فصل ۶

روش اجزاء محدود برای المانهای منحنی[1]

[1] Curved Sided Elements

۶-۱ مقدمه

المان های با مرزهای منحنی (خمیده) برای مسائلی که هندسه منحنی یا سطوح سه بعدی دارند مناسب هستند. اگرچه که می توان در هندسه های خمیده از المان های مثلثی استفاده کرد ولی باید توجه داشت که درست است که لبه های المان های مثلثی بسیار کوچک اند ولی ما در این حالت در واقع خطای تقریب زدن مرزهای منحنی با خطوط مستقیم را ایجاد می کنیم. با استفاده از المانهای منحنی ما در واقع با مشکلات ریاضی و شکل مساله مواجه نخواهیم بود.

۶-۲ تقریب متغیرهای وابسته

روش اجزا محدود بر مبنای تقریب زدن متغیر های وابسته بنا نهاده شده است. توابعی که این متغیرها را در داخل هر المان تقریب می زنند به صورت چندجمله ای انتخاب می شوند. مرتبه این چندجمله ای ها به راحتی می تواند زیاد شود و همچنین تعداد جمله های چندجمله ای نیز شکل مدل تغییرمکان را معین می سازد. برای انتخاب چندجمله ای ها باید توجه داشت که تعداد کل مختصه های تعمیم یافته (ضرایب ثابتهای مجهول تابع) برای یک المان باید برابر با تعداد درجات آزادی المان باشد. کمترین مقدار درجات آزادی برای یک مساله مشخص به وسیله معیارهای کامل بودن برای همگرایی و همچنین شرایط همسانی هندسی و نیازمندی یک بیان کامل از جملات در تابع انرژی پتانسیل تعیین می گردد.

درجات آزادی اضافه بر کمترین مقدار لازم، می توانند با اضافه کردن گره های خارجی ثانویه یا با تعریف درجات آزادی شامل مشتقات بالاتر تغییرمکان در گره های اولیه تعریف شوند. ارتباط بین درجات آزادی المان و مدل تغییرمکان انتخاب شده در فصول قبل مورد بحث واقع شده است. در آن جا دو روش متفاوت که یکی معکوس کردن ماتریس تبدیل و دیگری حل معادلات برای یافتن ضرایب مجهول تابع چندجمله ای تغییرمکان بر حسب درجات آزادی بود، بیان شد. در واقع ما تغییرمکان درداخل هر نقطه از المان را بر حسب درجات آزادی تعریف شده در گره های المان بیان نمودیم.

مدل تغییرمکان مختصه های تعمیم یافته که در بخش های قبل مورد بررسی قرار گرفت یک شکل ابتدایی از مدل ها جهت تعیین تغییر مکان برای روش اجزا محدود است. یک بیان جایگزین از میدان های تغییرمکان چند جمله ای نیز وجود دارد که فرمول بندی معادلات پایه برای المان ها را راحت تر می سازد. این بخش به معرفی روش جدید جهت یافتن تغییرمکان المان می پردازد.

۶-۳ تقریب هندسه (یا متغیرهای مستقل)

یک مساله دو بعدی معمول می تواند دارای هندسه پیچیده ای باشد. این پیچیدگی می تواند شامل انحنا در هندسه مدل در مساله باشد.

المان های ساده یا مرتبه پایین دارای وجوه مستقیم هستند و گره ها تنها در رئوس المان وجود دارند، در حالی که المان های مرتبه بالاتر می توانند دارای وجوه منحنی باشند (به منظور مدل کردن هندسه

انحنادار) و می توانند دارای گره های میانی یا داخلی باشند. ما در مورد بعضی از این المان های دو بعدی قبلا بحث نموده ایم و توابع شکل را نیز برای آن ها بدست آوردیم. المان های ما تا اینجا تنها شامل شکل های مثلثی و مستطیلی بودند که دارای وجوه مستقیم هستند. برای اینکه بتوانیم هندسه های سازه ای کلی را مدل کنیم مایل هستیم که المان ها در حالت کلی دارای وجوه منحنی باشند. همچنین مشتاق هستیم تا روش جایگزینی نیز برای بدست آوردن توابع شکل داشته باشیم. ما به دنبال راهی هستیم که بتوانیم به کمک برنامه های کامپیوتری، محاسباتی نظیر انتگرال گیری عددی را نیز به راحتی انجام دهیم.

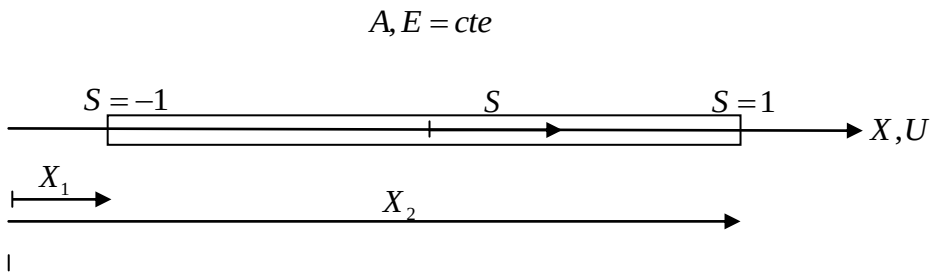
برای رسیدن به این اهداف اکنون باید ابتدا مختصات طبیعی بدون بعد را تعریف کنیم. مختصات طبیعی همانگونه که ذکر شد بدون بعد و همگن است و مستقل از اندازه و شکل المان ها است.

۴-۶ مختصات طبیعی

مختصات طبیعی بدون بعد را می توان برای المان های یک بعدی بر حسب s و برای المان های دوبعدی نیز بر حسب sوt بیان نمود. برای حالت یک بعدی ارتباط بین مختصات طبیعی (s) و مختصات کلی (X) به صورت زیر قابل بیان است:

$$X = \frac{1}{2}(1-s)X_1 + \frac{1}{2}(1+s)X_2$$

$$X = \sum_{i=1}^{2} N_i X_i \quad N_1(s) = \frac{1}{2}(1-s) \quad N_2(s) = \frac{1}{2}(1+s)$$



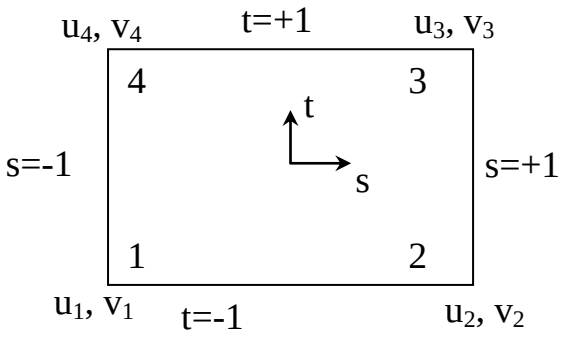
شکل ٦-١ المان یک بعدی در مختصات طبیعی

N_1 و N_2 توابعی از مختصات طبیعی s هستند که توابع شکل المان یا توابع درونیابی نامیده می شوند. این توابع به طور مثال می توانند برای توصیف جابه جایی های خطی u در داخل یک المان میله ای یا خطی به کار روند.

$$U = \frac{1}{2}(1-s)U_1 + \frac{1}{2}(1+s)U_2$$

$$U = \sum_{i=1}^{2} N_i U_i \quad U(-1) = U_1 \quad U(+1) = U_2$$

برای المان های مستطیلی مختصات طبیعی می تواند به صورت زیر در نظر گرفته شود. برای المان مستطیلی چهار گره ای توابع شکل نیز به صورت زیر هستند:



شکل ٦-٢ المان مستطیلی در مختصات طبیعی

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-s)(1-t) \qquad N_2 = \frac{1}{4}(1+s)(1-t)$$
$$N_3 = \frac{1}{4}(1+s)(1+t) \qquad N_4 = \frac{1}{4}(1-s)(1+t)$$

چندجمله ای هایی که در المان های تنش مسطحه به کار برده شدند را به یاد داریم. اگر مبدا دستگاه مختصات xوy را بر روی مرکز سطح المان در نظر بگیریم می توانیم مولفه های تغییرمکان را برحسب توابع شکل و همچنین برحسب مختصات طبیعی (sوt) بیان نماییم.

$$u = \sum_{i=1}^{4} N_i u_i \quad v = \sum_{i=1}^{4} N_i v_i$$
$$u(-1,-1) = u_1 \quad u(+1,-1) = u_2 \quad etc.$$
$$v(-1,-1) = v_1 \quad v(+1,-1) = v_2 \quad etc.$$

در طول وجه ۲-۱:

$$u = \frac{1}{2}(1-s)u_1 + \frac{1}{2}(1+s)u_2$$
$$v = \frac{1}{2}(1-s)v_1 + \frac{1}{2}(1+s)v_2$$

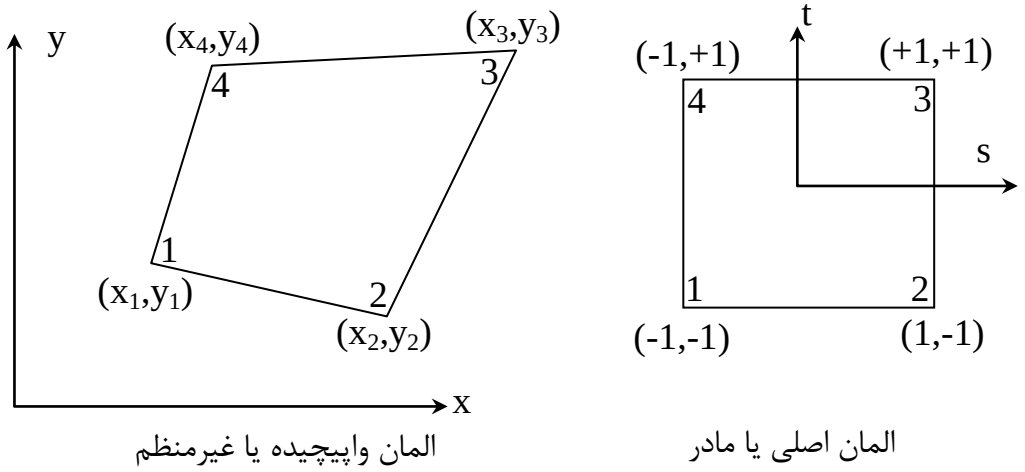
با توجه به تغییرات خطی u وv در وجه۲-۱ شرط پیوستگی تغییرمکان نیز در این حالت به طور معادل با دستگاه مختصات اولیه ارضا می شود.

ملاحظه می توان کرد که در حالتهای بالا میتوان یک المان اصلی[۲] یا مادر مستطیلی را در مختصات طبیعی معادل تبدیل یک المان واپیچیده[۳] یا غیرمنظم در مختصات حقیقی x-y دانست. صرف نظر

[2] Parent

از اندازه المان واقعی در مختصات کارتزین واقعی، مختصات طبیعی از مقدار ۱ تا ۱- تغییر می کند و اندازه المان اولیه ۲×۲ خواهد بود.

با توجه به تبدیل مختصاتی که بین (s,t) و (x,y) صورت می گیرد المانی که در مختصات کارتزین دارای وجوه منحنی است به المانی با وجوه مستقیم در مختصات طبیعی تبدیل می شود. باید توجه شود که حتی زمانی که ما از مختصات طبیعی برای فرمول بندی استفاده کردیم درجات آزادی گره ای در طول مختصات فیزیکی x-y هستند و نه بر روی(s,t) . حال ما در مورد فرمول بندی اجزا محدود با استفاده از مختصات طبیعی بحث می کنیم و خواهیم دید فرمول بندی شامل تبدیل مختصاتی است که برای روش اجزا محدود می تواند مورد استفاده قرار بگیرد.

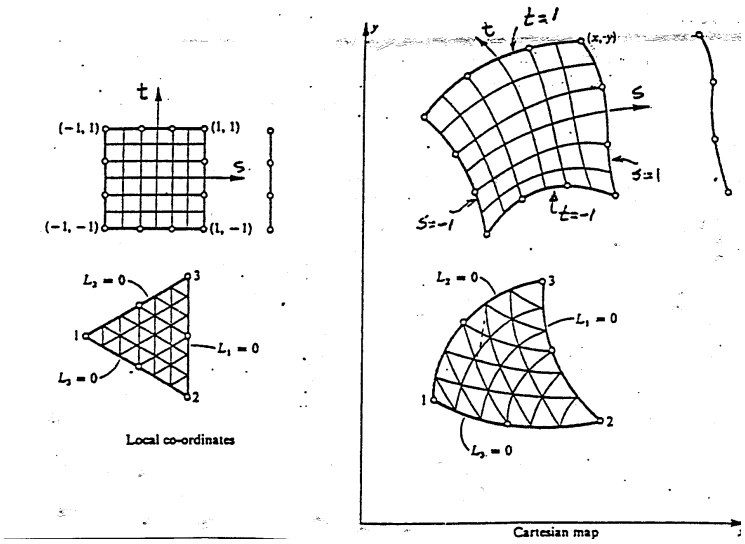


شکل ۶-۳ المان اصلی و غیر منظم در مختصات کارتزین و طبیعی

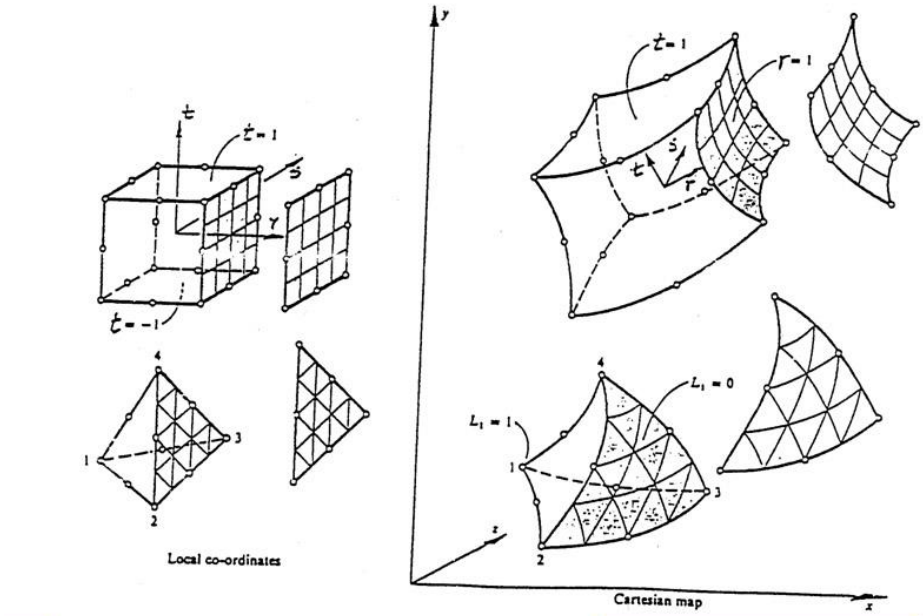
۶-۵ المان های خمیده ایزو پارامتریک

همانگونه که در بالا ذکر شد المان های خمیده در دستگاه مختصات اولیه تحت یک نگاشت می توانند به المان های منظمی در دستگاه مختصات محلی تبدیل شوند. در این نگاشت در واقع خطوط و وجوه غیر منظم در دستگاه مختصات اصلی به خطوط و وجوه منظمی در دستگاه مختصات جدید تبدیل می شوند. برای بهتر مشخص شدن این موضوع می توان به شکل های زیر که به ترتیب در مورد المان های دو بعدی و سه بعدی هستند توجه نمود.

[3] Distorted

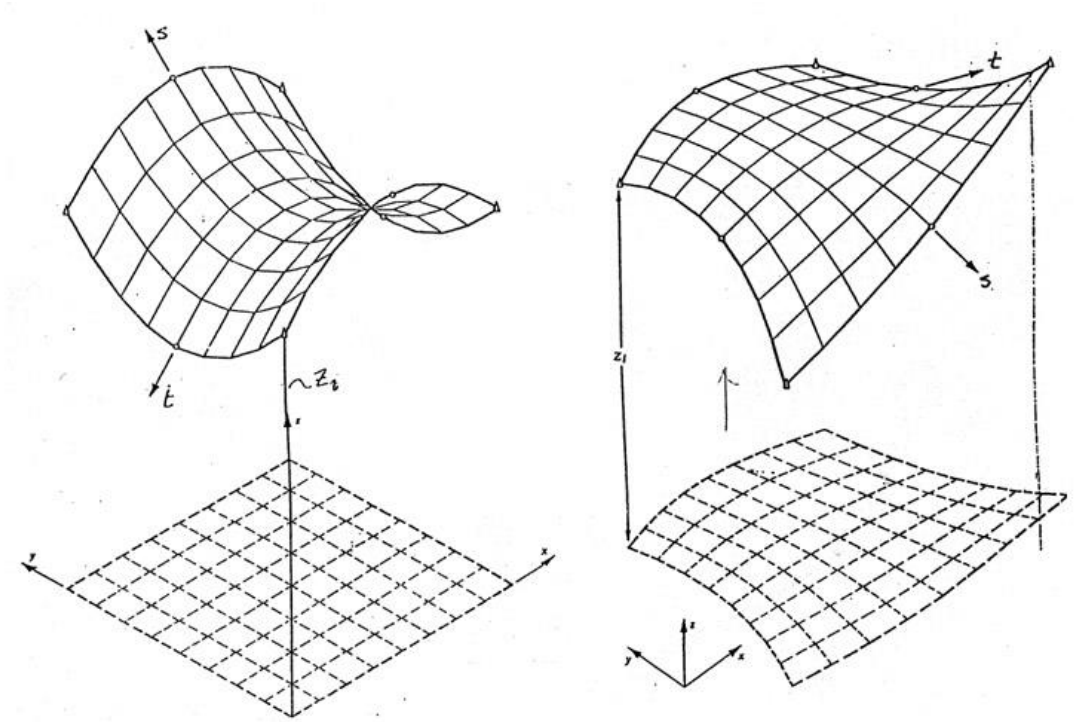


شکل ۶-۴ نگاشت سطوح المانهای دو بعدی



شکل ۶-۵ نگاشت سطوح المانهای سه بعدی

شکل زیر نیز نگاشت سطوح سه بعدی خمیده به فضای دو بعدی را نشان می دهد.



شکل ۶-۶ نگاشت سطوح المانهای سه بعدی به دو بعدی

در تبدیل دستگاه مختصات از روابط تبدیل زیر استفاده می شود:

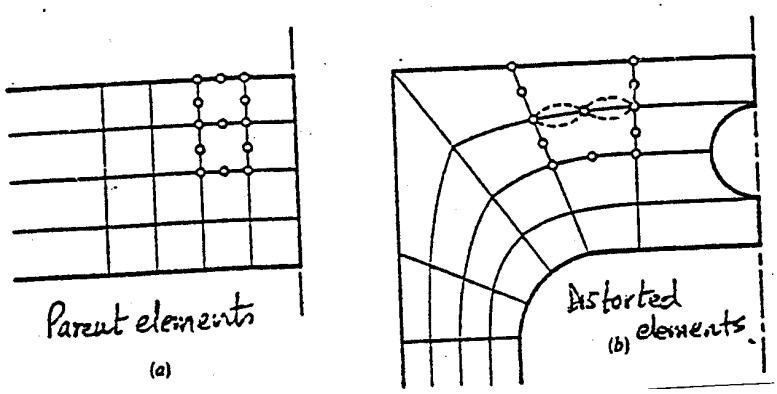
$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = f\begin{Bmatrix} s \\ t \end{Bmatrix} \; or \; f\begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} \; etc. \qquad ۱-۶$$

اگرچه برای بکار بردن قاعده تبدیلات باید یک تطابق یک به یک بین مختصات کاتزین و مختصات منحنی شکل، وجود داشته باشد. یعنی هیچ پیچیدگی یا تاخوردگی شدید برای یک المان خطی (مثلا تقاطع دو خط) وجود نداشته باشد. یک روش مناسب برای بنا نهادن تبدیلات مختصات استفاده از توابع شکلی است که در بخش های قبلی مورد بحث قرار گرفتند و قبلا برای بیان متغیرها و کمیتهای مجهول توابع استفاده شدند. اگر مختصات هر المان به صورت زیر نوشته شود:

$$x = N_1' x_1 + N_2' x_2 + \ldots \qquad ۲-۶$$
$$y = N_1' y_1 + N_2' y_2 + \ldots$$

در معادلات بالا N_i'ها توابع شکل هستند. برای شکل های انحنا دار توابع شکل بر حسب s,t یا L_1, L_2, L_3 غیرخطی خواهند بود. مقادیر $x_1, x_2, \ldots$ و همچنین $y_1, y_2, \ldots$ مختصات گره ای هستند.

نگاشت المان های اصلی بـه المـان هـای واقعـی بایـد بـه گونـه‌ای باشـد کـه هیچگونـه جـای خـالی یا سوراخی را بـه همـراه نداشـته باشـد. مـی‌تـوان نشـان داد کـه اگـر دو المـان مجـاور کـه از المـان های اصلی خود نشـات گرفتـه انـد توابـع شـکلی داشـته باشـند کـه شـرایط پیوسـتگی را ارضـا مـی نماید، آنگاه المان های واپیچیده نیـز پیوسـته خواهنـد بـود. ایـن امـر کـاملا بـدیهی اسـت و شـرایط پیوستگی C_0 توابـع شـکل را بـرای هـر تـابع تقریبـی بیـان مـی دارد. در اینجـا توابـع x, y هسـتند و اگـر المـان هـای مجـاور نیـز همـان مختصـات در گـره هـا را داشـته باشـند پیوسـتگی ارضـا مـی گردد.



شکل ۶-۷ شرایط پیوستگی در المان محلی و المان اصلی

همانگونـه کـه مـا شـکل المـان هـای واپیچیـده را بـه وسـیله توابـع شـکل N_i' بـرای المـان اصـلی (مادر) تعریف کـردیم. فـرض شـود کـه متغیـر مجهـول مسـاله (ϕ) نیـز بـه صـورت زیـر تقریـب زده شده است:

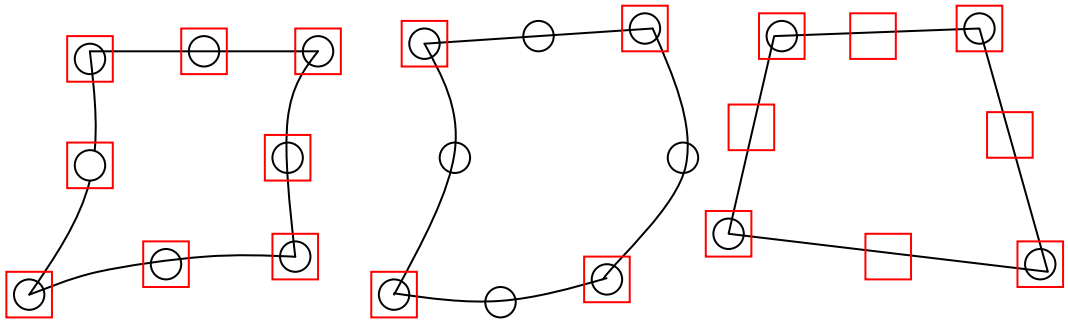
$$\phi = \sum_{i=1}^{m} N_i \phi_i \qquad ۶-۳$$

که در آن m تعداد درجات آزادی در هر المان است.

N_i نیز تابع شکل است که در حالت کلی با N_i' می تواند متفاوت باشد.

می‌توان دوباره نشان داد که اگر توابع شکل N_i مثل پیوستگی ϕ، در مختصات اصلی (مادر) یا مختصات محلی ثابت نگه داشته شوند آنگاه شرایط پیوستگی در داخل المان واپیچیده ارضا خواهد شد.

مقادیر گره ای ϕ_i ممکن است دقیقا به همان صورتی که هندسه المان در گیر با مختصات گره ها است در ارتباط باشند یا نباشند. با توجه به شرایط توابع N_i و N_i' سه نوع المان به شرح زیر تعریف می شود.



□ نقاطی که در آن ها ϕ_i مشخص است

○ گره هایی که برای تعیین هندسه المان ها به کار می روند

شکل ۶-۸ المانهای ایزو پارامتری، فوق پارامتری و تحت پارامتری

المان ایزو پارامتری[۴] المانهائی هستند که در آن:

$$N_i = N_i'$$

المان فوق پارامتری[۵] المانهائی هستند که در این المان ها تغییرات هندسه خیلی کلی تر از مجهول ϕاست. المان تحت پارامتری[۶] المانهائی هستند که در این المان ها گره های بیشتری به منظور تعریف ϕ نسبت به تعریف هندسه وجود دارند. در عمل بیشتر از المان های ایزوپارامتری استفاده می شود.

۶-۶ توابع شکل

توابع متغیر وابسته برای یک المان را در هر نقطه داخل المان، می‌توان برحسب درجات آزادی المان بصورت زیر نوشت:

$$\{U\} = [\varphi]^T [T]^{-1} \{\delta\} = [N]\{\delta\}$$

این رابطه در فصل چهارم بر اساس روش استاندارد و با یافتن ماتریس معکوس [T] بدست آمد. برای یک متغیر وابسته می‌توان این رابطه را بصورت زیر نوشت:

[4] Isoparametric element
[5] Super-parametric element
[6] Sub-parametric element

$$u(x,y,z)=\sum_{i=1}^{m}N_i(x,y,z)u_i$$ ۴-۶

که در آن m تعداد گره‌های المان می‌باشد و u_i درجه آزادی متغیر وابسته u در گره i می‌باشد. N_i را تابع شکل در گره i مینامیم. این تابع شکل بر اساس رابطه بالا دارای خصوصیات زیر می‌باشد:

الف- در گره i حاصل N_i برابر واحد می‌باشد.

ب- در سایر گره‌ها حاصل N_i برابر صفر می‌باشد.

این خصوصیت کمک می‌کند تا از روشهای سریعتری جهت یافتن تابع شکل بصورت مستقیم و بدون استفاده از معکوس کردن ماتریس تبدیل، بهره جوئیم.

۶-۶-۱ شرایط مشتق ثابت در مسائل C^0

منظور از این شرایط ثابت بودن تنش ها در هنگام تقریب زدن است.

اگر ϕ در معادله زیر را در نظر بگیریم:

$$\phi=\sum_{i=1}^{m_i}N_i\phi_i$$ ٦ – ٥

شرایط مشتق ثابت بیان می دارد که:

$$\phi=\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3y$$ ۶-۶

که در آن:

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ پارامترهای تعمیم یافته اند.

در گره i می توانیم بنویسیم:

$$\varphi_i=\alpha_1+\alpha_2x_i+\alpha_3y_i$$ ۷-۶

$$\varphi=\sum_i N_i\varphi_i=\sum_i N_i\left(\alpha_1+\alpha_2x_i+\alpha_3y_i\right)$$

$$\varphi=\alpha_1\sum_i N_i+\alpha_2\sum_i N_ix_i+\alpha_3\sum_i N_iy_i$$

معادل سازی روابط بالا نتیجه می دهد که:

$$\sum_i N_i=1\quad \sum_i N_ix_i=x\quad \sum_i N_iy_i=y$$ ۸-۶

بنابراین شرایط مشتق ثابت زمانی ارضا می گردد که روابطه بالا ارضا شوند.
با یادآوری معادلات تبدیل مختصات:

۹-۶

$$x = \sum_i \bar{N}_i x_i$$

$$y = \sum_i \bar{N}_i y_i$$

که در آن مقادیر $x_1, x_2, \ldots$ و همچنین $y_1, y_2, \ldots$ مختصات گره ای هستند. معادلات بالا به صورت خودکار ارضا می شوند.

پس شرایط مشتق ثابت برای تمامی المان های ایزوپارامتریک که شرط $\sum_i N_i = 1$ را دارند، ارضا خواهد شد.

شرایط لازم برای المان های تحت پارامتری آن است که تابع شکل N_i' در آن ها بتواند به صورت یک ترکیب خطی از N_i به صورت زیر بیان شود.

۱۰-۶

$$\bar{N}_i = \sum_i C_{ij} N_i$$

که در آن C_{ij}ها اعدادی ثابت هستند. واضح است که برای المان های تحت پارامتری N_i' درمرتبه پایین تری از N_i قرار دارد و معادله بالا به آسانی ارضا می شود البته برای المان های فوق پارامتری اینگونه نخواهد بود. برخی آزمایش های عددی به منظور ارضای معادلات بالا باید صورت بگیرند. (شاید یک آزمایش بهم پیوسته Patch Test، همچنین یک تحلیل مقدار ویژه ماتریس سختی ممکن است حضور تنش های ثابت گره ای را آشکار سازد.)

۶-۶-۲ روشهای جایگزین برای بدست آوردن توابع شکل

روش سرندیپیتی[۷]

یک راه ساده برای نوشتن توابع شکل، در نظر گرفتن خصوصیات این توابع است. همانطور که دیده شد یک تابع شکل نظیر N_i در نقطه i مقدار واحد را اختیار می کند و در بقیه نقاط ($j \neq i$) مقدارش برابر صفر می شود. این مطلب از آنجا ناشی می گردد که در یک گره خاص باید داشته باشیم :

$$x = \sum N_i x_i$$

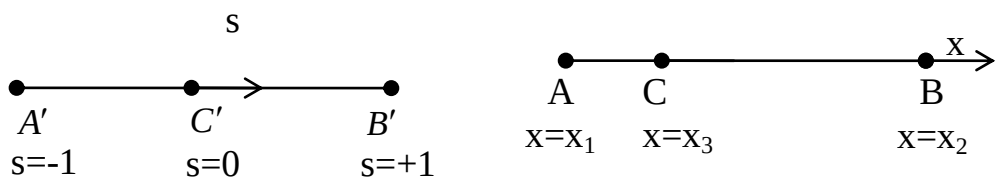
با در نظر داشتن ویژگی بالا به راحتی می توان شکل توابع درون یابی را حدس زد. به طور مثال در المان یک بعدی که قبلا در نظر گرفته شد اگر بخواهیم تابع شکل N_1 را بیان کنیم وجود ترم(s-1) در آن ضروری است (زیرا باید در گره ۲ که مقدار s=1 است) مقدار تابع برابر صفر باشد پس:

$$N_1(s) = (SF)(s-1)$$

برای محاسبه مقدار ثابت (SF[۸]) نیز داریم:

$$N_1(-1) = 1 \rightarrow SF = -0.5$$

به همین ترتیب می توان روش بالا را برای محاسبه توابع شکل در هر المانی به کار برد. مثلا اگر در المان قبلی بخواهیم یک تبدیل درجه دو بین xوs انجام دهیم باید یک گره C را به صورت زیر به المان اضافه کنیم. حال اگر این نقاط را در مختصات طبیعی با A', B', C' نمایش دهیم می توانیم توابع شکل را به صورت زیر بیان نماییم.



شکل ۶-۹ روش سرندیپیتی در یافتن توابع شکل

$$x(s) = \sum N_i x_i = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3$$

---

[7] Serendipity approach

[8] Scale factor

$$N_1 = 0.5\, s\, (s-1)$$
$$N_2 = 0.5\, s\, (s+1)$$
$$N_3 = -(\, s+1)\, (s-1)$$

در این حالت ما یک تبدیل غیرخطی بین x وs انجام داده ایم، شبیه آن چیزی که در مورد مدل کردن المان های با هندسه انحنادار صورت گرفت.

روش درون یابی لاگرانژ:

اگر فرایند درون یابی هرکدام از مختصات ها یا متغیرها را از روی مقادیر گره ای در نظر بگیریم به راحتی متوجه می شویم که این کار نوعی برازش کردن یک منحنی با گرفتن مقادیر معین بر روی نقاط مشخص (گره ها) است. پس می توان از روش کلاسیک درون یابی لاگرانژ برای رسیدن به توابع شکل نیز بهره برد. در حالت کلی اگر تابع به ترتیب در نقاط $x_1, x_2, ..., x_n$ مقادیر مشخص $f_1, f_2, ..., f_n$ را اختیار کند با استفاده از تابع زیر می توان مقادیر تابع را درون یابی نمود:

$$f(x) = L_1 f_1 + L_2 f_2 + ... + L_i f_i + ... L_n f_n \qquad ۱۱-۶$$

که در آن L_i چندجمله ای لاگرانژ است و از رابطه زیر بدست مِی آید:

$$L_i = \frac{(x_1 - x)(x_2 - x)...(x_{i-1} - x)(x_{i+1} - x)...(x_n - x)}{(x_1 - x_i)(x_2 - x_i)...(x_{i-1} - x_i)(x_{i+1} - x_i)...(x_n - x_i)} \qquad ۱۲-۶$$

L_i در رابطه بالا در واقع نقش تابع شکل در المان ها را بازی می کند و در واقع می توان از آن برای نوشتن توابع شکل استفاده کرد. مثلا در مورد مثال قبل داریم:

$$N_1 = \frac{(s_2 - s)(s_3 - s)}{(s_2 - s_1)(s_3 - s_1)} = \frac{(1-s)(0-s)}{(1+1)(0+1)} = \frac{s(s-1)}{2}$$
$$N_2 = \frac{(s_1 - s)(s_3 - s)}{(s_1 - s_2)(s_3 - s_2)} = \frac{(-1-s)(0-s)}{(-1-1)(0-1)} = \frac{s(1+s)}{2}$$
$$N_3 = \frac{(s_1 - s)(s_2 - s)}{(s_1 - s_3)(s_2 - s_3)} = \frac{(-1-s)(1-s)}{(-1)(1)} = 1 - s^2$$

در حالت کلی توابع شکل بدست آمده از هر دو روش (سرندیپیتی و لاگرانژ) متفاوت از هم خواهند بود. چون تابع شکل یکی از مهمترین ویژگی های اساسی روش اجزا محدود است، المان هایی که بر مبنای این توابع شکل فرمول بندی شده اند می توانند دارای خواص متفاوتی از یکدیگر باشند. متداول است که المانی هایی که تابع شکل آن ها بر مبنای روش سرندیپیتی یا لاگرانژ فرمول بندی شده است را به نام همان روش ها می شناسند. در حالت کلی المان های لاگرانژی تمایل به داشتن گره های داخلی بیشتر دارند و اجازه بیشتری برای افزایش درجه جملات چندجمله ای های توابع شکل می دهند.

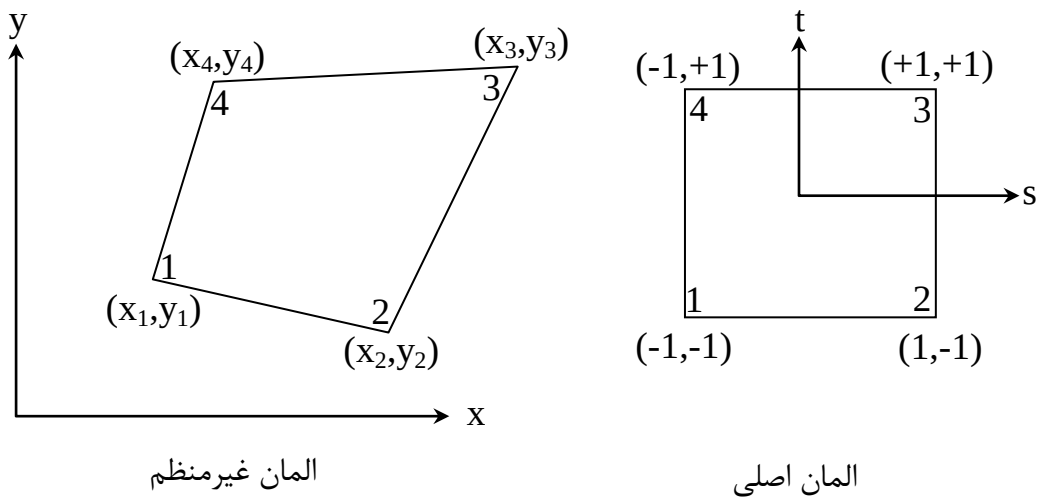
۶-۶-۳ توابع شکل برای المان های چهارضلعی (روش سرندیپیتی)

با بررسی مختصات طبیعی به وسیله متغیرهای s,t در نواحی دو بعدی به دنبال یک تبدیل از دستگاه مختصات x,y به s,t بودیم. اگنون یک المان چهارضلعی کلی در دستگاه مختصات x,y و المان مربعی مربوط به آن در دستگاه مختصات $-1 \le s,t \le 1$ را به صورت شکل زیر در نظر می‌گیریم. اگر المان در مختصات (x,y) یک مستطیل به ابعاد $(l \times h)$ باشد. به آسانی می توان مشاهده کرد که تبدیل مختصات شامل یک ضریب مقیاس به صورت زیر خواهد بود:

$$s = \frac{2x}{l} \qquad , \qquad t = \frac{2y}{h}$$

در حالت کلی برای یک المان چهارضلعی تبدیل مختصات باید بدست آید.

$$(x,y) \leftrightarrow f(s,t)$$



شکل ۶-۱۰ روش سرندیپیتی در یافتن توابع شکل المان چهار ضلعی

این تبدیل که در آن نقطه $p(x,y)$ در داخل المان بر حسب مختصات گره ای است (شبیه درون یابی تغییرمکان ها از روی تغییرمکان های گره ای) می تواند به صورت زیر نوشته شود.

$$x_p = \sum_{i=1}^{n} N_i x_i \qquad , \qquad y_p = \sum_{i=1}^{n} N_i y_i$$

n در رابطه بالا بیانگر تعداد گره موجود در هر المان است. (که در اینجا برابر چهار است)

با توجه به اینکه N_i باید در گره i برابر یک و در بقیه نقاط برابر صفر باشد، مثلا در مورد N_1 داریم:

$$N_1(s,t) = (SF)\,(Equation\ of\ \ line\ 2-3)\,(Equation\, of\ \ line\ 3-4) = (SF)\,(1-s)\,(1-t)$$

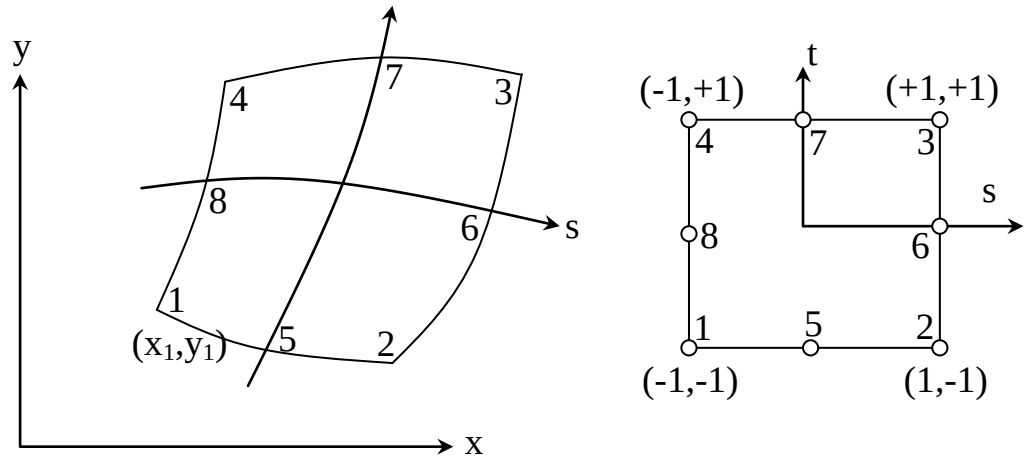
$$N_1(-1,-1) = 1 \rightarrow SF = 0.25$$
$$\rightarrow N_1 = \frac{1}{4}(1-s)\,(1-t)$$

به همین ترتیب در مورد توابع شکل دیگر نیز داریم:

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+s)\,(1-t)$$
$$N_3 = \frac{1}{4}(1+s)\,(1+t)$$
$$N_4 = \frac{1}{4}(1-s)\,(1+t)$$

اگرچه در این جا از روش سرندیپیتی برای بدست آوردن توابع شکل استفاده شد، ولی به دانشجویان توصیه می شود که از روش لاگرانژ نیز این توابع را بدست آورند.
اگر ما المان های انحنادار احتیاج داشته باشیم نیازمند آن هستیم که از یک تبدیل مرتبه بالاتر استفاده کنیم. برای این منظور مثلا اگر المان هشت گره ای زیر را مطابق شکل زیر در نظر بگیریم.
المان تبدیل یافته این المان نیز در فضای (s,t) نشان داده شده است. توابع شکل نیز به طریقی که باید به دقت مد نظر باشد شماره گذاری شده اند.

t



مختصات محلی سیستم مختصات کلی که در آن s وt منحنی شکل هستند

شکل ۶-۱۱ المان منحنی در فضای (x,y) و (s,t)

در این حالت تابع شکل متناظر با گره شماره پنج را می توان به صورت زیر بدست آورد:

$$N_5(s,t) = (SF)\,(Equation\ of\ line\ 2-6-3)\,(Equation\ of\ line\ 3-7-4)\,(Equation\ of\ line\ 4-8-1)$$

$$= (SF)(1-s)(1-t)(1+s)$$

$$N_5(-1,0) = 1 \rightarrow SF = 0.5$$

$$\rightarrow N_5(s,t) = 0.5(1-s)(1-t)(1+s)$$

به همین ترتیب:

$$N_6 = \frac{1}{2}(1+s)(1-t^2)$$

$$N_7 = \frac{1}{2}(1-s^2)(1+t)$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(1-s)(1-t^2)$$

مشاهده می شود که N_5 بر حسب s تابعی درجه دو است، اما بر حسب t خطی است. N_8 نیز بر حسب t تابعی درجه دو است، در حالیکه بر حسب s خطی است.

اگر به تابع شکل N_1 برای المان چهار گره ای باز گردیم، می توانیم به آسانی با اصلاح آن به صورت زیر تابع شکل N_1 برای المان هشت گره ای را از روی آن بدست آوریم. برای این منظور باید کاری کنیم که N_1 بر روی گره های ۵ و ۸ نیز صفر شود.

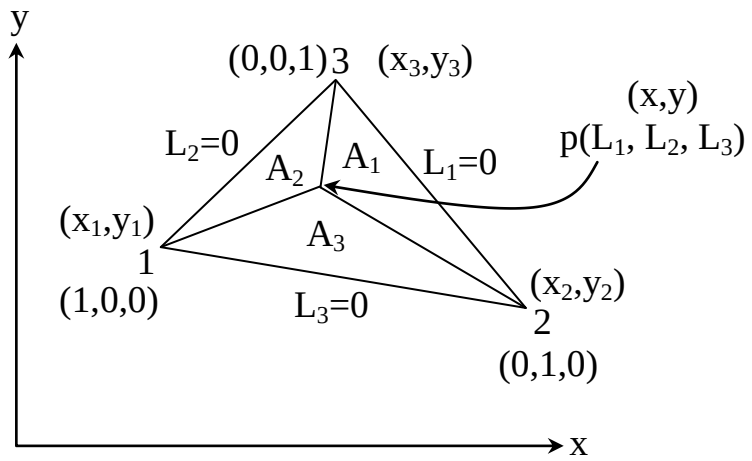
$$N_1\big|_{8\,node} = N_1\big|_{4\,node} - \frac{1}{2}N_5 - \frac{1}{2}N_8$$
$$= \frac{1}{4}(1-s)(1-t) - \frac{1}{4}(1-s)(1-t)(2+s+t) =$$
$$= \frac{1}{4}(1-s)(1-t)(-1-s-t)$$

به همین روال برای گره های دیگر نیز داریم:

$$N_2\big|_{8\,node} = N_2\big|_{4\,node} - \frac{1}{2}N_5 - \frac{1}{2}N_6$$
$$= \frac{1}{4}(1+s)(1-t)(-1+s-t)$$
$$N_3\big|_{8\,node} = N_3\big|_{4\,node} - \frac{1}{2}N_5 - \frac{1}{2}N_7$$
$$= \frac{1}{4}(1+s)(1+t)(-1+s+t)$$
$$N_4\big|_{8\,node} = N_4\big|_{4\,node} - \frac{1}{2}N_7 - \frac{1}{2}N_8$$
$$= \frac{1}{4}(1-s)(1+t)(-1-s+t)$$

۶-۷ المان های مثلثی در دستگاه مختصات سطحی[9]

با استفاده از مختصات های سطحی L_1, L_2, L_3 که در زیر تعریف شده اند.



شکل ۶-۱۲ المان مثلثی در دستگاه مختصات سطحی

$$L_1 = \frac{A_1}{A} \quad , \quad L_2 = \frac{A_2}{A} \quad , \quad L_3 = \frac{A_3}{A} \qquad ۱۳\text{-}۶$$

Aمساحت مثلث ۳-۲-۱یا مثلث کل می‌باشد و A_i مساحت محسور در مثلث به راس i که در داخل مثلث کل قرار گرفته که دو راس دیگر آن راسهای i و j مثلث اصلی می‌باشند. باید دقت شود که از سه مقدار L_1, L_2, L_3 تنها دو تا از آن ها غیرمستقل هستند $(L_1 + L_2 + L_3 = 1)$. برای یک المان ساده مثلثی سه گره ای ارتباط بین مختصات های سطحی و کلی برای هر نقطه p به صورت زیر بیان می شود:

$$N_1 = L_1 \qquad N_2 = L_2 \qquad N_3 = L_3$$

مشاهده شده است که در نظر گرفتن مختصات طبیعی برای المان ها به طور چشم گیری بدست آوردن توابع شکل آنها را ساده می سازد. اکنون به طور مختصری بر روی فرمول بندی معادلات سطح المان که منجر به یافتن ماتریس سختی برای المان های سه گره ای می گردد بحث می کنیم. برای این منظور می توانیم بنویسیم:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix}$$

با معکوس کردن ماتریس فوق داریم:

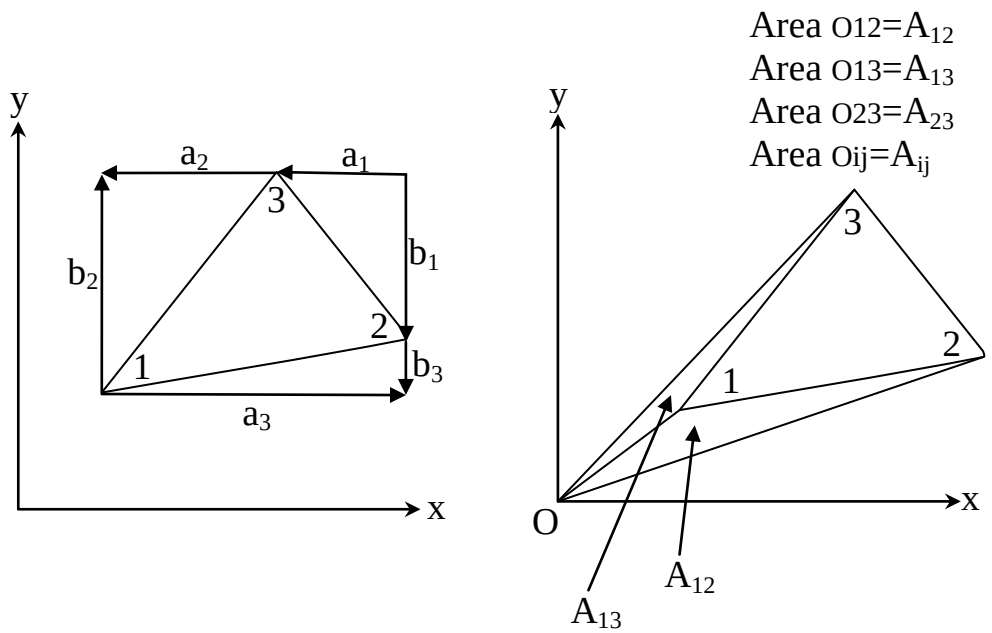
[9] Area Coordinates

$$\begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2y_2 - x_3y_2 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 & y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 2A_{23} & b_1 & a_1 \\ 2A_{31} & b_2 & a_2 \\ 2A_{12} & b_3 & a_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix}$$

$$\{\Im\} = [T]\{Z\} \quad \{\Im\}^T = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \end{bmatrix} \quad \{Z\}^T = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix}$$

پارامترهای هندسی آورده شده در رابطه بالا به صورت شکل زیر تعریف می شوند:



شکل ۶-۱۳ تعریف پارامترهای هندسی در المان مثلثی

حال به کمک مشتق گیری زنجیره ای داریم:

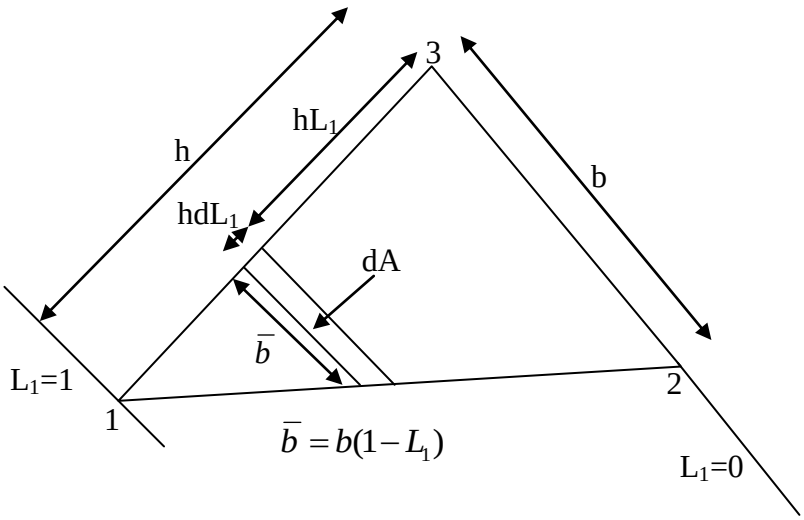
$$\frac{\partial}{\partial x} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial L_i}{\partial x} \frac{\partial}{\partial L_i} = \frac{\partial L_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial L_1} + \frac{\partial L_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial L_2} + \frac{\partial L_3}{\partial x} \frac{\partial}{\partial L_3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^{3} b_i \frac{\partial}{\partial L_i} \qquad (\frac{\partial L_i}{\partial x} = \frac{b_i}{2A})$$

به صورت مشابه:

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{1}{2A}\sum_{i=1}^{3}a_i\frac{\partial}{\partial L_i} \qquad (\frac{\partial L_i}{\partial y}=\frac{a_i}{2A})$$

حال اگر یک جزء سطح از المان مثلثی مطابق با شکل زیر برداریم:



شکل ۶-۱۴ المان جزء سطح از یک المان مثلثی

با انتگرال گیری داریم:

$$dA=\bar{b}h\,dL_1=bh(1-L_1)dL_1$$

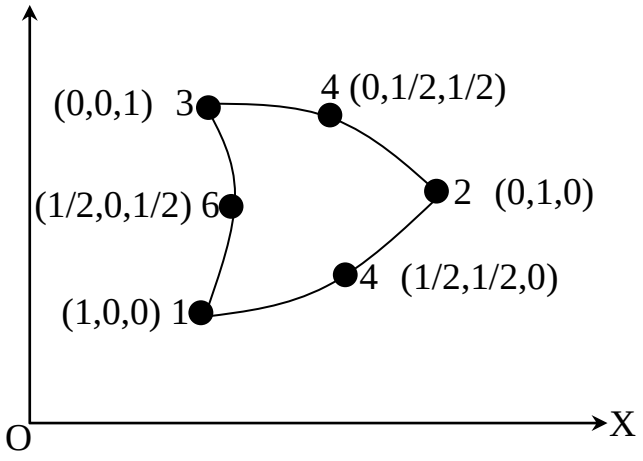
$$\int_A L_1 dA=\int_0^1 bhL_1(1-L_1)dL_1=bh(\frac{L_1^{\,2}}{2}-\frac{L_1^{\,3}}{3})\Big|_0^1=\frac{bh}{3}=\frac{2A}{3}$$

در حالت کلی:

$$\iint_A L_1^{\,p}L_2^{\,q}L_3^{\,r}dA=\frac{2A\,p!q!r!}{(p+q+r+2)!} \qquad ۶\text{-}۱۴$$

با مقایسه با توابع شکل بدست آمده برای المان های سه گره ای مثلثی، اگر تبدیل مرتبه بالاتری نیاز باشد مثلا برای مدل کردن نواحی انحنادار می توانیم از یک المان شش گره ای مطابق با شکل زیر استفاده کنیم.

Y



شکل ۶-۱۵ المان انحنادار مثلثی شش گره ای

مختصات طبیعی گره ها در شکل بالا در کنار شماره گره ها نشان داده شده است. مطابق روشی که قبلا هم ذکر شد توابع شکل را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$N_1(L_1) = (SF)\,(Equation\ of\ \ line\ 2-5-3)\,(Equation\, of\ \ line\ 4-6)$$

$$= (SF)(L_1)(2L_1 - 1)$$

$$N_1(1) = 1 \rightarrow SF = 1$$

$$\rightarrow N_1(L_1) = (L_1)(2L_1 - 1)$$

به همین شکل توابع شکل دیگر نیز به صورت زیر خواهند بود:

$$N_1 = (L_1)(2L_1 - 1)$$
$$N_2 = (L_2)(2L_2 - 1)$$
$$N_3 = (L_3)(2L_3 - 1)$$
$$N_4 = 4L_1L_2$$
$$N_5 = 4L_2L_3$$
$$N_6 = 4L_3L_1$$

۶-۷-۱ الف. المان مثلثی تنش ثابت (CST) :

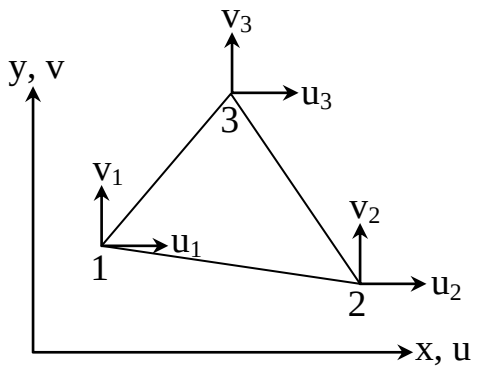
تغییرمکان المان سه گره ای با شش درجه آزادی شامل دو درجه آزادی گره ای u,v در هر گره به صورت زیر قابل بیان است:

$$u = L_1u_1 + L_2u_2 + L_3u_3$$
$$v = L_1v_1 + L_2v_2 + L_3v_3$$

رابطه بالا در واقع یک تقریب خطی برای u,v در داخل المان است که همانگونه که قبلا بیان شد در آن:

$$N_1 = L_1 \qquad N_2 = L_2 \qquad N_3 = L_3$$

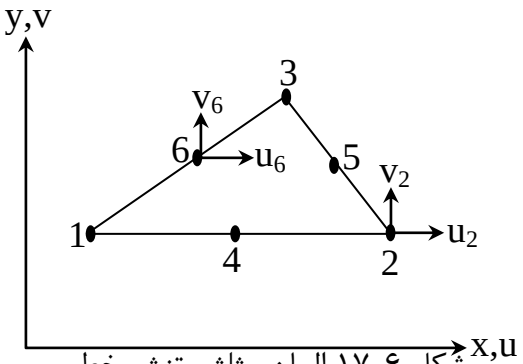
دقت داریم که توابع L_1, L_2, L_3 توابعی خطی بر حسب x, y هستند.



شکل ۶-۱۶ المان مثلثی تنش ثابت

۶-۷-۲ ب. المان مثلثی با تنش های خطی

تغییرمکان المان شش گره ای با دوازده درجه آزادی شامل دو درجه آزادی گره ای u,v در هر گره به صورت زیر قابل بیان است:



شکل ۶-۱۷ المان مثلثی تنش خطی پیوستگی C_0

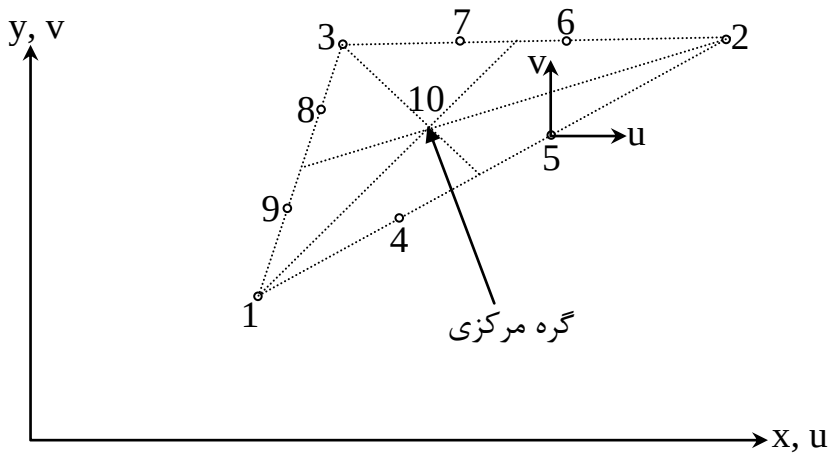
$$u=\sum_{i=1}^{3}N_i u_i \quad v=\sum_{i=1}^{3}N_i v_i$$

$$N_1=L_1(2L_1-1) \qquad N_4=4L_1L_2$$
$$N_2=L_2(2L_2-1) \qquad N_5=4L_2L_3$$
$$N_3=L_3(2L_3-1) \qquad N_6=4L_3L_1$$

۶-۷-۳ ج. المان مثلثی با تنش های سهموی

تغییرمکان المان ده گره ای با بیست درجه آزادی شامل دو درجه آزادی گره ای u,v در هر گره به صورت زیر قابل بیان است:

$$N_1=L_1(3L_1-1)(3L_1-2)/2 \qquad N_6=9L_2L_3(3L_2-1)/2$$
$$N_2=L_2(3L_2-1)(3L_2-2)/2 \qquad N_7=9L_2L_3(3L_3-1)/2$$
$$N_3=L_3(3L_3-1)(3L_3-2)/2 \qquad N_8=9L_3L_1(3L_3-1)/2$$
$$N_4=9L_1L_3(3L_1-1)/2 \qquad N_9=9L_3L_1(3L_1-1)/2$$
$$N_5=9L_1L_2(3L_2-1)/2 \qquad N_{10}=27L_1L_2L_3$$
$$u=\sum_{i=1}^{10}N_i u_i \quad v=\sum_{i=1}^{10}N_i v_i$$



شکل ۶-۱۸ المان مثلثی تنش سهموی

۶-۷-۴ د. المان های چهار وجهی:

شبیه آن چیزی که در مورد المان های مثلثی صورت گرفت ولی با توجه به سه بعدی بودن المان باید از حجم جای سطح استفاده کنیم.

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix}}_{*} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{Bmatrix}$$

از هندسه به یاد داریم که دترمینان ماتریس* بیانگر حجم چهار وجهی بود.

L_iها در فرمول بالا مختصات حجمی را بیان می کنند و به صورت زیر تعریف می شوند:

$$L_i = \frac{V_i}{V} \qquad 0 \le L_i \le 1$$

که در آن:

$V_i = V_{ijklp}$حجم چهاروجهی شامل رئوس j,k,l در نقطه p است. به طور مثال:

$$V_1 = V_{234p} \quad V_2 = V_{134p}$$

همچنین یادآوری می شود که:

$$\iiint_V L_1^{\,P} L_2^{\,q} L_3^{\,r} L_4^{\,s} dV = \frac{6Vp!q!r!s!}{(p+q+r+s+3)!} \qquad ۶-۱۵$$

و. محاسبه ماتریس سختی برای المان تنش ثابت در حالت تنش مسطحه:

انرژی کرنشی در این حالت به صورت زیر قابل بیان است:

$$U_e = \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \iint_A \left(\varepsilon_{xx}{}^2 + \varepsilon_{yy}{}^2 + 2\nu\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \frac{1-\nu}{2}\gamma_{xy}{}^2 \right) dxdy$$

که در آن t ضخامت را نشان می دهد.

با توجه به روابط بدست آمده در قبل رابطه انرژی کرنشی را بازنویسی می کنیم:

$$u = L_1u_1 + L_2u_2 + L_3u_3$$
$$v = L_1v_1 + L_2v_2 + L_3v_3$$
$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2A}\sum_{i=1}^{3} b_i u_i$$
$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2A}\sum_{i=1}^{3} a_i v_i$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2A}\sum_{i=1}^{3}(a_i u_i + b_i v_i)$$

$$U_e = \frac{Et}{8A^2(1-\nu^2)} \iint_A \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \begin{pmatrix} b_i b_j u_i u_j + a_i a_j v_i v_j + 2\nu b_i a_j u_i v_j + \\ \frac{1-\nu}{2}\left\{ a_i a_j u_i u_j + 2a_i b_i u_i v_j + b_i b_j v_i v_j \right\} \end{pmatrix} dxdy$$

انتگرال بالا شامل جملات ثابتی است که انتگرال گیری را ساده می سازد.

$$U_e = \frac{Et}{8A(1-\nu^2)} \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \begin{pmatrix} \left\{ b_i b_j + \frac{1-\nu}{2} a_i a_j \right\} u_i u_j + \left\{ a_i a_j + \frac{1-\nu}{2} b_i b_j \right\} v_i v_j + \\ 2\left\{ \nu b_i a_j + \frac{1-\nu}{2} a_i b_j \right\} u_i v_j \end{pmatrix}$$

با بیان درجات آزادی به صورت زیر:

$$\{\delta\}^T = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & \delta_5 & \delta_6 \end{bmatrix}$$

حال می توان درایه های ماتریس سختی را به صورت زیر محاسبه نمود:

$$k_{11}=\frac{\partial^2 U_e}{\partial \delta_1^{\,2}}=\frac{\partial^2 U_e}{\partial u_1^{\,2}}=\frac{Et}{4A(1-\nu^2)}\left[b_1^{\,2}+(\frac{1-\nu}{2})a_1^{\,3}\right]$$

$$k_{12}=\frac{\partial^2 U_e}{\partial \delta_1 \partial \delta_2}=\frac{\partial^2 U_e}{\partial u_1 \partial v_1}=\frac{Et}{4A(1-\nu^2)}\left[\nu b_1 a_1+(\frac{1-\nu}{2})a_1 b_1\right]$$

$$k_{13}=\frac{\partial^2 U_e}{\partial \delta_1 \partial \delta_3}=\frac{\partial^2 U_e}{\partial u_1 \partial u_2}=\frac{Et}{4A(1-\nu^2)}\left[b_1 b_2+(\frac{1-\nu}{2})a_1 a_2\right]$$

$$k_{22}=\frac{\partial^2 U_e}{\partial \delta_2 \partial \delta_2}=\frac{\partial^2 U_e}{\partial v_1 \partial v_1}=\frac{Et}{4A(1-\nu^2)}\left[a_1^{\,2}+(\frac{1-\nu}{2})b_1^{\,2}\right]$$

$$k_{24}=\frac{\partial^2 U_e}{\partial \delta_2 \partial \delta_4}=\frac{\partial^2 U_e}{\partial v_1 \partial v_2}=\frac{Et}{4A(1-\nu^2)}\left[a_1 a_2+(\frac{1-\nu}{2})b_1 b_2\right]$$

با تغییر متغیرهای زیر:

$$\alpha=\frac{Et}{4A(1-\nu^2)} \quad \beta=\nu \quad \gamma=\frac{1-\nu}{2}$$

ماتریس سختی المان به صورت زیر در خواهد آمد:

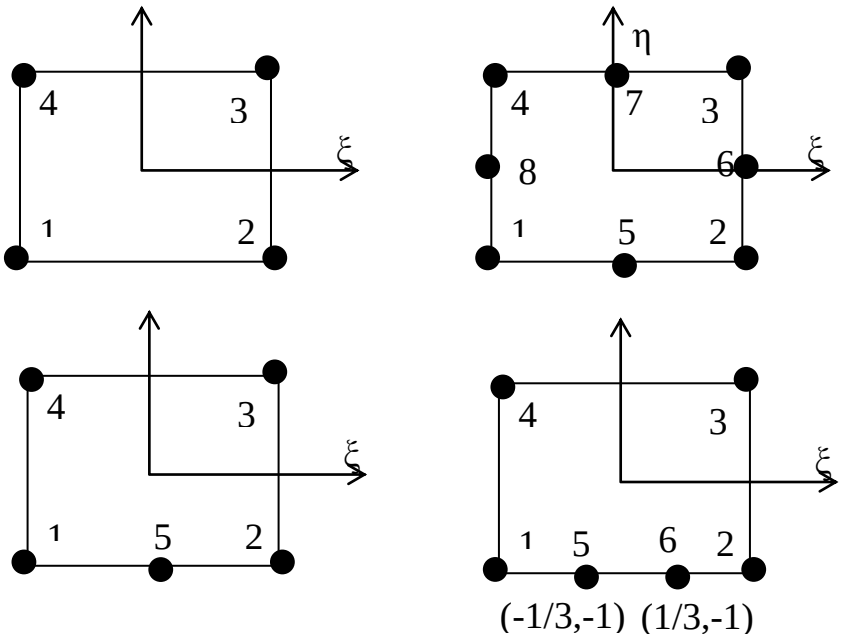
$$[k]=\begin{bmatrix} b_1b_1+\gamma a_1a_1 & \beta b_1a_1+\gamma a_1b_1 & b_1b_2+\gamma a_1a_2 & \beta b_1a_2+\gamma a_1b_2 & b_1b_3+\gamma a_1a_3 & \beta b_1a_3+\gamma a_1b_3 \\ & a_1a_1+\gamma b_1b_1 & \beta a_1b_2+\gamma b_1a_2 & a_1a_2+\gamma b_1b_2 & \beta a_1b_3+\gamma b_1a_3 & a_1a_3+\gamma b_1b_3 \\ & & b_2b_2+\gamma a_2a_2 & \beta b_2a_2+\gamma a_2b_2 & b_2b_3+\gamma a_2a_3 & \beta b_2a_3+\gamma a_3b_2 \\ & & & a_2a_2+\gamma b_2b_2 & \beta a_2b_3+\gamma b_2a_3 & a_2a_3+\gamma b_2b_3 \\ Symmetric & & & & b_3b_3+\gamma a_3a_3 & \varphi b_3a_3+\gamma a_3b_3 \\ & & & & & a_3a_3+\gamma b_3b_3 \end{bmatrix}$$

با توجه به مطلبی که قبلا نیز ذکر شد، برای رسیدن به روابط در حالت کرنش مسطحه می توان از تبدیل زیر بهره گرفت:

$$\text{plain stress} \xrightarrow[E \to \frac{E}{1-\nu^2}]{\nu \to \frac{\nu}{1-\nu}} \text{plain strain}$$

مسائل نمونه:

۱-تمام توابع شکل المانهای زیر را بدست آورید.

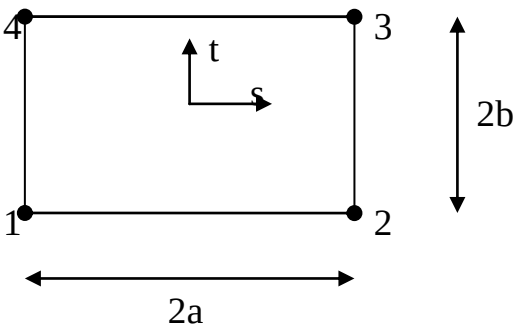


۲- برای المان مستطیلی تنش مسطح با فرض a=b=10mm و تغییر مکانهای گره‌ای داده شده:

الف) تغییرمکان، کرنش و تنش را در مرکز المان پیدا کنید.

ب- برای بار گسترده به شدت b_x در وجه ۳-۴معادل بار گره‌ای را پیدا کنید.

E = 200 GPa and υ = 0.27



$$\mathbf{d}=\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}\times 10^{-6}\ \mathrm{m}$$