فصل ۴

نظریه روش اجزاء محدود

مقدمات و مفاهیم پایه

۴- نظریه روش اجزاء محدود[۱](FEM)

روش اجزاء محدود در واقع یک تصور فیزیکی از یک جسم یا سازه به عنوان مجموعه‌ای از المان‌ها که توسط نقاط گره‌ای به هم متصل شده‌اند، می‌باشد. درفصل قبل در حل معادلات به روش قطعه‌ای متذکر شدیم که می‌توان فضای مورد نظر را تقسیم به زیر فضاها یا المان‌هایی نمود و تابع متغیر وابسته را در محدوده المان حدس زد.

روش اجزاء محدود تقسیم‌بندی یک محیط پیوسته به تعداد محدودی المان است. رفتار هرکدام از این المان‌ها به وسیله تعداد محدودی پارامتر که مختصه‌های تعمیم یافته[۲] نامیده می‌شوند تعیین می‌شود.

حل یک سیستم کامل با اسمبل کردن مجموعه‌ای از المان‌ها تا ساخت کامل دامنه مورد نظر بدست می‌آید.

در روش اجزاء محدود، به جای در نظر گرفتن یک جسم پیوسته آن را به بخش‌های مختلفی (در جسم دوبعدی توسط خطهای فرضی و در جسم سه بعدی توسط صفحات فرضی) تقسیم می‌کنیم در حالیکه هیچ انفصال فیزیکی در بین این المان‌ها وجود ندارد.

در ابتدا نگاه ما بر روی المان‌ها متمرکز می‌گردد و روابط فرم ضعیف یا فرم فانکشنال را برای هر المان به کار می‌گیریم. ما علاقه مند هستیم تا رفتار المان را بررسی کنیم که برای تعریف آن احتیاج به هندسه المان و خصوصیات ماده داریم. سپس المان‌ها را در کنار هم قرار می‌دهیم تا به سازه اصلی برسیم.

در نهایت استفاده از روش اجزاء محدود یک سیستم پیوسته را به محیط گسسته که بر اساس پارامترها یا مجهولات در المان (درجه آزادی) تعریف می‌شود، تبدیل می‌کند. در نهایت مسئله تبدیل به یک مسئله استاندارد گسسته مثل تحلیل ماتریسی سازه‌ها می‌گردد. با حل مسئله سیستم گسسته، پارامترهای درجه آزادی سیستم بدست می‌آید. با دانستن درجات آزادی المان می‌توان به یافتن متغیرهای داخل المان پرداخت.

حال سوال این است که جواب تقریبی بدست آمده از اجزا محدود تا چه مقدار به جواب واقعی نزدیک است؟ تئوری‌های ریاضی زیادی در ارتباط با پاسخ این سوال در کنار روش اجزا محدود وجود دارند که مورد بررسی قرار می‌گیرند.

---

[۱] Finite Element Method

[۲] Generalized Coordinates

۴-۲ تصویر شماتیک از روش اجزا محدود (تحلیل سیستم گسسته)

مدلسازی در روش اجزاءمحدود بر اساس تبدیل یک سیستم پیوسته به یک سیستم گسسته می‌باشد. برای مثال یک مساله بصورت فرم ضعیف یا فرم فانکشنال را برای یک محیط پیوسته را در نظر بگیرید. می‌توان برای این مسئله نکات زیر را در حل به روش اجزاء محدود برشمرد:

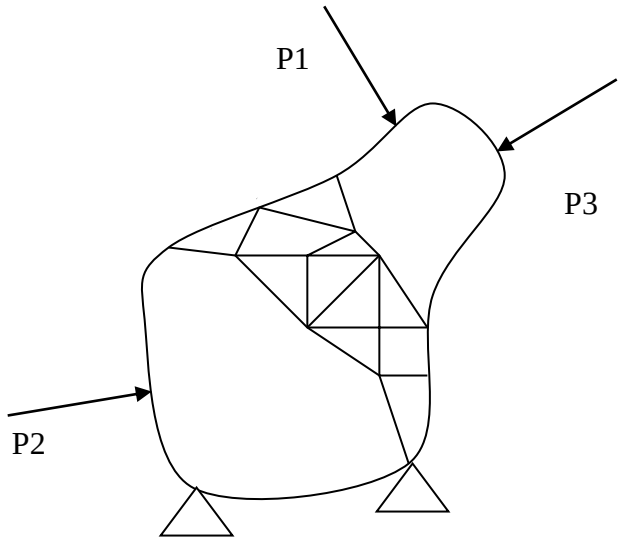
۱- در یک سیستم پیوسته ما با تعداد نامحدودی از مجهولات مواجه هستیم.

۲- برای داشتن تعداد مجهولات محدود، ما جسم را به تعدادی المان تقسیم‌بندی می‌کنیم که در گوشه‌ها یا بر روی لبه‌های این المان‌ها گره‌هایی با تعداد محدودی از درجات آزادی تعریف شده‌اند.

۳- تعادل هر المان بر حسب متغیرها برقرار می‌گردد.

۴- در هنگام اسمبل کردن المان‌ها برای ارضای شرط پیوستگی بین المان‌ها باید در محل تلاقی المان‌ها با هم معادلات یکسانی برای متغیرها به کار گرفته شوند.

۵- رسیدن به پاسخ مستلزم حل n معادله و n مجهول خواهد بود.



شکل ۴-۱ مدلسازی در روش اجزاءمحدود بر اساس تبدیل سیستم پیوسته به یک سیستم گسسته

نکاتی که باید در حل به روش اجزاءمحدود مورد توجه قرار بگیرند عبارتند از:

۱- انتخاب مجهولاتی از مساله که پاسخ سیستم را برای ما مشخص می‌کنند.

۲- مشخص کردن نوع المان‌ها

که در این راستا انتخاب‌های زیادی برای گزینش متغیرها وجود دارد.

۴-۳ شکل‌های مختلف المان

انتخاب شکل‌های مختلف برای المان مستلزم قضاوت مهندسی ما است. البته هندسه جسم، دو بعدی یا سه بعدی بودن مساله نیز نقش مهمی را در انتخاب شکل المان‌ها بازی می‌کنند.

در مسائل یک بعدی (1D) از المان‌های خطی و یا منحنی استفاده می‌شود.

در مسائل دو بعدی مثل تنش مسطحه، کرنش مسطحه، و خمش صفحات المان‌ها می‌توانند مثلثی، مستطیلی، چهار ضلعی و شکل‌های متقارن دیگر باشند.

در مسائل سه بعدی نیز المان‌ها می‌توانند به شکل‌های چهار وجهی، منشور مستطیلی، مکعبی و یا ترکیبی از آنها باشند.

۴-۴ مدل‌های تغییرمکان

مدل فرم ضعیف یا مدل انرژی بر اساس توابع وابسته بنا نهاده می‌شوند. به عبارت دیگر با تعیین توابع وابسته برحسب توابع مستقل و جایگذاری آنها در فرم ضعیف یا فرم فانکشنال می‌توان به حل مسئله پرداخت. توابع وابسته با توجه به فرم مسئله می‌توانند یک یا دو و یا سه تا باشند و فضای مسئله هم می‌تواند یک، دو و یا سه بعدی باشد. شروع روش اجزا محدود از فرم ضعیف و یا انرژی می‌باشد که بر مبنای تقریب زدن متغیر یا متغیرهای وابسنه مسئله استوار است. حال اگر این متغیروابسته، جابجایی در نظر گرفته شود، تابعی که تغییرمکان‌ها را برای هر المان تقریب می‌زند مدل جابجایی یا تابع تغییرمکان یا میدان جابجایی نامیده می‌شود.

توابع تغییرمکان را به دلایل زیر به صورت چند جمله‌ای در نظر می‌گیریم:

۱- عملیات ریاضی روی این توابع ساده است (مشتق و انتگرال).

۲- به راحتی می‌توان با بالا بردن درجه چند جمله‌ای دقت تقریب را بالا برد.

در مکانیک محیط پیوسته تابع مجهول همان تابع وابسته معادل فرم ضعیف یا تابع فانکشنال می‌باشد که می‌تواند در فضای یک بعدی، دو بعدی یا سه بعدی باشد. تعداد تو ابع وابسته می‌تواند حداقل یک تابع یا بیشتر باشد.

در حالت یک بعدی و برای یک متغیر مستقل می‌توان تقریب زیر را برای چند جمله‌ای مرتبه n بصورت زیر نوشت:

۱-۴

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + ... + \alpha_{n+1} x^n$$

$$\alpha_i\,'s \quad are\ generalized\ coordinates$$

مختصه های تعمیم یافته (ضرایب چند جمله ای)

تعداد جملات در u(x) شکل میدان جابجایی را تعیین می‌کنند.هر چه تعداد مختصه‌های تعمیم یافته بیشتر باشد جواب به جواب واقعی نزدیک‌تر خواهد بود.

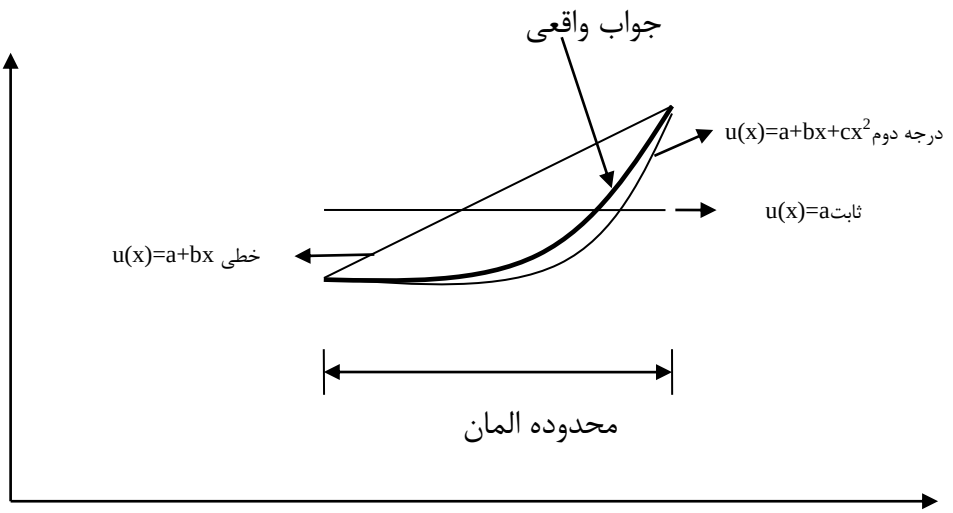
فرم ماتریسی تابع وابسته بصورت زیر می‌باشد.

۲-۴

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \varphi_i\ \alpha_i = \{\varphi\}^T \{\alpha\}$$

$$\{\varphi\}^T = [1 \quad x \quad x^2 \quad . \quad . \quad . \quad x^n]$$

$$\{\alpha\}^T = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad . \quad . \quad . \quad \alpha_{n+1}]$$



شکل ۴-۲ تقریب تابع تغییر مکان

در نظر گرفتن تعداد جملات بیشتر در تابع تغییرمکان جواب تقریبی را به جواب واقعی نزدیکتر می-کند. البته باید توجه داشت که اگر جواب واقعی مساله یک چند جمله‌ای از درجه m باشد، قرار دادن جملات بالاتر از درجه m کمکی به ما نخواهد کرد.

در حالت دو بعدی و برای یک متغیر مستقل می‌توان تقریب زیر را برای چند جمله‌ای مرتبه n بصورت زیر نوشت:

$$u(x,y)=\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 y+\alpha_4 xy+\alpha_5 x^2+\alpha_6 y^2.....+\alpha_n x^n+\alpha_{n+1} y^n \qquad ۳-۴$$

$$u(x,y)=\sum_{i=1}^{n+1}\varphi_i(x,y)\,\alpha_i=\{\varphi\}^T\{\alpha\}$$

$$\{\varphi\}^T=\begin{bmatrix}1 & x & y & xy & x^2 & y^2 & . & . & . & x^n & y^n\end{bmatrix}$$

$$\{\alpha\}^T=[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6 \quad . \quad . \quad . \quad \alpha_n \quad \alpha_{n+1}]$$

و در حالت سه بعدی و برای یک متغیر مستقل می‌توان تقریب زیر را برای چند جمله‌ای مرتبه n بصورت زیر نوشت:

$$u(x,y,z)=\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 y+\alpha_4 z+\alpha_5 xy+\alpha_6 yz+\alpha_7 zx+\alpha_8 x^2+\alpha_9 y^2+\alpha_{10} z^2+.....+ \qquad ۴-۴$$

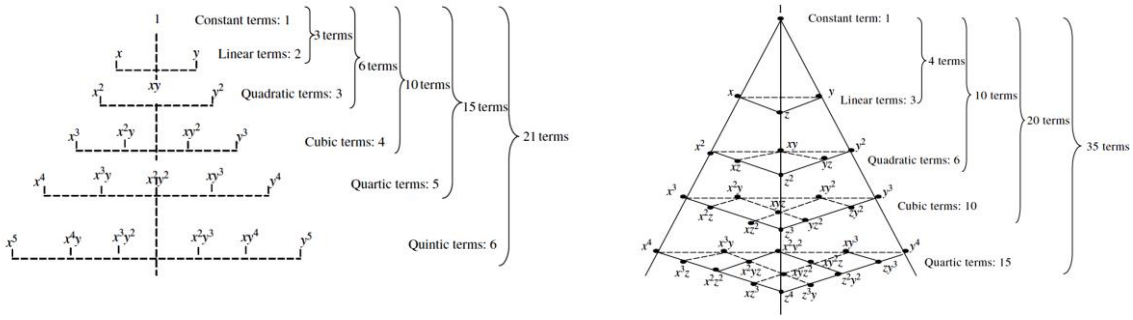
$$\alpha_{n-1}x^n+\alpha_n y^n+\alpha_{n+1}z^n$$

$$u(x,y,z)=\sum_{i=1}^{n+1}\varphi_i(x,y,z)\,\alpha_i=\{\varphi\}^T\{\alpha\}$$

$$\{\varphi\}^T=\begin{bmatrix}1 & x & y & z & xy & yz & zx & x^2 & y^2 & z^2 & . & . & . & x^n & y^n & z^n\end{bmatrix}$$

$$\{\alpha\}^T=[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6 \quad . \quad . \quad . \quad \alpha_n \quad \alpha_{n+1}]$$

توجه شود که در انتخاب ترمهای چند جمله‌ای می‌توان از شکل مثلث خیام و یا هرم خیام همانند شکل زیر استفاده نمود.



شکل ۴-۳ مثلث خیام و هرم خیام برای چند جمله‌ای در فضای دو و سه بعدی

برای یک محیط پیوسته بر اساس تعداد متغیرهای وابسته و ابعاد مسئله (یک، دو یا سه بعدی) میتوان از توابع بالا استفاده نمود. برای مثال بردار متغیر وابسته می تواند فرمهای زیر را داشته باشد:

$$\{U\} = \{u\} = u = [\varphi]^T \{\alpha\} \qquad ۵-۴$$

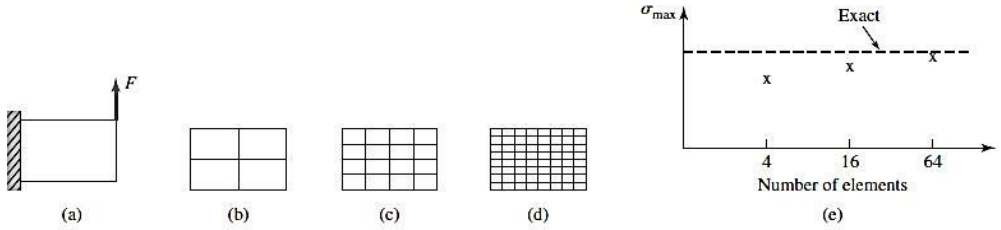
$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ \upsilon \end{Bmatrix} = [\varphi]^T \{\alpha\} = \begin{bmatrix} \{\varphi\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{\varphi'\}^T \end{bmatrix} \{\alpha\}$$

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [\varphi]^T \{\alpha\} = \begin{bmatrix} \{\varphi\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{\varphi'\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{0\}^T & \{\varphi''\}^T \end{bmatrix} \{\alpha\}$$

در روابط بالا ماتریس $[\varphi]$ می‌تواند تابعی ازمتغیر مستقل x در فضای یک بعدی، یا تابعی ازمتغیرهای مستقل x,y در فضای دو بعدی و یا در نهایت تابعی ازمتغیرهای مستقل x,y,z در فضای سه بعدی باشد.

۴-۵ معیارهای همگرایی

در تحلیل اجزا محدود، دقت جواب بر حسب همگرایی محاسبات وقتی که مش بندی بهبود می یابد، سنجیده می شود. در حالت کلی دو روش در تصحیح مش بندی[۳] به کار گرفته می شود. در روش اول که به روش h-refinement معروف است با افزایش تعداد المان ها یا کوچک کردن ابعاد آن ها همراه است. در روش دوم که به روش p-refinement معروف است، ابعاد المان ها ثابت باقی می ماند و تصحیح مش بندی به وسیله افزایش مرتبه چند جمله ای های مورد استفاده در توابع تغییرمکان صورت می گیرد. هدف هر دو روش مجانب کردن جواب به مقادیر ثابتی است که در واقع همان جواب دقیق مساله است. به عنوان مثال شکل زیر فرایند همگرا شدن جواب تقریبی برای بیشترین تنش کششی ایجاد شده در سازه با افزایش تعداد المان ها، به جواب دقیق را نشان می دهد.



شکل ۴-۴ همگرائی در تصحیح مش بندی

لذا در روش اجزاء محدود می‌توان با افزایش تعداد المان‌ها و ریزتر کردن مش به جواب مسئله نزدیک شد یا به عبارت دیگر مقادیر جواب را به سمت مقدار ثابتی میل داد. جهت حصول این همگرائی باید تابع تغییر مکان انتخاب شده در المان‌ها شرایط خاصی که در ادامه می‌آید را داشته باشند:

۴-۵-۱ المان‌های کامل[۴]

المانهای کامل به المانهائی اطلاق می‌گردد که شرایط زیر را در مدل تابع جابجائی داشته باشند:

۱- مدل جابجایی باید شامل ترم‌های حرکت صلب گونه المان باشد؛ یعنی جملاتی که انرژی کرنشی صفر را باعث می‌شوند. در المان تیر، دو مد صلب شامل ترم انتقال[۵] و ترم دوران[۶] بصورت زیر می‌باشد:

---

[۳] Mesh Refinement
[۴] Complete Elements
[۵] Translation
[۶] Rotation

w=constant (انتقال)

w=bx (دوران)

۲- مدل جابجایی باید شامل ترم‌هایی که سبب کرنش ثابت[۷] در المان می‌شوند نیز باشد. این ترم در المان تیر همان ترم انحناء یا مشتق دوم تابع تغییر مکان می‌باشد.

$$w=a+bx+cx^2$$

(کرنش ثابت $=d^2w/dx^2=2c$ = انحنا)

دلیل وجود این ترم در تابع تغییر مکان این است که المان‌های بزرگتر وقتی کوچک و کوچکتر می‌شوند باید توانائی ایجاد کرنش ثابت در المان را داشته باشند.

به المانهائی که شرط ۱ و ۲ را داشته باشند، المانهای کامل اتلاق می‌گردند.

۴-۵-۲ المان‌های سازگار[۸]

المانهای سازگار به المانهائی اطلاق می‌گردد که شرط پیوستگی جابجائی و مشتقات آن بین المانها را در مدل تابع جابجائی داشته باشند.

۳- وجود پیوستگی جابجائی و مشتقات آن بین المانها، می‌تواند همگرائی را تضمین کند. هر چند شروط پیوستگی جابجایی و مشتقات آن در مرزهای المان همواره موضوعی بحث برانگیز بوده است، لیکن پیوستگی جابجایی و مشتقات آن شرط کافی برای همگرایی یکنواخت انرژی پتانسیل کل است. عیب المان‌های غیر سازگار این است که سبب سختی کمتر سازه یا انعطاف پذیری بالاتر آن می‌شوند.

در این جا باز یادآوری می شود که اگر بالاترین مشتق موجود در فانکشنال یک مساله از مرتبه m باشد مساله از نوع C^{m-1} خواهد بود و متغیر مساله(تابع وابسته) باید بر روی مرزهای المان تا مشتق مرتبه $m-1$ پیوسته باشد. به عنوان مثال در مسائل اعضای محوری که از نوع C^0 هستند باید متغیر مساله که همان تغییرمکان در راستای محور عضو است پیوستگی تنها باید تا مشتق مرتبه صفر (خود تابع تغییرمکان) در مرزهای المان ارضا گردد. در جدول زیر این شرایط پیوستگی برای چند نمونه از مسائل مختلف آورده شده است:

---

[۷] Constant Strain

[۸] Compatible(Conforming) Elements

متغیرهایی که باید بر روی مرز المان ها پیوسته باشند	نوع مساله	متغیر مساله	نوع مساله
u	C^0	تغییر مکان طولی (u)	اعضای محوری
T	C^0	دما (T)	انتقال حرارت
$v\ ,v_x$	C^1	تغییر مکان عرضی (v)	اعضای خمشی

جدول ۴-۱ پیوستگی در مسائل مختلف

لازم به ذکر است که در مسائل C^1 در فضای دو بعدی به جای پیوستگی w، w_x، w_yوw_n تنها پیوستگیwو w_n در مرزها کافی است.

۴- همسانی فضایی[۹] در حالات دو بعدی و سه بعدی نیز باید رعایت شود.

یعنی در صورت داشتن یک عبارت باید قرینه آن را نیز در نظر بگیریم (مطابق مثلث خیام پاسگال شکل۴-۳ و ۴-۵). مثلا هرگاه $x^2 y$ را در نظر گرفتیم باید $y^2 x$ را نیز در نظر بگیریم. بدون در نظر گرفتن قاعده بالا همگرایی ممکن است به کندی صورت بگیرد و این کار سبب می‌شود تا همگرایی سریع‌تر صورت گیرد.

ترم ثابت	*Constant term*	1
ترمهای خطی	*Linear terms*	$x \quad y$
ترمهای درجه دو	*quadratic terms*	$x^2 \quad xy \quad y^2$
ترمهای درجه سه	*Cubic terms*	$x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3$
ترمهای درجه چهار	*quartic terms*	$x^4 \quad x^3y \quad x^2y^2 \quad xy^3 \quad y^4$
ترمهای درجه پنج	*quintic terms*	$x^5 \quad x^4y \quad x^3y^2 \quad x^2y^3 \quad xy^4 \quad y^5$

شکل ۴-۵ مثلث خیام پاسگال در فضای دو بعدی

به عنوان مثال برای یک تا بع تغییر مکان درجه سوم با ۸ جمله دو انتخاب زیر را داریم:

الف) ثابت + ترمهای خطی + ترمهای درجه دو + x^3 و y^3

ب) ثابت + ترمهای خطی + ترمهای درجه دو + x^2y و xy^2

---

[۹] Spatial Isotropy

در روش اجزاء محدود فرمول بندی جابجایی سبب می‌شود تا سازه سخت‌تر از آنچه هست در نظر گرفته شود یعنی ضرایب سختی برای یک مدل جابجایی معلوم اندازه بزرگتری نسبت به حالت واقعی سیستم دارند. (در این حالت مقدار محاسبه شده تغییرمکان‌ها کمتر از مقدار واقعی می‌شوند).

هنگامیکه المان‌ها در روش اجزا محدود کوچکتر می‌شوند جواب‌های تقریبی برای تغییرمکان‌ها به جواب‌های دقیق بیشتر نزدیک می‌شوند. در این حالت انرژی پتانسیل کل از بالا به سمت انرژی پتانسیل کل واقعی سیستم میل می‌کند.

۶-۴ درجات آزادی گره‌ای

از درجات آزادی به تغییرمکان‌های گره‌ای، دوران‌ها، و یا کرنش‌های لازم برای بیان کامل تغییرشکل در روش اجزاء محدود، یاد می‌شود. کمترین تعداد درجات آزادی برای یک مساله معلوم به وسیله احتیاجات کامل بودن المان برای همگرایی، الزامات همسان بودن هندسی و شرط کافی بودن تعداد جملات در تابع انرژی پتانسیل تعیین می‌شود.

برای انتخاب تعداد ضرایب ثابت چند جمله‌ای که باید در تابع تغییرمکان یک المان ظاهر گردند باید به این نکته دقت شود که تعداد این ضرایب باید بزرگتر مساوی تعداد گره¬ها یا درجات آزادی المان باشند. (معمولا تعداد ضرایب چند جمله‌ای را برابر همان تعداد درجات آزادی درنظر می‌گیرند).

این افزایش ضرایب مربوط به گره‌های داخلی است و تقریب تعادل در داخل المان را بهبود می¬بخشد. به ندرت تعداد کمی از ضرایب اضافی قابل توجیه هستند. درجات آزادی اضافی بیشتر انعطاف¬پذیری بالاتری را به دنبال دارند و سختی المان را کم می¬کنند ولی این موضوع باید بررسی شود زیرا این افزایش سبب پیچیدگی فرمول¬بندی برای المان می¬گردد.

درجات آزادی اضافه شده مازاد بر کمترین تعداد لازم، می‌تواند از طریق اضافه کردن گره‌های ثانویه خارجی یا با تعیین کردن درجات آزادی مازاد شامل مشتقات تغییرمکان‌ها در همان نقاط قبلی بدست آید.

روش اجزاء محدود بر اساس تقریب توابع متغیر وابسته در یک دستگاه مختصات تعبیه شده روی المان در داخل المان بنا نهاده شده است. برای یک المان که دارای m گره و در هر گره دارای k درجه آزادی میباشد، می توان بردار درجه آزادی المان را بصورت زیر نوشت($n=m\times k$) :

۶-۴

$$\left\{\delta^{e}\right\}_{n\times 1}=\begin{Bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ .\\ .\\ .\\ .\\ \delta_n\end{Bmatrix}_{n\times 1}=\begin{Bmatrix}\left\{\delta_1^{node}\right\}\\ \left\{\delta_2^{node}\right\}\\ .\\ \left\{\delta_i^{node}\right\}\\ .\\ \left\{\delta_m^{node}\right\}\end{Bmatrix}\qquad \left\{\delta_i^{node}\right\}_{k\times 1}=\begin{Bmatrix}\delta_{i1}\\ \delta_{i2}\\ .\\ .\\ .\\ \delta_{ik}\end{Bmatrix}$$

در روابط بالا δ_{ij} درجه آزادی j ام در گره i ام می‌باشد که از ۱ تا k که تعداد درجات آزادی هر گره است تغییر می‌کند. درجات آزادی همانگونه که بیان شد می‌تواند تغییرمکان‌های گره‌ای، دوران‌ها، و یا کرنش‌های لازم برای بیان کامل تغییرشکل در روش اجزاء محدود، یاد می‌شود. تعداد کل درجات آزادی المان برابر با $n=m\times k$ می‌باشد.

تقریب توابع وابسته برای یافتن درجات آزادی در گره ها را بر حسب نوع مسئله و با استفاده از روابط ۴-۲ و ۴-۳ و یا ۴-۴و یا در حالت کلی ۴-۵ می‌توان تعیین نمود. برای بردار درجه آزادی در هر گره می‌توان نوشت:

۷-۴

$$\left\{\delta_i^{node}\right\}_{k\times 1}=\begin{Bmatrix}\delta_{i1}\\ \delta_{i2}\\ .\\ \delta_{ii}\\ .\\ \delta_{ik}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sum_{j=1}^{m}\phi_j^1\alpha_j^1\\ \sum_{j=1}^{m}\phi_j^2\alpha_j^2\\ .\\ \sum_{j=1}^{m}\phi_j^i\alpha_j^i\\ .\\ \sum_{j=1}^{m}\phi_j^k\alpha_j^k\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{\varphi^1\}^T\{\alpha^1\}\\ \{\varphi^2\}^T\{\alpha^2\}\\ .\\ .\\ .\\ \{\varphi^k\}^T\{\alpha^k\}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\{\varphi^1\}^T & [0] & . & . & [0]\\ [0] & \{\varphi^2\}^T & . & . & [0]\\ . & . & . & . & [0]\\ . & . & . & . & [0]\\ [0] & [0] & [0] & [0] & \{\varphi^k\}^T\end{bmatrix}_{k\times n}\begin{Bmatrix}\{\alpha^1\}\\ \{\alpha^2\}\\ .\\ .\\ .\\ \{\alpha^k\}\end{Bmatrix}_{n\times 1}=[\varphi_i]^T\{\alpha\}$$

با جایگزینی این رابطه در رابطه درجه آزادی المان، رابطه زیر حاصل می‌گردد.

۸-۴

$$\left\{\delta^e\right\}_{n\times1}=\begin{Bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ .\\ .\\ .\\ .\\ \delta_n\end{Bmatrix}_{n\times1}=\begin{Bmatrix}\left\{\delta_1^{node}\right\}\\ \left\{\delta_2^{node}\right\}\\ .\\ \left\{\delta_i^{node}\right\}\\ .\\ \left\{\delta_m^{node}\right\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}[\varphi_1]^T\{\alpha\}\\ [\varphi_2]^T\{\alpha\}\\ .\\ [\varphi_i]^T\{\alpha\}\\ .\\ [\varphi_k]^T\{\alpha\}\end{Bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}[\varphi_1]^T & [0] & . & . & [0]\\ [0] & [\varphi_2]^T & . & . & [0]\\ . & . & . & . & [0]\\ . & . & . & . & [0]\\ [0] & [0] & [0] & [0] & [\varphi_k]^T\end{bmatrix}_{n\times n}\{\alpha\}=[T]\{\alpha\}$$

با معکوس کردن رابطه بالا به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\{\alpha\}=[T]^{-1}\left\{\delta^e\right\} \qquad ۹-۴$$

رابطه بالا را می‌توان در رابطه ۴-۵ قرار داد که نتیجه زیر حاصل می‌گردد.

$$\left\{U\right\}=[\varphi]^T[T]^{-1}\left\{\delta\right\}=\left[N\right]\left\{\delta\right\} \qquad ۱۰-۴$$

ماتریس [N] را ماتریس شکل می‌نامند که رابطه بین درجات آزادی و توابع متغیرهای وابسته را نشان می دهد. به عبارت دیگر این رابطه مقادیر متغیرهای وابسته را بر حسب درجات آزادی گره‌ها اینترپلاسیون می‌کند.

روابط بالا برای مثال در فضای دو بعدی با دو تابع وابسته u و v به عنوان مدل تغییرمکان را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$u(x,y)=\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3y+\alpha_4x^2+\alpha_5xy+\alpha_6y^2.....+\alpha_my^n \qquad ۱۱-۴$$

$$\upsilon(x,y)=\alpha_{m+1}+\alpha_{m+2}x+\alpha_{m+3}y+\alpha_{m+4}x^2+\alpha_{m+5}xy+\alpha_{m+6}y^2.....+\alpha_{2m}y^n$$

uو v به ترتیب تغییرمکان در جهت x وy هستند. لازم به ذکر است که لازم نیست که در تمام مواقع توابع وابسته از مرتبه یکسانی برخوردار باشند بجز در مسائل الاستیسیته که معمولا از یک مرتبه هستند.

$$\begin{Bmatrix} u \\ \upsilon \end{Bmatrix} = [\phi]\{\alpha\} = \begin{bmatrix} \{\phi\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{\phi\}^T \end{bmatrix} \{\alpha\} \qquad ۱۲-۴$$

$$\{\phi\}^T = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad . \quad . \quad .y^n]$$

$$\{\alpha\}^T = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad . \quad . \quad . \quad \alpha_{2m}]$$

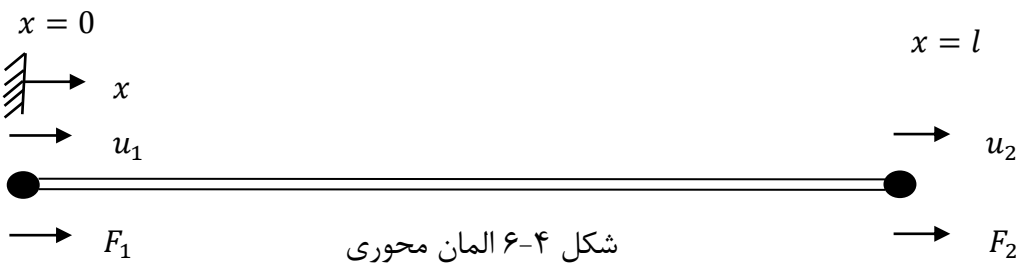
شبیه همین روابط را برای حالت سه‌بعدی (3-D) برای (u,v,w) می‌توان ساخت.

مدل تغییرمکان مختصه‌های تعمیم یافته[۱۰] یک شکل مقدماتی از مدل‌های روش اجزا محدود است. یک بیان دیگر نیز از میدان تغییرمکان چندجمله‌ای وجود دارد که سهولت بیشتری را در فرمول‌بندی معادلات پایه برای المان‌ها ایجاد می‌کند که در فصلهای بعد به آن میپردازیم.

---

[۱۰] Generalized coordinates displacement model

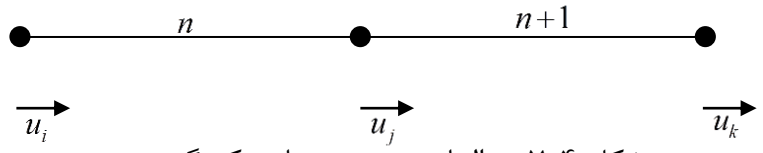
مثال۱- در عضو محوری تابع تغییر مکان محوری به صورت ذیل است، ثابت کنید که تابع تغییر مکان شرایط سازگاری را ارضا می کند.



شکل ۴-۶ المان محوری

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)u_1 + \left(\frac{x}{l}\right)u_2$$

با توجه به اینکه مساله نیروی محوری از نوع C^0 است باید نشان دهیم که متغیر u در نقاط مرزی المان ها پیوسته است. برای این منظور دو المان مجاور هم را به صورت زیر در نظر می گیریم:



شکل ۴-۷ دو المان محوری مجاور یکدیگر

در المان n، تابع تغییر مکان به صورت زیر بیان می شود:

$$u_n(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)u_i + \left(\frac{x}{l}\right)u_j$$

در المان $n+1$، نیز تابع تغییر مکان عبارت زیر است:

$$u_{n+1}(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)u_j + \left(\frac{x}{l}\right)u_k$$

برای ارضای شرط پیوستگی باید مقدار تغییرمکان دو المان در گره j با هم برابر باشد:

$$u_n(l) = u_j$$
$$u_{n+1}(0) = u_j$$

پس نتیجه می شود که شرط سازگاری ارضا شده است.

مثال ۲: تابع تغییر شکل عرضی تیر خمشی را تعیین و المان تیـر را نشـان داده و تـابع تبـدیل آن را بدست آورید.

مدل تابع تغییرمکان برای تیر را می‌توان بر حسب یک تابع چند جمله‌ای درجه دو نوشت:

$$w = a + bx + cx^2$$

$a = rigid \quad body\ translation$ حرکت صلب گونه انتقالی

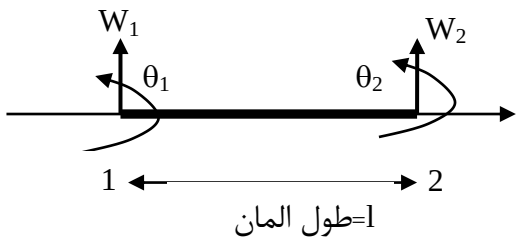
$b = rigid \quad body\ rotation$ حرکت صلب گونه دورانی

$c = constant\ bending\ strain (constant\ curvature)$ کـرنش ثابـت (انحنـای

مشاهده می‌شود که تابع تغییرشکل شامل ترم‌هایی می‌باشد که حرکت صلب را بیان می‌کنند. این تابع همچنین شامل ترم‌هایی که کرنش ثابت را ایجاد می‌کنند، نیز هست (کرنش‌ها متناسب با مشـتق دوم w هستند). پس شرط کامل بودن المان ارضا شده است. لذا کمترین درجه w جهت کامل بودن المـان تابع از درجه دوم می‌باشد.

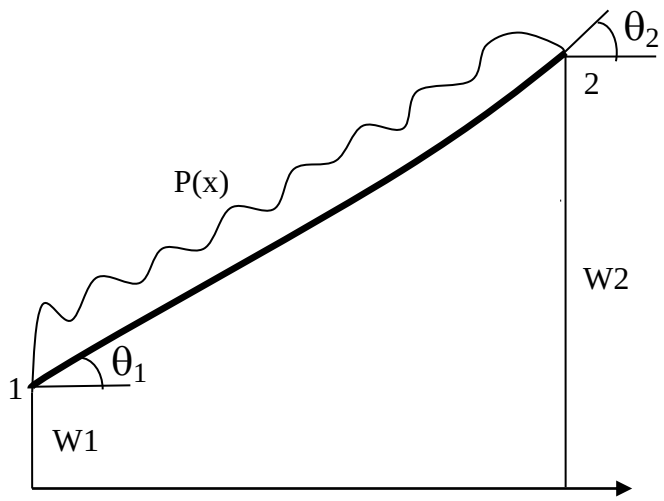
برای سازگار بودن المان با توجه به نوع مسئله که C^1 می‌باشد نیاز به پیوستگی w و w_x در مرز مشترک المان‌هارا داریم. با تعیین درجات آزادی w_1 , w_2 درنقاط انتهائی المان می‌توان به پیوستگی تابع تغییر مکان دست یافت. برای پیوستگی w_x نیازمند تعریف دو درجه آزادی دیگر w_{x1} (θ_1) و w_{x2} (θ_2) در دو انتهای المان هستیم.

چون w تنها تابعی از x است، ما نیازی به همسانی هندسی نداریم.



شکل ۴-۸ المان تیر خمشی با چهار درجه آزادی

المان زیر را که مطابق شکل توسط گره‌های ۱و۲ تعریف شده را در نظر بگیرید. طـول المـان برابـر l و سختی خمشی آن ثابت و برابر EI است و تحت بار P(x) قرار دارد.



شکل ۴-۹ تغییر مکان المان تیر خمشی با چهار درجه آزادی تحت اثر بار خارجی

تغییرمکان های w_1 و w_2 وθ_1و θ_2را به عنوان ۴ درجه آزادی در المان تعریف می کنیم. تابع تغییرمکان در داخل المان را نیز یک چند جمله‌ای در جه سه از x مطابق زیر در نظر مـی‌گیـریم و بـدین ترتیـب تعداد درجات آزادی برابر تعداد مختصه های تعمیم یافته می‌گردد که داریم:

$$w = a + bx + cx^2 + dx^3$$

تابع تغییرمکان ما دارای چهار ثابت مجهول است که دقیقا برابر تعداد درجات آزادی تعریف شده بـرای المان است.

$$w = a + bx + cx^2 + dx^3$$

$$w = \{\varphi\}^T \{\alpha\} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix}$$

$$\theta = w_x = b + 2cx + 3dx^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix}$$

$$\{\delta\}_{n\times 1}=\begin{Bmatrix} w(node1) \\ w_x(node1) \\ w(node2) \\ w_x(node2) \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \varphi(node1) \\ \varphi_x(node1) \\ \varphi(node2) \\ \varphi_x(node2) \end{bmatrix}\{\alpha\}$$

$\{\delta\}$بردار درجه آزادی المان می‌باشدکه n تعداد کل درجات آزادی موجود در المان است.

$$\{\delta\}=\begin{Bmatrix} w(x=0) \\ \theta(x=0) \\ w(x=l) \\ \theta(x=l) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix}=[T]\{\alpha\}$$

ارتباط بین درجات آزادی و مختصه‌های تعمیم یافته (ضرایب چند جمله‌ای) عبارتند از:

$$\{\alpha\}=[T]^{-1}\{\delta\}$$

$$w=[\varphi]^T[T]^{-1}\{\delta\}=[N]\{\delta\}$$

تغییرمکان‌ها در هر نقطه داخل المان بر حسب بردار درجات آزادی المان {δ} بیان می‌شوند. بردار [N] را بردار تابع شکل می‌نامند که ارتباط بین درجات آزادی المان و تابع تغییر مکان را مشخص می‌کند. تعبیر دیگر این رابطه این است که تابع تغییر مکان بر حسب درجات آزادی المان درون‌یابی شده‌است. می‌توان دریافت که در این روش جهت یافتن [N] نیاز به معکوس کردن بردار تبدیل [T] داریم که برای هر المان انجام این کار زمانبر خواهد بود. لذا در روشی دیگر که به اختصار در مثال بعد خواهم آورد این مشکل مرتفع خواهد شد.

مثال ۳: روشی دیگر برای بدست آوردن ضرایب چندجمله‌ای بر حسب درجات آزادی

بر اساس درجات آزادی تعریف شده در المان تیر نشان داده شده در شکل ۴-۸ داریم:

$$w(0) = a = w_1$$

$$\theta(0) = \frac{dw(0)}{dx} = b = \theta_1$$

$$w(l) = a + bl + cl^2 + dl^3 = w_2$$

$$\theta(l) = \frac{dw(l)}{dx} = b + 2cl + 3dl^2 = \theta_2$$

با حل چهار معادله و چهار مجهول ضرایب a,b,c,d را بـر حسـب درجـات آزادی $w_1,w_2,\theta_2,\theta_1$ بدسـت می‌آوریم:

$$a = w_1$$
$$b = \theta_1$$
$$c = 3\frac{w_2 - w_1}{l^2} - \frac{2\theta_1 + \theta_2}{l}$$
$$d = \frac{\theta_1 + \theta_2}{l^2} + 2\frac{w_1 - w_2}{l^3}$$

حال اگر جای ضرایب a,b,c,d مقدار آنها بر حسب $w_1,w_2,\theta_2,\theta_1$ را در تابع تغییرمکان قرار دهیم:

$$w(x) = w_1 + \theta_1\ x + \left[\frac{w_2 - w_1}{l^2} - \frac{2\theta_1 + \theta_2}{l}\right] x^2 + \left[\frac{\theta_1 + \theta_2}{l^2} + 2\frac{w_1 - w_2}{l^3}\right] x^3$$

با به کارگیری سیستم مختصات بدون بعد $\xi = x/l$ ، می‌توانیم تابع تغییرمکان تیر را بـر حسـب ξ بیـان کنیم:

$$w(\xi) = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)\ w_1 + (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)\ l\theta_1 + (3\xi^2 - 2\xi^3)\ w_2 + (\xi^3 - \xi^2)\ l\theta_2 \qquad ۱۳\text{-}۴$$

$$w(\xi) = \phi_1(\xi)\ w_1 + \phi_2(\xi)\ l\theta_1 + \phi_3(\xi)\ w_2 + \phi_4(\xi)\ l\theta_2$$

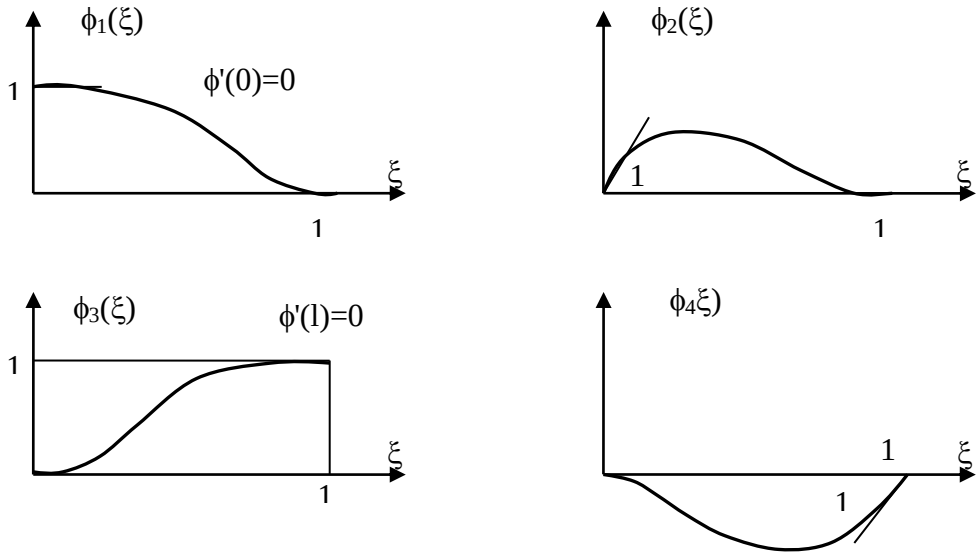
که ϕ_i ها را اغلب توابع درونیابی (اینترپلاسیون) یا توابع شکل می‌نامند. توابع شکل عبارتند از:

$$\phi_1(\xi) = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)$$

$$\phi_2(\xi) = l(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)$$

$$\phi_3(\xi) = (3\xi^2 - 2\xi^3)$$

$$\phi_4(\xi) = l(\xi^3 - \xi^2)$$



شکل ۴-۱۰ بیان گرافیکی ϕ_i ها، توابع شکل المان تیر

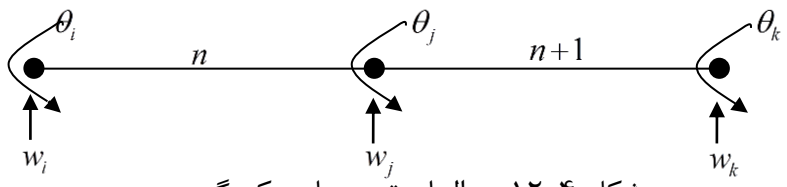
مثال۴. المان خمشی معرفی شده در مثال ۲ را ثابت کنید که در آن تابع تغییر مکان شرایط سازگاری را ارضا می کند.

شکل ۴-۱۱ المان تیر

$$w(x) = w_1 + \theta_1 x + [3(\frac{w_2 - w_1}{l^2}) - (\frac{2\theta_1 + \theta_2}{l})]x^2 + [2(\frac{w_1 - w_2}{l^3}) + (\frac{\theta_1 + \theta_2}{l^2})]x^3$$

حل:

با توجه به اینکه مساله از نوع C^1 است باید نشان دهیم که متغیر w و مشتق مرتبه اولش در نقاط مرزی المان ها پیوسته است. برای این منظور دو المان مجاور هم را به صورت زیر در نظر می گیریم:



شکل ۴-۱۲ دو المان تیر مجاور یکدیگر

در المان n، تابع تغییر مکان و شیب به ترتیب به صورت زیر بیان می شود:

$$w_n(x) = w_i + \theta_i x + [3(\frac{w_j - w_i}{l^2}) - (\frac{2\theta_i + \theta_j}{l})]x^2 + [2(\frac{w_i - w_j}{l^3}) + (\frac{\theta_i + \theta_j}{l^2})]x^3$$

$$\theta_n(x) = \theta_i + [3(\frac{w_j - w_i}{l^2}) - (\frac{2\theta_i + \theta_j}{l})]2x \ + [2(\frac{w_i - w_j}{l^3}) + (\frac{\theta_i + \theta_j}{l^2})]3x^2$$

در المان $n+1$، نیز تابع تغییر مکان و شیب به ترتیب عبارت زیر است:

$$w_{n+1}(x) = w_j + \theta_j x + [3(\frac{w_k - w_j}{l^2}) - (\frac{2\theta_k + \theta_k}{l})]x^2 + [2(\frac{w_j - w_k}{l^3}) + (\frac{\theta_j + \theta_k}{l^2})]x^3$$

$$\theta_{n+1}(x) = \theta_j + [3(\frac{w_k - w_j}{l^2}) - (\frac{2\theta_j + \theta_k}{l})]2x \ + [2(\frac{w_j - w_k}{l^3}) + (\frac{\theta_j + \theta_k}{l^2})]3x^2$$

برای ارضای شرط پیوستگی باید مقدار تغییرمکان و شیب دو المان در گره j با هم برابر باشد:

$$\begin{cases} w_n(l) = w_j \\ w_{n+1}(0) = w_j \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} \theta_n(l) = \theta_j \\ \theta_{n+1}(0) = \theta_j \end{cases}$$

پس نتیجه می شود که شرط سازگاری ارضا شده است.

باید دوباره یادآور شد که ارضای شرایط سازگاری دارای مفهوم فیزیکی است. در مسائل سازه ای پیوستگی تغییرمکان ها در واقع عدم وجود حفره یا جای خالی در سازه در فرایند مدلسازی را نشان می دهد. و یا به طور مثال پیوستگی شیب ها می تواند نشانگر عدم وجود پیچ خوردگی در سازه باشد. در مساله انتقال حرارت نیز شرایط سازگاری از ایجاد پرش های ناپیوسته در توزیع دما که طبق فیزیک مساله قابل قبول نیست جلوگیری می کند.

۴-۷ فرم کلی انرژی پتانسیل برای یک جسم الاستیک خطی

در فصل دوم و سوم فرم کلی انرژی پتانسیل برای یک جسم الاستیک خطی را به صورت زیر نشان دادیم:

$$\pi = U - W$$
$$U = Strain\ Energy$$
$$W = -P = Potential\ Energy\ of\ the\ Applied\ Loads(\ body\ \ forces\ and\ surface\ traction)$$
$$\pi = \iiint_V \chi(u,v,w)dV - \iiint_V \left(\bar{F}_{Bx}u + \bar{F}_{By}v + \bar{F}_{Bz}w\right)dV - \iint_{S_T} \left(\bar{F}_{Tx}u + \bar{F}_{Ty}v + \bar{F}_{Tz}w\right)dS_1$$

که در آن **U** انرژی کرنشی و **W** انرژی پتانسیل ناشی از بارهای اعمالی خارجی (نیروهای جرمی و نیرو های سطحی) می‌باشد. $\mathbf{S_T}$ سطحی است که نیروهای سطحی روی آن تعریف شده اند. **χ(u,v,w)** انرژی کرنشی در واحد حجم است (چگالی انرژی کرنشی). دو انتگرال آخری، کار انجام شده توسط

نیروهای خارجی که شامل نیروهای جرمی $\bar{F}_{Bx},\bar{F}_{By},\bar{F}_{Bz}$ و نیروهای سطحی $\bar{F}_{Tx},\bar{F}_{Ty},\bar{F}_{Tz}$ است، را بیان می کنند. علامت بار نیز نشان دهنده مشخص بودن مقادیر پارامترها است.

انرژی کرنشی را می‌توان بر حسب روابط ارائه شده بصورت زیر نوشت:

$$\chi(u,v,w)=\int \{\sigma\}^T d\{\varepsilon\}=\int \{\varepsilon\}^T [C] d\{\varepsilon\}=\frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T [C]\{\varepsilon\} \qquad ۱۴-۴$$

$$\pi=\frac{1}{2}\iiint_V \left(\{\varepsilon\}^T [C]\{\varepsilon\}-2\{U\}^T\{\bar{F}_B\}\right) dV-\iint_{S_T}\{U\}^T\{\bar{F}_T\} dS_1$$

که در آن:

$$\{U\}^T=\{u \quad v \quad w\}$$
$$\{\bar{F}_B\}^T=\{\bar{F}_{Bx} \quad \bar{F}_{By} \quad \bar{F}_{Bz}\}$$
$$\{\bar{F}_T\}^T=\{\bar{F}_{Tx} \quad \bar{F}_{Ty} \quad \bar{F}_{Tz}\}$$

با توجه به تعریف کرنش می توان نوشت:

$$\{\varepsilon\}=[L]\{U\}$$

تنش ها نیز توسط ماتریس الاستیسیته $[C]$ که قبلا بدست آمد، به تنش ها مربوط می شوند.

$$\{\sigma\}=[C]\{\varepsilon\}$$

حال اگر توابع تغییرمکان در داخل هر المان به صورت زیر تقریب زده شوند

$$\{U^e\}=[\varphi]\{\delta^e\}$$
$$\{\varepsilon\}=[L][\varphi]\{\delta^e\}$$
$$\{\sigma\}=[C]\{\varepsilon\}=[C][L][\varphi]\{\delta^e\}$$
$$\{\sigma\}^T=\left([C]\{\varepsilon\}\right)^T=\{\delta^e\}^T\left([L][\varphi]\right)^T[C] \quad note:\ [C]^T=[C]$$

معادلات کسب شده در قبل را در داخل رابطه انرژی کرنشی جایگزین کرده و انرژی کرنشی را برای یک المان محاسبه می کنیم:

$$U_e=\frac{1}{2}\int_{V^e}\left[\{\delta^e\}^T\left([L][\varphi]\right)^T[C]\right]\left[[L][\varphi]\{\delta^e\}\right]dV^e$$
$$[B]=[L][\varphi]$$
$$U_e=\frac{1}{2}\{\delta^e\}^T\int_{V^e}[B]^T[C][B]dV^e\ \{\delta^e\}$$

دقت داریم که $\{\delta^e\}$مستقل از $x\,,\,y,\,z$است.

در این جا فرض می شود که شرایط مرزی همگن هستند(مقادیر تغییر مکانها در این مرزها برابر صفر هستند)، پس انتگرال آخری در فرم انرژی پتانسیل را نخواهیم داشت و انرژی پتانسیل شامل ترمهای مربوط به نیروهای جرمی نیز عبارت است از:

$$\int_{V^e} \left\{\bar{F}_B\right\}^T \{U\} dV^e = \int_{V^e} \{U\}^T \left\{\bar{F}_B\right\} dV^e$$

$$\int_{V^e} \{U\}^T \left\{\bar{F}_B\right\} dV^e = \left\{\delta^e\right\}^T \int_{V^e} [\varphi]^T \begin{Bmatrix} \bar{F}_{Bx} \\ \bar{F}_{By} \\ \bar{F}_{Bz} \end{Bmatrix} dV^e = W^e$$

رابطه بالا در واقع کار انجام شده توسط نیروهای جرمی یا همان انرژی پتانیسل ناشی از آن ها است.

حال می توان انرژی پتانسیل کل المان را به صورت زیر بیان کرد:

$$\pi_e = \frac{1}{2}\{\delta^e\}^T \int_{V^e} [B]^T[C][B]dV^e \;\; \{\delta^e\} - \left\{\delta^e\right\}^T \int_{V^e} [\varphi]^T \left\{\bar{F}_B\right\} dV^e \qquad ۱۵\text{-}۴$$

به کمک حساب تغییرات می‌توان پایا نمودن تابع انرژی پتانسیل را بصورت زیر نوشت:

$$\delta\pi_e = \delta\{\delta^e\}^T \left[\left(\int_{V^e} [B]^T[C][B]dV^e\right)\{\delta^e\} - \left(\int_{V^e} [\varphi]^T \left\{\bar{F}_B\right\} dV^e\right)\right] = 0$$

براساس این که $\{\delta^e\}$مستقل از $x\,,\,y,\,z$است، داریم:

$$[K^e]\left\{\delta^e\right\} - \left\{\bar{F}^e_B\right\} = 0$$

که در آن:

$$[K^e] = \int_{V^e} [B]^T[C][B]dV^e \qquad ۱۶\text{-}۴$$

$$\{\bar{F}^e_B\} = \int_{V^e} [\varphi]^T \left\{\bar{F}_B\right\}$$

می‌توان دریافت که ماتریسهای فوق بترتیب ماتریس سختی و ماتریس بار معادل یک المان می‌باشند.

۴-۸ نظریه انرژی پتانسیل برای گسسته سازی روش اجزا محدود

انرژی پتانسیل کل یک سیستم را می‌توان برابر مجموع انرژیهای پتانسیل تمام المانهای تشکیل دهنده ان سیستم دانست. بدین ترتیب برای انرژی پتانسیل سیستم داریم:

۴-۱۷

$$\pi = \pi_T = \sum_{i=1}^{nele} \left[\frac{1}{2} \iiint_{V^e} \left(\{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} - 2\{U\}^T \left\{ \bar{F}_{Be} \right\} \right) dV^e - \iint_{S^e_T} \{U\}^T \left\{ \bar{F}_{Te} \right\} dS^e_T \right]$$

تا اینجا برای یک المان ثابت کردیم که:

$$U^e = \frac{1}{2} \{\delta^e\}^T [K^e] \{\delta^e\}$$
$$W^e = \{F^e\}^T \{\delta^e\}$$
$$\pi_T = \sum_{i=1}^{nele} \left[\frac{1}{2} \{\delta^e\}^T [K^e] \{\delta^e\} - \{F^e\}^T \{\delta^e\} \right]$$

ماتریس سختی و بردار بار را برای هر المان تحت اثر جرم می‌شناسیم. بردار بار در رابطه بالا اثرات تمام بارها را شامل می‌گردد. حال زمانی که المان‌ها در کنار یکدیگر قرار داده می‌شوند انرژی کل برابر مجموع انرژی تک تک المان‌ها خواهد بود.

با تعریف بردار تغییرمکان گره ای برای کل سازه به صورت $\{X\}_{N\times 1}$، کهN در آن تعداد کل درجات آزادی سازه است و هر المان نیز دارای n درجه آزادی است، داریم:

۴-۱۸

$$\pi = U - W$$
$$U = \frac{1}{2} \{X\}^T [K] \{X\}$$
$$W = \{F\}^T \{X\}$$
$$\pi = \frac{1}{2} \{X\}^T [K] \{X\} - \{F\}^T \{X\}$$

که {F}،{X}و[K] به ترتیب ماتریس سختی کل، بردار تغییرمکان کل و بردار بار کل هستند.

برای مینیمم کردن تابع انرژی پتانسیل کل با پایا نمودن آن مطابق زیر واریاسیون مرتبه اول($\delta\pi$) آن را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\delta\pi = \frac{1}{2} \left\{ \{\delta X\}^T [K] \{X\} + \{X\}^T [K] \{\delta X\} \right\} - \{F\}^T \{\delta X\} = 0$$

با توجه به اسکالر بودن حاصل فوق، پس ترانهاده اش می کنیم و داریم:

$$\{X\}^T[K]\{\delta X\}=\{\delta X\}^T[K]\{X\}$$

در نتیجه:

$$\delta\pi=\left\{\{X\}^T[K]-\{F\}^T\right\}\{\delta X\}=0$$

چون {δX} اختیاری است:

$$\{X\}^T[K]-\{F\}^T=0$$

با ترانهاده کردن داریم:

$$[K]\{X\}-\{F\}=0 \qquad ۱۹-۴$$

با گرفتن واریاسیون مرتبه دوم از π نشان می‌دهیم که در واقع مساله از نوع مینیمم است:

$$\delta^2\pi=\delta\left[\left\{\{X\}^T[K]\{\delta X\}\right\}-\{F\}^T\{\delta X\}\right]$$

$$\delta^2\pi=\{\delta X\}^T[K]\{\delta X\}$$

$$\delta\left\{\{F\}^T\{\delta X\}\right\}=0$$

توجه شود که حاصل دوبار واریاسیون گرفتن از یک ترم همیشه برابر صفر است.

چون {δX} اختیاری است و[K] یک ماتریس مثبت معین[۱۱] است پس:

$$\{\delta X\}^T[K]\{\delta X\}\succ 0 \qquad ۲۰-۴$$

که بر این اساس π مینیمم است و مقدار آن در یک مساله گسسته برابر است با:

$$[K]\{X\}=\{F\}$$
$$\{F\}^T=\{X\}^T[K]$$
$$\pi=\frac{1}{2}\{X\}^T[K]\{X\}-\{X\}^T[K]\{X\}$$
$$\pi=-\frac{1}{2}\{X\}^T[K]\{X\}$$
$$\pi=-U_T \quad |\pi|=|U_T|$$

---

[۱۱] Positive definite

۴-۸-۱ اسمبل (یکپارچه) کردن ماتریس سختی و بردار بار

سازگاری گره‌ای به عنوان اساس اسمبل کردن المان‌ها استفاده می‌شود. المان‌های مجاور یک گره مشخص باید دارای درجات آزادی یکسان مثل انتقال یا کرنش، انحنا، یا دیگر مشتقات جابجایی بر حسب مختصات‌های فضایی یکسان باشند. چون تغییرمکان‌ها در گره‌ها با هم تطابق پیدا کرده‌اند، بارها و سختی‌ها نیز به این مکان‌ها اضافه می‌شوند. ما قوانین واریاسیون را برای المان به کار بردیم. اکنون این قوانین را برای المان‌های اسمبل شده (سازه اصلی) به کار می‌گیریم. فرض کنید المان دارای n درجه آزادی محلی[۱۲] و سازه دارای N درجه آزادی کلی[۱۳] است. و بردار بار (شامل تمام بارهای وارد بر جسم) و ماتریس سختی برای تمام المانها معلوم است.

$$\{F^e\} = \begin{Bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_n^e \end{Bmatrix}_{n\times 1} \begin{matrix} 2 \\ k \\ \\ \\ \\ l \end{matrix} \qquad \{F_G{}^e\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_1^e \\ \\ F_2^e \\ \\ F_n^e \\ \\ \end{Bmatrix}_{N\times 1} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \\ k \\ \\ l \\ \\ N \end{matrix} \quad \textit{Numbers are global DOF}$$

$$\{F^e\}^T\{\delta^e\} = \{F_G{}^e\}^T\{X\}$$

لازم به ذکر است که اعداد مجاور بردارها درجات آزادی کل هستند. بردار $\{F^e{}_G\}$ بردار معادل $\{F^e\}$ برای المان خاص در بردار بار کل سازه است. با همین مفهوم می‌توانیم به ماتریس سختی کل سازه برسیم:

---

[۱۲] Local Degrees of Freedom

[۱۳] Global Degrees of Freedom

$$[k^e]_{n\times n} \Rightarrow \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}_{N\times N} \quad such\ that \quad \{X\}^T[K_G{}^e]\{X\} = \{\delta^e\}^T[k^e]\{\delta\}$$

$[K_G{}^e]$ *is the assembling of one element* int *o global stiffness matrix*

$\sum_{n=1}^{nele} [K_G{}^e]$ را می‌توان مجموع ماتریس سختیهای تک تک المانها دانست که که بر حسب سختی کـل سازه اسمبل شده است

$$\pi_T = \sum_{n=1}^{nele} \left\{ \frac{1}{2}\{\delta^e\}^T[k^e]\{\delta^e\} - \{F^e\}^T\{\delta^e\} \right\}$$

$$= \sum \frac{1}{2}\{X\}^T[K_G{}^e]\{X\} - \{F_G{}^e\}^T\{X\}$$

$$= \frac{1}{2}\{X\}^T\left(\sum_{n=1}^{nele} [K_G{}^e]\right)\{X\} - \left(\sum \{F_G{}^e\}^T\right)\{X\}$$

$$= \frac{1}{2}\{X\}^T[K_G]\{X\} - \{F_G\}^T\{X\}$$

$$\delta\pi = \{\delta X\}^T\left([K_G]\{X\} - \{P_G\}\right) = 0$$

$$[K_G]\{X\} = \{F_G\}$$

بنابراین $\sum \{P_G{}^e\}^T$ و $\sum_{n=1}^{nele} [K_G{}^e]$ تاثیر بردار و ماتریس سختی یک المان در ماتریس کل را مشخص می‌کنند. اینها معادلات تعادل برای برای اسمبل کردن هستند.

معادلات تعادل نتیجه به هم پیوستن المان‌ها در کنار یکدیگرند بدین صورت که:

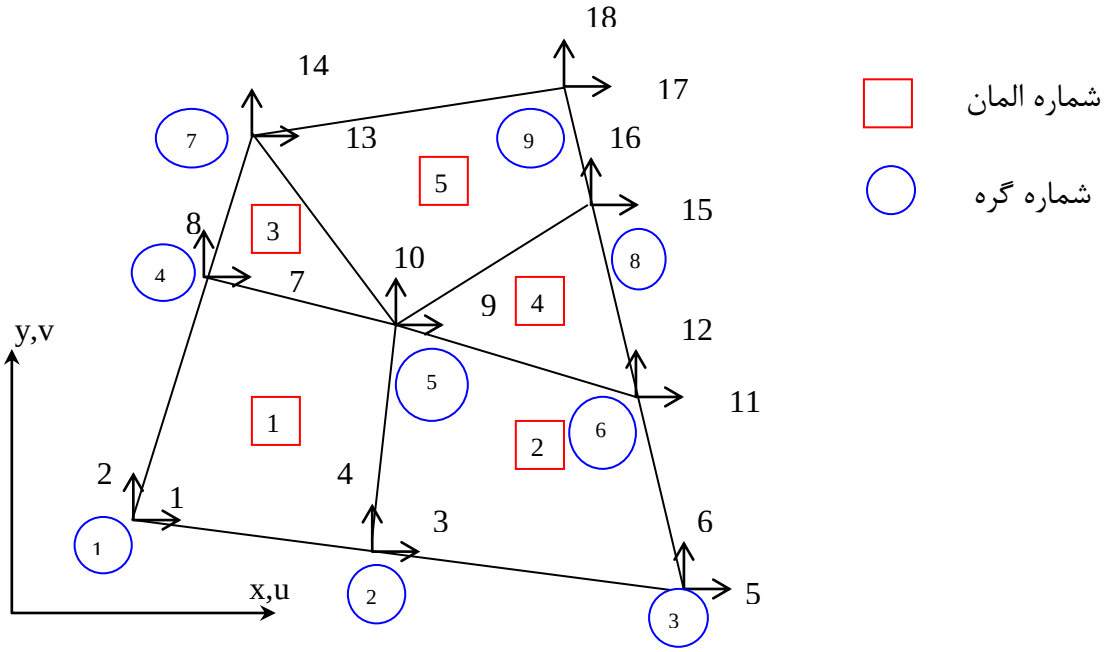
الف) جمع نیروهای کلی در گره‌ها و برابر قرار دادن آنها با بارهای خارجی (تعادل)

ب) برابر گرفتن درجات آزادی در گره‌ها (سازگاری)

باید توجه شود که تعادل و سازگاری در داخل المان‌ها ارضا شده‌اند و بوسیله انجام عملیات قبل، ما تعادل و سازگاری را در گره‌ها نیز ارضا می‌کنیم و تنها نگران پیوستگی بین المان‌ها هستیم.

مثال۵: روش اسمبل کردن ماتریس سختی و بار کل سازه بر اساس ماتریسهای بار و سختی المانها.

این روش ابتدا با شماره‌گذاری المانها و سپس با شماره‌گذاری گره‌ها شروع می‌شود. حال شروع به شماره‌گذاری درجات آزادی کل سازه می‌نمائیم. در این حالت درجه آزادی کل برابر با تعداد گره‌ها ضرب‌در تعداد درجه آزادی هر گره می‌باشد. در این مسئله دو درجه آزادی در هر گره مشخص شده‌است. شکل ۴-۱۳ شماره گذاری المانها، گره‌ها، و درجات آزادی سازه را نشان میدهد.

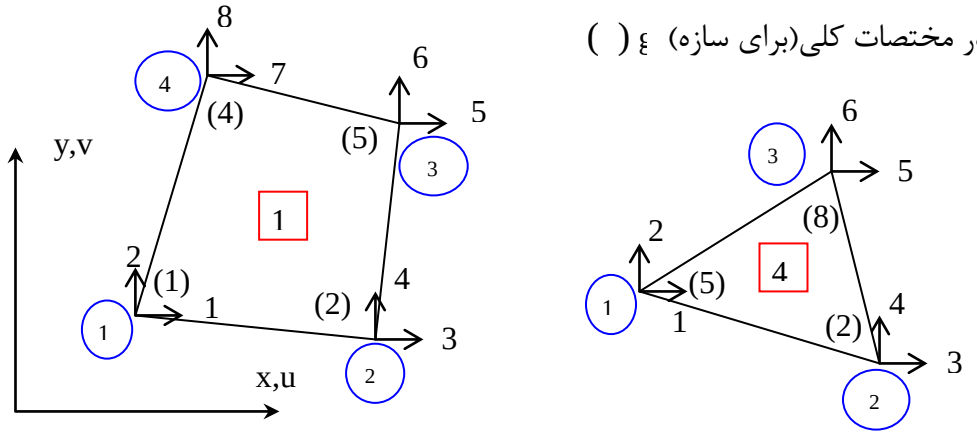


شکل ۴-۱۳ شماره گذاری گره ها در مختصات کلی برای اسمبل کردن

در این مرحله باید به دنبال ارتباط بین درجات آزادی هر المان با درجات آزادی سازه بود. ماتریسهای سختی و بار هر المان بر اساس درجات آزادی محلی بدست آمده‌اند لازم است تا این ماتریسها بر اساس ارتباط با درجه آزادی کل اسمبل گردند. شکل ۴-۱۴ این ارتباط را نشان می‌دهد.

شماره گره ها در مختصات محلی(برای المان)

شماره گره ها در مختصات کلی(برای سازه) ( )



شکل ۴-۱۴ شماره گذاری گره ها در مختصات محلی و ارتباط با درجه آزادی کل برای المان های ۱ و ۴

برای تمام المانها ارتباط بین درجات آزادی محلی و کلی را بدست آورده و تک تک اعضاء سازه را بر روی ماتریس کلی سازه اسمبل می‌کنیم. به عنوان نمونه عضوهای ماتریس های سختی و بردار بار المانهای ۱ و ۴ در زیر نمایش داده شده اند.

۴-۲۱

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{محلی} \\
 & \text{کلی}
\end{array}
\begin{array}{c}
1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 9 \quad 10 \quad 7 \quad 8 \\
1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
1 & 1 \\
2 & 2 \\
3 & 3 \\
4 & 4 \\
9 & 5 \\
10 & 6 \\
7 & 7 \\
8 & 8
\end{array}
\begin{bmatrix}
k_{11} & . & . & . & . & . & . & k_{18} \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & k_{34} & k_{35} & . & . & . \\
. & . & . & k_{44} & k_{45} & . & . & . \\
k_{51} & k_{52} & . & k_{54} & k_{55} & . & . & . \\
k_{61} & k_{62} & . & k_{64} & k_{66} & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & k_{88}
\end{bmatrix}_{8\times 8}
\qquad
\text{بــردار بــار}
\begin{Bmatrix}
. \\ . \\ . \\ . \\ q_5 \\ q_6 \\ . \\ .
\end{Bmatrix}_{8\times 1}
$$

ماتریس سختی و بار المان شماره ۱

۲۲-۴

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{محلی} \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 9 \quad 10 \quad 7 \quad 8 \\
 & \text{کلی} \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \\
\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 4 \\ 9 & 5 \\ 10 & 6 \\ 7 & 7 \\ 8 & 8 \end{array}
& \begin{bmatrix}
k_{11} & . & . & . & . & . & . & k_{18} \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & k_{34} & k_{35} & . & . & . \\
. & . & . & k_{44} & k_{45} & . & . & . \\
k_{51} & k_{52} & . & k_{54} & k_{55} & . & . & . \\
k_{61} & k_{62} & . & k_{64} & k_{66} & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & k_{88}
\end{bmatrix}_{8\times 8}
\end{array}
\qquad
\text{بردار بار}
\begin{Bmatrix}
. \\ . \\ . \\ . \\ q_5 \\ q_6 \\ . \\ .
\end{Bmatrix}_{8\times 1}
$$

ماتریس سختی و بار المان شماره ۴

ماتریس سختی و بردار بار اسمبل شده کل با جمع مولفه‌های ماتریس سختی و بردار بار متناظر با شماره‌های کل المان‌های ۱ و ۴ بدست می‌آید.

۲۳-۴

$$
\begin{array}{c}
global \\
1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18
\end{array} \\
\begin{bmatrix}
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & k_{35} & k_{36} & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & k_{45} & k_{46} & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
k_{51} & k_{52} & . & . & . & . & . & . & . & k_{55}+a_{11} & k_{56}+a_{12} & . & . & . & a_{15} & a_{16} & . & . \\
k_{61} & k_{62} & . & . & . & . & . & . & . & k_{65}+a_{21} & k_{66}+a_{22} & . & . & . & a_{25} & a26 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & a_{51} & a_{52} & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & a_{61} & a_{62} & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{bmatrix}_{18\times 18}
\end{array}
\begin{Bmatrix}
. \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ q_5+b_1 \\ q_6+b_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ .
\end{Bmatrix}_{18\times 1}
$$

ماتریس سختی و بار کل سازه

اگر بارهای خارجی در گره‌ها وجود داشته باشند، ما دوباره آنها را به بردار بارکل سازه اضافه می‌کنیم.

در یک روش شماتیک ما معمولا با تعیین برداری ارتباط بین درجات آزادی متناظر با درجات آزادی کل را پیدا می‌کنیم. این بردار برای المانهای ۱ و ۴ بصورت زیر می باشد.

برای المان شماره ۱:

$$LJ(I)=[1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 9\quad 10\quad 7\quad 8]$$
$$I=[1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6\quad 7\quad 8]$$

برای المان شماره ۴:

$$LJ(I)=[9\quad 10\quad 11\quad 12\quad 15\quad 16]$$
$$I=[1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6]$$

بردارLJ آدرسی برای ماتریس سختی محلی است. ماتریس سختی کل ۱۸×۱۸ است در صورتی که ماتریس سختی محلی برای المان‌های ۴ گره‌ای ۸×۸ و برای المان‌های ۳ گره‌ای ۶×۶ است.

مثلاً برای المان شماره ۱:

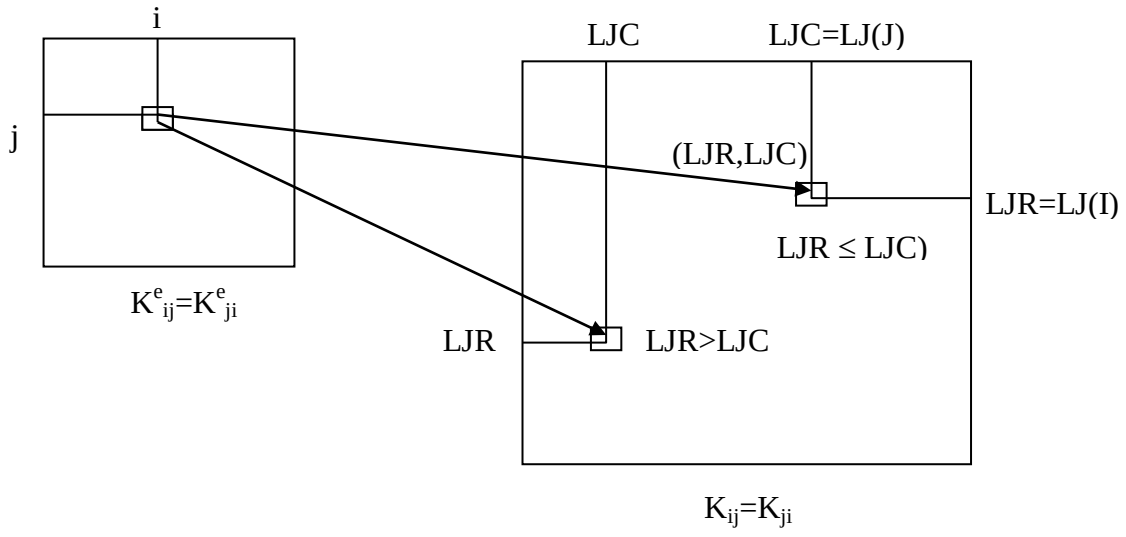
$$K^1(4,5)\rightarrow K(4,9)$$

یا مثلاً برای المان شماره ۴:

$$K^4(3,4)\rightarrow K(11,12)$$

$$K^e(I,J)\rightarrow \qquad LJR=LJ(I)=$$ سطر کل

$$LJC=LJ(J)=$$ ستون کل



۴-۱۵ شماتیک اسمبل کردن عضوهای المان روی ماتریس سختی کل سازه

و بدین ترتیب با اسمبل کردن تک تک المانها روی ماتریس سختی سازه می‌توانیم ماتریسهای سختی کل را بدست آوریم.

۴-۸-۲ شرایط مرزی

تا کنون ما شرایط مرزی را اصلا در نظر نگرفتیم. مسائل مکانیک جامدات تا زمانیکه شرایط مرزی برای آنها تعریف نشده باشند کامل بیان نشده‌اند. بدون اعمال شرایط مرزی المانها در سازه، ماتریس‌های سختی تکین یا منفرد[۱۴]هستند. بدین معنا که سازه تحت بار آزاد است و حرکت‌های صلب گونه نامحدود را تجربه می‌کند مگر آنکه تکیه‌گاه‌ها یا قیدهای کینماتیکی از حرکت جسم جلوگیری کنند و تعادل را تحت بارها ایجاد کنند. این قیود را شرایط مرزی می‌نامند.

از دیدگاه حساب واریاسیون دو نوع شرط مرزی پایه وجود دارد:

۱- هندسی (ضروری)[۱۵]

۲- طبیعی (نیرویی)[۱۶]

یکی از اصلی‌ترین مزیت‌های اجزا محدود این است که ما تنها باید شرایط مرزی هندسی را تعیین کنیم و شرایط مرزی طبیعی به طور ضمنی در روند حل مساله ارضا می‌گردند. شرایط مرزی مربوط به اثرات نیروها در مرزها، در بردار بار جا داده می‌شوند. همچنین در تحلیل به روش اجزا محدود برای تغییرمکان با دو نوع شرایط مرزی هندسی مواجه هستیم:

۱- همگن[۱۷]

۲- ناهمگن (نرمال و مورب)[۱۸]

شرایط مرزی هندسی همگن در جاهایی که کاملا در برابر حرکت مقید شده‌اند اتفاق می‌افتند (تغییرمکان= 0). برعکس ممکن است در بعضی نقاط مقادیر غیر صفر محدود برای تغییرمکان وجود داشته باشند که شرایط مرزی هندسی ناهمگن نامیده می‌شوند (مثل نشست تکیه‌گاهی). تفاوت بین شرایط مرزی هندسی نرمال و مورب ناشی از جایی روی شرط مرزی است که بعضی از مولفه‌های تغییر مکان مقید شده‌اند، اگر مولفه‌های مقید شده موازی مختصات کلی باشد شرط مرزی را نرمال گویند و در غیر این صورت مورب نامیده می‌شوند.

---

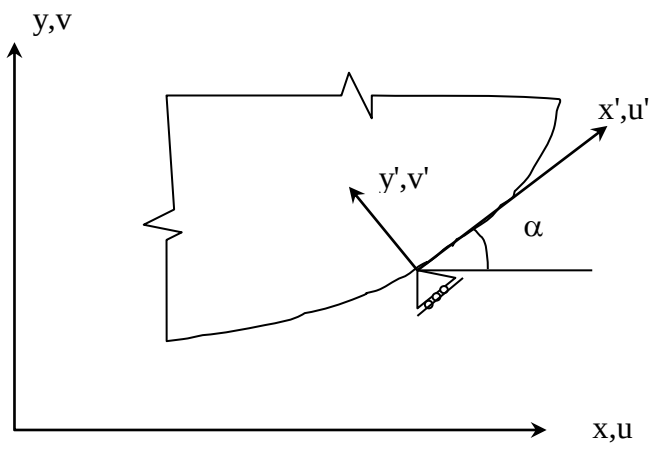
[۱۴] Singular

[۱۵] Geometric (Essential) Boundary Conditions

[۱۶] Natural (Force) Boundary Conditions

[۱۷] Homogeneous

[۱۸] Non-Homogeneous(Normal and Skewed)



شکل ۴-۱۶ شرایط مرزی مورب

۴-۸-۲-۱ اعمال شرایط مرزی همگن ضروری

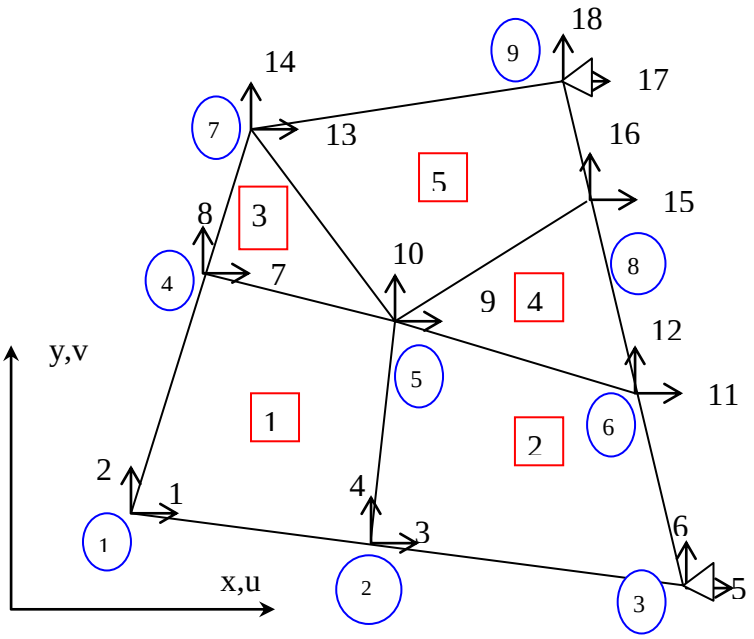
دو روش برای اعمال شرایط مرزی همگن ضروری وجود دارد.

۴-۸-۲-۱-۱ روش اول

تمام سطر و ستون‌های مربوط به درجه آزادی‌هایی که مقید شده‌اند را از ماتریس سختی حـذف مـی-کنیم. در این سازه درجات آزای ۵، ۶، ۱۷ و ۱۸ مقید می‌باشند.

$$
\begin{array}{c}
\textit{Total stiffness matrix} \quad \Leftrightarrow\Leftrightarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow\Leftrightarrow \\
\begin{array}{c|cccccccccccccccccc}
\textit{global} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\
\hline
1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
2 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
3 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & k_{35} & k_{36} & . & . & . & . & . & . & . \\
4 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & k_{45} & k_{46} & . & . & . & . & . & . & . \\
\Updownarrow 5 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
\Updownarrow 6 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
7 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
8 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
9 & k_{51} & k_{52} & . & . & . & . & . & . & . & k_{55}+a_{11} & k_{56}+a_{12} & . & . & . & a_{15} & a_{16} & . & . \\
10 & k_{61} & k_{62} & . & . & . & . & . & . & . & k_{65}+a_{21} & k_{66}+a_{22} & . & . & . & a_{25} & a_{26} & . & . \\
11 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
12 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
13 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
14 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
15 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & a_{51} & a_{52} & . & . & . & . & . & . & . \\
16 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & a_{61} & a_{62} & . & . & . & . & . & . & . \\
\Updownarrow 17 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
\Updownarrow 18 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\textit{Total load} \\
\begin{array}{c}
. \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ q_5+b_1 \\ q_6+b_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ .
\end{array}
\end{array}
$$

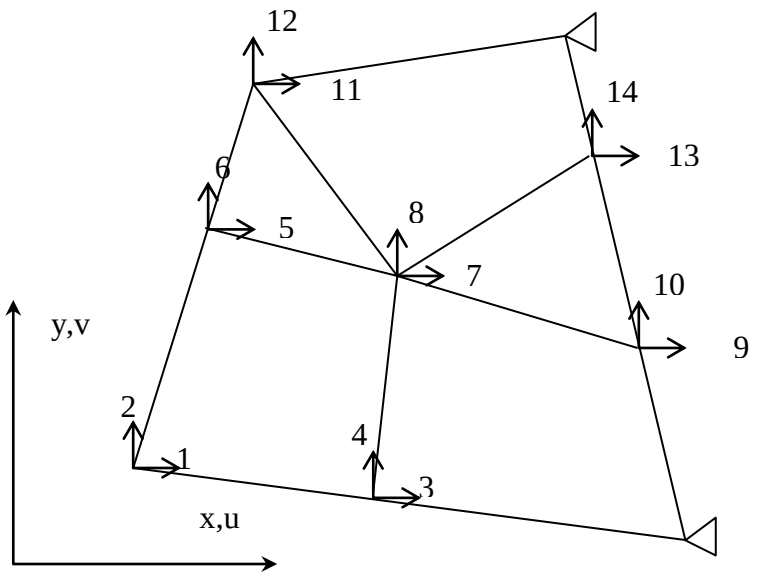
$$[\,]_{18\times 18} \qquad \{\,\}_{18\times 1}$$



شکل ۴-۱۷ روش اول برای اعمال شرایط مرزی همگن ضروری

۴-۸-۲-۱-۲ روش دوم

در روش دوم ما درجات مربوط به شرایط مرزی که تغییرمکان در آنها صفر است را اسم‌گذاری نمی-کنیم. سپس به هنگام اسمبل کردن هرجا که به آنها رسیدیم از آنها صرف نظر می‌کنیم. در یک سیستم کلاسیک آدرس بردار LJ متناظر با درجات آزادی گیردار را صفر قرار می‌دهیم و هر زمان LJR و یا LJC برابر صفر گردد، عضو ماتریس سختی یا بار آن المان اسمبل نمی‌شود و عملیات اسمبلینگ برای عضوهای دیگر ماتریس سختی یا بار ادامه می‌یابد.



شکل ۴-۱۸ روش دوم برای اعمال شرایط مرزی همگن ضروری

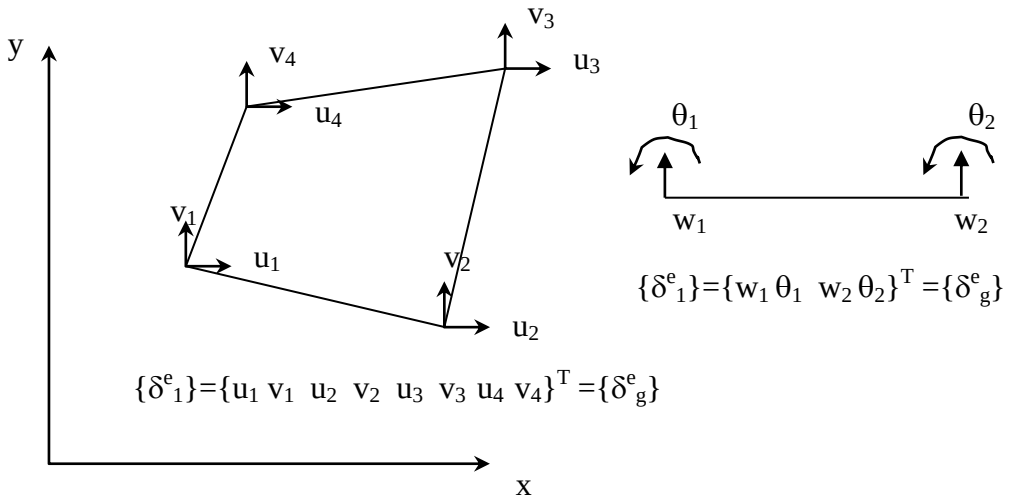
۴-۸-۲-۲ اعمال شرایط مرزی ناهمگن (نرمال و مورب)

قبل از توضیح در خصوص اعمال شرایط مرزی ناهمگن لازم است تا در خصوص دستگاه مختصات محلی و دستگاه مختصات کلی توضیح بیشتری دهیم.

۴-۸-۲-۲-۱ تبدیل دستگاه مختصات محلی به دستگاه مختصات کلی

درجات آزادی المان که از آن به درجات آزادی محلی نام برده می‌شود ممکن است با درجات آزادی سازه که از آن به درجات آزادی کلی نام برده می‌شود متفاوت باشد. سیستم دستگاه مختصات محلی برای هر یک از المانها ممکن است از یک المان به المان دیگر فرق کند. این امر باعث می‌گردد تا درجات آزادی تعریف شده در محل مشترک گره‌های المانها با یکدیگرهم‌راستا نبا شند. برای برابر قرار دادن درجات آزادی المانها در هنگام اسمبل کردن باید درجات آزادی المانها را در محل گره‌های مشترک هم‌راستا درجه آزادی کلی سازه در همان گره گردد.

در بعضی از مواقع درجات آزادی المان در راستای درجه آزادی کلی سازه می‌باشد و در این مواقع برای اسمبل کردن می‌توان براحتی این کار را انجام داد و نیازی به همراستا کردن درجات آزادی قبل از اسمبل کردن ندارند.



شکل ۴-۱۹ درجات آزادی المان در راستای درجه آزادی کلی سازه

برای برخی مسائل بهتر است که تحلیل یک المان تنها در یک دستگاه مختصات محلی بررسی شود که با سیستم مختصات کلی جسم متفاوت است. در این موارد قبل از ساختن معادلات برای اسمبل کردن، ما باید سختی المان و بارها را برای رسیدن به مختصات مرجع یا همان سیستم مختصات کلی تبـدیل کنیم.

اگر l نشان دهنده مختصات محلی (local) و g نمایشگر مختصـات کلـی (global)باشـد. ارتبـاط بـین تغیرمکان‌های المان در گره در مختصات محلی و کلی برای یک المان به صورت زیر است:

$$\{u_l\} = [t]\{u_g\}$$ ۲۴-۴

ما ممکن است تبدیل را برای تغییرمکان‌های گره‌ای المان شامل دو گره انجام دهیم:

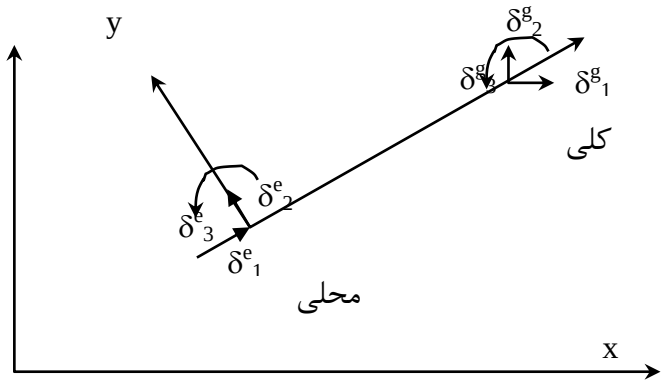
$$\{\delta^e{}_l\} = [T\ ]\{\delta_g\}$$ ۲۵-۴

ویا در حالت کلی:

$$[T]=\begin{bmatrix} [t] & [0] & [0] & . & [0] \\ [0] & [t] & [0] & . & [0] \\ [0] & [0] & [t] & . & [0] \\ . & . & . & [t] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [t] \end{bmatrix} \qquad ۴-۲۶$$

تعداد [t]ها در ماتریس [T] برابر تعداد گره‌های المان است.

شکل ۴-۲۰ یک المان تیر-ستون را برای حالتی که درجات آزادی محلی و کلی با هم فرق دارند نمایش می‌دهد.



شکل ۴-۲۰ درجات آزادی محلی المان و مقایسه با درجه آزادی کلی سازه

ارتباط بین درجات آزادی محلی و کلی را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\delta^e{}_1 = \delta^g{}_1 \cos\theta + \delta^g{}_2 \sin\theta$$
$$\delta^e{}_2 = -\delta^g{}_1 \sin\theta + \delta^g{}_2 \cos\theta$$
$$\delta^e{}_3 = \delta^g{}_3$$

$$[t]=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [T]=\begin{bmatrix} [t] & [0] \\ [0] & [t] \end{bmatrix}$$

بر این اساس روابط انرژی داریم:

$$U^e = \frac{1}{2}\{\delta^e{}_l\}^T[K^e{}_l]\{\delta^e{}_l\} = \frac{1}{2}\{\delta^e{}_g\}^T[T]^T[K^e{}_l][T]\{\delta^e{}_g\}$$
$$W^e = \{F^e{}_l\}^T\{\delta^e{}_l\} = \{F^e{}_l\}^T[T]\{\delta^e{}_g\}$$
$$[K^e{}_g] = [T]^T[K^e{}_l][T]$$
$$\{F^e{}_g\} = \{F^e{}_l\}^T[T]$$
$$\pi_T = \sum_{n=1}^{nele} \left\{\frac{1}{2}\{\delta^e{}_g\}^T[K^e{}_g]\{\delta^e{}_g\} - \{F^e{}_g\}^T\{\delta^e{}_g\}\right\}$$

لذا قبل از اسمبل کردن بر اساس روابط بالا باید تبدیل زیر را برای ماتریس سختی و بار المان داشته باشیم:

$$[T] = \begin{bmatrix} [t] & [0] \\ [0] & [t] \end{bmatrix} \qquad ۲۷-۴$$
$$[T]^{-1} = [T]^T$$
$$[K^e{}_g] = [T]^T[K^e{}_l][T]$$
$$\{F^e{}_g\} = \{F^e{}_l\}^T[T]$$

توجه شود که ماتریس [T] یک ماتریس متعامد است که در آن معکوس ماتریس برابر ترانهاده ماتریس است. بعد از تبدیل ماتریس سختی و بار می توان شروع به اسمبل کردن نمود.

توجه شود ماتریس سختی و بردار بار با درنظر گرفتن سیستم مختصات محلی بدست آمدند و سپس به سیستم مختصات کلی تبدیل شدند. ممکن است پس از حل، دوباره تغییرمکان‌ها یا تنش‌ها را در سیستم مختصات محلی بخواهیم که این کار با ماتریس تبدیل به راحتی صورت می‌گیرد.

۴-۸-۲-۲-۲ اصلاح معادلات تعادل برای شرایط مرزی مورب

وقتی با شرایط مرزی مورب مواجه می‌شویم نیاز داریم تا آنها را به قیود نرمال تبدیل کنیم، این شبیه همان کاری است که برای تبدیل از مختصات محلی به کلی انجام دادیم.

می‌توانیم تبدیل را برای تغییرمکان در گره iام را به صورت زیر بنویسیم:

$$\{r_i\} = [s_i]\{r'_i\}$$

$[s_i]$ یک تبدیل نقطه ساده است که شامل جهت کسینوس‌ها است که سیستم کلی و مورب را بـه هـم مربوط می‌کند(مثل [t]).

اکنون تبدیل را برای بردار تمام تغییرمکان‌های گره‌ای المان در محل مرز به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\{r\} = [S]\{r^{'}\}$$

$$[S] = \begin{bmatrix} [I] & [0] & [0] & . & [0] \\ [0] & [I] & [0] & . & [0] \\ [0] & [0] & [I] & . & [0] \\ . & . & . & [s_i] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [I] \end{bmatrix}$$

[I] ماتریس یکه هم مرتبه با $[S_i]$ است و تعداد ماتریس‌های [I] بر روی قطر ماتریس [S] برابر است بـا تعداد گره‌ها و محل $[S_i]$ همان محل گره المـان در مـاتریس [S] میباشـد. مرتبـه $[S_i]$ معـادل تعـداد تغییرمکان‌ها یا همان درجات آزادی در هر گره است.

نتایج تبدیل برای ماتریس سختی و بردار بار در این حالت نیز به صورت زیر است:

$$[K^{'}] = [S]^T[K][S]$$
$$\{R^{'}\} = [S]^T\{R\}$$

این پروسه برای تبدیل مرزهای مورب به مرزهای نرمال که در بـالا آورده شـد قبـل از اسـمبل کـردن ماتریس سختی و بردار بار المان انجام می‌شود. در این مورد معادله بالا برای ماتریس سختی و بردار بار المان اعمال می‌شود که از مرتبه n است تا نسبت به ماتریس سختی کل و بردار بـار کـه [s] مرتبـه N دارد.

اکنون همه شرایط مرزی نرمال شده‌اند یا تبدیل به یک سیستم مورب شده‌اند که به صورت نرمال رفتار می‌کنند. ممکن است بخواهیم نتایج تغییرمکان‌ها را در دستگاه کلی بیان کنیم که می‌توانیم توسط ماتریس تبدیل این کار را صورت دهیم.

۴-۸-۲-۳ شرایط مرزی هندسی معلوم

در شرایطی که مرز هندسی معلوم داریم باید ابتدا به تفکیک این مرز از مرز آزاد بپردازیم. معادله تعادل کلی تفکیک شده به صورت زیرا خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{12}]^T & [K_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{r_1\} \\ \{r_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{R_1\} \\ \{R_2\} \end{Bmatrix}$$

$\{r_1\}$ بردار تغییرمکان‌های مقید نشده یا آزاد است و $\{r_2\}$ بردار تغییرمکان‌های معلوم.

$$[K_{11}]\{r_1\} = \{R_1\} - [K_{12}]\{r_2\}$$

$[K_{11}]$ ماتریسی غیر منفرد است. عکس‌العمل‌ها در تغییرمکان‌های مقید شده می‌توانند به صورت زیر محاسبه شوند:

$$\{R_2\} = [K_{12}]^T\{r_1\} + [K_{22}]\{r_2\}$$

وقتی که شرایط مرزی همگن هستند $\{r_2\}$ بی معنی است و روند حل به طور قابل ملاحظه‌ای ساده می‌گردد.

یک راه سودمند دیگر برای تشکیل معادلات تعادل اصلاح شده آرایش معادلات به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} [K_{11}] & [0] \\ [o] & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{r_1\} \\ \{r_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{R_1\} - [K_{12}]\{r_2\} \\ \{r_2\} \end{Bmatrix}$$

در فرم بالا تغییر مرتبه در معادلات انجام نمی‌شود. قرار دادن زیر بردار $\{R_1\} - [K_{12}]\{r_2\}$ در سطر اول ماتریس نیروها برای اعمال شرایط مرزی ناهمگن است. پس سطر و ستونی از [K] که با این شرایط مطابقت دارند بی اثر هستند به جز عضو قطری که در آنجا مقدار واحد قرار می‌دهیم. بالاخره مقادیر معین تغییرمکان در بردار بار قرار داده می‌شوند.

برای یک تغییرمکان معلوم r_jکه در درجه آزادی jام اتفاق افتاده است، روند بالا به صورت زیر خلاصه می‌گردد:

$$R_i = R_i - K_{ij} r_j \quad for\ i = 1,2,3,...,N \ \ if\ \ r_j \neq 0$$
$$K_{jm} = K_{mj} = 0 \qquad for\ m = 1,2,3,...,N$$
$$K_{jj} = 1$$
$$R_j = r_j$$

این عملکرد به ما اطمینان می‌دهد که معادلات تعادل متقارن باقی می‌مانند.

۴-۸-۳ منطبق کردن تکیه گاه های الاستیک در ماتریس سختی کل

تکیه‌گاه‌های الاستیک (فنرها) می‌توانند به آسانی با روش اجزا محدود تطبیق یابند. اینها یک نوع متفاوت از شرایط مرزی را معرفی نمی‌کنند. تغییرشکل نسبی این تکیه‌گاه‌ها شامل جسم یا سازه گسسته شده در اجزا محدود است. شرایط مرزی هندسی معمول سپس در نقطه‌ا ی که تکیه‌گاه‌های الاستیک مستقر شده‌اند اعمال می‌شوند. در عمل ما یک معادله جدید را برای این نقاط اضافه نمی-کنیم و بلکه صرفاً روی قطر اصلی ماتریس سختی به وسیله اضافه کردن سختی تکیه‌گاه به آن اصلاح می‌شود.

۴-۹ حل مسائل در حالت کل

گام‌هایی که تاکنون برای حل یک مساله دنبال کردیم به صورت زیر بیان می‌شوند:

۱- بکاربردن قضیه انرژی پتانسیل کل برای هر المان

۲- بدست آوردن میدان جابجایی و محاسبه $\pi_e = U_e - W_e$

۳- کنار هم قرار دادن المان‌ها و تقریب زدن انرژی پتانسیل کل سازه (این کار معادل ارضا کردن تعادل و سازگاری در گره‌ها است)

۴- مینیمم کردن تابع انرژی پتانسیل کل برای دستیابی به جواب تقریبی برای مساله

۵- اعمال کردن شرایط مرزی (ما تنها به دنبال ارضای شرایط مرزی ضروری هستیم یعنی تغییرمکان‌ها و شیب‌ها و ... به دنبال ارضای شرایط مرزی نیرویی نیستیم)

اکنون ما باید معادلات را بر حسب مجهولات تغییرمکان حل کنیم. بعد از محاسبه تغییرمکان‌ها ما قادر خواهیم بود تا تنش‌ها و کرنش‌های موجود المان را نیز برای کامل شدن تحلیل حساب کنیم. مهم است بدانیم که تنش‌های المان شرایط تعادل را برای یک المان تنها ارضا نمی‌کنند.

در کاربرد اصل مینیمم کردن انرژی پتانسیل کل ما تعادل را در سرتاسر جسم تقریب می‌زنیم و در داخل هر المان تعادل ارضا نمی‌گردد. اگرچه هنگامی که تقریب ما از انرژی پتانسیل کل و برای جواب تغییرمکان‌ها با اصلاح کردن المان‌ها یا با کوچک کردن مش همراه است تا تقریب بهتری از مولفه‌های تنش حاصل گردد.

به علت اینکه ما با روش‌های تقریبی درگیر هستیم، منطقی است که از مقدار میانگین تنش‌ها یا کرنش‌ها در مرکز المان استفاده کنیم.

۴-۱۰ ذخیره کردن ماتریس سختی کل

دو روش عرض باند و روش خط آسمان برای ذخیره کردن ماتریس سختی کل وجود دارد.

۴-۱۰-۱ روش عرض باند[۱۹]

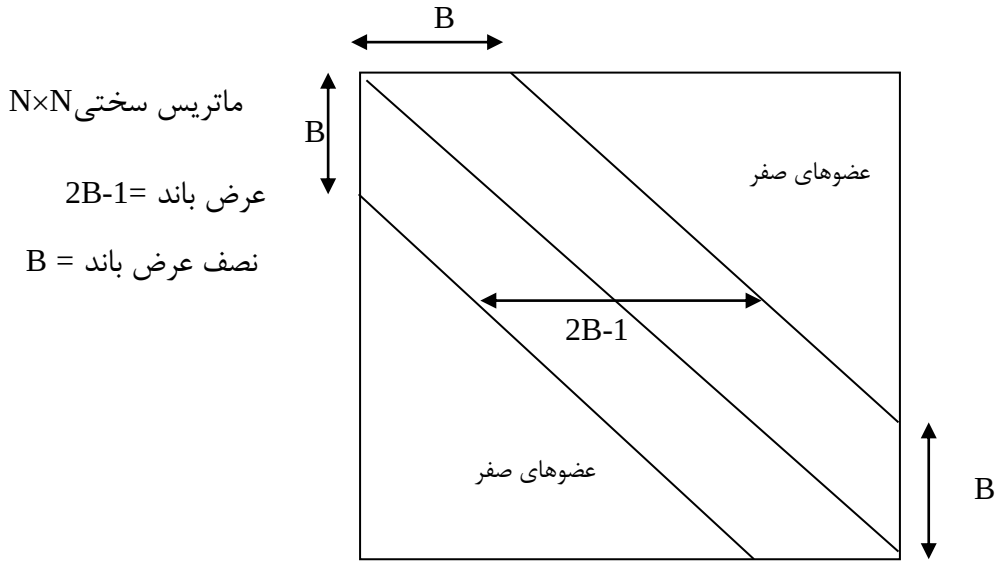
با توجه به اینکه ماتریس سختی کل یک ماتریس متقارن است ومعمولا اعضای غیر صفر آن به شکل باریک و نزدیک به قطر اصلی پراکنده شده‌اند، می‌توان تنها اعضای غیر صفر را در یک بردار ذخیره کرد.

برای ماتریس سختی با ابعاد N×N برای صرفه‌جویی، به جای ذخیره کردن کل اعضای ماتریس تنها بخشی از آن N×B (قسمت بالایی) ذخیره می‌شود.

در این صورت (شکل ۴-۲۱)، عرض باند برابر 2B-1 و نصف عرض باند برابر B می‌باشد.

---

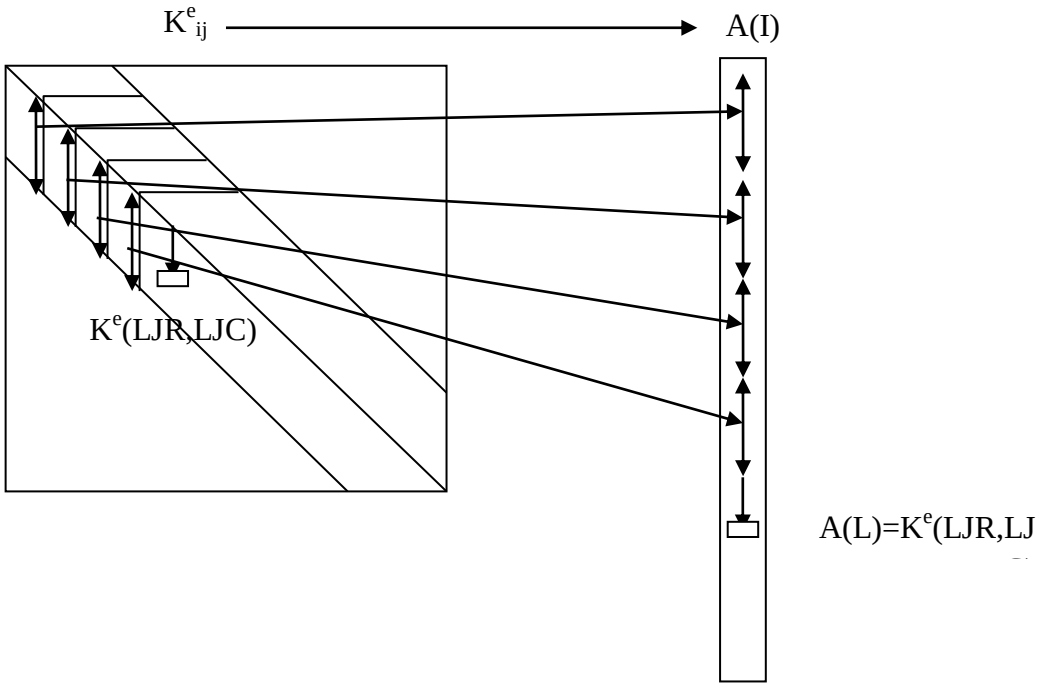
[۱۹] Bandwidth



شکل ۴-۲۱ روش عرض باند برای ذخیره کردن ماتریس سختی

اگر D را بیشترین اختلاف بین شماره‌های مربوط به درجات آزادی در بین تمام المان‌ها در هنگام اسمبل کردن بدانیم آنگاه$B=(D+1)$. از اینجا نتیجه می‌شود که در هنگام شماره‌گذاری درجات آزادی باید دقت شود که اختلاف بین بزرگترین و کوچکترین درجه آزادی مربوط به یک المان تا حد ممکن کم باشد تا اعضای غیر صفر از قطر اصلی ماتریس خیلی دور نشوند. برای این منظور باید شماره درجات آزادی المان‌های مجاور هم تا حد امکان با هم اختلاف کمی داشته باشند.

تمام مولفه‌های ماتریس سختی یک عضو $K^e(LJR,LJC)$ به روی بردار $A(L)$ می نشیند و این عمل برای تمام المانها تکرار می‌شود

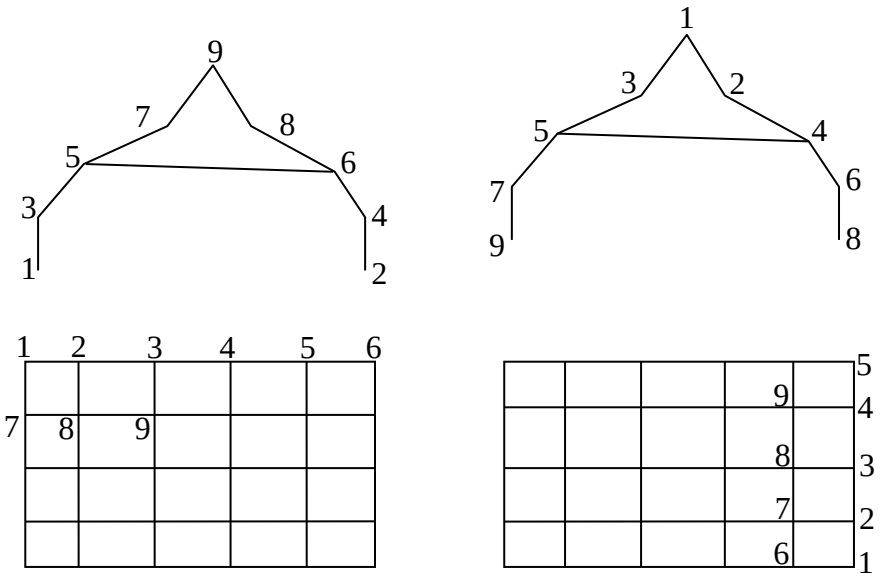


For LJR≥LJC $\quad A(L)=A(L)+K^e(I,J)$ where $L=B*(LJC-1)+(LJR-LJC)+1$

For LJR<LJC $\quad A(L)=A(L)+K^e(I,J)$ where $L=B*(LJR-1)+(LJC-LJR)+1$

شکل ۴-۲۲ روش عرض باند برای ذخیره کردن ماتریس سختی در یک بردار

تمرین: آیا B برای دو شماره‌گذاری زیر فرق می‌کند؟

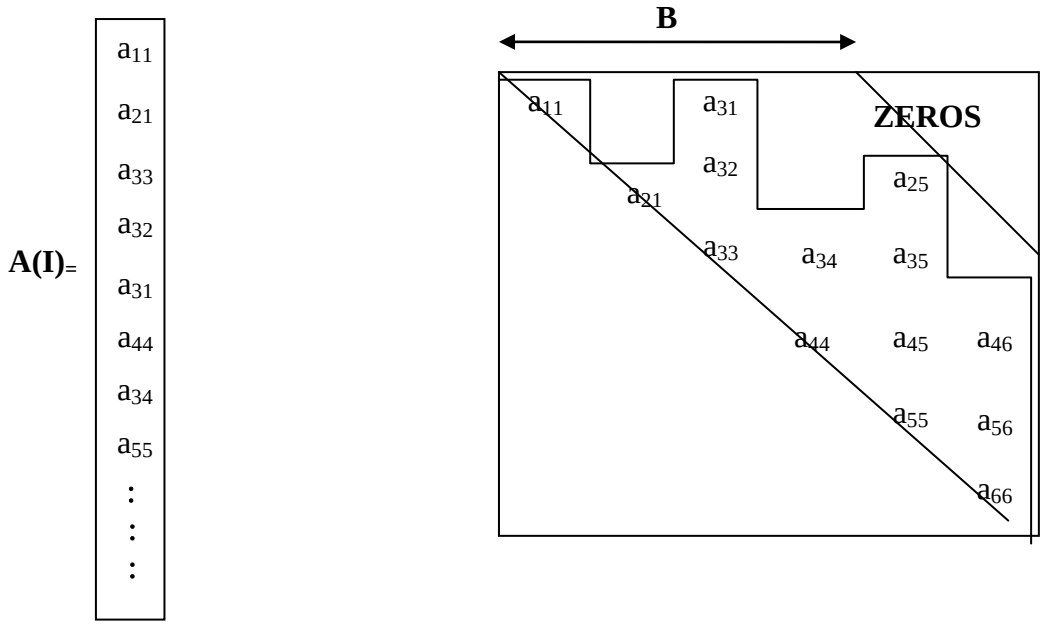


شکل ۴-۲۳ شماره گذاری متفاوت در یک مش

۴-۱۰-۲ روش خط آسمان[۲۰]

روش عرض‌باند روش موثری برای ذخیره سازی ماتریس سختی نمی باشد. برای سیستم معادلات به شدت بزرگ این روش ذخیره‌سازی نیز ممکن است کفایت نکند. چون B تابعی از D است که بیشترین اختلاف شماره را در بین تمام المان‌ها در اسمبل کردن دارد. به عبارت دیگر چون B مقدار ماکزیمم اختلاف درجات آزادی در بین تمام المانها می‌باشد، شماره گذاری بد حتی در یک المان منجر به افزایش B برای کل ماتریس میگردد.

روش خط آسمان این امکان را می دهد که در هر درجه آزادی ماکزیمم اختلاف درجه آزادی در همان درجه آزادی را بیابیم و در بردار ماتریس سختی کل، تنها ستون مربوطه را ذخیره نمائیم. بدین‌ترتیب در هر درجه آزادی(عضو قطری ماتریس سختی) تنها یک عدد که بیانگر ارتفاع ستون مربوط می‌باشد را لازم داریم.



شکل ۴-۲۴ روش خط آسمان برای ذخیره کردن ماتریس سختی

تمرین: الگوریتمی را برای بدست آوردن محل هر عضو بوسیله روش Skyline بنویسید

---

[۲۰] Skyline Method

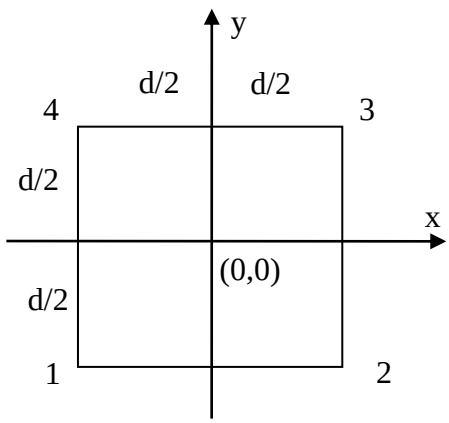
مساله نمونه:

۱- با فرض یک درجه آزادی در هر گره برای المان مربعی نشان داده شده در شکل زیر و با استفاده از تابع تغییر شکل زیر:

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$$

الف) ماتریس $[T]^{-1}$ را محاسبه کنید.

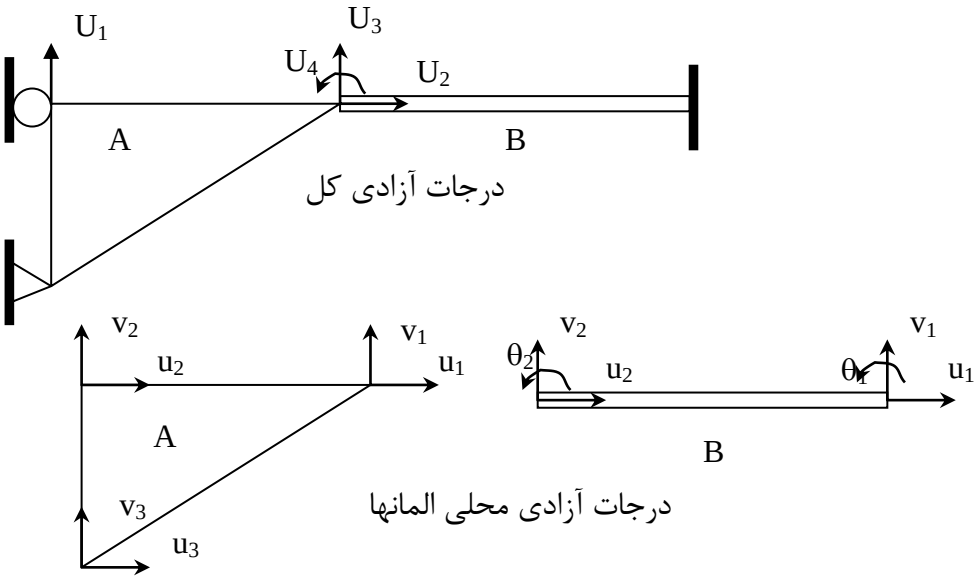
ب) ماتریس [N] را محاسبه نمائید بنحوی که $u(x,y) = [N]\{\delta^e\}$ و $\{\delta^e\}$ بردار درجه آزادی المان می‌باشد.



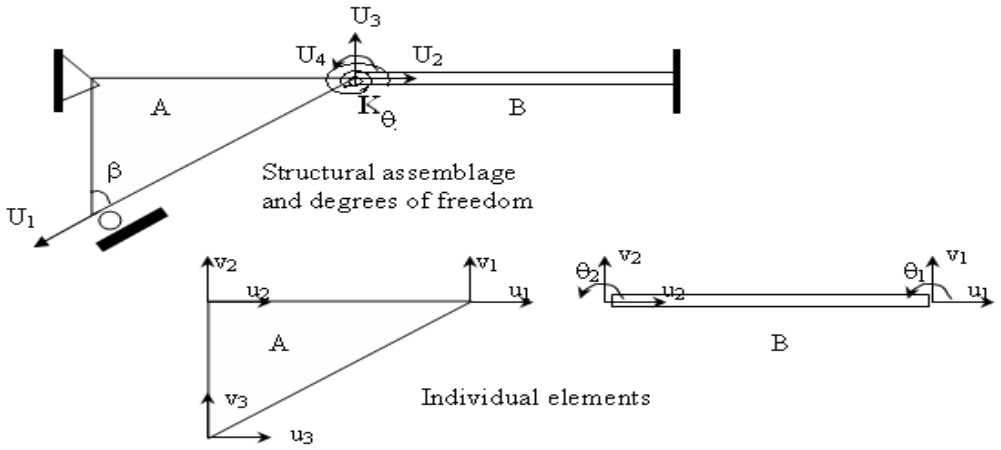
۲- فرض کنید ماتریس سختی المانهای A و B بر اساس درجات آزادی نشان داده شده برای هر المان محاسبه شده‌اند. این المانها را در ماتریس سختی کل سازه بر اساس درجات آزادی و شرایط مرزی نشان داده شده در دو حالت الف و ب اسمبل نمائید.

$$[K_A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \qquad [K_B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} & b_{46} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} & b_{56} \\ b_{61} & b_{62} & b_{63} & b_{64} & b_{65} & b_{66} \end{bmatrix}$$

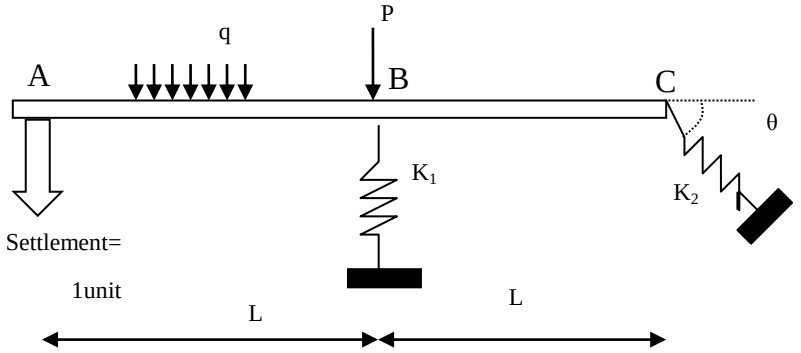
حالت الف)



حالت ب)



۳- توضیح دهید در روش اجزاء محدود چگونه شرایط مرزی در نقاط A ، B و C رابرای تیر-ستون نشان داده شده در شکل برآورده می کنید. نقاط B و C دارای فنر و نقطه A نشست تکیه گاهی واحد را تجربه می‌کند.



.