

فصل ۲

مقدمه ای بر مکانیک کاربردی و روشهای
یافتن معادلات حاکم بر سیستمهای
پیوسته

۲-۲ مکانیک کاربردی

۱-۲-۲ یافتن معادله حاکم بر سیستم های پیوسته با استفاده از روش نیوتن (مکانیک برداری)

۱-۱-۲-۲ معادلات کلی اجسام در فضای سه بعدی (معادلات تعادل و روابط تنش-کرنش و روابط کرنش تغییر مکان)

نیروهای خارجی

تنش

کرنش

معادلات ساختاری، قوانین هوک

معادلات تعادل دینامیکی

شرایط مرزی

معادلات بدست آمده در اجسام الاستیسیته خطی

۲-۱-۲-۲ معادلات اعضای خرابایی

تنش و کرنش

معادلات ساختاری

معادلات تعادل دینامیکی

۳-۱-۲-۲ معادلات تیرها

تنش و کرنش

معادلات ساختاری

معادلات تعادل دینامیکی

۴-۱-۲-۲ معادلات برای اجسام دو بعدی

مسائل تنش مسطح

مسائل کرنش مسطح

معادلات تعادل دینامیکی در مسائل تنش و کرنش مسطح

مسائل متقارن محوری

۵-۱-۲-۲ معادلات صفحات

انواع فرضیات متفاوت در صفحات

تئوری کلاسیک صفحات

تئوری صفحات برشی

۶-۱-۲-۲ مثال هایی از روش یافتن معادلات حاکم بر سیستم با استفاده از روش نیوتن

۲-۲-۲ معادله حاکم بر سیستم های پیوسته با استفاده از روش انرژی (مکانیک تحلیلی)

۱-۲-۲-۲ کار

۲-۲-۲-۲ کار حاصل از تنشها در طی یک تغییر مکان در المان جسم (حالت استاتیکی)

خرپا

تیر

عضو برشی

۳-۲-۲-۲ اصل کار مجازی

۴-۲-۲-۲ حساب تغییرات

توابع فانکشنال

اپراتور دلتا

۵-۲-۲-۲ روش انرژی پتانسیل کل

۶-۲-۲-۲ فرم کلی انرژی پتانسیل برای یک جسم الاستیک خطی

۷-۲-۲-۲ تعداد مدهای جسم صلب (حرکت صلب گونه) در یک سیستم

۸-۲-۲-۲ مثال هایی از روش یافتن معادلات حاکم بر سیستم با استفاده از روش انرژی

۲-۱ مقدمه

هنگامیکه سازه‌ها تحت بارها یا نیروها قرار می‌گیرند در آنها تنش به وجود می‌آید. این تنش‌ها در حالت کلی توزیع یکنواختی ندارند و کرنش‌هایی را در جسم ایجاد می‌کنند که می‌توانند به صورت تغییرشکل یا تغییرمکان در جسم مشاهده شوند. تلاش ما در یافتن روابط بین تنش‌ها، کرنش‌ها، تغییرمکان‌ها و نیروها در یک شرایط مرزی معلوم برای اجسام (سازه‌ها) می‌باشد. این روابط در مدل کردن، شبیه‌سازی و طراحی سیستم‌های سازه‌های مهندسی بسیار پر اهمیت هستند. هدف از آنالیز سازه‌ها حل معادلات حاکم بر سازه‌ها تحت اثر بارگذاری خارجی و تعیین تنشهای داخلی و تغییرمکانهای نقاط مختلف سازه می‌باشد.

نیروها می‌توانند به صورت استاتیکی یا دینامیکی باشند. در استاتیک ما با سازه‌هایی که تحت بارهای استاتیکی هستند مواجه هستیم (مثل وزن مرده کف یک ساختمان). همچنین جامدات و سازه‌ها می‌توانند تحت اثر بارهای دینامیکی که با زمان متغیرند ارتعاش را تجربه کنند مثل نیروهای القایی که از حرکت یک ماشین روی یک کف ایجاد می‌گردد. وقتی بارها طبیعت دینامیکی دارند قواعد و تئوری‌های دینامیکی باید به کار برده شوند و در این حالت تنش‌ها، کرنش‌ها و تغییرمکان‌ها توابعی از زمان خواهند بود. چون استاتیک می‌تواند حالت خاصی از دینامیک تلقی گردد، معادلات استاتیکی می‌توانند از حذف ترم‌های دینامیکی از معادلات دینامیکی بدست آیند. در این کتاب نیز این روش را اتخاذ خواهیم کرد بدین صورت که ابتدا معادلات دینامیکی را بدست می‌آوریم و معادلات استاتیکی را به طور مستقیم از روی آنها بدست خواهیم آورد.

بسته به خواص مواد، جامدات می‌توانند الاستیک باشند بدین معنی که تغییرشکل‌ها پس از باربرداری به طور کامل ناپدید می‌گردند. همچنین جامدات می‌توانند پلاستیک باشند یعنی با باربرداری از روی آن‌ها تغییرشکل‌ها به طور کامل از بین نمی‌روند و مقداری تغییرشکل در جسم باقی می‌ماند. الاستیسیته با سازه‌هایی سروکار دارد که حالت الاستیک دارند و پلاستیسیته با آنهایی که به صورت پلاستیک رفتار می‌کنند. در این کتاب عموماً با سازه‌هایی با مواد الاستیک سروکار داریم. علاوه بر این در این کتاب همواره تغییرشکل‌ها کوچک فرض می‌شوند و روابط بار و تغییرمکان به صورت خطی است. بنابراین مسائل ما الاستیک خطی خواهند بود.

مواد می‌توانند غیرهمسان (غیر ایزوتروپ) باشند بدین معنی که خواص ماده در جهت‌های مختلف تغییر کند. تغییرشکل در مواد غیرهمسان بسته به نیروی اعمالی و جهت آن دارد. در مواد غیر همسان ثابت‌های زیادی باید برای تعریف خواص ماده استفاده شوند.

تعداد زیادی از مصالح مهندسی نیز همسان (ایزوتروپ) هستند یعنی خواص آنها به جهت اعمال نیروها وابسته نیست. مواد همسان حالت خاصی از مواد غیرهمسان هستند. برای مواد همسان تنها دو ثابت مستقل وجود دارد. این دو ثابت معمولاً همان مدول یانگ و ضریب پواسون هستند. در این کتاب نیز بیشتر با مواد همسان سروکار داریم، اگر چه بیشتر فرمول‌ها می‌توانند برای مواد غیرهمسان نیز به کار روند.

شرایط مرزی نیز نقش مهمی در مکانیک کاربردی دارند. شرایط مرزی مربوط به جابه‌جایی‌ها و نیروها برای سازه‌ها باید بطور دقیق معین گردند. در مسائل انتقال حرارت نیز شرایط مرزی دما و همرفت (جابه‌جایی) را داریم. انتظار می‌رود که اجسام تحت شرایط مرزی خاص رفتار خاص و یگانه‌ای را از خود نشان دهند. رفتار شرایط مرزی موضوع بسیار مهمی است و در این فصل و بقیه کتاب با جزئیات در مورد آن بحث می‌شود.

۲-۲ مکانیک کاربردی

این فصل سعی بر معرفی مفاهیم و تئوری‌های کلاسیک مکانیک کاربردی به طور مختصر و قابل فهم دارد. دو کلاس متفاوت در مکانیک کاربردی جهت مطالعه اجسام وجود داد. اولین کلاس بر اساس قانون دوم نیوتن بنا نهاده شده است که در آن حرکت اجسام را تحت اثر نیروهای وارده مورد مطالعه قرار می‌دهند. پارامترهای مورد علاقه در حرکت، نیروهای وارده، نیروهای تماسی، نیروهای تکیه‌گاهی (گیرداری) و سایر نیروها از نیروهای داخلی و ... می‌باشد. از آنجائی که نیرو و قانون دوم نیوتن طبیعت برداری دارند این شاخه از مکانیک را مکانیک برداری^۱ می‌نامند. در حل یک مسئله با استفاده از مکانیک برداری نیروهای گیرداری و نیروهای عکس‌العمل به عنوان نیروهای مجهول در معادله وارد می‌شوند حتی اگر هیچ علاقه‌ای به یافتن نیروهای مجهول وجود نداشته باشد.

کلاس دوم که به اسم مکانیک تحلیلی^۲ نام‌گذاری می‌شود، بر اساس مفهوم کار و انرژی بنا نهاده شده است که بر خلاف مکانیک برداری از کمیت‌های اسکالر استفاده می‌گردد. لازم به ذکر است که این روش نیز بر اساس قانون دوم نیوتن بنا نهاده شده و فرم دیگری از این قانون می‌باشد. در این روش نیروهای گیرداری لزوماً در معادلات وارد نمی‌شوند و از معادلات حذف می‌گردند. لذا این روش بسیار مؤثر در حل سیستم‌های پیچیده با گیرداری‌های زیاد می‌باشد.

۲-۲-۱ یافتن معادله حاکم بر سیستم‌های پیوسته با استفاده از روش نیوتن (مکانیک برداری)

در این روش یک المان دیفرانسیلی در جسم را در نظر می‌گیریم و هدف یافتن معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم است که شرایط تعادل المان، روابط ساختاری و پیوستگی بین المان‌ها را در بر دارد. این معادلات دیفرانسیل باید در سرتاسر محدوده تعریف شده برای جسم صدق کنند و همچنین باید شرایط مرزی را نیز تعیین کنیم. در تحلیل دینامیکی شرایط آغازین نیز باید تعیین شوند.

در این روش ما رابطه تعادل و قوانین ساختاری را برای متغیرهای مساله در مورد یک المان دیفرانسیلی می‌نویسیم. که منجر به سیستمی از معادلات دیفرانسیل می‌گردد که رابطه بین متغیرها را بیان می‌کند. عموماً این معادلات به همراه معادلات دیفرانسیل دیگری که شرایط قيود سیستم و سازگاری‌ها را تامین می‌کنند هستند. نهایتاً برای فرمول‌بندی یک سیستم پیوسته تمام شرایط مرزی و در یک آنالیز دینامیکی شرایط آغازین مساله برای یک معادله دیفرانسیل بیان می‌شوند.

۲-۲-۱-۱ معادلات کلی اجسام در فضای سه بعدی (معادلات تعادل و روابط تنش-کرنش و روابط کرنش تغییرمکان)

یک جسم الاستیک سه بعدی و پیوسته با حجم V و سطح S را مطابق شکل ۲-۱ در نظر می‌گیریم. سطح جامد جسم نیز همچنین به سه نوع سطح تقسیم می‌شود: سطوحی که نیروهای خارجی روی آن تعریف شده‌اند که با $\mathbf{S_T}^3$ نشان داده می‌شوند؛ سطوحی که تغییرمکان‌ها روی آن‌ها مقید شده‌اند با $\mathbf{S_D}^4$ نمایش داده می‌شوند و سطوحی که آزاد هستند و اثری از

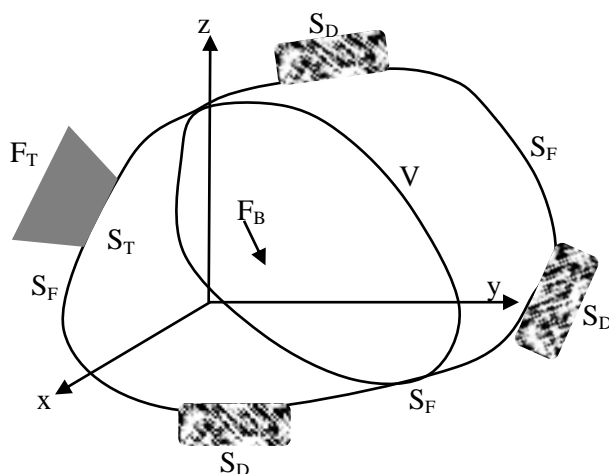
^۱ Vector Mechanics

^۲ Analytical Mechanics

^۳ Traction Surface

^۴ Displacement Surface

نیرو و یا تغییر مکان مقید شده در آن دیده نمی‌شود و با $S_F^{\hat{}}$ نمایش داده می‌شوند. جسم جامد ممکن است در حجم V توسط نیروهای جرمی F_B° و در سطح S_T توسط نیروهای سطحی F_T^{\vee} با هر توزیعی بارگذاری شده باشد.



شکل ۱-۲ جسم جامد تحت اثر نیروهای اعمالی اعم از نیروهای جرمی داخل جسم و نیروهای سطحی

نیروهای خارجی

در مطالعه اجسام پیوسته با دو نوع از نیروهای خارجی وارد بر جسم مواجه هستیم. دسته اول نیروهای جرمی می‌باشند که این نیروها مستقیماً در داخل محدوده تعریف شده برای جسم اثر می‌کنند. برای مثال نیروی جاذبه که از این دسته از نیروها می‌باشند که بر تمام جرم جسم و متناسب با توزیع جرم بر آن وارد می‌گردد. در خصوص نیروهای الکترو مغنتیک که از این دسته نیروها می‌باشند از آن بر جسم در مطالعات سازه‌ای صرف‌نظر می‌گردد. این نیروها بصورت نیرو در واحد جرم یا نیرو در واحد حجم و با دو نمایش تانسوری $F_{Bi}(x_1, x_2, x_3, t)$ $i=1,2,3$ و یا نمایش برداری $F_B(x, y, z, t)$ نشان می‌دهند.

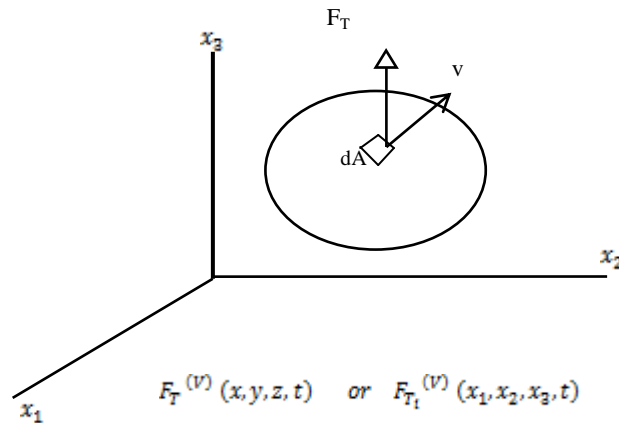
دسته دوم نیروها نیروهای سطحی می‌باشند. در بحث محیط‌های پیوسته ممکن است مرزهایی وجود داشته باشند با نیروهایی که روی آنها توزیع شده‌اند. این نیروها می‌توانند اثر جسمی بر روی جسم دیگر باشند. این نیروها را بصورت نیرو در واحد سطح می‌باشد که می‌تواند بر سطح جسم عمود نباشد. جهت نشان دادن این نیروها نیز میتوان از نمایش تانسوری $F_{Ti}(x_1, x_2, x_3, t)$ $i=1,2,3$ و یا نمایش برداری $F_T(x, y, z, t)$ استفاده نمود.

شکل زیر نیروهای خارجی F_T وارد بر سطح یک جسم را در دستگاه مختصات xyz یا (x_1, x_2, x_3) $i=1,2,3$ نشان می‌دهد.

[°] Free Surface

[^] Body Force

[^] Traction Force



شکل ۲-۲ نیروی سطحی

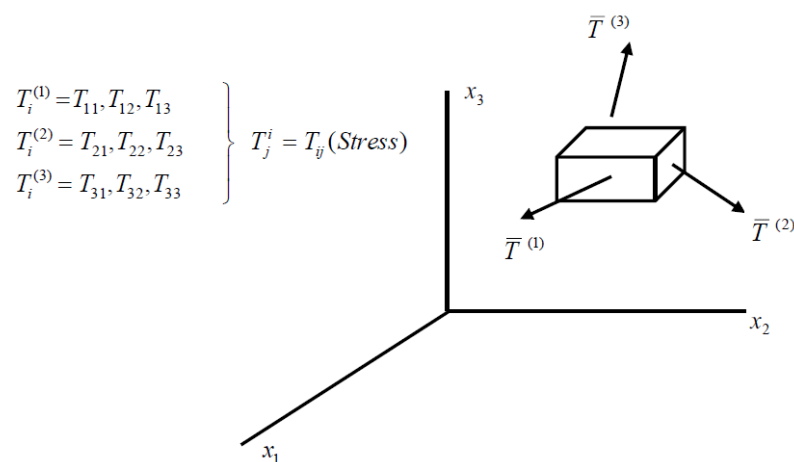
در شکل بردار \mathbf{v} عمود بر dA می‌باشد و اندیس بالایی \mathbf{F} امتداد نرمال صفحه‌ای می‌باشد که نیروی سطحی \mathbf{F} روی آن اثر می‌کند.

تنش

از تنش به عنوان نیروهای داخلی ایجاد شده در واحد سطح تحت اثر نیروهای خارجی بر جسم یاد می‌شود. تنش می‌تواند در نقاط مختلف جسم محاسبه گردد. منظور از نقطه در یک جسم المان مکعبی با ابعاد dx و dy و dz می‌باشد. در هر وجه از المان می‌توان به سه مولفه تنش اشاره کرد. در شکل زیر نیروهای داخلی به یک جسم بصورت تنش‌های وارده نشان داده شده است. اگر سطحی از المان که تنش \mathbf{T} روی آن اثر می‌کند در جهت محور x_j باشد \mathbf{T} را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\bar{T}^{(j)} \quad or \quad T_i^{(j)} (= T_{ji}) \quad (1-2)$$

تنش‌های T_{ij} را تنش‌های نرمال می‌نامند که عمود بر وجوه المان می‌باشد و تنش‌های T_{ij} ($j \neq i$) را که بصورت مماس بر وجوه المان می‌باشد، تنش‌های برشی می‌نامند.



شکل ۲-۳ تنشها در دستگاه متعامد

در جهت تعیین قرارداد برای علامت تنش‌های مثبت نرمال و برشی می‌توان گفت که تنش‌های نرمال اگر به سمت خارج اثر کنند (تنش‌های کششی) مثبت (+) فرض می‌شوند و اگر به سمت داخل اثر کنند (تنش فشاری) (-) منفی محسوب می‌شوند. تنش‌های برشی نیز مثبت‌اند اگر در وجه مثبت المان و در جهت مثبت دستگاه مختصات اثر کنند همچنین اگر در وجه منفی المان و در جهت منفی محور مختصات اثر کنند نیز مثبت فرض می‌شوند و در غیر این صورت منفی محسوب می‌گردند. مثلاً تنش برشی که در وجه منفی المان و در جهت مثبت محور مختصات اثر می‌کند منفی محسوب می‌گردد.

مطابق با تعاریف بالا، در هر نقطه از جسم جامد مولفه‌های تنش مطابق شکل ۲-۴ بر روی سطوح یک مکعب بسیار کوچک می‌تواند نشان داده شود. روی هر سطح از المان یک مولفه تنش قائم و دو مولفه تنش برشی وجود خواهد داشت. علامت قراردادی برای اندیس تنش‌ها بدین صورت است که حرف اول سطحی را که تنش روی آن اثر می‌کند را نشان می‌دهد و حرف دوم جهت تنش را مشخص می‌کند. جهت تنش‌های نشان داده شده در شکل مثبت در نظر گرفته می‌شود. با ممان‌گیری حول خط مرکزی المان یعنی با استفاده از معادله لنگر مومنتم زاویه‌ای برای جسم مورد نظر می‌توان نتیجه گرفت:

$$\mathbf{M} = \dot{\mathbf{H}}_0 \Rightarrow \tau_{jk} = \tau_{kj} \quad (2-2)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{xz} = \tau_{zx}; \tau_{zy} = \tau_{yz}$$

یا:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}; \sigma_{xz} = \sigma_{zx}; \sigma_{zy} = \sigma_{yz} \quad (3-2)$$

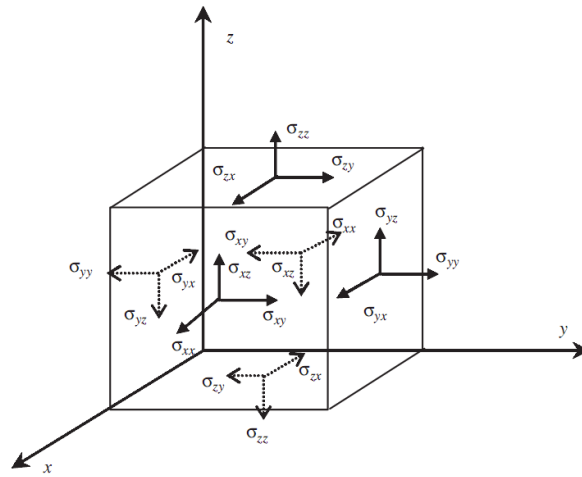
بنابراین در حالت کلی شش مولفه مستقل تنش در یک نقطه از یک جسم جامد وجود دارد. این تنش‌ها اغلب تانسور تنش نامیده می‌شوند و در فرم ماتریسی زیر نوشته می‌شوند:

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{xy}\} \quad (4-2)$$

یا:

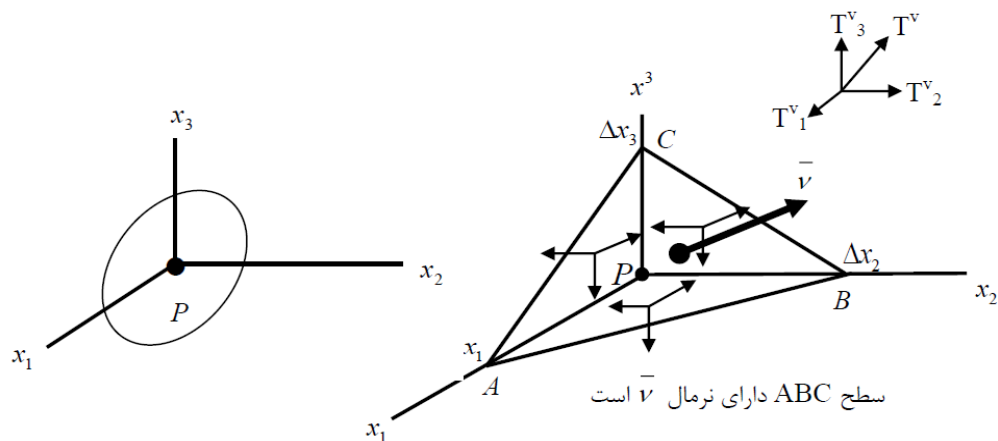
$$\{\tau\}^T = \{\tau_{xx} \quad \tau_{yy} \quad \tau_{zz} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{xy}\} \quad (5-2)$$

شکل زیر مولفه‌های تنشهای مستقل را در یک نقطه از جسم بر روی المان مکعبی نشان می‌دهد.



شکل ۴-۲ شش مولفه مستقل تنش بر روی یک قطعه مکعب بسیار کوچک در داخل یک جسم جامد

با داشتن بردارهای تنش در یک نقطه روی یک دستگاه مثلاً برای دستگاه مختصات متعامد می‌توان بردار تنش $\mathbf{T}^{(v)}$ در آن نقطه را برای هر سطحی با امتداد \mathbf{v} تعیین کرد. با در نظر گرفتن نقطه دلخواه \mathbf{P} در داخل جسم می‌توان تنش را برای این صفحه محاسبه نمود.



شکل ۵-۲ بردارهای تنش در یک المان بر روی هر سطحی دلخواه با امتداد \mathbf{v}

با به کار بردن قانون دوم نیوتن در امتداد محورها می‌توانیم به فرم تانسوری رابطه زیر که به رابطه کوشی معروف است برسیم:

$$T_i^{(v)} = T_{1i}v_1 + T_{2i}v_2 + T_{3i}v_3 \quad \text{or} \quad T_i^{(v)} = T_{ji}v_j = T_{ij}v_j \quad (۶-۲)$$

با دانستن بردار تنش T_{ij} در یک نقطه و استفاده از فرمول کوشی می‌توان با داشتن نرمال هر صفحه دلخواهی مثل \mathbf{v} تنش‌ها را روی آن صفحه محاسبه کرد. می‌توان تنش در سایر صفحات که از قطع المان مکعبی بدست می‌آید را براحتی پیدا کرد. می‌توان صفحه‌ای را یافت که در آن بردار تنش روی آن صفحه با امتداد نرمال آن صفحه یکی شود و یا به عبارت دیگر تنش‌های برشی روی آن صفحه صفر باشد که از این صفحه به عنوان صفحه تنشهای اصلی نام برد.

مساله: رابطه کوشی را اثبات نمایید.

کرنش

کرنش معیاری جهت بیان تغییرشکل یک جسم است. به عنوان مثال پاره خطی را در نظر بگیریم که در یک جسم قبل از بارگذاری و تغییرشکل نیافته است. اگر جسم یک حرکت صلب گونه را تجربه کند هیچ پاره خطی در جسم تغییر طولی را تجربه نخواهد کرد. منظور از حرکت صلب گونه همان انتقال و دوران کلی جسم است. تغییر طول خطوط موجود در جسم یا تغییر فاصله بین دو نقطه از جسم می‌تواند به عنوان معیاری از تغییرشکل اندازه گیری شود.

هنگامیکه نیروها بر سازه اعمال می‌شوند جسم تغییرشکل می‌دهد. اگر میدان جابجایی در سه جهت را با u_i نمایش دهیم Δu_i اختلاف بین موقعیت نقطه اولیه قبل از بارگذاری که همان موقعیت تغییر شکل نیافته می‌باشد با موقعیت تغییر شکل یافته بعد از بارگذاری می‌باشد.

اگر u, v, w را به ترتیب مولفه‌های جابجایی در جهت x, y, z بنامیم یعنی $u_1 = u_x = u$ و $u_2 = u_y = v$ و $u_3 = u_z = w$ می‌توان گفت کرنش تغییر جابجایی در واحد طول است، و بنابراین مولفه‌های کرنش می‌توانند توسط مشتق گیری از جابجایی‌ها محاسبه شوند. در تغییرشکل‌های کوچک می‌توان عبارات کرنش را بصورت روابط زیر ارائه نمود.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (7-2)$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{xy} \quad (i \neq j \text{ کرنش برشی مهندسی}) \quad (8-2)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{yz} \quad (9-2)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{xz} \quad (10-2)$$

لذا در مطابقت با شش مولفه تنش، شش مولفه کرنش در هر نقطه از جسم جامد وجود دارد که مشابه قبل در فرم برداری به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{xy}\} \quad (11-2)$$

شش رابطه کرنش - تغییر مکان در معادله بالامی‌توانند در فرم ماتریسی زیر بازنویسی شوند:

$$\{\varepsilon\} = [L] \{U\} \quad (12-2)$$

در رابطه بالا $\{U\}$ بردار تغییر مکان است و به شکل زیر بیان می شود:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (۱۳-۲)$$

و $[L]$ یک ماتریس از اپراتورهای مشتق های جزئی است که به راحتی با در نظر گرفتن معادلات کرنش- تغییر مکان بدست می آید:

$$[L] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix} \quad (۱۴-۲)$$

برای تفسیر فیزیکی عبارات کرنش می توان اثر کرنش ها بر روی یک مکعب بسیار کوچک به اضلاع $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ در مقایسه با حالت تغییر شکل نشان داد. وقتی تنش های برشی صفر هستند اضلاع عمود قبل از تغییر شکل و بعد از تغییر شکل نیز عمود باقی می مانند (زاویه بین اضلاع تغییر نمی کند). در صورتی که موقعیت و جهت المان به واسطه تغییر طول اضلاع و تغییر حجم می تواند تغییر کند. وجود تنش برشی باعث از بین رفتن زاویه عمود بین اضلاع می گردد (متوازی الاضلاع به جای مستطیل). تنش های نرمال باعث تغییر طول اضلاع مکعب می شوند و تنش های برشی زاویه بین اضلاع را تغییر می دهند.

مسأله: ثابت کنید کرنش حجمی از رابطه روبرو محاسبه می شود.

$$\left(\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \right)$$

معادلات ساختاری، قوانین هوک

معادله مشخصه یا معادلات ساختاری حاکم بر سیستم که همان روابط بین تنش ها و کرنش ها می باشد برای حالت رفتار الاستیک خطی از قانون تعمیم یافته هوک تبعیت می کند. این رابطه برای یک ماده غیرهمسان به صورت کلی زیر می باشد.

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\} \quad (۱۵-۲)$$

که $[C]$ در آن ماتریسی از ثابت های ماده است که معمولاً از آزمایش بدست می آیند. با توجه به تقارن تانسورهای تنش و کرنش و با استفاده از مفاهیم انرژی ثابت می شود که تانسور C_{ijkl} نیز متقارن می باشد. بنابراین از ۸۱ یا (۳^۴) ترم به علت سه تقارن ذکر شده در بالا تنها ۲۱ ترم غیروابسته (مستقل) هستند و باید تعیین گردند. در این حالت معادلات ساختاری می توانند به صورت ماتریسی زیر نوشته شوند:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C11 & C12 & C13 & C14 & C15 & C16 \\ & C22 & C23 & C24 & C25 & C26 \\ & & C33 & C34 & C35 & C36 \\ & & & C44 & C45 & C46 \\ & sym & & & C55 & C56 \\ & & & & & C66 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (16-2)$$

توجه شود که چون $C_{ij}=C_{ji}$ روی هم رفته ۲۱ مولفه مستقل از ثابت‌های مواد C_{ij} برای یک ماده کاملاً ناهمسان وجود دارد، که برای یک ماده همگن که خواص جسم در تمام نقاط جسم یکسان در نظر گرفته شود و یک ماده همسان که خواص جسم در تمام جهات در یک نقطه یکسان در نظر گرفته شود [C] میتواند به صورت زیر کاهش یابد:

$$[C] = \begin{bmatrix} C11 & C12 & C12 & 0 & 0 & 0 \\ & C11 & C12 & 0 & 0 & 0 \\ & & C11 & 0 & 0 & 0 \\ & & & (C11-C12)/2 & 0 & 0 \\ & sym & & & (C11-C12)/2 & 0 \\ & & & & & (C11-C12)/2 \end{bmatrix} \quad (17-2)$$

که در آن:

$$C11 = \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)}; \quad C12 = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}; \quad \frac{C11-C12}{2} = G; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (18-2)$$

که E و ν و G به ترتیب مدول یانگ، ضریب پواسون و مدول برشی ماده هستند. تنها دو ثابت مستقل در میان این سه ثابت وجود دارد. بر اساس رابطه بین این سه ثابت می‌توان گفت، برای هر ماده همگن و همسان با داشتن دو ثابت، ثابت سوم را می‌توان از معادله بالا محاسبه اساس کرد و در نتیجه داریم:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & Symmetric & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (19-2)$$

فرم تانسوری روابط بالا برای یک ماده همگن و همسان را می‌توان بصورت زیر بازنویسی کرد:

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{ll} + 2G \varepsilon_{ij} \quad \varepsilon_{ll} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \quad (20-2)$$

رابطه بالا شکل عمومی قانون هوک برای یک ماده همسان است که مولفه‌های تنش را برحسب ضریب ثابتی از کرنش‌ها می‌دهد. ثابت‌های λ و G نیز همچنین ثابت‌های لامه نامیده می‌شوند. می‌توان به عنوان یک نتیجه‌گیری ثابت کرد که برای یک ماده همگن و همسان تعداد ضرایب الاستیک غیر وابسته از ۲۱ به ۲ تقلیل می‌یابند.

یادآوری می‌گردد که تابع دلتا به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad (21-2)$$

فرم معکوس قانون هوک به صورت زیر است:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{ij} - \frac{\nu}{E} \tau_{kk} \delta_{ij} \quad (22-2)$$

E و ν از داده‌های آزمایش یک بعدی قابل حصول هستند.

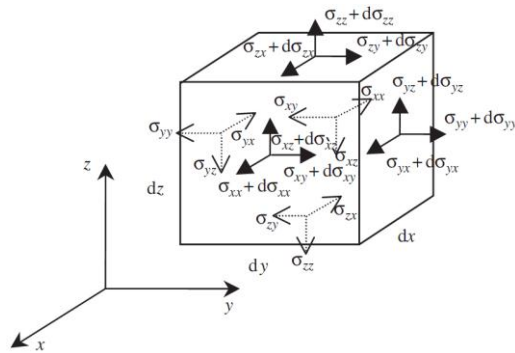
$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\tau_{xx} - \nu(\tau_{yy} + \tau_{zz})], \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy} = \frac{1}{2G} \tau_{xy}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\tau_{yy} - \nu(\tau_{xx} + \tau_{zz})] \quad (23-2)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+G)} \quad E = \frac{G(3\lambda+2G)}{\lambda+G} \quad (24-2)$$

معادلات تعادل دینامیکی

برای فرموله کردن معادلات تعادل دینامیکی یک المان بسیار کوچک از جسم را مطابق شکل ۲-۶ در نظر می‌گیریم. همانند شکل‌گیری تمام معادلات تعادل، تعادل نیروها در تمام جهات مورد نیاز است. توجه شود که چون این یک حالت عمومی از یک سیستم دینامیک است مجبوریم نیروهای اینرسی قطعه را نیز در نظر بگیریم. برای تعادل نیروها در جهت x داریم:

$$(\sigma_{xx} + d\sigma_{xx})dydz - \sigma_{xx}dydz + (\sigma_{yx} + d\sigma_{yx})dxdz - \sigma_{yx}dxdz + (\sigma_{zx} + d\sigma_{zx})dxdy - \sigma_{zx}dxdy + \underbrace{f_x}_{\text{external force}} = \underbrace{\rho \ddot{u} dx dy dz}_{\text{inertial force}} \quad (25-2)$$



شکل ۲-۶ تنش ها بر روی یک المان بسیار کوچک

عبارت سمت راست معادله بیانگر نیروی اینرسی است و f_x نیروهای جرمی اعمال شده در مرکز المان است. توجه شود که:

$$d\sigma_{xx} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx, \quad d\sigma_{yx} = \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy, \quad d\sigma_{zx} = \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dz \quad (2-26)$$

بنابراین معادله تعادل در جهت X یکی از معادلات تعادل می باشد که به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + f_x = \rho \ddot{u} \quad (2-27)$$

به طور مشابه تعادل نیروها در جهت های y, z دو معادله تعادل دیگر را نتیجه می دهد:

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + f_y = \rho \ddot{v} \quad (2-28)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = \rho \ddot{w} \quad (2-29)$$

معادلات تعادل می توانند در فرم ماتریسی مختصر به صورت زیر نوشته شوند:

$$[L]^T \{\sigma\} + \{f_b\} = \{\rho \ddot{U}\} \quad (2-30)$$

$\{f_b\}$ بردار نیروهای جرمی خارجی در جهات x, y, z است و $\{U\}$ بردار تغییر مکان می باشد که مشتق دوم آن بصورت زیر می باشد:

$$\{f_b\} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix} \quad \{\ddot{U}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \\ \ddot{w} \end{Bmatrix} \quad (31-2)$$

با استفاده از معادلات ساختاری، می‌توان معادله تعادل را بر حسب عبارات تغییرمکان به صورت زیر نوشت:

$$[L]^T [C] [L] \{U\} + \{f_b\} = \{\rho \ddot{U}\} \quad (32-2)$$

معادله بالا شکل کلی معادله تعادل دینامیکی را در فرم ماتریسی بیان می‌کند. اگر بارهای اعمالی بر سازه طبیعت استاتیکی داشته باشند با حذف ترم مربوط به نیروهای اینرسی در معادله فوق می‌توان به معادله تعادل استاتیکی رسید:

$$[L]^T [C] [L] \{U\} + \{f_b\} = \{0\} \quad (33-2)$$

روش دیگری که منجر به یافتن معادلات تعادل می‌گردد استفاده از روش تانسوری می‌باشد که در این روش اگر المانی به جرم dm را در نقطه p در نظر بگیریم و قانون دوم نیوتن را برای آن بنویسیم و از قانون کوشی نیز استفاده کنیم داریم:

$$df = dm \dot{V} \quad (34-2)$$

\dot{V} بردار سرعت جرم dm در نقطه P می‌باشد. با تقسیم نیروهای خارجی به نیروهای سطحی (تنش در سطوح المان) و نیروهای جرمی می‌توان نوشت:

$$\iint_S T_i^{(v)} dA + \iiint_D F_{Bi} dV = \iiint_D \dot{V}_i \rho dV \quad (35-2)$$

تئوری گاوس:

یک میدان تانسور مرتبه n ام پیوسته و دیفرانسیل پذیر را در حجم V در نظر بگیرید که مرزهای آن توسط سطح S تعریف شده است؛ تئوری گاوس در شکل کلی به صورت زیر بیان می گردد:

$$\iiint_V \frac{\partial T_{jk} \dots}{\partial x_i} dV = \iint_S (T_{jk} \dots) v_i dA \quad (۳۶-۲)$$

یا:

$$\iiint_V (T_{jk \dots})_{,i} dV = \iint_S (T_{jk \dots}) v_i dA \quad (۳۷-۲)$$

در اینجا v_i امتداد کسینوس های هادی بردار یکه به سمت خارج است. برای تانسور مرتبه صفر $T_{jk \dots}$ که یک تابع اسکالر ϕ نامیده می شود، رابطه بالا بصورت زیر نوشته می شود:

$$\iiint_V \phi_{,i} dV = \iint_S \phi v_i dA \quad (۳۸-۲)$$

یا:

$$\iiint_V \nabla \phi dV = \iint_S \phi dA \quad (۳۹-۲)$$

دیفرانسیل سطح برابر است با $dA = \mathbf{v} dA$

عموما از معادله بالا به عنوان قانون گاوس اشاره می شود.

با استفاده از قانون گوس و رابطه کوشی می توان نوشت:

$$\iiint_D (\tau_{ij,j} + F_{Bi} - \rho \dot{V}_i) dV = 0 \quad (۴۰-۲)$$

با توجه به اختیاری بودن دامنه مورد نظر می توان نوشت:

$$\tau_{ij,j} + F_{Bi} = \rho \ddot{V}_i \quad (۴۱-۲)$$

شرایط مرزی

در حالت کلی ما با دو نوع از شرایط مرزی مواجه هستیم: شرایط مرزی مربوط به تغییرمکان‌ها یا شرایط مرزی ضروری و شرایط مرزی مربوط به نیروها یا شرایط مرزی طبیعی. شرایط مرزی تغییرمکان‌ها می‌توانند به صورت زیر بیان شوند:

$$u = \bar{u} \quad \text{and / or} \quad v = \bar{v} \quad \text{and / or} \quad w = \bar{w} \quad (42-2)$$

علامت بار نشان دهنده مقدارهای معین برای تغییرمکان‌ها است. برای بیشتر مدل‌های واقعی تغییرمکان‌ها در تکیه‌گاه‌ها و قیود سازه معلوم‌اند و مقدار آنها صفر است؛ در این موارد شرایط مرزی به عنوان شرایط مرزی همگن نامیده می‌شوند. در غیر این صورت آن‌ها را شرایط مرزی ناهمگن می‌گویند.

شرایط مرزی نیرویی اغلب به فرم زیر بیان می‌شوند:

$$[n]\{\sigma\} = \{\bar{t}\} \quad (43-2)$$

که n توسط ماتریس زیر بیان می‌شود:

$$[n] = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & 0 & n_z & n_y \\ 0 & n_y & 0 & n_z & 0 & n_x \\ 0 & 0 & n_z & n_y & n_x & 0 \end{bmatrix} \quad (44-2)$$

که n_i ($i = x, y, z$) کسینوس‌های نرمال به سمت خارج روی شرایط مرزی هستند. علامت بار مبین مقادیر معلوم نیروها در مرزهاست. شرایط مرزی نیرویی نیز می‌توانند همگن یا غیرهمگن باشند. در شرایط مرزی نیرویی همگن مرز یک سطح آزاد است. ممکن است در ذهن خواننده این سوال مطرح شود که چرا به شرایط مرزی مربوط به تغییرمکان‌ها شرایط مرزی ضروری و به شرایط مرزی نیرویی شرایط مرزی طبیعی گفته می‌شود. عبارات ضروری و طبیعی از استفاده از روش فرمول‌بندی که (weak form) نامیده می‌شود (مثل روش باقیمانده وزنی) و برای کسب سیستم معادلات به کار می‌رود نشأت گرفته‌اند. در این روش‌ها ابتدا باید شرایط تغییرمکان‌ها ارضا شوند در غیر این صورت جواب اشتباه خواهد شد، بنابراین شرایط مرزی تغییرمکان‌ها ضروری خواهند بود. زمانیکه شرایط مرزی ضروری ارضا شوند فرایند حل منجر به معادلات تعادل به علاوه شرایط مرزی نیرویی می‌گردد. این بدین معنی است که شرایط مرزی نیرویی به طور طبیعی از فرایند حل بدست می‌آیند و به همین دلیل است که آن‌ها را طبیعی می‌نامیم. عبارات ضروری و طبیعی معنی فیزیکی خاصی از مساله را توصیف نمی‌کنند، و در واقع آن‌ها عبارات‌های ریاضی هستند و برای مسائل دیگری به جز مکانیک نیز به کار می‌روند. بحث شرایط مرزی به تفصیل در فصول دیگر مورد بحث قرار می‌گیرد.

معادلات بدست آمده در اجسام الاستیسیته خطی

معادلات بدست آمده در این بخش شامل معادلات تعادل، روابط کرنش تغییر مکان، و روابط تنش-کرنش می‌باشند.

مجموعه کامل معادلات برای الاستیسیته خطی برای یک جسم همگن و همسان شامل معادلات زیر است:

معادلات تعادل:

$$\tau_{ij,j} + F_{Bi} = 0 \quad (\text{سه معادله}) \quad (45-2)$$

روابط تنش-کرنش:

$$\tau_{ij} = \lambda \varepsilon_{ll} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (\text{شش معادله}) \quad (46-2)$$

روابط کرنش تغییر مکان:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{شش معادله}) \quad (47-2)$$

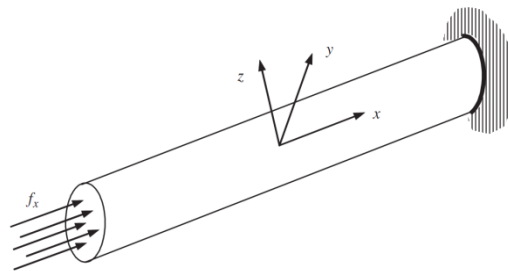
در اینجا ما ۱۵ معادله و ۱۵ مجهول (۶ مولفه مستقل تنش، ۶ مولفه مستقل کرنش و ۳ مولفه تغییر مکان) داریم که می‌توانیم مجهولات را محاسبه کنیم ولی باید مطمئن شویم که معادلات سازگاری نیز حتما ارضا گردند.

معادلات بدست آمده در این بخش قابل کاربرد برای اجسام جامد سه بعدی هستند. هدف بیشتر تحلیل‌ها حل معادلات تعادل و کسب جواب برای متغیرهای میدان (که در این جا تغییر مکان بود) است. به طور تئوریک این معادلات می‌توانند برای انواع سازه‌ها مثل خرپاها، تیرها، صفحات و پوسته‌ها به کار روند، چون به طور فیزیکی همه آنها طبیعتاً سه بعدی هستند. اگرچه در نظر گرفتن تحلیل سه بعدی برای تمام انواع سازه‌ها هزینه محاسباتی را بالا می‌برد و در بعضی موارد نیز از نظر عملی غیر ممکن است. بنابراین تئوری‌هایی برای در نظر گرفتن مزیت‌های هندسی سازه‌ها برای اجزای سازه‌ای متفاوت گسترش یافته‌اند. کاربرد این تئوریها با یک روش مناسب می‌تواند سبب کاهش قابل توجه در حجم محاسبات و آنالیز گردد.

در نهایت پس از یافتن معادله حاکم بر سیستم مورد مطالعه، هدف ما یافتن یک جواب برای یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای حاکمه می‌باشد به نحوی که این معادله در تمام نقاط و همچنین در شرایط مرزی جسم ارضا شود. این جواب می‌تواند شامل جابجایی‌ها و یا تنش‌ها و ... باشد.

۲-۱-۲-۲ معادلات اعضای خربایی

یک سازه خربایی معمول در شکل ۷-۲ نشان داده شده است. همان طور که در شکل نشان داده شده در هر عضو از خربا یکی از ابعاد بسیار بزرگتر از دو بعد دیگر است. نیرو تنها در جهت x اعمال شده است. بنابراین یک عضو خربا در واقع یک جسم یک بعدی است. معادلات تعادل برای اجسام یک بعدی می‌توانند با حذف ترم‌های مربوط به جهت y و z از معادلات سه بعدی بدست آیند. ابعاد سطح مقطع جسم بسیار کوچکتر از بعد جسم در جهت x است، و نیروهای خارجی نیز در جهت x اعمال شده‌اند، بنابراین تغییر مکان محوری تنها تابعی از x خواهد بود.



شکل ۷-۲ عضو خربا

تنش و کرنش

با حذف ترم‌های مربوط به تنش در جهت y, z تنش در عضو خربایی تنها σ_{xx} خواهد بود که اغلب به صورت σ_x بیان می‌شود، کرنش نظیر نیز ϵ_{xx} است که به صورت ϵ_x نشان داده می‌شود. رابطه کرنش تغییر مکان نیز به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (۴۸-۲)$$

معادلات ساختاری

قانون هوک برای اجسام یک بعدی شکل ساده زیر را دارد:

$$\sigma_x = E \epsilon_x \quad (۴۹-۲)$$

این در واقع شکل اصلی قانون هوک در یک بعد است. مدول یانگ (E) می‌تواند با استفاده از یک آزمایش کشش و یا فشار ساده محاسبه گردد.

معادلات تعادل دینامیکی

با حذف ترم مربوط به جهت y و z از معادله تعادل دینامیکی برای اجسام سه بعدی به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + f_x = \rho \ddot{u} \quad (50-2)$$

با جایگذاری معادلات ۴۸-۲ و ۴۹-۲ در معادله ۵۰-۲، معادله حاکم برای خرابای الاستیک و همگن (E مستقل از x است) به صورت زیر می‌باشد:

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_x = \rho \ddot{u} \quad (51-2)$$

با حذف ترم اینرسی از معادله ۵۰-۲ می‌توان معادله تعادل استاتیکی را برای خراباها بدست آورد:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + f_x = 0 \quad (52-2)$$

معادله تعادل استاتیک بر حسب تغییرمکان برای خرابای الاستیک و همگن با حذف ترم اینرسی از معادله ۵۱-۲ بدست می‌آید:

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_x = 0 \quad (53-2)$$

برای میله‌ای با سطح مقطع ثابت A معادله بالا می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F_x = 0 \quad (54-2)$$

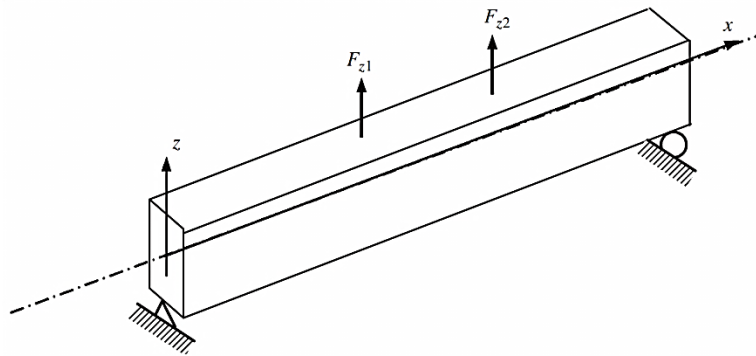
که در آن $F_x = f_x A$ نیروی خارجی اعمالی در جهت محور میله است.

۲-۱-۲-۳ معادلات تیرها

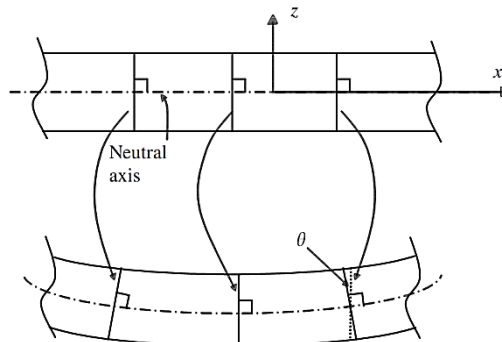
همانطور که در شکل ۸-۲ مشاهده می‌کنیم، یک تیر هندسه‌ای شبیه به یک عضو خرابایی دارد با این تفاوت که نیروهای اعمالی بر تیر به صورت عرضی وارد می‌شوند بدین معنی که جهت بارها عمود بر جهت محور تیر است. بنابراین در تیر خمشی به وجود می‌آید، در این حالت خیز در جهت y تابعی از x خواهد بود.

تنش و کرنش

تنش‌ها در سطح مقطع یک تیر به صورت تنش‌های نرمال σ_{xx} و تنش‌های برشی σ_{xz} هستند. تئوریهای زیادی برای تحلیل خیز تیرها وجود دارد. این تئوریها اصولاً به دو دسته کلی تقسیم می‌شوند. ابعاد سطح مقطع جسم بسیار کوچکتر از بعد در جهت محور تیر است و نیروهای اعمالی نیز در جهت عرضی Z عمود بر محور تیر اعمال می‌شوند، بنابراین خیز تنها تابعی از x خواهد بود.



شکل ۲-۸ تیر با تکیه گاه های ساده



شکل ۲-۹ فرضیه اویلر-برنولی برای تیرهای باریک $u = -z \theta$

دو تئوری موجود در تیرها، تئوری تیرهای باریک و تیرهای ضخیم می باشند. تمرکز این کتاب بر روی تیرهای باریک است که اغلب به عنوان تیرهای اویلر-برنولی از آن ها یاد می شود. در تئوری تیر اویلر-برنولی فرض می شود که مقاطع صفحه ای عمود بر محور طولی تیر قبل از خمش، پس از خمش نیز به صورت صفحه و عمود بر محور تغییر شکل یافته تیر (همان تار خنثی تیر) باقی می مانند (همانند شکل ۲-۹). با این فرض به دو نتیجه می رسیم، اول اینکه کرنش برشی ϵ_{xz} صفر است (به علت اینکه تغییر زاویه نداشتیم):

$$\epsilon_{zx} = 0 \quad (۵۵-۲)$$

که از آن می توان نتیجه گرفت که تنش برشی τ_{xz} برابر صفر است.

نتیجه دوم این است که تغییر مکان محوری u در فاصله z از تار خنثی به صورت زیر بیان می شود:

$$u = -z \theta \quad (۵۶-۲)$$

θ در رابطه بالا دوران در صفحه $x-z$ است. این دوران می تواند از خیز محور تیر w در جهت z بدست آید:

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (۵۷-۲)$$

ارتباط بین کرنش‌های نرمال و خیز می‌تواند توسط رابطه زیر داده می‌شود:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -zLw \quad (58-2)$$

که در آن L اپراتور دیفرانسیلی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (59-2)$$

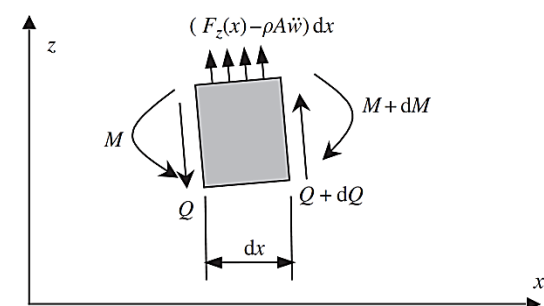
معادلات ساختاری

مشابه معادله اعضای خرپایی قانون هوک به شکل زیر برای تیرها بکار می‌رود:

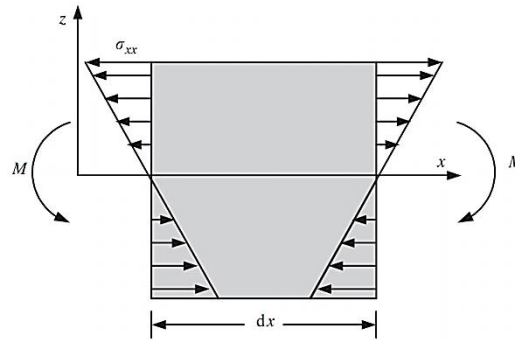
$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} \quad (60-2)$$

نیروهای برشی و لنگرهای خمشی

به علت وجود بارگذاری عرضی روی تیرها، ممان‌ها و برش‌هایی در مقطع تیر ایجاد می‌شوند. از طرف دیگر تیرها تحت اثر ممان خالص وارده به تیر هم می‌توانند خمش را تجربه کنند. در شکل ۲-۱۰ یک المان کوچک بطول dx که نماینده‌ای از تیر است را نمایش می‌دهد. این المان تحت بارهای خارجی f_z ، لنگر خمشی M ، نیروی برشی Q و نیروی اینرسی قرار دارد؛ که ρ چگالی و A سطح مقطع است.



شکل ۲-۱۰ المان جداشده کوچکی از تیر به طول dx



شکل ۱۱-۲ تنش های نرمال ایجاد شده به علت لنگرها

همانطور که در شکل ۱۱-۲ نشان داده شده، لنگرها در سطح مقطع تنش های نرمال σ_{xx} در جهت x ایجاد می کنند. این تنش ها می توانند با جایگزینی معادله ۵۸-۲ در معادله ۶۰-۲ محاسبه شوند:

$$\sigma_{xx} = -zELw \quad (۶۱-۲)$$

در معادله بالا مشاهده می شود که تنش های نرمال در جهت قائم σ_{xx} روی سطح مقطع تیر به صورت خطی تغییر می کنند. لنگرها و نیروهای برشی بوسیله انتگرال گیری از تنش ها در سرتاسر سطح مقطع بدست می آیند با انتگرال گیری از تنش های در روی سطح مقطع می توان به لنگر موجود در مقطع رسید:

$$M = \int_A \sigma_{xx} z dA = -E \left(\int_A z^2 dA \right) Lw = -EILw = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (۶۲-۲)$$

I همان لنگر دوم سطح (ممان اینرسی) حول محور y است، که می تواند برای یک شکل معلوم با رابطه زیر محاسبه گردد:

$$I = \int_A z^2 dA \quad (۶۳-۲)$$

حال با در نظر گرفتن تعادل نیروها را در جهت قائم (z) برای المان داریم:

$$dQ + (F_z(x) - \rho A \ddot{w}) dx = 0 \quad (۶۴-۲)$$

$$\frac{dQ}{dx} = -F_z(x) + \rho A \ddot{w} \quad (۶۵-۲)$$

همچنین اگر تعادل لنگرهای المان را حول سمت راست المان بررسی کنیم خواهیم داشت:

$$dM - Qdx + \frac{1}{2}(F_z - \rho A \ddot{w})(dx)^2 = 0 \quad (۶۶-۲)$$

با صرف نظر از ترم‌های کوچک مرتبه دوم شامل $(dx)^2$ از معادله قبل به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\frac{dM}{dx} = Q \quad (۶۷-۲)$$

و بالاخره با جایگزینی معادله (۶۲-۲) در معادله (۶۷-۲):

$$Q = -EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad (۶۸-۲)$$

معادلات (۶۲-۲) و (۶۸-۲) ارتباط بین لنگرهای خمشی و نیروهای برشی با خیز یک تیر اویلر-برنولی را بیان می‌کنند.

معادلات تعادل دینامیکی

معادله تعادل دینامیکی برای یک تیر به سادگی با جایگزین کردن معادله ۶۸-۲ در ۶۵-۲ بدست می‌آید:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \ddot{w} = F_z \quad (۶۹-۲)$$

معادله تعادل استاتیکی برای تیرها می‌تواند با حذف ترم دینامیکی از معادله قبل بدست آید:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = F_z \quad (۷۰-۲)$$

۴-۱-۲-۲ معادلات برای اجسام دو بعدی

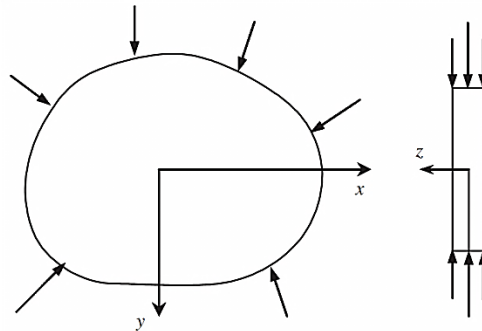
اگر مسائل سه بعدی را بتوان به صورت دو بعدی در نظر گرفت این مسائل به شدت ساده می‌شوند. برای بیان یک مساله به صورت دو بعدی ما اصولاً سعی بر حذف یکی از محورهای مختصات داریم (معمولاً محور Z) و بنابراین فرض می‌شود که تمام متغیرهای مساله به آن محور بستگی ندارند، مثلاً تمام نیروهای خارجی مستقل از محور Z هستند و در صفحه X-Y اثر می‌کنند. بنابراین ما با سیستمی دو مختصاتی (X,Y) مواجه هستیم.

اصولاً سه نوع از مسائل دو بعدی در ارتباط با اجسام جامد وجود دارد: مسائل تنش مسطحه و مسائل کرنش مسطحه و مسائل متقارن محوری.

مسائل تنش مسطح^۸

در مسائل تنش مسطح ضخامت در جهت Z در مقایسه با ابعاد جسم در جهت های X,Y خیلی کوچکتر است و نیروهای خارجی نیز تنها در صفحه X-Y اثر می کنند و تمام تنش ها در جهت Z ($\sigma_{zx}, \sigma_{zy}, \sigma_{zz}$) برابر صفرند و بنابراین تغییرمکانها تنها تابعی از X,Y می شوند (همانطور که در شکل ۲-۱۲ نشان داده شده اند).

توجه شود که برای مسائل تنش مسطح کرنش ϵ_{zx} و ϵ_{zy} صفر هستند اما ϵ_{zz} لزوما صفر نیست، این مساله می تواند به آسانی توسط استفاده از معادله کلی قانون هوک اثبات شود.



شکل ۲-۱۲ مسائل تنش مسطحه

سیستم معادلات برای مسائل تنش مسطح با حذف مولفه های مربوط به جهت Z در حالت سه بعدی بدست می آید. مولفه های تنش در این حالت برابرند با:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (۷۱-۲)$$

همچنین در حالت تنش مسطحه مولفه های کرنش در هر نقطه به صورت زیر بیان می شوند:

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (۷۲-۲)$$

روابط کرنش - تغییرمکان نیز عبارتند از:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (۷۳-۲)$$

u,v به ترتیب مولفه های تغییرمکان در راستای X,Y هستند. رابطه کرنش - تغییرمکان در فرم ماتریسی نیز به صورت زیر است:

$$\{\varepsilon\} = [L]\{U\} \quad (۷۴-۲)$$

که بردار تغییر مکان شکل زیر را دارد:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (۷۵-۲)$$

و ماتریس اپراتور دیفرانسیلی به راحتی با در نظر گرفتن معادله ۲-۱۴ به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$[L] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \quad (۷۶-۲)$$

روابط ساختاری

قانون هوک برای تنش مسطح در فرم ماتریسی به صورت زیر بیان می‌شود که در آن $\{\sigma\}$ و $\{\varepsilon\}$ به ترتیب در معادلات ۲-۷۱ و ۲-۷۲ بیان شدند.

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (۷۷-۲)$$

$[C]$ نیز ماتریسی از ثابت‌های ماده است که از آزمایش بدست می‌آیند. برای حالت تنش مسطح و جسم همسان داریم:

$$[C] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (PlaneStress) \quad (۷۸-۲)$$

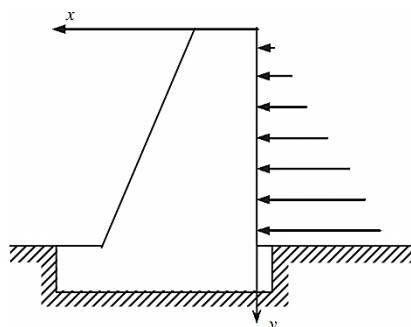
برای بدست آوردن ماتریس بالا شرایط $\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = \sigma_{zz} = 0$ را در قانون تعمیم یافته هوک برای اجسام همسان، اعمال نموده‌ایم.

مسائل کرنش مسطح^۹

در مسائل کرنش مسطح بعد جسم در جهت ضخامت (z) بسیار بزرگتر از ابعاد جسم در جهات x,y است و نیروها و سطح مقطع نیز در جهت z تغییر نمی‌کنند. در این حالت یک سطح مقطع از جسم می‌تواند بیانگر رفتار جسم باشد و بنابراین

Plane Strain^۹

تغییرمکان‌ها تنها تابعی از x, y می‌باشند و حرکت در راستای z در هر نقطه مقید شده است و تمام مولفه‌های کرنش‌ها در جهت z ($\epsilon_{zx}, \epsilon_{zy}, \epsilon_{zz}$) صفر هستند (همانطور که در شکل ۱۳-۲ نشان داده شده‌اند).



شکل ۱۳-۲ مسائل کرنش مسطحه

برای مسائل کرنش مسطحه تنش‌های σ_{zx}, σ_{zy} صفرند اما σ_{zz} لزوماً صفر نیست که این موضوع می‌تواند به آسانی با استفاده از قانون هوک اثبات شود. سیستم معادلات برای کرنش مسطح نیز همانند حالت تنش مسطح با حذف مولفه‌های مربوط به جهت z در حالت سه بعدی بدست می‌آید. مولفه‌های کرنش در این حالت برابرند با:

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (۷۹-۲)$$

مولفه‌های تنش نیز در هر نقطه به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (۸۰-۲)$$

روابط کرنش - تغییرمکان نیز باز عبارتند از:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (۸۱-۲)$$

u, v به ترتیب مولفه‌های تغییرمکان در راستای x, y هستند. رابطه کرنش - تغییرمکان در فرم ماتریسی نیز به صورت زیر است:

$$\{\epsilon\} = [L]\{U\} \quad (۸۲-۲)$$

که بردار تغییرمکان شکل زیر را دارد:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (۸۳-۲)$$

و ماتریس اپراتور دیفرانسیلی به راحتی با در نظر گرفتن معادله ۲-۱۴ به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\{L\} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \quad (۸۴-۲)$$

روابط ساختاری

باز قانون هوک برای حالت کرنش مسطح در فرم ماتریسی به صورت زیر بیان می‌شود که در آن $\{\sigma\}$ و $\{\epsilon\}$ به ترتیب در معادلات ۲-۷۹ و ۲-۸۰ بیان شدند.

$$\{\sigma\} = [C]\{\epsilon\} \quad (۸۵-۲)$$

[C] نیز ماتریسی از ثابت‌های ماده است که از آزمایش بدست می‌آیند. برای حالت کرنش مسطح و جسم همسان داریم:

$$[C] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/(2(1-\nu)) \end{bmatrix} \quad (۸۶-۲) \quad (Plane \ Strain)$$

برای بدست آوردن ماتریس بالا شرایط $\epsilon_{zx} = \epsilon_{zy} = \epsilon_{zz} = 0$ را در قانون تعمیم یافته هوک برای اجسام همسان، اعمال نموده‌ایم. یا روش دیگر این است که E و ν را به ترتیب با $E/(1-2\nu)$ و $\nu/(1-\nu)$ در رابطه (۲-۷۸) برای تنش مسطح جایگزین نماییم.

معادلات تعادل دینامیکی در مسائل تنش و کرنش مسطح

معادلات تعادل دینامیک برای یک جسم دوبعدی را به راحتی می‌توان با حذف ترم‌های مربوط به جهت z از معادلات ۲-۲۷ تا ۲-۲۹ بدست آورد:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + f_x = \rho \ddot{u} \quad (۸۷-۲)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = \rho \ddot{v} \quad (۸۸-۲)$$

این معادلات تعادل را در فرم مختصر ماتریسی می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$[L]^T \{\sigma\} + \{f_b\} = \{\rho \ddot{U}\} \quad (۸۹-۲)$$

$\{f_b\}$ بیانگر بردار نیروهای خارجی است:

$$\{f_b\} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} \quad (۹۰-۲)$$

برای مسائل استاتیکی سمت راست تساوی برابر صفر است و معادلات تعادل به فرم زیر نوشته می‌شوند:

$$[L]^T \{\sigma\} + \{f_b\} = \{0\} \quad (۹۱-۲)$$

معادلات ارائه شده در فضای دو بعدی در مقایسه با معادلات حالت سه بعدی بسیار آسان‌تر حل می‌شوند و هزینه محاسباتی کمتری لازم دارند.

مسائل متقارن محوری^{۱۰}

در مسائل متقارن محوری هنگامی که جسم متقارن تحت اثر بار متقارن محوری قرار می‌گیرد، تنش‌های موجود نیز بخاطر تقارن مستقل از زاویه‌ای می‌باشد که صفحه قائم در راستای محور z با صفحه xy می‌سازد. از این رو تمام مشتقات نسبت به زاویه صفر می‌گردد و مولفه‌های $\nu, \gamma_{r\theta}, \gamma_{\theta z}, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}$ صفر می‌گردند و مولفه‌های غیر صفر کرنش- تغییرمکان می‌توانند بصورت زیر نوشته شوند:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad (۹۲-۲)$$

که u و w به ترتیب مولفه‌های تغییرمکان در راستای w, r هستند. بردار تنش برای مسائل تنش متقارن محوری بصورت زیر نوشته میشود:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} \quad (۹۳-۲)$$

همچنین در این حالت بردار مولفه‌های کرنش در هر نقطه به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} \quad (94-2)$$

رابطه کرنش - تغییر مکان در فرم ماتریسی نیز به صورت زیر است:

$$\{\varepsilon\} = [L]\{U\} \quad (95-2)$$

که بردار تغییر مکان شکل زیر را دارد:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} \quad (96-2)$$

و ماتریس اپراتور دیفرانسیلی به راحتی با در نظر گرفتن معادله ۹۲-۲ به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (97-2)$$

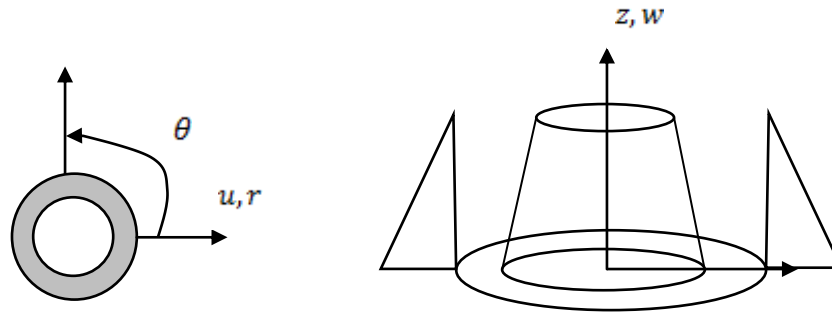
روابط ساختاری

قانون هوک برای مسائل متقارن محوری در فرم ماتریسی به صورت زیر بیان می‌شود که در آن $\{\sigma\}$ و $\{\varepsilon\}$ به ترتیب در معادلات ۹۳-۲ و ۹۴-۲ بیان شدند.

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (98-2)$$

$[C]$ نیز ماتریسی از ثابت‌های ماده است که از آزمایش بدست می‌آیند. برای یک جسم همسان داریم:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 \\ & & 1-\nu & 0 \\ \text{symmetry} & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} \quad (99-2)$$



شکل ۲-۱۴ استوانه تحت اثر بار متقارن محوری

مسأله: برای حالت تنش مسطح و کرنش مسطح معادله تعادل را برحسب تغییر مکان بدست آورید.

همانطور که ذکر شد برای مسائل دوبعدی معادله تعادل حاکم بصورت زیر می باشد:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + f_x = \rho \ddot{u} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = \rho \ddot{v} \end{cases} \quad (1)$$

که u و v مولفه های تغییر مکان در راستای x و y می باشند.

برای روابط کرنش و تغییر مکان داریم:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \quad (2)$$

همچنین برای روابط تنش و کرنش داریم:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{ll} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (3)$$

یا

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \lambda \varepsilon_{ll} + 2G \varepsilon_{xx} \\ \sigma_{yy} = \lambda \varepsilon_{ll} + 2G \varepsilon_{yy} \\ \sigma_{xy} = 2G \varepsilon_{xy} \end{cases} \quad (4)$$

که:

$$\varepsilon_{ll} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

برای مسائل تنش مسطحه ε_{zz} لزوماً صفر نبوده ولی برای مسائل کرنش مسطحه ε_{zz} صفر می باشد.

با قرار دادن روابط ۲ در روابط ۴ تنش‌ها برحسب تغییر مکان بدست می‌آیند.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \lambda \varepsilon_{II} + 2G \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_{yy} = \lambda \varepsilon_{II} + 2G \frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{array} \right. \quad (5)$$

با گرفتن دیفرانسیل از معادلات ۵ داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = \lambda \frac{\partial \varepsilon_{II}}{\partial x} + 2G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \lambda \frac{\partial \varepsilon_{II}}{\partial y} + 2G \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \end{array} \right. \quad (6)$$

با قرار دادن معادلات ۶ در معادله ۱ معادله ۷ بدست می‌آید:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \frac{\partial \varepsilon_{II}}{\partial x} + 2G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + f_x = \rho \ddot{u} \\ \lambda \frac{\partial \varepsilon_{II}}{\partial y} + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + f_y = \rho \ddot{v} \end{array} \right. \quad (7)$$

توجه داریم که:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon_{II}$$

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

بنابراین در نهایت داریم:

$$(\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon_{ll}}{\partial x} + G \nabla^2 u + f_x = \rho \ddot{u} \quad (8)$$

بطور مشابه برای معادله تعادل در راستای y داریم:

$$(\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon_{ll}}{\partial y} + G \nabla^2 v + f_y = \rho \ddot{v} \quad (9)$$

معادله ۸ و ۹ به معادلات ناویر معروف می‌باشند:

در غیاب نیروهای حجمی معادلات ۸ و ۹ بصورت زیر در می‌آید:

$$(\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon_{ll}}{\partial x} + G \nabla^2 u = \rho \ddot{u}$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon_{ll}}{\partial y} + G \nabla^2 v = \rho \ddot{v}$$

اگر بردار تغییر مکان را بصورت $\mathbf{U} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ تعریف کنیم آنگاه $\varepsilon_{ll} = \text{div} \mathbf{U}$

در این حالت در صورتی که $\text{div} \mathbf{U} = 0$ (یعنی کرنش حجمی برابر صفر باشد).

$$G \nabla^2 \mathbf{U} = \rho \ddot{\mathbf{U}}$$

یا

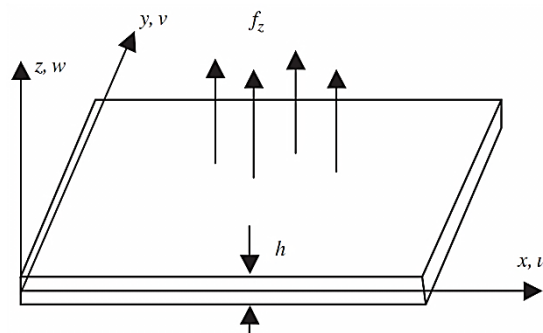
$$\nabla^2 \mathbf{U} = c \ddot{\mathbf{U}}$$

که $c = \frac{\rho}{G}$ سرعت موج عرضی و معادله فوق معادله موج می‌باشد.

۲-۱-۵ معادلات صفحات و پوسته ها^{۱۱}

پوسته ها یک نوع المانهای سازه ای می باشند که در حالت اولیه قبل از بارگذاری بصورت صاف^{۱۲} بوده و ضخامت آنها بمراتب از دیگر ابعاد آن کوچکتر می باشد. این دسته از سازه ها را می توان بصورت یک سازه صفحه ای دو بعدی در نظر گرفت بنحوی که بار عرضی وارده به صورت عمود بر صفحه اعمال می شوند.

یک صفحه مستطیلی ایزوتروپ به ابعاد a و b را در نظر بگیرید. در هر نقطه ای به مختصات x و y روی این صفحه، می توان مولفه های نیروها و ممانهای حاصله تحت اثر نیروهای خارجی را بصورت ممانهای خمشی^{۱۳} M_{xx} ، M_{yy} و ممانهای پیچشی^{۱۴} M_{xy} ، نیروهای برشی نرمال^{۱۵} Q_x و Q_y ، نیروهای غشائی مستقیم^{۱۶} N_x و N_y و در نهایت نیروی برشی غشائی^{۱۷} N_{xy} نامید. این نیروها در واحد عرض می باشند. مولفه های نیروهای ایجاد شده $(M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}, Q_x, Q_y)$ در مقطع سبب ایجاد تغییر شکلهای خارج صفحه ای^{۱۸} و همچنین مولفه های نیروهای ایجاد شده (N_x, N_y, N_{xy}) در مقطع سبب ایجاد تغییر شکلهای داخل صفحه ای^{۱۹} می شود. لازم بذکر است که دسته اول نیروها عملکرد خمشی و دسته دوم نیروها عملکرد غشائی را تضمین می کنند و این دو دسته از نیروها بطور همزمان در مقطع اثر می کنند.



شکل ۲-۱۵ عضو صفحه ای تحت نیروهای عرضی

^{۱۱} Plates

^{۱۲} Flat

^{۱۳} Bending Moments

^{۱۴} Twisting Moments

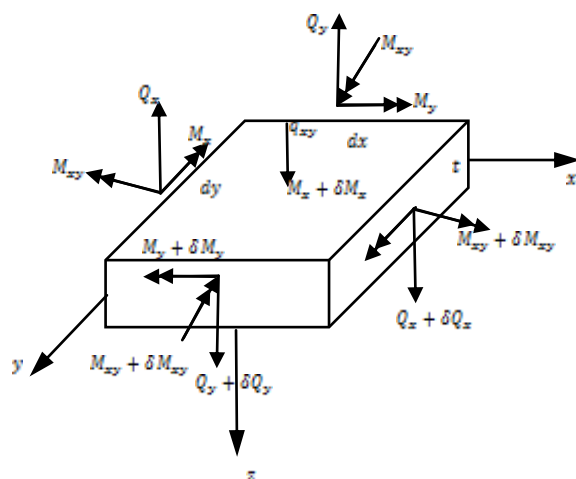
^{۱۵} Normal Shearing Forces

^{۱۶} Direct Membrane Forces

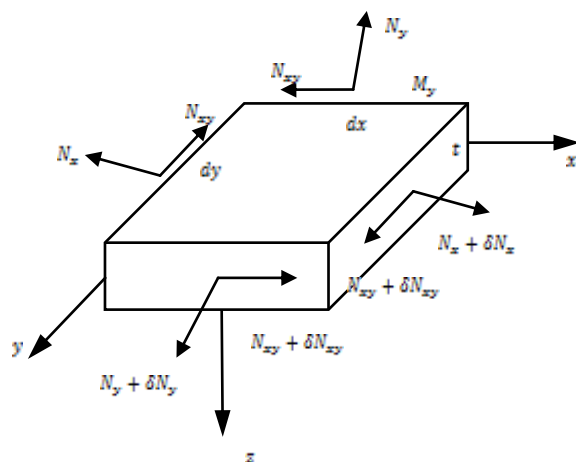
^{۱۷} Membrane Shearing Forces

^{۱۸} Out-of-plane Deformations

^{۱۹} In-plane Deformation

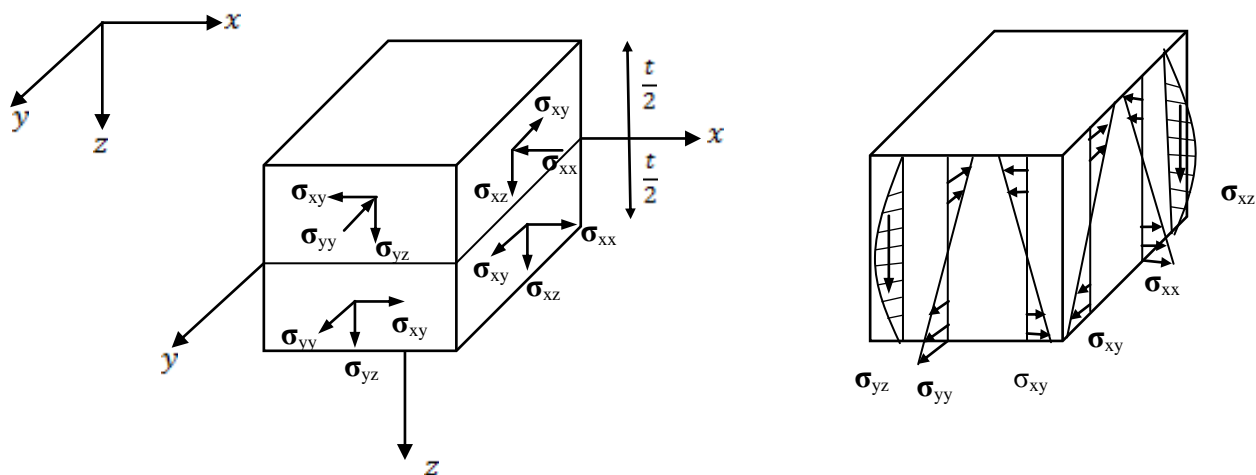


شکل ۲-۱۶ نیروهای موثر در عملکرد خمشی



شکل ۲-۱۷ نیروهای موثر در عملکرد غشائی

شکل ۲-۱۸ توزیع تنش در ضخامت المانهای بالا را نشان می دهد. با در نظر گرفتن یک صفحه دلخواه، و توزیع تنش داده شده در شکل ۲-۱۸، برآیند نیروها در واحد عرض بصورت زیر می باشد.



شکل ۲-۱۸ توزیع تنش در ضخامت پوسته ها

$$\text{Membrane Force } N = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma dz \quad \left\{ \begin{array}{l} N_{xx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx} dz \\ N_{yy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{yy} dz \\ N_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xy} dz \end{array} \right.$$

$$\text{Bending Moments } M = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma z dz \quad \left\{ \begin{array}{l} M_{xx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx} z dz \\ M_{yy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{yy} z dz \\ M_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xy} z dz \end{array} \right.$$

$$\text{Transverse Shear Forces } V = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma dz \quad \left\{ \begin{array}{l} V_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xz} dz \\ V_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{yz} dz \end{array} \right.$$

۲-۱۰۰

می توان دریافت که نیروهای غشائی و ممانهای خمشی تحت اثر تنشهای σ_{xx} ، σ_{yy} و σ_{xy} ایجاد می شوند و نیروهای برشی تحت اثر تنشهای برشی σ_{xz} و σ_{yz} ایجاد میگردند.

در بررسی رفتار پوسته ها، معمول است تا ضخامت را توسط صفحه ای بموازات صفحات بالائی و پائینی پوسته به دو نیمه تقسیم کرد. این صفحه میانی را میان تار^{۲۰} می نامند. ضخامت پوسته در جهت عمود بر میان تار اندازه گیری می گردد. خصوصیت خمشی پوسته ها تا حد زیادی وابسته به ضخامت آنها در مقایسه با سایر ابعاد آنها می باشد.

در تئوری صفحات، ما از اثر نیروهای غشایی که در پوسته ها در نظر گرفته می شود، صرف نظر می کنیم. پوسته ها به سه دسته اصلی تقسیم می شوند. پوسته های نازک با تغییر شکل های کوچک، پوسته های نازک با تغییر شکل های بزرگ و پوسته های ضخیم سه دسته از پوسته ها می باشند. معیار پوسته های ضخامت نازک در مسائل کاربردی نسبت ضخامت به بعد دهنه کوچکتر پوسته برابر با یا کوچکتر از $1/20$ می باشد. ما در این فصل تنها به بررسی معادلات پوسته های نازک با تغییر شکل های کوچک می پردازیم.

مروری بر روابط حاکم بر خمش پوسته های نازک با تغییر شکل های کوچک

پوسته شکل ۲-۱۹ را قبل از بارگذاری در نظر بگیرید بنحوی که صفحه میانتار در صفحه xy دستگاه مختصات قرار گرفته است و تغییر شکل در راستای z برابر با صفر است. بعد از بارگذاری تغییر شکل در یک نقطه از جسم در راستاهای x ، y و z بترتیب با u ، v و w نشان داده می شود. فرضیات اساسی برای پوسته های نازک با تغییر شکل های کوچک برای مصالح هموزن و ایزوتروپ و بر اساس رفتار الاستیک خطی مصالح بصورت زیر می باشد:

۱. ضخامت صفحات در مقایسه با طول و عرض آن ها کوچک است، یعنی صفحات نازک فرض می شوند.

$$h \ll L, B$$

۲-۱۰۱

۲. تغییر شکل میان صفحه در مقایسه با ضخامت پوسته کوچک است. شیب سطوح تغییر شکل یافته خیلی کوچک و ناچیز می باشد و مربع شیب در مقایسه با عدد یک خیلی کوچک می باشد.

۳. میان صفحه (صفحه ای که میان تار در آن واقع است) پس از خمش، بدون تغییر شکل^{۲۱} می ماند.

۴. صفحات نرمال بر میان صفحه پس از تغییر شکل نیز به صورت صفحه و عمود بر میان صفحه تغییر شکل یافته باقی می ماند. این بدین معنی است که تنشهای برشی τ_{xz} و τ_{yz} ناچیز و برابر با صفر هستند و تغییر شکل پوسته تحت تنشهای خمشی می باشند. می توان بر این اساس استنتاج کرد که کرنش ϵ_{zz} تحت اثر بارهای عرضی برابر صفر است.

۵. تنش عمود بر صفحه میان تار، σ_{zz} در مقایسه با سایر تنشها کوچک می باشد و قابل صرف نظر کردن می باشد. این فرض در نزدیکی بارهای متمرکز غیر واقعی می باشد.

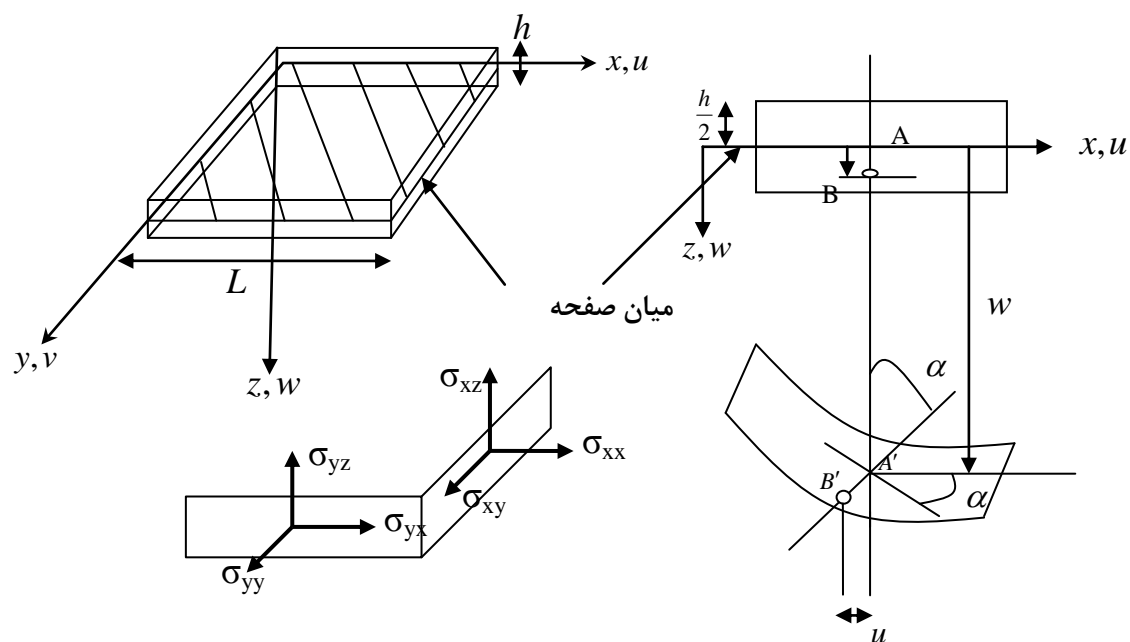
^{۲۰} Midplane

^{۲۱} Unstrained

فرضیات بالا که به فرضیات کیرشف مشهور^{۲۲} هستند شیبیه فرضیات بکار رفته در تیرهای خمشی می باشد. بر اساس فرضیات بالا میتوان نشان داد که مسئله سه بعدی پوسته به یک مسئله دو بعدی کاهش می یابد.

در حالتی که تغییر شکلهای کوچک نباشند، خمش پوسته ها باعث ایجاد کرنش در میان صفحه می گردد که سبب مخدوش شدن فرضهای ۲ و ۳ می شود.

در پوسته های ضخیم، همانند تیرهای عمیق تنشهای برشی مهم می باشند. در این صورت فرضیات ۴ و ۵ مخدوش میگردند.



شکل ۲-۱۹ پوسته با ضخامت ثابت در حالت قبل و بعد از بارگذاری

اگر تغییر شکل یک نقطه A در روی میان صفحه در راستای Z را بصورت $w=w(x,y)$ نشان دهیم. می توان تغییر مکان نقطه B روی صفحه عمود بر میان صفحه، و به فاصله Z از آن را، محاسبه نمود. با توجه به شکل، با فرض اینکه ضخامت صفحه تحت این تغییر مکان w تغییر نمی کند، تغییر مکان نقطه B به B' عبارت است از:

$$u = -z \sin \alpha + u_0(x, y)$$

$$v = -z \sin \beta + v_0(x, y)$$

۲-۱۰۲

u_0 و v_0 مقادیر تغییر مکانهای نقطه A روی تار میانی می باشند که بر اساس فرض ۳ برابر صفر میباشند. بر اساس فرض ۱ و ۲، به علت دوران های کوچک داریم:

^{۲۲} Kirchhoff hypotheses

$$\sin \alpha \cong \alpha \approx \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\sin \beta \cong \beta \approx \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\rightarrow u = -z \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\rightarrow v = -z \frac{\partial w}{\partial y}$$

۱۰۲-۲

روابط کینماتیک برای کرنش ها بر طبق فرض ۴ ($\epsilon_{zz} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$) به سه رابطه زیر کاهش می یابد:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

۱۰۳-۲

این روابط کرنشها را در هر نقطه از صفحه بدست می دهند.

میتوان انحنای^{۲۳} در هر نقطه را که عکس شعاع انحنای^{۲۴} می باشد با توجه به فرضیات ۱ و ۲ که فرض شده است تغییر مکان w نسبت به ضخامت صفحه کوچک می باشد، تقریب زد. چون دوران کوچک است، مربع آن در مقابل ۱ قابل صرف نظر می باشد، و بنابراین انحناء با نرخ تغییرات دوران برابر است.

$$\kappa = \frac{\frac{\partial \theta}{\partial x}}{(1 + \theta^2)^{3/2}} \approx \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

۱۰۴-۲

تنش ها

در حالت سه بعدی تنش، تنشها و کرنشها توسط رابطه قانون کلی هوک به هم مرتبط هستند. بر طبق فرض ۴ ($\gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$) در این حالت در صفحه xy حالت تنشی شبیه تنش مسطحه را داریم:

^{۲۳} Curvature

^{۲۴} Radius of Curvature

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned}$$

۱۰۵-۲

برایند تنش های داخلی بر روی مقطع، لنگر داخلی را ایجاد می کند

$$M_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{xx} dz = -\frac{E}{1-\nu^2} (w_{xx} + \nu w_{yy}) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (w_{xx} + \nu w_{yy}) = -D(w_{xx} + \nu w_{yy})$$

۱۰۶-۲

به همین ترتیب:

$$\begin{aligned}M_{yy} &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\nu w_{xx} + w_{yy}) = -D(\nu w_{xx} + w_{yy}) \\ M_{xy} &= -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{xy} dz = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} w_{xy} = D(1-\nu)w_{xy} = M_{yx}\end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix}}_{[M]} = \underbrace{\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}}_{[D]} \underbrace{\begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix}}_{[\kappa]}$$

۱۰۷-۲

که در آن D سختی خمشی صفحه است و M_{xx}, M_{yy} ممان های خمشی (در واحد طول) به ترتیب در جهت های y, x اند. M_{yx}, M_{xy} نیز ممان های پیچشی (در واحد طول) به ترتیب در جهت های y, x هستند.

نیروهای برشی

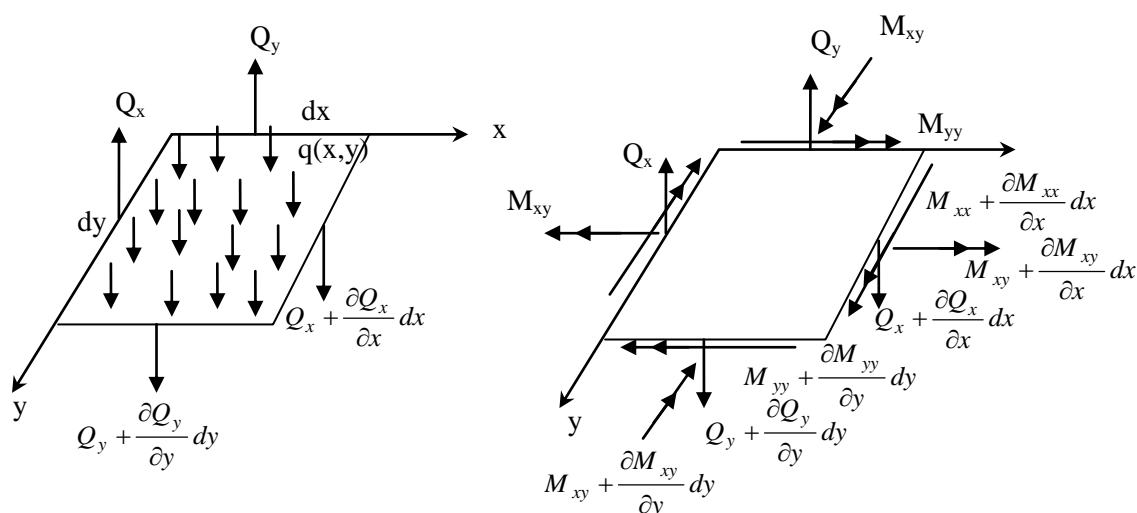
در حالیکه تئوری صفحات از اثر کرنشهای برشی ($\gamma_{yz} = \sigma_{yz}/G=0, \gamma_{xz} = \sigma_{xz}/G=0$) در خمش صرفنظر می کند، از اثر تنشهای برشی در محاسبه برش نمی توان صرفنظر کرد و مقدار نیروهای برشی در حد نیروهای خارجی نرمال بر صفحه می باشند و در محاسبه تعادل می بایست در نظر گرفته شوند. لذا با انتگرال گیری از تنش ها بر روی مقطع داریم:

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz} dz \quad Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yz} dz$$

که در آن Q_x, Q_y به ترتیب نیروهای برشی (در واحد طول) وجه هایی با نرمال y, x هستند.

معادلات تعادل

اگر بار گسترده سطحی عرضی عمود بر صفحه به صورت $q(x, y)$ فرض شود داریم:



شکل ۲-۲۰ معادلات تعادل

تعادل نیروها در راستای قائم:

$$\sum F_z = -Q_x dy - Q_y dx + (Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx) dy + (Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy) dx + q(x, y) dx dy = 0$$

با ساده سازی داریم:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q(x, y) = 0$$

با اعمال تعادل لنگرها حول محورهای x و y و صرف نظر از جملات مرتبه دوم:

$$\sum M_x = M_{yy} dx - (M_{yy} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} dy) dx + Q_y dx dy - M_{xy} dy + (M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx) dy = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + Q_y = 0$$

$$\sum M_y = -M_{xx} dy + (M_{xx} + \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} dx) dy - Q_x dx dy + M_{xy} dx - (M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx) dy = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0$$

۱۱۱-۲

با ترکیب روابط:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_y}{\partial y} &= \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} &= \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y \partial x} \\ \rightarrow \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q(x, y) &= \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + q(x, y) = 0\end{aligned}$$

۱۱۲-۲

اگر رابطه ممان ها را بر حسب تابع تغییر مکان که از قبل بدست آوردیم در رابطه بالا جایگزین کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial x^2} \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + 2(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y^2} \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] = q(x, y)$$

۱۱۳-۲

این رابطه برای حالت کلی برای صفحات با سختی خمشی D متغیر می باشد. با یادآوری اپراتور بای-هارمونیک به صورت زیر:

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

۱۱۴-۲

رابطه بالا را بصورت زیر هم میتوان نوشت:

$$\nabla^2 (D \nabla^2 w) - (1-\nu) \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = q(x, y)$$

۱۱۵-۲

برای حالت صفحه با ضخامت ثابت رابطه بالا بصورت زیر کاهش می یابد:

$$\begin{aligned}-D(w_{xxxx} + \nu w_{xxyy}) - 2D(1-\nu)w_{xxyy} - D(\nu w_{xxyy} + w_{yyyy}) + q(x, y) &= 0 \\ D(w_{xxxx} + 2w_{xxyy} + w_{yyyy}) &= q(x, y)\end{aligned}$$

۱۱۶-۲

در نتیجه معادله حاکم برای خیز ورق با ضخامت ثابت و خصوصیت ثابت جسم به صورت زیر بدست می آید:

$$\boxed{D \nabla^4 w = q(x, y)}$$

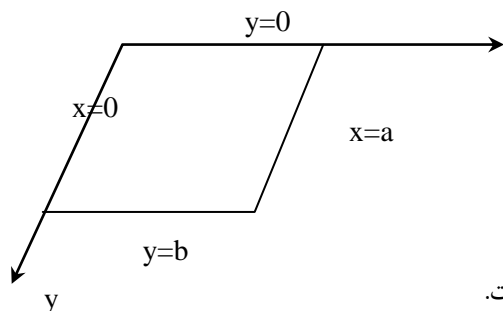
۱۱۷-۲

در بسیاری مسائل مهندسی از جمله جریان خیلی لزج یا خزشی تراکم ناپذیر، آنالیز تنش ها با استفاده از توابع ایری $\nabla^4 \phi = 0$ (معادلات سازگاری) فرم معادله حاکم بر مساله شبیه حالت بالاست.

شرایط مرزی

حل معادله حاکم بر صفحات که بر اساس خیز بدست آمده است، نیاز به دانستن شرایط مرزی صفحه مورد نظر دارد. این شرط مرزی شامل دو معادله در هر مرز صفحه می باشد، که هر حلی باید این شروط را در همه مرزها ارضاء کند. شروط مرزی بصورت تغییر مکان، شیب، یا نیرو و ممان، یا ترکیبی از اینها باشد. تنها فرق اساسی بین شرایط مرزی در اینجا با حالت تیر، وجود ممان پیچشی در صفحات می باشد. این ممان را میتوان با نیروهای معادل جایگزین کرد.

الف. وجوه با تکیه گاه ساده



(۱) در امتداد لبه های $x=0, x=a$ خیز و ممان برابر صفر است.

$$w=0, \quad M_{xx}=0$$

اما اگر خیز در امتداد y بر روی $x=0$ صفر باشد آنگاه:

$$w_y = w_{yy} = 0$$

بنابراین داریم:

$$M_{xx} = -D(w_{xx} + \nu w_{yy})$$

(۲) بر روی لبه های $y=0, y=b$ خیز و ممان برابر صفر است

$$w=0, \quad M_{yy}=0 \quad (w_{yy}=0)$$

برای خیز صفر بر روی $y=0, y=b$ و $w_{xx}=0$ و $w_x=0$

ب. برای وجه گیردار یا مقید

(۱) بر روی $x=0, x=a$ داریم

$$w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = w_x = 0$$

بر روی $y=0, y=b$ نیز:

$$w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = w_y = 0$$

ج. وجه آزاد

هیچ قیدی در این جا بر روی تغییر مکان ها وجود ندارد و نیروها نیز صفرند. مثلاً اگر وجه $x=a$ آزاد باشد داریم:

$$Q_x=0, \quad M_{xx}=0, \quad M_{yy}=0$$

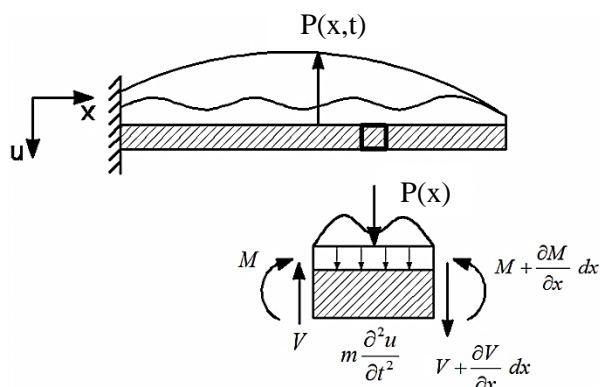
البته نتیجه گیری به صورت بالا یک اشکال ایجاد می کند زیرا تنها دو شرایط مستقل قابل قبول اند. با توجه به تئوری

کیرشهوف تنها دو رابطه باید استفاده شود، یعنی $M_{xx}=0$ و $T_{xx}=0$ (نیروی برشی موثر) که در آن $T_x = Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0$

نیروی برشی موثر بر روی وجه است.

مثال هایی از روش یافتن معادلات حاکم بر سیستم با استفاده از روش نیوتن

مثال ۱- عضو تیر



(المان دیفرانسیلی از طول تیر)

(m جرم واحد طول تیر است)

با بررسی تعادل نیروها در راستای قائم :

$$\frac{\partial V}{\partial x} dx + p dx = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx$$

یا:

$$\frac{\partial V}{\partial x} - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p = 0$$

با قرار دادن مجموع ممان های المان حول مقطع سمت چپ برابر صفر داریم:

$$\left(V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right) dx + p dx \frac{dx}{2} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx \frac{dx}{2} - M - \frac{\partial M}{\partial x} dx + M = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = V \quad *$$

از مفاهیم پایه مکانیک جامدات می دانیم:

$$M = EI \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \text{و} \quad \theta = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\Rightarrow M = EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \Rightarrow V = \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + P = 0$$

←

معادله نوسان عرضی یک تیر

برای بدست آوردن یک حل منحصر به فرد باید شرایط مرزی نیز تعیین گردند:

انتهای آزاد		تکیه گاه ساده		تکیه گاه گیردار	
$M = 0$ $V = 0$		$M = EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$		$u = 0$ $\theta = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$	

در این مساله

$$u, u_x = 0 \quad @ \quad x = 0$$

$$u_{xx}, u_{xxx} = 0 \quad @ \quad x = l$$

از تئوری مقدماتی تیرها می دانیم که صفحات عمود بر محور طولی تیر پس از خمش نیز به صورت صفحه و عمود بر محور طولی تیر باقی می مانند.

$\Delta e = \Delta x' - \Delta x$

$M = EI \frac{d\theta}{dx}$

$$\Sigma F = 0$$

$$\Rightarrow \int y dA = 0$$

$$\int -\frac{y}{c} \sigma_{\max} (-dA) = 0$$

$$M = \int \left(-\frac{y}{c} \sigma_{\max} \right) dAy$$

$\sigma = \frac{My}{I}$

$1/\rho = \frac{M}{EI}$

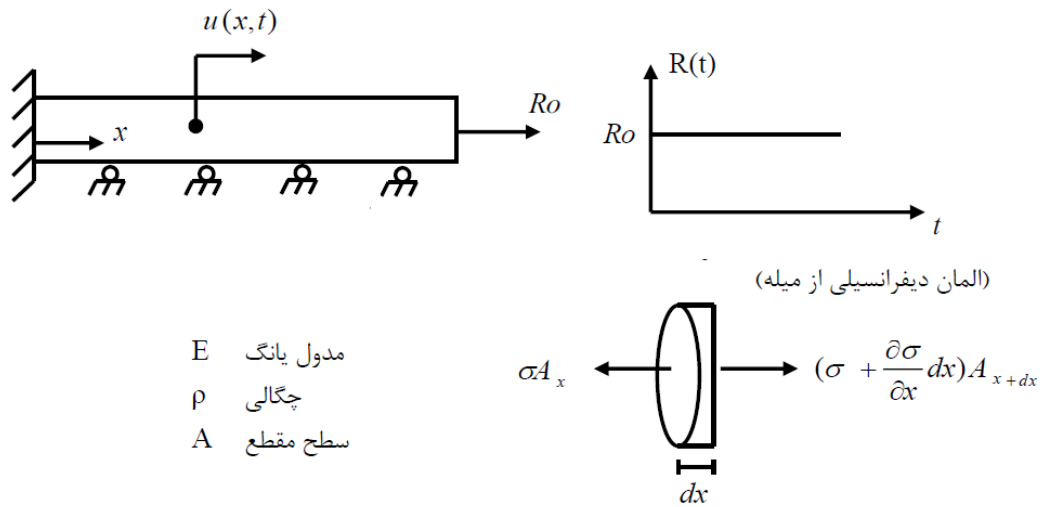
$$\frac{My}{I} = E \varepsilon \quad (\text{Hook's Law})$$

$$\frac{M}{EI} = \frac{\varepsilon}{y} = \frac{(\Delta e / \Delta x)}{y} = \frac{\Delta e / y}{\Delta x} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\rho}$$

➡

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 x}{dy^2}$$

مثال ۲- میله تحت بار محوری



E مدول یانگ
 ρ چگالی
 A سطح مقطع

تعداد در جهت x :

$$\left(\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx \right) A - (\sigma A) = A \rho dx \quad \ddot{u}$$

قانون هوک (رابطه ساختاری):

$$\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x}$$

با ترکیب معادلات بالا داریم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad C = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

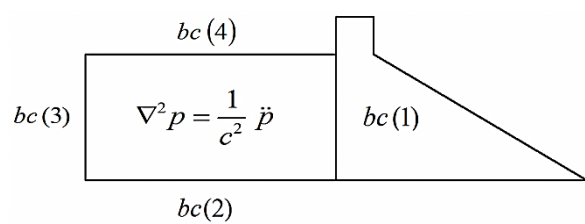
شرایط مرزی:

$$EA \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = Ro \quad u(0, t) = 0$$

شرایط آغازین:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad u(x, 0) = 0$$

مثال ۳- معادله دیفرانسیل حاکم بر مخزن سد را با استفاده از تئوری مکانیک سیالات بدست آورید.



مثال ۴- معادله دیفرانسیل حاکم بر ای تیر تحت پیچش خالص را بدست آورید.

۲-۲-۲ معادله حاکم بر سیستم های پیوسته با استفاده از روش انرژی (مکانیک تحلیلی)

روشهای انرژی که در مکانیک تحلیلی مورد بحث و بررسی قرار می گیرند فرم دیگری از قانون دوم نیوتن را تشکیل می دهند. در این فصل سعی می شود با معرفی کار به عنوان اثر نیرو بر جسم و با استفاده از قانون دوم نیوتن این نگاه متفاوت را بررسی نمائیم.

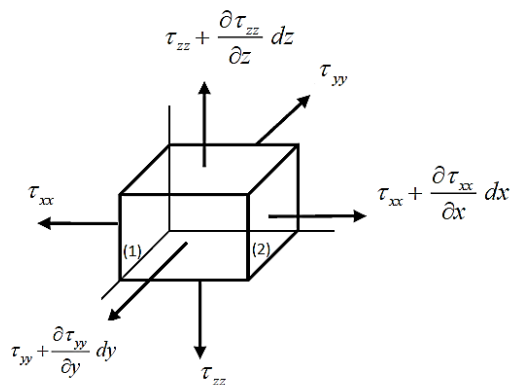
۲-۲-۲-۱ کار

کار عبارت است از حاصل ضرب نقطه ای بردار نیرو در تغییر مکان. بدین ترتیب در حرکت اجسام تحت اثر نیروها می توان کار حاصل از نیروهای داخلی و خارجی را محاسبه کرد. بر اساس مفهوم ریاضی ضرب نقطه ای نیرو و تغییر مکان، کار را می توان حاصل جمع جبری ضرب مولفه های نیرو در جهت اثر نیرو دانست. حاصل کار یک کمیت اسکالر می باشد که واحد آن برابر نیرو در تغییر مکان که همان ژولاست، می باشد.

۲-۲-۲-۲ کار حاصل از تنشها در طی یک تغییر مکان در المان جسم (حالت استاتیکی)

ما توانستیم روابط تنشها را بر اساس استفاده از معادلات تعادل بدست آورده و روابط کرنشها را از با استفاده از هندسه جسم و در توابع تغییر مکان نشان دهیم. این روابط همه بر اساس توابع تغییر مکان در نهایت بدست آمدند. عموماً این روابط شامل دما و زمان و دیگر متغیرها هستند که در حال حاضر از آنها صرف نظر می کنیم.

یک المان را در حالتی که تمام مولفه های تنش روی آن وجود دارد در نظر می گیریم. حال این المان بسیار کوچک از جسم را تحت تاثیر تنش های نرمال مطابق شکل زیر در نظر بگیرید:



شکل ۲-۲۱ المان تحت تاثیر تنشهای نرمال

تغییر مکان وجوه ۱ و ۲ در جهت x را به ترتیب برابر u_x و $u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx$ در نظر بگیرید. افزایش کار مکانیکی انجام شده توسط تنش های المان در اثر تغییر شکل صورت گرفته برابر است با:

$$\begin{aligned}
 & -\tau_{xx} du_x dy dz + \left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx \right) d \left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx \right) dy dz \\
 & + F_{Bx} d_x d_y d_z d \left(u_x + k \frac{\partial u_x}{\partial x} dx \right) \quad 0 < k < 1
 \end{aligned} \tag{۱۱۸-۲}$$

با حذف عبارات مرتبه بالا داریم:

$$\left[\tau_{xx} d \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \underbrace{\left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + F_{Bx} \right)}_{=0} du_x \right] dx dy dz \tag{۱۱۹-۲}$$

$= 0$ تعادل

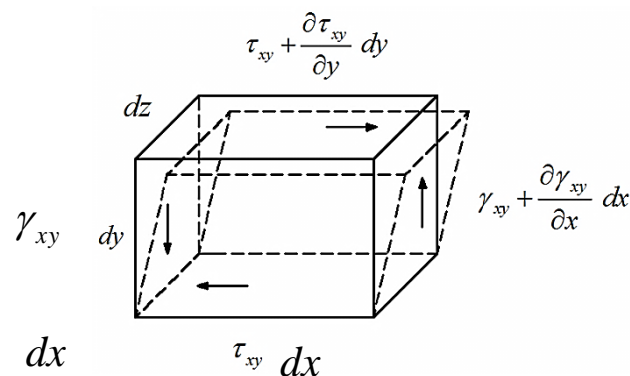
$$\tau_{xx} d \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) d_x d_y d_z = \tau_{xx} d\varepsilon_{xx} dV \tag{۱۲۰-۲}$$

اگر مشابه قبل همین عملیات را برای جهت‌های y و x انجام دهیم برای تنش‌های نرمال می‌توانیم افزایش کار مکانیکی را به صورت زیر بیان کنیم:

$$\left(\tau_{xx} d\varepsilon_{xx} + \tau_{yy} d\varepsilon_{yy} + \tau_{zz} d\varepsilon_{zz} \right) dV \tag{۱۲۱-۲}$$

$$d\chi = \tau_{xx} d\varepsilon_{xx} + \tau_{yy} d\varepsilon_{yy} + \tau_{zz} d\varepsilon_{zz} \tag{۱۲۲-۲}$$

اکنون حالت برش خالص را در نظر می‌گیریم:



شکل ۲-۲۲ المان تحت تاثیر تنشهای برشی

dx

افزایش کار مکانیکی در جهت x برابر است با:

$$\begin{aligned}
 & \left[\left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dz dx \right] \left\{ d \left(\gamma_{xy} + \beta \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} dx \right) dy \right\} \\
 & + B_x dx dy dz d \left(\gamma_{xy} + \eta \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} dx \right) (k dy) \quad 0 \leq \beta, \eta, k \leq 1 \\
 & \rightarrow \tau_{xy} d\gamma_{xy} dx dy dz = 2 \tau_{xy} d\varepsilon_{xy} dV
 \end{aligned} \tag{۱۲۳-۲}$$

اگر برای جهات y و z مشابه بالا عمل کنیم کل افزایش کار مکانیکی به علت تنش‌های برشی به صورت زیر خواهد بود:

$$2 \left(\tau_{xy} d\varepsilon_{xy} + \tau_{xz} d\varepsilon_{xz} + \tau_{yz} d\varepsilon_{yz} \right) dV \tag{۱۲۴-۲}$$

پس کل افزایش کار مکانیکی در واحد حجم برای تنش‌های نرمال و برشی به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
 d\chi &= \tau_{xx} d\varepsilon_{xx} + \tau_{yy} d\varepsilon_{yy} + \tau_{zz} d\varepsilon_{zz} + 2 \left(\tau_{xy} d\varepsilon_{xy} + \tau_{xz} d\varepsilon_{xz} + \tau_{yz} d\varepsilon_{yz} \right) = \\
 &= \sigma_{xx} d\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} d\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} d\varepsilon_{zz} + 2 \left(\sigma_{xy} d\varepsilon_{xy} + \sigma_{xz} d\varepsilon_{xz} + \sigma_{yz} d\varepsilon_{yz} \right) = \\
 &= \tau_{ij} d\varepsilon_{ij}
 \end{aligned} \tag{۱۲۵-۲}$$

(این رابطه که در فرم تانسوری نیز نوشته شده است تنها برای تغییر شکل های کوچک اعتبار دارد)
 اکنون با انتگرال گیری از رابطه قبل از صفر تا یک کرنش مشخص مثل ε_{ij} می توانیم به چگالی انرژی کرنشی^{۲۵} برسیم:

$$\chi = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \tau_{ij} d\varepsilon_{ij} \tag{۱۲۶-۲}$$

تابع چگالی انرژی کرنشی بیانگر کار مکانیکی انجام شده در واحد حجم بر روی یک المان توسط تنش‌ها به واسطه تغییر شکل‌های ایجاد شده در یک نقطه است.

$$d\chi = \tau_{ij} d\varepsilon_{ij} \Rightarrow \frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon_{ij}} = \tau_{ij} \tag{۱۲۷-۲}$$

برای رسیدن به انرژی کل ذخیره شده در جسم باید انرژی تک تک المان‌های موجود در جسم را با هم جمع زد که این کار توسط انتگرال گیری روی حجم جسم از تابع چگالی انرژی کرنشی صورت می گیرد:

$$U = \iiint_V \left[\int_0^{\varepsilon_{ij}} \tau_{ij} d\varepsilon_{ij} \right] dV \quad \text{انرژی کرنشی کل} \tag{۱۲۸-۲}$$

^{۲۵} Energy Density Function

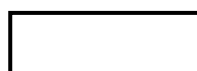
$$\chi = \int_0^{\epsilon_{ij}} \tau_{ij} d\epsilon_{ij} = \int \tau_{xx} d\epsilon_{xx} + \tau_{yy} d\epsilon_{yy} + \tau_{zz} d\epsilon_{zz} + 2(\tau_{xy} d\epsilon_{xy} + \tau_{xz} d\epsilon_{xz} + \tau_{yz} d\epsilon_{yz}) \quad (129-2)$$

$$U = \iiint_V \chi \, dV \quad (130-2)$$

مثالهایی از محاسبه انرژی کرنشی برای حالت‌های مختلف تنش در زیر آورده شده است.

خرپا: تنش تک محوری در تیری که تحت اثر نیروهای محوری قرار دارد باعث کرنشی می‌گردد که انرژی ذخیره شده مطابق زیر محاسبه می‌گردد. با فرض کرنش یکنواخت در مقطع و استفاده از قانون هوک می‌توان نوشت:

$$U = \iiint_V \left(\int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{xx} d\epsilon_{xx} \right) dV$$



$$\sigma = E\epsilon \quad \epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = u_x \quad d\epsilon = \frac{d\sigma}{E}$$

$$\chi = \int \sigma_x d\epsilon_x = \int \frac{\sigma_x}{E} d\sigma_x = \frac{1}{2} \frac{\sigma_x^2}{E}$$

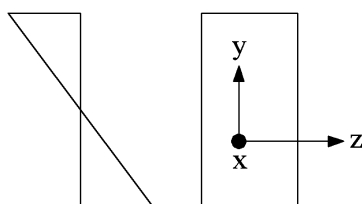
$$\chi = \frac{1}{2} \frac{\sigma_x^2}{E}$$

$$U = \iiint_V \frac{1}{2} \frac{\sigma_x^2}{E} dV$$

$$U = \int_0^L \frac{EA}{2} u_x^2 dx$$

تیر: برای محاسبه انرژی کرنشی در حالت خمش خالص برای یک تیر می‌توان گفت که در این حالت کرنش در مقطع تیر بصورت خطی تغییر می‌کند. به عبارت دیگر فرض صفحه بعد از بارگذاری صفحه باقی می‌ماند برقرار است. با استفاده از قانون هوک می‌توان روابط زیر را نوشت:

$$\chi = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{xx} d\epsilon_{xx} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_x^2}{E} dy$$



$$\sigma = \frac{My}{I}$$

$$\sigma = E\epsilon$$

$$U = \iiint \frac{1}{2E} \left(\frac{My}{I} \right)^2 dV$$

$$= \int \frac{1}{2E} \frac{M^2}{I^2} dx \int \int y^2 dA = \frac{1}{2E} \int \frac{M^2}{I} dx$$

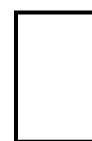
$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI w_{xx}^2 dx \quad M = \frac{EI}{\rho} = EI w_{xx}$$

برش خالص: برای محاسبه انرژی کرنشی در حالت تنش برشی خالص برای یک تیر می‌توان نوشت:

$$\chi = \int \tau_{ij} d\epsilon_{ij} = \int \tau_{ij} \frac{d\tau_{ij}}{G} = \frac{1}{2} \frac{\tau_{ij}^2}{G}$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$U = \frac{1}{2} \int \tau_{ij}^2 / G dV$$



۲-۲-۳ اصل کار مجازی

در مکانیک ذرات کار مجازی به عنوان کار انجام شده روی یک ذره بوسیله تمام نیروهایی که بر ذره اثر می‌کنند هنگامی که این ذره یک تغییر مکان فرضی یا مجازی سازگار با قیود موجود را تجربه می‌کند تعریف می‌گردد. نیروهای اعمالی در طول تغییر مکان مجازی ثابت فرض می‌شوند.

برای جسم شکل‌پذیر همانند ذرات با مشخص کردن یک میدان جابه جایی پیوسته با تغییر شکل‌های کوچک و قیود موجود نیروهای اعمالی ثابت فرض می‌شوند و جابجایی مجازی با به کار بردن عملگر δ مشخص می‌شود.

نیروهای خارجی در شرایط عمومی شامل نیروهای جرمی F_{Bi} که در سرتاسر جسم پخش شده‌اند و نیروهای سطحی $F_{Ti}^{(v)}$ که بر روی قسمتی از مرز مثل S_1 توزیع شده‌اند را می‌توان در نظر گرفت. بر روی قسمت باقیمانده از مرزها مثل S_2 نیز میدان جابه جایی u_i مقید شده است. در این مورد برای اعمال شرایط قیود باید مطمئن باشیم که روی S_2 ، $\delta u_i = 0$ است.

کار مجازی تحت اثر نیروهای خارجی در حالت کلی به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\delta W_{virt} = \iiint_V F_{Bi} \delta u_i dV + \iint_S F_{Ti}^{(v)} \delta u_i ds \quad (۲-۱۳۱)$$

بصورت تانسوری ارائه می گردند. F_{Bi} و $FT_i^{(v)}$ نباید در محاسبه δW_{virt} به δu_i وابسته باشند. لازم بذکر است که روابط بالا و در ادامه

چون روی S_2 ، $\delta u_i = 0$ است انتگرال سطح را برای پوشاندن کل سطح $S = S_1 + S_2$ گسترش می دهیم:
حال اصل کار مجازی برای یک جسم تغییر شکل پذیر را با استفاده از رابطه کوشی و تئوری گaus به صورت زیر بیان می کنیم:

$$\begin{aligned} \delta W_{virt} &= \iiint_v F_{Bi} \delta u_i dV + \iint_S \tau_{ij} \nu_j \delta u_i ds \\ &= \iiint_v F_{Bi} \delta u_i dV + \iiint_v (\tau_{ij} \delta u_i)_{,j} dV \\ &= \iiint_v (F_{Bi} + \tau_{ij,j}) \delta u_i dV + \iiint_v \tau_{ij} (\delta u_i)_{,j} dV \end{aligned} \quad (132-2)$$

اکنون یک میدان کرنش $\delta \varepsilon_{ij}$ به صورت سینماتیکی سازگار را معرفی می کنیم (این به خاطر این است که واریاسیون میدان کرنش مستقیماً از واریاسیون میدان جابجایی تشکیل شده است)

$$(\delta u_i)_{,j} = \delta(u_{i,j}) = \delta(\varepsilon_{ij} + W_{ij}) = \delta \varepsilon_{ij} + \delta W_{ij} \quad (133-2)$$

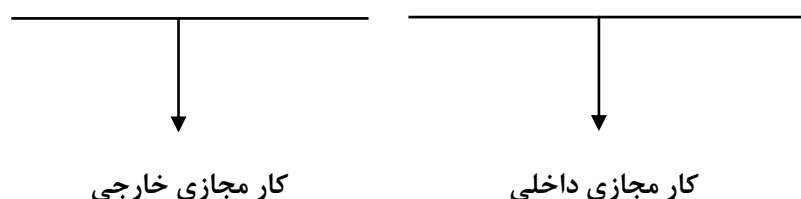
به علت مورب متقارن^{۲۶} بودن تانسور دوران W_{ij} و متقارن بودن تانسور تنش، $\delta W_{ij} \tau_{ij} = 0$ است.

$$\tau_{ij} (\delta u_i)_{,j} = \tau_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \quad (134-2)$$

$$\Rightarrow \iiint_v F_{Bi} \delta u_i dV + \iint_S F_{Ti}^{(v)} \delta u_i ds = \iiint_v \underbrace{(\tau_{ij,j} + F_{Bi})}_{\rho \ddot{u}_i} \delta u_i dV + \iiint_v \tau_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (135-2)$$

اکنون شرایط کار مجازی را بررسی می کنیم. این بدین معنی است که در معادلات بالا در هر نقطه ای از جسم (به علت تعادل استاتیکی) داریم: $T_{ij,j} + F_{Bi} = \rho \ddot{u}_i (=0)$ اما در حالت کلی داریم:

$$\Rightarrow \iiint_v F_{Bi} \delta u_i dV + \iint_S F_{Ti}^{(v)} \delta u_i ds = \iiint_v T_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV + \iiint_v \rho \ddot{u}_i dV \delta u_i \quad (136-2)$$



^{۲۶} Antisymmetric

این همان اصل کار مجازی در مورد اجسام شکل پذیر است. می توان گفت که شرط لازم برای تعادل برای هر میدان جابجایی سازگار این است که کار مجازی خارجی انجام شده توسط نیروهای جرمی و نیروهای سطحی باید برابر با کار مجازی داخلی (توسط تنش ها) و کار معادل اینرسی جرم بر سیستم باشد.

این شرط کافی برای تعادل دینامیکی است. در حالت استاتیکی عبارت شتاب برابر صفر می گردد.

توجه شود که ارتباط ریاضی بین میدان تغییر شکل و میدان تنش مستقل از هر رابطه ساختاری است و برای تمام مواد به کار می رود، تنها محدودیت آن کوچک بودن تغییر شکل ها است.

حال ما باید نشان دهیم که ارضای اصل کار مجازی شرط لازم و کافی برای تعادل بین نیروهای خارجی و تنش ها در یک جسم است. همچنین نشان دادیم که ارضای اصل کار مجازی برای متعادل بودن جسم کافی است.

فرض کنید تعادل کار مجازی معتبر است:

$$\begin{aligned} \iiint_v \tau_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV &= \iiint_v \tau_{ij} \delta \left(\frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2} \right) dV = \iiint_v \tau_{ij} \frac{(\delta u_i)_{,j}}{2} dV + \iiint_v \tau_{ij} \frac{(\delta u_j)_{,i}}{2} dV \\ &= \iiint_v \tau_{ij} (\delta u_i)_{,j} dV \end{aligned} \quad (137-2)$$

با استفاده از تقارن τ_{ij} می توانیم عبارت آخری را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\iiint_v \tau_{ij} (\delta u_i)_{,j} dV = \iiint_v (\tau_{ij} \delta u_i)_{,j} dV - \iiint_v \tau_{ij,j} \delta u_i dV \quad (138-2)$$

با استفاده از تئوری دیورژانس:

$$\begin{aligned} \iiint_v \tau_{ij} (\delta u_i)_{,j} dV &= \iint_s \tau_{ij} \delta u_i \nu_j ds - \iiint_v \tau_{ij,j} \delta u_i dV \\ &= \iint_{S_1} \tau_{ij} \delta u_i \nu_j ds - \iiint_v \tau_{ij,j} \delta u_i dV \end{aligned} \quad (139-2)$$

بر روی مرز S_2 داریم: $\delta u_i = 0$

حال نتایج بالا را در آخرین انتگرال اصل کار مجازی جایگزین می کنیم تا به رابطه زیر که قبلا هم بدست آمده بود برسیم:

$$\iiint_V F_{Bi} \delta u_i dV + \iint_S F_{Ti}^{(v)} \delta u_i ds = \iiint_V \tau_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV + \iiint_V \rho \ddot{u}_i dV \delta u_i \quad (۱۴۰-۲)$$

یا:

$$\iiint_V (\tau_{ij,j} + F_{Bi}) \delta u_i dV + \iint_S (F_{Ti}^{(v)} - \tau_{ij} \nu_j) \delta u_i ds = \iiint_V \rho \ddot{u}_i dV \delta u_i \quad (۱۴۱-۲)$$

چون δu_i اختیاری است:

$$\tau_{ij,i} + F_{Bi} = \rho \ddot{u}_i \quad \text{in } V \quad (۱۴۲-۲)$$

$$F_{Ti}^{(v)} = \tau_{ij} \nu_j \quad \text{on } S_1 \quad (۱۴۳-۲)$$

رابطه اولی در واقع همان قانون دوم نیوتن برای تعادل هر نقطه داخل جسم است و رابطه دوم نیز همان فرمول کوشی است که ارضای تعادل در مرز را نشان می‌دهد. در نهایت می‌توان نتیجه گرفت که ارضای اصل کار مجازی شرط لازم و کافی برای تعادل است.

۲-۲-۲ حساب تغییرات^{۲۷}

تابع تک متغیره به فرم $y = f(x)$ را در نظر بگیرید فرض کنید که هدف پیدا کردن نقاط مینیمم موضعی یا ماکزیمم موضعی یا نقطه عطف تابع است. اگر بسط تیلور تابع $f(x)$ را حول نقطه $x=a$ بنویسیم داریم:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots \quad (۱۴۴-۲)$$

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

اگر a یک نقطه مینیمم باشد باید در یک همسایگی آن داشته باشیم: $f(x) - f(a) > 0$

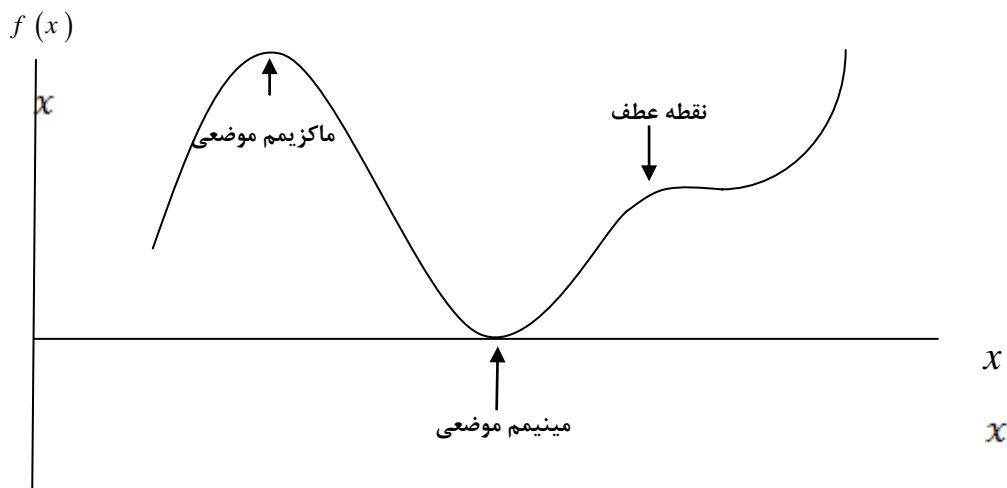
حال اگر به بسط تیلور تابع توجه کنیم نتیجه خواهیم گرفت که همه ترم‌های سمت راست تساوی باید مثبت باشند. در ترم اول به علت وجود جمله $(x-a)$ وقتی از سمت چپ و راست به a میل می‌کنیم علامت منفی و مثبت خواهد شد، پس برای جلوگیری از این تغییر علامت این ترم صفر باید باشد پس نتیجه می‌گیریم که: $f'(a) = 0$. حال اگر به ترم دوم دقت کنیم متوجه می‌شویم که علامت این ترم به مقدار $f''(a)$ وابسته است و چون ما می‌خواهیم سمت راست معادله مثبت باشد باید داشته باشیم: $f''(a) > 0$

اگر a را ماکزیمم فرض کنیم (باید در همسایگی a داشته باشیم: $f(x) - f(a) < 0$ و مشابه قبل عمل کنیم به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$f'(a) = 0, \quad f''(a) < 0$$

برای نقطه عطف نیز داریم:

$$f''(a) = 0$$



شکل ۲-۲۳ نقاط مینیمم موضعی، ماکزیمم موضعی و نقطه عطف یک تابع

توابع فانکشنال

در بسیاری از کاربردهای فیزیکی با توابعی سرو کار داریم که خود تابعی از توابع دیگرند که به آنها در اصطلاح فانکشنال می‌گوییم. به عنوان مثال به انتگرال زیر یک فانکشنال می‌گوییم:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx \quad (۱۴۵-۲)$$

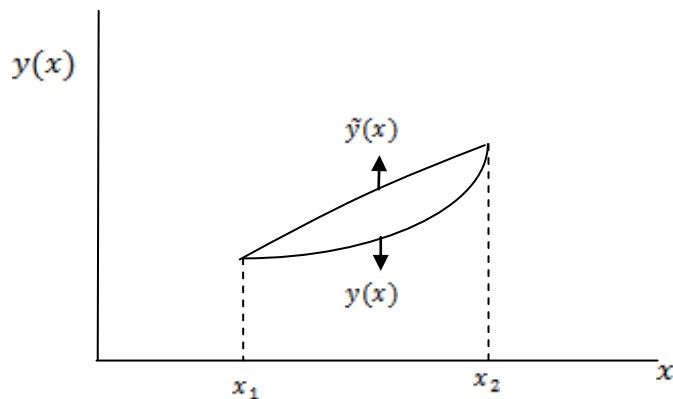
ما در واقع به دنبال اکسترمم کردن این توابع فانکشنال هستیم. مثلاً در انتگرال بالا به دنبال یک y هستیم که I را اکسترمم کند.

واریاسیون مرتبه اول:

اگر یک فانکشنال به فرم زیر را در نظر بگیریم:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \quad (۱۴۶-۲)$$

که در آن F تابعی معلوم از x, y, y' است، مقادیر I بین نقاط (x_1, y_1) و (x_2, y_2) بستگی به مسیر انتخابی بین این دو نقطه دارد (همان $y(x)$). در شکل زیر $y(x)$ جواب واقعی است که I را اکسترمم می کند و $\tilde{y}(x)$ ها مسیرهایی در همسایگی $y(x)$ هستند که می خواهند I را اکسترمم کنند.



شکل ۲-۲۲ تعریف تابع و واریاسیون تابع

می توانیم $\tilde{y}(x)$ را به صورت زیر بنویسیم:

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \varepsilon \eta(x) \quad (۱۴۷-۲)$$

که در آن ε یک پارامتر بسیار کوچک است، $\eta(x)$ نیز تابعی است که شرط زیر را ارضا می کند:

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \quad (۱۴۸-۲)$$

رابطه قبل در واقع همان ارضای شرایط مرزی برای جواب است.

حال اگر تابع $\tilde{y}(x)$ را در فانکشنال قرار دهیم داریم:

$$\bar{I} = \int_{x_1}^{x_2} F(x, \tilde{y}, \tilde{y}') dx = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y + \varepsilon \eta, y' + \varepsilon \eta') dx \quad (۱۴۹-۲)$$

بعد از انتگرال گیری حاصل انتگرال فوق تنها تابعی از ε خواهد بود: $\bar{I} = f(\varepsilon)$

اکنون بسط تیلور \bar{I} را حول نقطه $\varepsilon = 0$ می نویسیم:

$$\bar{I}(\varepsilon) = \bar{I}(0) + \bar{I}'(0)(\varepsilon) + \frac{\bar{I}''(0)}{2!}(\varepsilon)^2 + \dots \quad (۱۵۰-۲)$$

$$\bar{I}(\varepsilon) - \bar{I}(0) = \bar{I}'(0)(\varepsilon) + \frac{\bar{I}''(0)}{2!}(\varepsilon)^2 + \dots$$

در تابع یک مجهولی توضیح دادیم که برای اکسترمم کردن تابع باید مشتق تابع برابر صفر باشد و لذا در اینجا با استفاده از قانون مشتق‌گیری زنجیره‌ای برای اکسترمم کردن \bar{I} چون تابع ε است، خواهیم داشت:

$$\left(\frac{\partial \bar{I}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'} \frac{\partial \tilde{y}'}{\partial \varepsilon} dx \quad (۱۵۱-۲)$$

با توجه به اینکه $\frac{\partial \bar{y}}{\partial \varepsilon} = \eta$ و $\frac{\partial \bar{y}'}{\partial \varepsilon} = \eta'$ و چون $\varepsilon = 0$ است در نتیجه داریم:

$$\tilde{y}(x) = y(x) \quad ; \quad \tilde{y}'(x) = y'(x) \quad (۱۵۲-۲)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) dx = 0$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y} \eta dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' dx = 0$$

اگر برای انتگرال دوم از تکنیک انتگرال‌گیری جز به جز بهره بگیریم:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' dx = \frac{\partial F}{\partial y'} \eta \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta dx \quad (۱۵۳-۲)$$

از تعریف تابع $\eta(x)$ می‌دانیم که:

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \quad (۱۵۴-۲)$$

پس حاصل ترم اول سمت راست تساوی برابر صفر است.

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \eta dx = 0 \quad (۱۵۵-۲)$$

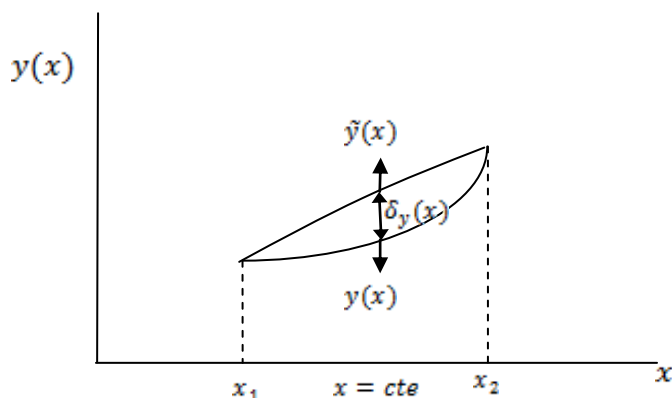
چون η اختیاری است داریم:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (۱۵۶-۲)$$

رابطه بالا به معادله اویلر- لاگرانژ معروف است.

اپراتور دلتا (δ)

به شکل زیر دقت کنید:



شکل ۲-۲۴ تعریف اپراتور دلتا

$\delta y(x)$ در واقع اختلاف بین $y(x)$ و $\tilde{y}(x)$ است، یا به عبارت دیگر تغییرات دلخواه کوچک در y را برای یک x ثابت بیان می‌کند.

$$\delta y(x) = \tilde{y}(x) - y(x) \quad (۱۵۷-۲)$$

اگر این اپراتور را روی مشتق یک تابع اثر دهیم داریم:

$$\delta \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d\tilde{y}}{dx} - \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (\tilde{y} - y) = \frac{d(\delta y)}{dx} \quad (۱۵۸-۲)$$

نتیجه: اپراتور δ را می‌توان از داخل مشتق بیرون آورد به عبارت دیگر اپراتور دلتا و مشتق نسبت به هم خاصیت جابجایی دارند (در مورد انتگرال هم به همین صورت است).

اکنون دوباره فانکشنال زیر را در نظر می‌گیریم و می‌خواهیم با استفاده از اپراتور δ به معادله اویلر لاگرانژ (به علاوه شرایط مرزی) برسیم.

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \quad (۱۵۹-۲)$$

اگر \tilde{y} را به عنوان یک جواب در انتگرال بالا قرار دهیم:

$$\begin{cases} \tilde{y} = y + \delta y \\ \tilde{y}' = y' + \delta y' \end{cases} \quad (۱۶۰-۲)$$

$$\bar{I} = \int_{x_1}^{x_2} F(x, \tilde{y}, \tilde{y}') dx = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx \quad (۱۶۱-۲)$$

ما به دنبال اکستریم کردن فانکشنال بالا هستیم.

اگر تابع F را به صورت زیر بسط تیلور دهیم:

$$\begin{aligned} F(x, y + \delta y, y' + \delta y') &= F(x, y, y') + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) + 0(\delta)^2 \\ \underbrace{F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y')}_{\delta F^{(r)}} &= \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right)}_{\delta F^{(l)}} + 0(\delta)^2 \end{aligned} \quad (۱۶۲-۲)$$

$\delta F^{(l)}$ و $\delta F^{(r)}$ را به ترتیب واریاسیون کل و واریاسیون مرتبه اول تابع F می‌نامند.

اگر از طرفین آخرین رابطه بدست آمده در بازه x_1 تا x_2 انتگرال بگیریم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} F(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx - \int_{x_1}^{x_2} F(x, \tilde{y}, \tilde{y}') dx &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx + \int_{x_1}^{x_2} 0(\delta)^2 dx \\ \delta I^{(l)} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx &= 0 \end{aligned} \quad (۱۶۳-۲)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y} \delta y dx + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx \quad (۱۶۴-۲)$$

اگر برای انتگرال دوم از تکنیک انتگرال گیری جز به جز بهره بگیریم:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx = \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx \quad (۱۶۵-۲)$$

در نتیجه:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) \delta y dx + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_1} - \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_2} = 0 \quad (۱۶۶-۲)$$

چون δy اختیاری است:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad \text{معادله اویلر-لاگرانژ} \quad (۱۶۷-۲)$$

شرایط مرزی:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{at } x_1 & \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (\text{طبیعی}) \quad \text{or} \quad \delta y = 0 \quad (\text{هندسی}) \\ \text{at } x_2 & \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (\text{طبیعی}) \quad \text{or} \quad \delta y = 0 \quad (\text{هندسی}) \end{array} \right.$$

مساله: برای فانکشنال زیر:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', y'', y''') dx$$

الف- ثابت کنید معادله اویلر لاگرانژ به صورت زیر است:

$$\frac{d^3}{dx^3} \left(\frac{\partial F}{\partial y'''} \right) - \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

ب- شرایط مرزی و نوع آنها را تعیین کنید.

۵-۲-۲-۲ روش انرژی پتانسیل کل

اکنون ما اصل کار مجازی را در ارتباط با مفهوم انرژی پتانسیل کل در مورد اجسام الاستیک (نه لزوماً الاستیک خطی) به کار می‌بریم.

$$\iiint_V F_{Bi} \delta u_i dV + \iint_S F_{Ti}^{(v)} \delta u_i ds = \iiint_V \tau_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV + \iiint_V \rho \ddot{u}_i dV \delta u_i \quad (۱۶۸-۲)$$

$$d\chi = \tau_{ij} d\varepsilon_{ij} \Rightarrow \frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon_{ij}} = \tau_{ij} \Rightarrow \frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} = \delta^1 \chi \quad (۱۶۹-۲)$$

$$\begin{aligned} \iiint_V F_{Bi} \delta u_i dV + \iint_S F_{Ti}^{(v)} \delta u_i ds &= \iiint_V \delta^1 \chi dV + \iiint_V \rho \ddot{u}_i dV \delta u_i = \\ \delta^1 \iiint_V \chi dV + \iiint_V \rho \ddot{u}_i dV \delta u_i &= \delta^1 U + \iiint_V \rho \ddot{u}_i dV \delta u_i \end{aligned} \quad (۱۷۰-۲)$$

توجه: δu_i یک میدان جابجایی مجازی است. ما در این جا انرژی پتانسیل بارهای اعمالی P را به عنوان تابعی از میدان جابجایی u_i تعریف می‌کنیم.

$$P = -\iiint_V F_{Bi} u_i dV - \iint_S F_{Ti}^{(v)} u_i ds \quad (۱۷۱-۲)$$

F_{Ti} و F_{Bi} قبلاً توصیف شده‌اند.

$$\delta^1 P = -\iiint_V F_{Bi} \frac{\partial u_i}{\partial u_j} \delta u_j dV - \iint_S F_{Ti}^{(v)} \frac{\partial u_i}{\partial u_j} \delta u_j ds \quad (۱۷۲-۲)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial u_j} = \delta_{ij} \quad (۱۷۳-۲)$$

$$\delta^1 P = -\iiint_V F_{Bi} \delta u_i dV - \iint_S F_{Ti}^{(v)} \delta u_i ds \quad (۱۷۴-۲)$$

$$\delta^1 (U + P) = \iiint_V \rho \ddot{u}_i dV \delta u_i = (0 \text{ For Static cases}) \quad (\text{اصل انرژی پتانسیل کل}) \quad (۱۷۵-۲)$$

$$\pi = U + P \quad (\text{انرژی پتانسیل کل}) \quad (۱۷۶-۲)$$

$$L = T - \pi = T - U + \iiint_V F_{Bi} u_i dV + \iint_S F_{Ti}^{(v)} u_i ds \quad (۱۷۷-۲)$$

می‌شود نشان داد که L همان فانکشنال لاگراتژین می‌باشد و T انرژی جنبشی کل جرمهای دامنه مورد مطالعه می‌باشد. به عبارت دیگر اصل هامیلتون که واریاسیون L برابر صفر می‌باشد همان اصل کار مجازی برای سیستمهای دینامیکی می‌باشد. در حالت استاتیکی داریم:

$$\delta^1(\pi) = 0 \quad \text{اصل انرژی پتانسیل کل} \quad (2-178)$$

اکسترمم کردن تابع انرژی پتانسیل کل برای میدان تغییرشکل قابل قبول برای تعادل بین نیروها و تنشها لازم است. در روش کار مجازی نشان داده می‌شود که این شرط، شرط لازم و کافی برای تعادل است. می‌توان نشان داد که انرژی پتانسیل کل تحت بارهای B_i و F_{Ti}^v زمانی تعادل را ارضا می‌کند که حالت مینیمم را داشته باشد.

برای امتحان کردن مینیمم بودن انرژی پتانسیل کل در حالت تعادل در یک همسایگی مجاز $u_i + \delta u_i$ و $\varepsilon_{ij} + \delta \varepsilon_{ij}$ می‌توان نشان داد که واریاسیون مرتبه دوم انرژی پتانسیل کل مثبت است.

تئوری انرژی پتانسیل کل بیان می‌کند که از میان تمام میدانهای قابل قبول سازگاری که شرایط مرزی را نیز ارضا می‌کنند، آن میدانی که مقدار انرژی پتانسیل کل را مینیمم می‌کند جواب واقعی ما است. همچنین انرژی پتانسیل کل (π) را فانکشنال مساله نیز می‌نامند.

فرض کنید که بالاترین مرتبه مشتق موجود در فانکشنال برابر m باشد، یعنی اپراتور شامل بیشترین مرتبه مشتق m ام باشد (m در مساله عضو تیری ۲ و در مساله عضو محوری ۱ بود) در این صورت مساله ما از نوع C^{m-1} است. اگر مرزهای مساله را در نظر بگیریم ما دو نوع شرایط مرزی خواهیم داشت:

۱- شرایط مرزی ضروری یا هندسی: شرطهای مرزی مربوط به تغییرشکلها (تغییرمکانها و دورانها) هستند. بیشترین مرتبه مشتق در این شرایط مرزی در یک مساله C^{m-1} برابر $m-1$ می‌باشد.

۲- شرایط مرزی طبیعی یا نیرویی: شرایط مرزی مربوط به نیروها و ممانها هستند. بالاترین مرتبه مشتق در این شرایط مرزی در یک مساله C^{m-1} برابر $2m-1$ می‌باشد.

با استناد به یک فانکشنال مشخص برای یک مساله می‌توان معادله دیفرانسیل حاکم بر مساله و شرایط مرزی ضروری و طبیعی را بدست آورد. در یک مساله از نوع C^{m-1} بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادله دیفرانسیل حاکم برابر $2m$ است و m بار باید انتگرال گیری جز به جز گرفته شود. تاثیر شرایط مرزی مساله نیز به صورت ضمنی در داخل π وجود دارد.

۶-۲-۲-۲ فرم ماتریسی انرژی پتانسیل برای یک جسم الاستیک خطی

فرم ماتریسی انرژی پتانسیل برای یک جسم الاستیک خطی به صورت زیر بیان می شود:

$$\pi = U - W$$

$$U = \text{Strain Energy}$$

$$W = -P = \text{Potential Energy of the Applied Loads (body forces and surface traction)}$$

$$\pi = \iiint_V \chi(u, v, w) dV - \iiint_V (\bar{F}_{Bx} u + \bar{F}_{By} v + \bar{F}_{Bz} w) dV - \iint_{S_T} (\bar{F}_{Tx} u + \bar{F}_{Ty} v + \bar{F}_{Tz} w) dS_1 \quad ۱۷۹-۲$$

که در آن U انرژی کرنشی و W انرژی پتانسیل ناشی از بارهای اعمالی خارجی (نیروهای جرمی و نیروهای سطحی) می باشد. S_T سطحی است که نیروهای سطحی روی آن تعریف شده اند. $\chi(u, v, w)$ انرژی کرنشی در واحد حجم است (چگالی انرژی کرنشی). دو انتگرال آخری، کار انجام شده توسط نیروهای خارجی که شامل نیروهای جرمی $\bar{F}_{Bx}, \bar{F}_{By}, \bar{F}_{Bz}$ و نیروهای سطحی $\bar{F}_{Tx}, \bar{F}_{Ty}, \bar{F}_{Tz}$ است، را بیان می کنند. علامت بار نیز نشان دهنده مشخص بودن مقادیر پارامترها است.

انرژی کرنشی را می توان بر حسب روابط ارائه شده بصورت ماتریسی زیر نوشت:

$$\chi(u, v, w) = \int \{\sigma\}^T d\{\epsilon\} = \int \{\epsilon\}^T [C] d\{\epsilon\} = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T [C] \{\epsilon\}$$

$$\pi = \frac{1}{2} \iiint_V \left(\{\epsilon\}^T [C] \{\epsilon\} - 2\{U\}^T \{\bar{F}_B\} \right) dV - \iint_{S_1} \{U\}^T \{\bar{F}_T\} dS_1$$

۱۸۰-۲

که در آن:

$$\begin{aligned} \{U\}^T &= \{u \quad v \quad w\} \\ \{\bar{F}_B\}^T &= \{\bar{F}_{Bx} \quad \bar{F}_{By} \quad \bar{F}_{Bz}\} \\ \{\bar{F}_T\}^T &= \{\bar{F}_{Tx} \quad \bar{F}_{Ty} \quad \bar{F}_{Tz}\} \end{aligned}$$

۱۸۱-۲

اگر بر روی مرزها فنر وجود داشت، اثر فنرهای روی مرز باید با اضافه کردن یک ترم به انرژی کرنشی بصورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$du = du + \frac{1}{2} \{U\}^T [\alpha] \{U\}$$

$$du = du + \frac{1}{2} \alpha_{ij} u_i u_j$$

۱۸۲-۲

که در حالت دو بعدی بصورت ماتریسی زیر می توان نوشت:

$$du = du + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u & v \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

۱۸۳-۲

ضرائب α_{ij} بعنوان سختی فنر می باشند.

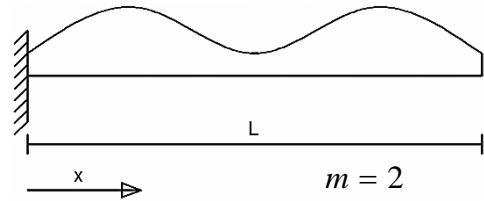
۷-۲-۲-۲ تعداد مدهای جسم صلب (حرکت صلب گونه) در یک سیستم

در مسائلی که فرم فانکشنال دارند سعی ما بر این است تا انرژی کرنشی سیستم را محاسبه نماییم. حرکت های جسم صلب با تغییر در انرژی کرنشی همراه نیستند. تعداد ترم‌هایی (از مدل جابجایی) که در تابع انرژی کرنشی سیستم دخالتی ندارند برابر تعداد مدهای جسم صلب سیستم هستند، یعنی انرژی کرنشی ذخیره شده در سیستم وقتی که این بردار جابجایی در نظر گرفته می شود، صفر می باشد. این بردارها را مدهای جسم صلب جسم می گویند.

۸-۲-۲-۲ مثال هایی از روش یافتن معادلات حاکم بر سیستم با استفاده از روش انرژی

مثال ۱ عضو تیر

$$\Pi(w) = \underbrace{\frac{EI}{2} \int_0^L w_{xx}^2 dx}_{U(w) \text{ strain energy}} - \underbrace{\int_0^L p(x) w(x) dx}_{P(w) \text{ potential energy of loading}}$$



$$m = 2 \\ C^{m-1} = C^1$$

essential bc $\Rightarrow w, w_x$

شرایط مرزی ضروری

$$\delta \Pi = \delta^1 \Pi = \frac{EI}{2} \int_0^L 2 w_{xx} \delta w_{xx} dx - \int_0^L P \delta w dx$$

با دوبار انتگرالگیری جز به جز از ترم اول $\delta \Pi$ داریم:

$$= EI w_{xx} \delta w_x \Big|_0^L - EI \int_0^L w_{xxx} \delta w_x dx = EI w_{xx} \delta w_x \Big|_0^L - EI w_{xxx} \delta w \Big|_0^L + EI \int_0^L w_{xxxx} \delta w dx$$

با جایگزینی عبارت با لا در معادله واریاسیون تابع انرژی خواهیم داشت:

$$\delta \Pi = \int_0^L (EI w_{xxxx} - P) \delta w dx + EI w_{xx} \delta w_x \Big|_0^L - EI w_{xxx} \delta w \Big|_0^L = 0$$

با برابر قرار دادن صفر عبارت بالا داریم:

$$0 \leq x \leq l \quad EI w_{xxxx} - P = 0$$

و برای شرایط مرزی می توان نوشت:

$$EI w_{xx} \delta w_x \Big|_0^L = 0 \quad w \quad EI w_{xxx} \delta w \Big|_0^L = 0$$

$$EI w_{xxx} \delta w \Big|_0^L = 0 \quad w \quad EI w_{xx} \delta w_x \Big|_0^L \neq 0$$

مثال ۲ کماتش یک ستون

$$m = 2$$

$$C^{m-1} = C^1$$

شرایط مرزی ضروری $ess. b.c \Rightarrow w, w_x$



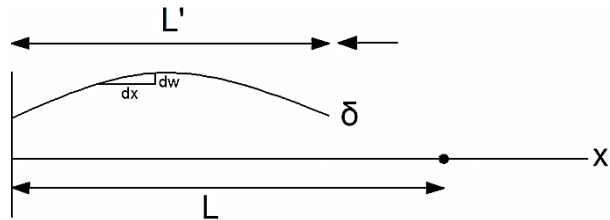
$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI (w_{xx})^2 dx + \frac{1}{2} k w_L^2 - \frac{P}{2} \int_0^L w_x^2 dx$$

اثبات می شود

$$* \quad V = -\frac{P}{2} \int_0^L w_x^2 dx$$

$$w = P \delta \quad \delta = L - L'$$

$$L = \int ds$$



$$ds = \sqrt{dw^2 + dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2} dx \Rightarrow L = \int_0^{L'} \sqrt{1 + w'^2} dx \quad (w' \rightarrow 0)$$

$$L \approx \int_0^{L'} \left(1 + \frac{1}{2} w'^2\right) dx \quad \text{for small disp} \quad (\text{برای تغییر شکل های کوچک})$$

$$L \approx \int_0^{L'} dx + \frac{1}{2} \int_0^{L'} w'^2 dx = L' + \frac{1}{2} \int_0^{L'} w'^2 dx$$

$$\delta = L - L' = \frac{1}{2} \int_0^{L'} w'^2 dx \quad \delta \text{ is small } L \approx L' \quad L \approx L' \text{ در نتیجه}$$

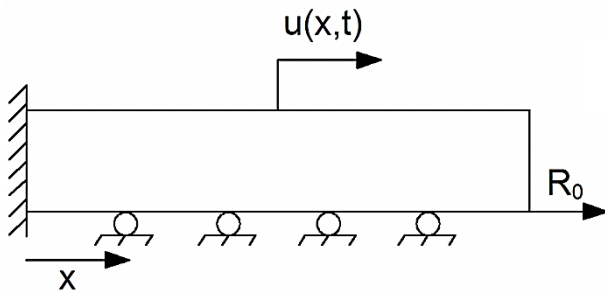
$$V = \frac{P}{2} \int_0^L w'^2 dx$$

لذا برای تابع انرژی پتانسیل می توان نوشت:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI (w_{xx})^2 dx + \frac{1}{2} k w_L^2 - \frac{P}{2} \int_0^L w_x^2 dx$$

می توان با واریاسیون گیری به معادله حاکم و شرایط مرزی رسید.

مثال ۳ میله تحت بار محوری



شرایط مرزی

$$u_0 = 0 = u(0, t)$$

$$u_L = u(L, t)$$

$$f^B = \text{bod force for unit length}$$

نیروی حجمی برای طول واحد

m=1 مساله از نوع C^0 است

$$\Pi = \int_0^L \frac{1}{2} EA u_x^2 dx - \int_0^L u f^B dx - u_L R$$

$$\delta \Pi = 0 = \int EA u_x \delta u_x dx - \int_0^L \delta u f^B dx - \delta u_L R = 0$$

$$= EA u_x \delta u \Big|_0^L - \int_0^L EA u_{xx} \delta u dx - \int_0^L \delta u f^B dx - \delta u_L R$$

$$= - \int_0^L (EA u_{xx} + f^B) \delta u dx + [EA u_x \Big|_L - R] \delta u_L - EA u_x \Big|_{x=0} \delta u_0 = 0$$

چون δu اختیاری است:

$$EA u_{xx} + f^B = 0$$

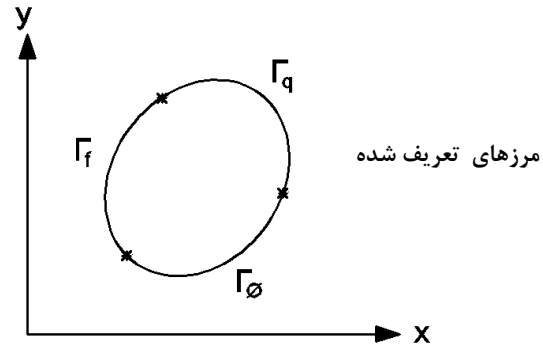
$$x = L \quad EA u_x = R \quad \text{or} \quad \delta u_L = 0$$

$$x = 0 \quad EA u_x = 0 \quad \text{or} \quad \delta u_0 = 0$$

$$x=0$$

مثال ۴ تابع فانکشنال در فضای دوبعدی

$$J = \int_{\Omega} \left[\frac{k}{2} \phi_x^2 + \frac{k}{2} \phi_y^2 - Q\phi \right] d\Omega - \int_{\Gamma_q} \bar{q} \phi d\Gamma$$



K & Q are functions of positions only تنها تابعی از موقعیت هستند

$\delta\phi = 0$ on $\Gamma\phi$ (part of the boundary) روی بخشی از مرز

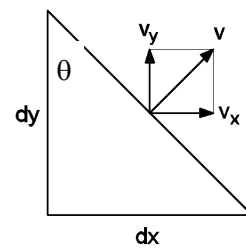
\bar{q} specified on Γ_q

$$\delta J = \int_{\Omega} [k\phi_x \delta\phi_x + k\phi_y \delta\phi_y - Q\delta\phi] d\Omega - \int_{\Gamma_q} \bar{q} \delta\phi d\Gamma$$

$$\delta\phi_x = \delta \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\delta\phi) = (\delta\phi)_x$$

$$dy = d\Gamma \cos \theta$$

$$dx = d\Gamma \sin \theta$$



با انتگرال گیری جز به جز از دو عبارت ابتدایی در عبارت واریاسیون خواهیم داشت :

$$\int_{\Omega} k\phi_x \delta\phi_x dx dy = \int_{\Omega} k\phi_x (\delta\phi)_x dx dy = \int_{\Gamma} k\phi_x \delta\phi dy - \int_{\Omega} (k\phi_x)_x \delta\phi d\Omega$$

$$\int_{\Omega} k\phi_y \delta\phi_y dx dy = - \int_{\Omega} (k\phi_y)_y \delta\phi d\Omega + \int_{\Gamma} k\phi_y \delta\phi dx$$

$$\delta J = \int_{\Omega} -[(k \varphi_x)_x + (k \varphi_y)_y + Q] \delta \varphi d\Omega + \int_{\Gamma} \underbrace{[k \varphi_x v_x + k \varphi_y v_y]}_{k \frac{\partial \varphi}{\partial n}} \delta \varphi d\Gamma - \int_{\Gamma_q} \bar{q} \delta \varphi d\Gamma$$

$$\oint_{\Gamma} k \phi_n \delta \phi d\Gamma = \int_{\Gamma_q} + \int_{\Gamma_{\phi}} + \int_{\Gamma_f} \quad \begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_f + \Gamma_q + \Gamma_{\phi} \\ \delta \phi &= 0 \text{ on } \Gamma_{\phi} \end{aligned}$$

$$\delta J = - \int_{\Omega} \text{[diagram]} \delta \varphi d\Omega + \int_{\Gamma_q} (k \phi_n - \bar{q}) \delta \varphi d\Gamma + \int_{\Gamma_f} k \phi_n \delta \varphi d\Gamma = 0$$

$\delta \phi = \text{Arbitrar}$ دلخواه

با برابر قرار دادن صفر عبارت بالا داریم:

$$\text{[diagram]} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad \text{معادله اویلر}$$

و برای شرایط مرزی :

$$\begin{aligned} k \phi_n - \bar{q} &= 0 \text{ on } \Gamma_q \\ \delta \phi &= 0 \text{ or } k \phi_n = 0 \text{ on } \Gamma_f \end{aligned}$$

مسئله بالا یک مسئله انتقال حرارت می باشد. در معادله بالا اگر Q & k ثابت باشد آنگاه $\nabla^2 \varphi = \text{Constant}$ که معادله پواسون را نتیجه می دهد. و اگر $Q=0$ & $k=1$ باشد آنگاه $\nabla^2 \phi = 0$ که معادله مشهور لاپلاس را حاصل می دهد.

همچنین شکل های دیگری از معادلات مثل مساله پیچش (معادله پواسون) یا جریان غیر چرخشی (معادله لاپلاس)، مساله تراوش یا جریان در محیط متخلخل مثالهایی از معادلات بالا هستند.

مثال ۶ حرارت دوبعدی گذرا^{۲۸}

معادل حالت دائمی با به کار بردن اصل تغییرات می توان معادله J را برای هر زمان t بصورت زیر نوشت:

$$J(\phi) = T \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \{ k_x \phi_x^2 + k_y \phi_y^2 \} - Q\phi + 2C\dot{\phi}\phi \right] dx dy + T \int_{\Gamma_A} \bar{q}_A \phi d\Gamma + T \int_{\Gamma_C} \left\{ \bar{q}_C \phi + \alpha \left(\frac{\phi}{2} - \bar{\phi}_C \right) \phi \right\} d\Gamma$$

که در آن ϕ تابعی از x و y و t است. در به کار بردن قوانین حساب تغییرات باید مشتق ϕ نسبت به زمان ثابت در نظر گرفته شود.

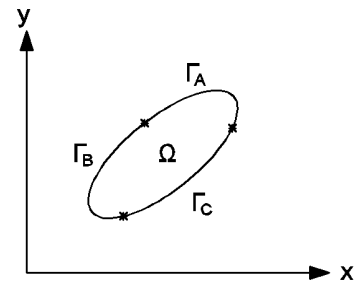
در هر زمان t می توان نوشت:

$$\delta J(\phi) = 0$$

$$\begin{aligned} \delta J(\phi) &= T \int_{\Omega} [k_x \phi_x \delta\phi_x + k_y \phi_y \delta\phi_y - Q\delta\phi + 2C\delta\dot{\phi}\phi + 2C\dot{\phi}\delta\phi] dA \\ &\quad + T \int_{\Gamma_A} \bar{q}_A \delta\phi d\Gamma + T \int_{\Gamma_C} [\bar{q}_C \delta\phi + \alpha \phi \delta\phi - \alpha \bar{\phi}_C \delta\phi] d\Gamma \\ &= T \int_{\Gamma} k_x \phi_x v_x \delta\phi d\Gamma - \int_{\Omega} (k_x \phi_x)_x \delta\phi d\Omega + \int_{\Gamma} k_y \phi_y v_y \delta\phi d\Gamma - \int_{\Omega} (k_y \phi_y)_y \delta\phi d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} Q \delta\phi d\Omega + \int_{\Omega} 2C\dot{\phi} \delta\phi d\Omega + T \int_{\Gamma_A} \bar{q}_A \delta\phi d\Gamma + T \int_{\Gamma_C} (q'_C + \alpha \phi - \alpha \bar{\phi}_C) \delta\phi d\Gamma = 0 \end{aligned}$$

$$\Gamma = \Gamma_A + \Gamma_B + \Gamma_C$$

$T =$ ضخ ل ت



لذا داریم:

$$(k_x \phi_x)_x + (k_y \phi_y)_y + Q - 2C\dot{\phi} = 0$$

$$\begin{aligned}
\delta J(\varphi) = & T \int_{\Omega} \left[- (k_x \varphi_x)_x - (k_y \varphi_y)_y - Q + 2C\dot{\varphi} \right] \delta\varphi \, d\Omega \\
& + T \int_{\Gamma_A + \Gamma_B + \Gamma_C} (k_x \varphi_x v_x + k_y \varphi_y v_y) \delta\varphi \, d\Gamma + T \int_{\Gamma_A} \bar{q}_A \delta\varphi \, d\Gamma \\
& + T \int_{\Gamma_C} \bar{q}_C + \alpha(\varphi - \phi_C) \delta\varphi \, d\Gamma = 0
\end{aligned}$$

روی مرزها داریم:

$$\Gamma_B \quad \phi = \phi_B$$

$$\Gamma_A \quad k_x \phi_x v_x + k_y \phi_y v_y + \bar{q}_A = 0$$

$$\Gamma_C \quad k_x \phi_x v_x + k_y \phi_y v_y + \bar{q}_C + \alpha(\phi - \phi_C) = 0$$

$$\varphi = \text{دما}$$

$$k_x = \text{Thermal Conductivity in } x \text{ direction}$$

ضریب هدایت حرارتی در جهت x

$$k_y = \text{Thermal Conductivity in } y \text{ direction}$$

ضریب هدایت حرارتی در جهت y

$$Q = \text{Heat input per unit volume}$$

حرارت ورودی در واحد حجم

$$\bar{q}_A, \bar{q}_C = \text{specified heat input per unit area on } \Gamma_A \text{ and } \Gamma_C \text{ respectively}$$

به ترتیب حرارت ورودی مشخص شده در واحد

سطح بر روی G_A و G_B

مثال ۷ تابع فانکشنال (انرژی پتانسیل) را برای پوسته بر اساس روابط ارائه شده برای پوسته‌های نازک با تغییر شکل‌های کوچک، بدست آورید.

انرژی کرنشی ذخیره شده در یک جسم الاستیک را میتوان بر حسب تنشهای کلی موجود محاسبه کرد. برای رسیدن به انرژی کل ذخیره شده در جسم باید انرژی تک تک المان‌های موجود در جسم را با هم جمع زد که این کار توسط انتگرال گیری روی حجم جسم از تابع چگالی انرژی کرنشی صورت می‌گیرد:

$$U = \int \int \int_V \left[\int_0^{\epsilon_{ij}} \tau_{ij} d\epsilon_{ij} \right] dV \quad \text{انرژی کرنشی کل}$$

$$\chi(u, v, w) = \int \{\sigma\}^T d\{\epsilon\} = \int \{\epsilon\}^T [C] d\{\epsilon\} = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T [C] \{\epsilon\}$$

$$U = \frac{1}{2} \int \int \int_V \{\epsilon\}^T [C] \{\epsilon\} dV$$

$$U = \frac{1}{2} \int \int \int_V \tau_{xx} \epsilon_{xx} + \tau_{yy} \epsilon_{yy} + \tau_{xy} \epsilon_{xy} dV \quad \text{و یا:}$$

با جایگذاری رابطه تنش-کرنش برای صفحه‌ها که از قبل بدست آمده است، رابطه بالا بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$U = \int \int \int_V \frac{1}{2E} (\tau_{xx}^2 + \tau_{yy}^2 - 2\nu \tau_{xx} \tau_{yy} + \tau_{xy} \epsilon_{xy}) + \frac{1}{2G} \tau_{xy}^2 dx dy dz$$

برای یک صفحه با ضخامت ثابت، رابطه انرژی کرنشی برحسب W بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$U = \frac{1}{2} \int \int_A [D(w_{xx} + \nu w_{yy}) w_{xx} + D(\nu w_{xx} + w_{yy}) w_{yy} + 2D(1-\nu) w_{xy}^2] dx dy$$

$$U = \frac{D}{2} \int \int_A [w_{xx}^2 + w_{yy}^2 + 2\nu w_{xx} w_{yy} + 2(1-\nu) w_{xy}^2] dx dy$$

انرژی پتانسیل

انرژی پتانسیل ناشی از خمش ورق به علت بار عرضی $q(x, y)$ به صورت زیر بیان می‌گردد:

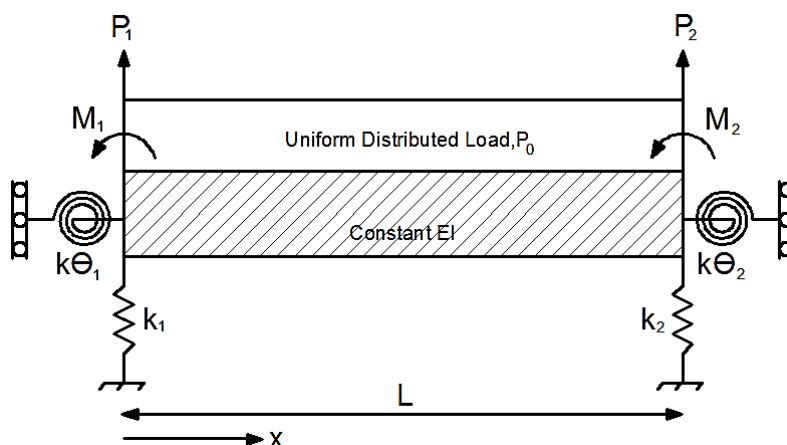
$$\pi = U - W$$

$$\pi = \frac{D}{2} \int \int_A [w_{xx}^2 + w_{yy}^2 + 2\nu w_{xx} w_{yy} + 2(1-\nu) w_{xy}^2] dx dy - \int \int_A q w dx dy$$

مسائل نمونه:

۲-۱ برای تیر نشان داده شده در شکل زیر تابع انرژی پتانسیل کل (Π) را بدست آورید و با گرفتن واریاسیون مرتبه اول ($\delta \Pi$) معادله اویلر-لاگرانژ را پیدا کنید و شرایط مرزی را نیز تعیین کنید.

آیا هیچ مود جسم صلبی برای سیستم وجود دارد؟



شکل ۱

سختی فنرهای دورانی $K_{\theta_1}, K_{\theta_2}$

سختی فنرهای انتقالی K_1, K_2

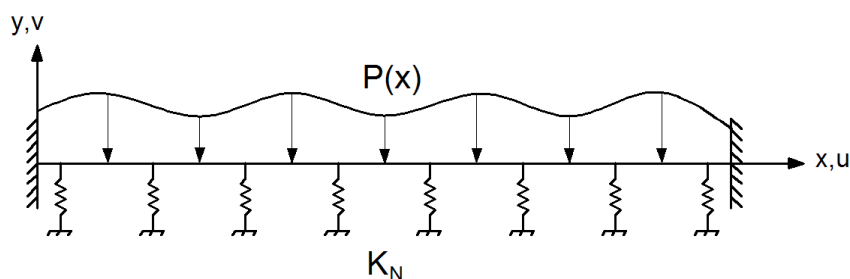
۲-۲ شکل ۲ یک سیستم تیر-ستون با فنرهای عرضی و مماسی (طولی) را نمایش می‌دهد.

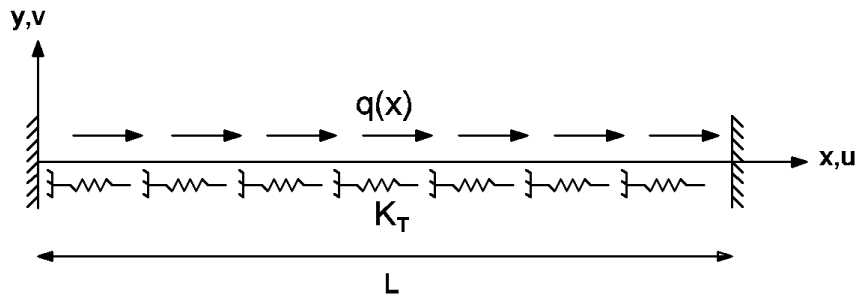
الف- تابع انرژی پتانسیل کل را برای سیستم بنویسید و از آن واریاسیون مرتبه اول بگیرید.

ب- معادله اویلر-لاگرانژ را بدست آورید و شرایط مرزی را تعیین نمایید.

ج- تعداد مودهای جسم صلب برای سیستم چند تا است؟

د- با محاسبه واریاسیون مرتبه دوم نشان دهید که مساله از نوع ماکزیمم است یا مینیمم؟





شکل ۲

۳-۲ با استفاده از روش مکانیک برداری معادله حاکم بر تیر پیچشی خالص را بدست بیاورید.

۴-۲ تابع انرژی پتانسیل را برای مسائل تنش و کرنش مسطح بنویسید. $U+P=\pi$

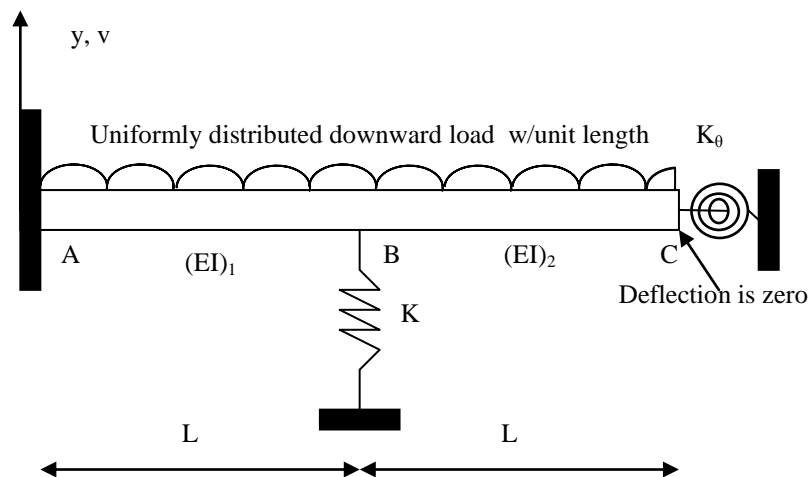
۵-۲ برای تیر نشان داده شده در شکل زیر:

الف) فرم تابع انرژی پتانسیل (فانکشنال) را بنویسید.

ب) با اجرای واریاسیون مرتبه اول معادله اولر-لاگرانژ و شرایط مرزیهای متفاوت را بدست آورید

ج) تعداد موده‌های صلب این مسئله را بدست آورید.

توجه شود که I برای قسمت AB برابر I_1 و برای قسمت BC برابر I_2 می باشد. E برای کل تیر ثابت می باشد.



شکل ۳

۶-۲ برای تابع فانکشنال زیر:

$$J = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left\{ (\nabla^2 w)^2 - qw \right\} dx dy - \int_{SM} \bar{M}_n \frac{\partial w}{\partial n} ds + \int_{SQ} Q_n w ds$$

الف) با اجرای واریاسیون مرتبه اول، $\delta J = 0$ جهت اکسترمم کردن تابع فوق معادله حاکم و شرایط مرزیهای متفاوت را بدست آورید

ب) تعداد موده‌های صلب تابع فوق را بدست آورید.

۷-۲ برای تابع فانکشنال زیر معادله حاکم و شرایط مرزی را بدست آورید.

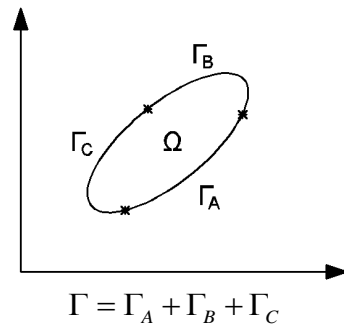
$$J(T, T_x, T_y) = \frac{1}{2} \iint_A \{T_x^2 + T_y^2 + QT\} dA + \frac{1}{3} \oint_{S_1} T^2 dS + \oint_{S_2} TT_0 ds$$

Q و T_0 توابع معلوم و S_1 و S_2 دو قسمت مرز سطحی بنحوی که $S = S_1 \cup S_2$.

۸-۲ برای جریان حرارتی دو بعدی انتقالی، اصل تغییرات حالت دائمی معادل در زمان t به صورت زیر می-تواند نوشته شود:

$$J(\phi) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[(k_x \phi_x^2 + k_y \phi_y^2) - Q\phi + 2C\dot{\phi} \right] dx dy + \int_{\Gamma_A} \bar{q}_A \phi d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \left\{ \bar{q}_C \phi + \alpha \left(\frac{\phi}{2} - \bar{\phi}_C \right) \phi \right\} d\Gamma$$

$$\phi = \phi(x, y, t) \quad \dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad k_x, k_y \quad Q \quad \bar{q}_A, \bar{q}_C$$



برای فانکشنال فوق معادله حاکم را بدست آورید و شرایط مرزی را مشخص نمایید.

در صورت نیاز از اطلاعات زیر استفاده نمائید.

$$\nabla^2 w = w_{xx} + w_{yy} \quad \nabla^4 w = w_{xxxx} + 2w_{xxyy} + w_{yyyy}$$

$$\int_{\Omega} \phi \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dy = \oint \phi \psi v_x ds - \int_{\Omega} \psi \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy$$

$$\int_{\Omega} \phi \frac{\partial \psi}{\partial y} dx dy = \oint \phi \psi v_y ds - \int_{\Omega} \psi \frac{\partial \phi}{\partial y} dx dy$$

$$w_{xx} + w_{yy} = w_{nn} + w_{ss}$$

