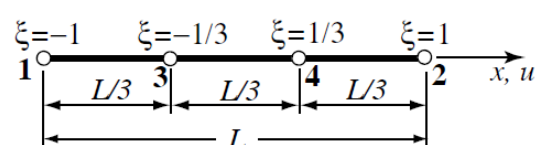
با مینیمم کردن عبارت بالا، عبارت زیر بدست می آید:

$$[K^e] \{\delta^e\} = -\{\bar{F}_e\} + \{F_e\} \quad ۷-۵$$

باید توجه داشت که در واقع تنش ها و کرنش های اولیه به صورت بردار بار $\{\bar{F}_e\}$ در مساله وارد شدند. در ادامه این فصل به سراغ توسعه و تولید المانهای جدید می رویم.

مسائل نمونه

۱-المان چهار گرهی محوری بطول L که گره‌ها در فواصل مساوی از هم قرار گرفته‌اند در شکل زیر نشان داده شده است. ترتیب شماره‌گذاری المانها در شکل آمده است. بر اساس تعریف المان ایزوپارامتری داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1(\xi) \\ N_2(\xi) \\ N_3(\xi) \\ N_4(\xi) \end{bmatrix}$$


المان محوری چهار گره ای

که در آن :

$$x_1 = -0.5L, x_2 = 0.5L, x_3 = -1/3L, \text{ and } x_4 = 1/3L$$

(الف) توابع شکل این المان را بدست آورید.

(ب) نشان دهید جاکوبین $J = \partial x / \partial \xi$ یک عدد ثابت برابر با $L/2$ است.

(ت) بار گسترده یکنواخت q در واحد طول در راستای x وارد میشود. بردار بار معادل در گره ها را بیابید.

(ث) برای محاسبه ماتریس سختی کامل چند نقطه انتگرالگیری لازم است.

$$\mathbf{K} = \int_{-1}^1 EA \mathbf{B}^T \mathbf{B} J d\xi$$

توجه شود که $\mathbf{B}(\xi)$ از درجه ۲ برحسب ξ و EA و J ثابت هستند.

(ج) موقعیت گره های ۳ و ۴ را به $x_3 = -0.5\alpha L$ و $x_4 = 0.5\alpha L$ تغییر میدهیم جاییکه $0 \leq \alpha \leq 1$ و جاکوبین تابعی از α و ξ میباشد $J = J(\alpha, \xi)$ که دیگر ثابت نیست. محدوده ای از α را پیدا کنید بنحوی که $J \geq 0$ در داخل المان باشد.

(۲) برای یک المان چهار گره ای نشان دهید تنها یک نقطه انتگرالگیری در فضای دو بعدی کافی است تا حاصل انتگرال $\iint_{A^e} dA$ کامل گردد.

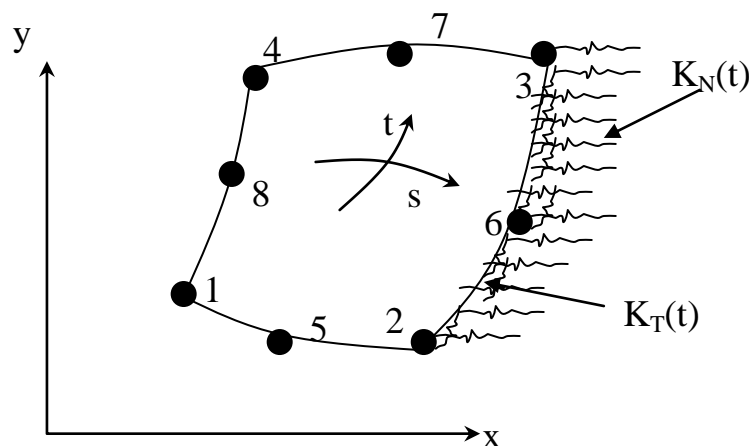
(۳) در یک مسئله تنش مسطح تصمیم گرفته شده است تا از المان ۸ گره ای ایزوپارامتری استفاده گردد. این المان در قسمتی از مرز خود دارای فنرهای نرمال و برشی می باشد.

الف) با فرض تغییرات خطی برای سختی فنرهادر مرز، اثر این فنرها در مرز را روی ماتریس سختی قدم به قدم بصورت ماتریسی نشان دهید.

$$K_N(t) = \frac{1}{2}[K_{Ni}(1-t) + K_{Nj}(1+t)]$$

$$K_T(t) = \frac{1}{2}[K_{Ti}(1-t) + K_{Tj}(1+t)]$$

ب) آیا دو نقطه انتگرالگیری برای اجرای کامل انتگرالگیری کافی خواهد بود.



المان ۸ گره‌ای ایزوپارامتری بر روی مرز دارای فنر

ج) این المان در قسمتی از مرز خود ۱-۲-۵ دارای بار یکنواخت با چگالی b_x می باشد. بار گره‌ای در گره‌های ۱-۲-۵ را بدست آورید.

چ) آیا میتوان در محاسبه ماتریس سختی این المان از ۲ نقطه گوسی برای این کار اقدام کرد؟ و آیا با این دو نقطه انتگرالگیری کامل خواهد بود؟

د) عضو ماتریس سختی k_{55} را با استفاده از روش گوس برای دو نقطه انتگرالگیری بصورت شماتیک محاسبه نمائید.

۴) تغییرات دما در داخل یک المان مستطیلی بصورت خطی فرض شده است. این فرض معادل

دانستن دمای گره‌ای در المان چهار گره‌ای مستطیلی است $(T_1^0, T_2^0, T_3^0, T_4^0)$

در یک آنالیز حرارتی این اثرات تغییر دما را چگونه لحاظ میکنید؟ بار معادل حرارتی را محاسبه نمائید و توضیح دهید که چگونه تنشهای حاصله از حرارت را در یک المان محاسبه مینمائید؟